Анисимов, Г.С. Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений / Г.С. Анисимов, Л.В. Степанова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.03 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 39–56.

Perm Polytech Style: Anisimov G.S., Stepanova L.V. Experimental determination of crack-tip fields: holographic interferometry method and digital image correlation method. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 3, pp. 39-56. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.03
УДК 639.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ: МЕТОД ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ И МЕТОД КОРРЕЛЯЦИИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Г.С. Анисимов, Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 07 сентября 2023 г.
Одобрена: 15 мая 2024 г.
Принята к публикации: 30 июня 2024 г.

Ключевые слова:

метод голографической интерферометрии, закон Фавра, метод корреляции цифровых изображений, многопараметрическое асимптотическое разложение М. Уильямса, переопределенный метод, цифровая обработка изображений.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются вопросы реконструкции поля напряжений у вершин системы горизонтальных и наклонных трещин в линейно упругой среде с помощью результатов экспериментальных исследований, проведенных интерференционно-оптическими методами: методом голографической интерферометрии и методом корреляции цифровых изображений. Эксперимент нацелен на построение многокомпонентного асимптотического разложения М. Уильямса с удержанием регулярных (неособых) слагаемых ряда для пластин, ослабленных двумя взаимодействующими трещинами. Для восстановления коэффициентов ряда М. Уильямса были использованы картины абсолютной разности хода (изодромы), позволяющие с помощью закона Фавра определить главные напряжения в окрестности вершины трещины. С помощью метода корреляции цифровых изображений для ряда конфигураций образцов с трещинами определены поля деформаций. Экспериментальная информация, полученная двумя интерференционно-оптическими методами, использована для вычисления коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса. Предложена новая вариация переопределенного метода, ориентированная на линеаризованный закон Фавра, и позволяющая отыскать посредством итерационной процедуры коэффициенты асимптотического ряда М. Уильямса (обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений), опираясь на результаты поляризационно-оптических измерений. Для верификации результатов обработки всей совокупности экспериментальных данных дополнительно проведен вычислительный эксперимент с помощью метода конечных элементов, что позволило вычислить обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений, опираясь на поля напряжений, найденные методом конечных элементов. Предложена модификация переопределенного метода, основанная на применении исключительно полей напряжений, ассоциированных с вершиной трещины, определяемых из конечно-элементного решения. Показано, что коэффициенты ряда М. Уильямса, определенные с помощью натурного и вычислительного эксперимента, хорошо согласуются между собой.

© **Анисимов Геннадий Сергеевич** – асп. кафедры математического моделирования в механике, e-mail: Stepanova.lv@ssau.ru, ID: 0000-0003-2774-7158.
Степанова Лариса Валентиновна – д. ф.-м. н., проф., зав. кафедрой математического моделирования в механике, e-mail: Stepanova.lv@ssau.ru, ID: 0000-0002-6693-3132.

Gennadij S. Anisimov – postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, e-mail: Stepanova.lv@ssau.ru, ID: 0000-0003-2774-7158.
Larisa V. Stepanova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, e-mail: StepanovaLV2015@yandex.ru m, ID: 0000-0002-6693-3132.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF CRACK-TIP FIELDS: HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY METHOD AND DIGITAL IMAGE CORRELATION METHOD

G.S. Anisimov, L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 07 September 2023
Approved: 15 May 2024
Accepted for publication:
30 June 2024

Keywords:

holographic interferometry method, Favre's law, digital image correlation method, M. Williams multiparametric asymptotic decomposition, redefined method, digital image processing.

ABSTRACT

The problems of reconstruction of the stress field at the crack tips of a system of horizontal and inclined cracks in a linear isotropic elastic medium using the results of experimental studies conducted by interference-optical methods: the method of holographic interferometry and the digital image correlation are considered. The experiments are aimed at constructing a multi-component asymptotic expansion of M. Williams with the retention of regular (nonsingular) series terms for plates weakened by two interacting cracks. To restore the coefficients of the M. Williams series the interference patterns of the absolute retardation fringes (isodromes) are used. Favre's law allows us to determine the main stresses in the vicinity of the crack tip. The strain and displacement fields were determined using the digital image correlation method for a number of cracked specimens. The experimental data obtained by two interference-optical methods was used to calculate the coefficients of the multi-point asymptotic expansion of M. Williams. A new variation of the over-deterministic method is proposed, focused on the linearized Favre's law, and allowing us to find the coefficients of the asymptotic series of M. Williams (generalized stress intensity coefficients) by means of an iterative procedure, based on the results of polarization-optical measurements. To verify the results of processing all the experimental data, a computational experiment was additionally carried out using the finite element method, which made it possible to calculate generalized stress intensity factors based on the stress fields found by the finite element method. A modification of the over-deterministic method based solely on the application of stress fields associated with the crack tip is proposed. It is shown that the generalized coefficients of the M. Williams series, determined using a full-field and computational experiment, are in good agreement.

Введение. Экспериментальная идентификация обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений (коэффициентов разложения М. Уильямса)

Оценка структурной целостности, прочности, ресурса и живучести элементов конструкций инженерных сооружений является важной частью философии возможного использования конструкций с дефектами, размеры которых не превышают своих критических значений [1–4]. Коэффициенты интенсивности напряжений, используемые для характеристики интенсивности сингулярного упругого поля и полей напряжений вблизи вершины трещины, поддаются аналитическому вычислению для достаточно простых геометрий при определенных системах нагружения [5; 6]. В силу указанной причины для оценки коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений применяют экспериментальные подходы и вычислительные технологии [7–18]. Несмотря на то, что определение коэффициентов интенсивности напряжений, характеризующего поля, ассоциированные с вершиной трещины в линейно упругом теле, представляет собой самостоятельную задачу [7–10], в настоящее время, выстроилось уверенное понимание необходимости сохранения регулярных слагаемых в многокомпонентном разложении М. Уильямса с коэффициентами, получившими название обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений [11–18]. Нахождение обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений с помощью теоретических подходов возможно и, как правило, опирается на решения теории функций комплексного переменного [5; 6]. Идентификация коэффициентов интенсивности напряжений, Т-напряжений и коэффициентов неособых (регулярных) слагаемых ряда М. Уильямса (обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений) по экспериментальным данным обеспечивает надежную основу для описания стационарного состояния и распространения трещин [4–11]. Хотя коэффициенты интенсивности напряжений являются наиболее важными параметрами механики разрушения, многие исследования показали [12–18], что члены разложения Уильямса более высокого порядка также могут вносить значительный вклад в поля напряжений и деформаций вблизи вершины трещины. В последние десятилетия развитие оптических методов измерения напряжений, деформаций или смещений позволило решить проблемы реконструкции многокомпонентного ряда Уильямса, описывающего поля у вершины трещины, и прояснить некоторые нерешенные или по крайней мере неясные вопросы [14; 19–23]. Следует подчеркнуть, что для экспериментального определения полей, ассоциированных с вершиной надреза или трещины, традиционно используются интерференционно-оптические методы, которые позволили получить фундаментальные результаты в механике хрупкого разрушения [21–26]. Метод фотоупругости, трансформировавшийся в последние десятилетия в метод цифровой фотоупругости, долгое время применялся и применяется в настоящее время [27; 28] для экспериментального вычисления коэффициентов интенсивно-

сти напряжений и Т-напряжений, а также коэффициентов при регулярных слагаемых ряда М, Уильямса [21–26]. Однако в самое последнее время фокус внимания исследователей смещается в сторону реконструкции интерференционных картин с помощью численных методов и подходов искусственного интеллекта. Например, в [27] отмечается, что численный анализ сложных задач неизменно требует использования исходных данных из экспериментальных методов, таких как фотоупругость, для проверки граничных условий, а также численного моделирования. Авторы подчеркивают, что в нашу эпоху, когда инженерное сообщество придерживается культуры открытого исходного кода для решения численных задач, важным представляется возможность построения фотоупругих контуров по результатам конечно-элементного анализа. В [27] предлагается методика построения картин изохроматических полос, отточенная на эталонной задаче о диске при диаметральном сжатии. Результаты восстановленной интерференционной картины сопоставлены с лабораторными экспериментальными результатами и далее развитая методология применена к пластине с краевой трещиной. В целом школа К. Рамеша в области фотоупругого анализа достигла убедительных успехов, пройдя путь от теоретических работ до внедрения своих достижений в практической области. В апреле 2023 г. Индийский технологический институт Мадраса с помощью отраслевого партнера внедрил в коммерческую эксплуатацию четыре самых современных пакета программного обеспечения в области фотоупругого анализа и моделирования. Программное обеспечение может найти и находит применение в самых разных областях: от сельского хозяйства до движения биологических микроорганизмов, выявление зон концентрации напряжений или выявления дефектов в 3D-электронике. Новые сферы применения фотоупругости включают такие области, как биомедицинский и традиционный анализ напряжений, включающий сложные нагрузки и граничные условия, а также аэрокосмическую, авиационную, автомобильную и обрабатывающую отрасли промышленности. К. Рамеш отмечает [21; 22; 26–28], что анализ фотоупругих напряжений претерпел кардинальные изменения с появлением цифровых компьютеров и технологий обработки изображений. До сих пор не существовало комплексной программной платформы для внедрения подобных разработок в исследовательских лабораториях и отраслях промышленности, использующих этот метод. Авторы разработали первое комплексное программное обеспечение для экспериментального анализа фотоупругих напряжений. Врачи, агрономы и биологи в настоящее время все чаще обращаются к использованию фотоупругости для решения своих предметных задач. Они могут достоверно обрабатывать записанные изображения с помощью программного обеспечения для получения важных выводов из своих исследований.

В [29] предлагается эволюционное развитие метода фотоупругости для измерения напряжений, основанного на применении кольцевых фотоупругих датчиков, а также регистрации картины напряжений с помощью цифровой камеры и ее распознавания с помощью искусственных нейронных сетей. Представлен анализ современного применения метода фотоупругости для решения различных задач в рамках теории прочности. Рассмотрен принцип работы фотоупругих датчиков, основанный на эффекте фотоупругости. Представлены оптические схемы в кольцевом фотоупругом датчике для различных значений компонент напряжения. В результате лабораторного эксперимента был собран набор данных из 1500 изохроматических изображений. В качестве алгоритма машинного обучения был применен подвид нейронной сети, а именно сверточная нейронная сеть. Были использованы различные комбинации моделей и оптимизаторов. Предложено применение скважинных датчиков для непрерывного мониторинга изменений напряженного состояния массива горных пород и интеграция этих данных в цифровую модель месторождения.

В [30] авторы отмечают, что фотоупругость широко используется для анализа изменений свойств объектов, в том числе и объектов с микроразмерами, под действием сложных систем сил. При прогнозирующем обслуживании, основанном на машинном обучении, прогнозирование отказов оборудования осуществляется с использованием данных датчиков и системных сигналов. Однако о прогнозируемом обслуживании с использованием фотоупругости и машинного обучения пока не сообщается из-за трудностей с получением фотоупругих изображений с течением времени. Прогнозирование будущего фотоупругого изображения с использованием фотоупругих изображений может облегчить выявление неисправностей оборудования в ближайшем будущем, чтобы можно было своевременно принять превентивные меры для механических или структурных компонентов. Такое прогнозирование представляет собой пространственно-временную проблему, которая требует значительных повторяющихся данных для временных соотношений и обработки пространственной информации на основе изображений. В [30] впервые сгенерированы наборы данных синтетических фотоупругих изображений с временной обработкой. Было исследовано несколько комбинаций моделей глубокого обучения, включая автокодирование, рекуррентную нейронную сеть и сверточную нейронную сеть. Наконец, в [30] предлагается новая многоступенчатая модель сверточного автокодирования для прогнозирования сбоев оборудования. Эффективность предложенной модели с точки зрения потерь и точности была проверена с помощью численных тестов. Результаты показали, что предложенная модель является эффективной основой для прогнозирования будущего поведения микро-/наноразмерных материалов на основе изображений. Кроме того, предложенная модель может быть распространена на другие приложения, которым требуются пространственно-временные данные на основе интерференционных изображений. Как отмечается в [31],

количественная оценка поля напряжений, создаваемого в изделии при его нагружении, важна для инженерных областей, поскольку позволяет охарактеризовать механическое поведение и отказы элементов конструкций, вызванные действием сложных систем термомеханических воздействий. Для решения этой задачи долгое время использовалась цифровая фотоупругость [21–28] в силу ее визуальной способности представлять информацию о напряжении с помощью изображений изохроматических полос. К сожалению, демодуляция таких полос остается сложным процессом, который в некоторых случаях зависит от нескольких факторов, например, попиксельного сравнения, динамических условий загрузки приложений, исправления несоответствий, зависимости пользователей, процессов развертывания полос и т. д. [31]. Учитывая эти недостатки и используя преимущества мощных результатов, полученных в ходе машинного глубокого обучения, таких как процесс разворачивания изохроматических полос, авторы в [31] предлагают глубокую сверточную нейронную сеть для восстановления поля напряжений, представленного в виде интерференционной картины изохроматических полос, полученных с помощью цифровых исследований фотоупругости. Развитая модель [31] основана на необученной сверточной нейронной сети для точной демодуляции карт напряжений путем ввода только одного изображения фотоупругости. В [31] продемонстрировано, что предложенный метод точно восстанавливает поле напряжений сложных распределений полос на смоделированных изображениях. Работа [32] посвящена процедуре метода фотоупругости и получению качественных изображений. При получении экспериментальных изображений фотоупругости спектральное взаимодействие между источником света и используемым датчиком влияет на визуальную информацию об изохроматической картине полос на полученных изображениях. Такое взаимодействие может привести к появлению интерференционных полос с общим высоким качеством, но также может привести к получению изображений с неразличимыми полосами и плохой реконструкции поля напряжений. В [32] представлена стратегия оценки такого взаимодействия, основанная на измерении значения четырех дескрипторов, созданных вручную: контраста, дескриптора изображения, который одновременно учитывает размытость и шум, дескриптора на основе Фурье для измерения качества изображения и энтропии изображения. Полезность предложенной стратегии была подтверждена путем измерения выбранных дескрипторов на вычислительных изображениях фотоупругости и порядков полос, полученных при оценке поля напряжений, из 240 спектральных конфигураций: 24 источников света и 10 датчиков. Было обнаружено, что высокие значения выбранных дескрипторов могут быть связаны со спектральными конфигурациями, которые приводят к лучшей реконструкции поля напряжений. В целом результаты показывают, что выбранные дескрипторы могут быть полезны для идентификации плохих и хороших спектральных взаимодействий, что могло бы помочь разработать более совершенные протоколы для получения изображений фотоупругости. Возвращаясь к теме машинного обучения, необходимо отметить работу [33], в которой снова подчеркивается, что оценка поля напряжений на основе фотоупругости имеет жизненно важное значение в инженерных областях. Для достижения цели эффективной демодуляции распределения напряжений и преодоления ограничений традиционных методов важно разработать метод глубокого обучения, который упростит и ускорит процесс получения и обработки изображений. В [33] предлагается подход, нацеленный на повышение точности прогнозирования. Авторы используют Resnet в качестве основы и, применив архитектуру U-Net и добавив модуль физических ограничений, разрабатывают модель, обеспечивающую восстановление поля напряжений с более высоким структурным сходством. Показано, что для различных условий нагружения и геометрий рассматриваемых экспериментальных образцов модель работает надежно, несмотря на сложную геометрию и большой диапазон напряжений. Результаты доказывают универсальность и эффективность нашей модели и дают возможность мгновенного определения напряжения. Таким образом, в современной экспериментальной механике техника цифровой фотоупругости с появлением новых возможностей обработки изображений остается рабочим инструментом исследователя.

Наряду с цифровой фотоупругостью в современной механике разрушения для экспериментального исследования полей, ассоциированных с вершиной трещины или выреза, наиболее часто прибегают к методу корреляции цифровых изображений (DIC) [14; 33], который позволяет по экспериментальным полям деформаций восстановить полное разложение М. Уильямса. Например, в [14] было проведено численное и экспериментальное исследование характеристик полей у вершин криволинейных трещин. Это исследование сочетает в себе новый подход дифференциальной геометрии в сочетании с результатами 3D-DIC и КЭА для определения параметров механики трещин по полю смещения на изогнутом элементе с трещиной. Работа направлена на проверку и сравнение некоторых аспектов, которые не могут быть решены с помощью 3D-DIC. Значения коэффициентов интенсивности напряжений для различных длин трещин определяются с использованием данных DIC и КЭА и сравниваются. Кроме того, проводится всестороннее сравнение экспериментальных и численных полей с использованием метода декомпозиции изображений, основанного на полиномах Чебышева. В [33] метод цифровой корреляции изображений используется для получения коэффициентов членов высшего порядка в разложении Уильямса в образцах компактного растяжения, изготовленных из полиметилметакрилата (ПММА). Поле смещения определяется корреляцией между эталонным изображением (т.е. до

деформации) и деформированным изображением. Часть поля перемещений, возникающих в результате движения и вращения твердого тела, исключается из поля перемещений. Для большого числа точек вблизи вершины трещины собирается переопределенный набор одновременных линейных уравнений и с использованием фундаментальных концепций метода наименьших квадратов рассчитываются коэффициенты разложения Уильямса для условий чистого режима I. Затем экспериментальные результаты сравниваются с численными результатами, рассчитанными методом конечных элементов (МКЭ). Показано, что существует очень хорошее соответствие между результатами DIC и КЭА, подтверждающее эффективность метода DIC в получении коэффициентов членов более высокого порядка разложения в ряд Уильямса по полю смещений вокруг вершины трещины. Несмотря на широкое использование экспериментальных техник для реконструкции асимптотического поля напряжений у вершины трещины, многие проблемы остаются открытыми. Например, определение коэффициента интенсивности напряжений является тривиальной задачей, если экспериментатор может быть уверен, что все данные о поле смещений находятся в пределах зоны с преобладанием сингулярности, окружающей вершину трещины. К сожалению, это редко случается из-за двух противоречивых ограничений. Во-первых, практические ограничения на размер образца уменьшают размер зоны, в которой доминирует сингулярность, до неудобно маленькой области, которая может иметь неизвестные размер и форму. Во-вторых, экспериментатору не следует брать данные слишком близко к вершине трещины из-за наличия нелинейной зоны. Это ограничение является наиболее строгим, когда данные берутся с поверхности образца, поскольку экспериментатор должен находиться на расстоянии не менее половины толщины пластины от вершины трещины, чтобы гарантировать, что смещения поверхности соответствуют смещениям по всей толщине образца. Описанная проблема приводит к необходимости построения многокомпонентного разложения и устойчивой процедуры извлечения обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений из экспериментальных техник и вычислительных расчетов. Второй проблемой является задача привлечения нескольких экспериментальных методов для валидации результатов обработки экспериментальных данных. В этом отношении является возможность применения двух методов, обеспечивающих одновременное нахождение и полей напряжений, и полей смещений. Третьем направлением поиска, на наш взгляд, может стать использование метода голографической интерференции, который в силу более сложной оптической схемы, более сложной экспериментальной процедуры и более сложной обработки данных менее часто применяется в механике разрушения, несмотря на то, что закон Фавра, на котором базируется голографическая фотоупругость обеспечивает возможность получения систем уравнений для разделения главных напряжений, без привлечения дополнительных методов разделения напряжений. Ответам на сформулированные вопросы и посвящена настоящая работа.

1. Голографическая интерферометрия (голографическая фотоупругость). Особенности эксперимента. Картины абсолютной разности хода

Целью настоящей работы является экспериментальное получение коэффициентов многокомпонентного разложения М. Уильямса с помощью совокупности двух экспериментальных подходов: метода голографической интерферометрии и метода корреляции изображений и проверка результатов извлечения обобщенных коэффициентов посредством конечно-элементного анализа.

В голографической интерферометрии относительная разность хода Δ связана с главными напряжениями известным соотношением Вертгейма [23]:

$$\Delta = N\lambda = ct\left(\sigma_1 - \sigma_2\right). \quad (1)$$

Абсолютные разности хода связаны с главными напряжениями законом Фавра [35]

$$\Delta_1 = N_1\lambda = at\sigma_1 + bt\sigma_2, \quad \Delta_2 = N_2\lambda = at\sigma_2 + bt\sigma_1, \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения: a, b, c – оптические постоянные материала, t – толщина модели, N – порядок изохроматической полосы, N_1, N_2 – порядки линий абсолютной разности хода при вертикальной и горизонтальной поляризации соответственно, λ – длина волны.

Использование голографической интерферометрии в фотомеханике значительно упрощает измерения, поскольку можно определить главные напряжения в любой точке исследуемой модели в соответствии с выражениями (2), не используя методы разделения напряжений. Оптическая схема рабочей голографической установки представлена на рис. 1.

Для анализа смешанного нагружения были выбраны два типа образцов с трещинами: образец с одной наклонной и одной горизонтальной трещинами, изображенный на рис. 2, и образец с двумя параллельными наклонными трещинами. Геометрические размеры образцов следующие. Высота каждой пластины составляла $H = 120$ мм, ширина пластин равна $2W = 50$ мм, длина каждой трещины равна $2a = 20$ мм (2 см), угол между наклонной трещиной и вертикалью равен 60°, толщина образца равна $t = 6$ мм. Образцы выполнены из прозрачного, оптически активного полиметилметакрилата. Каждая трещины создавалась с помощью центрального отверстия и последующего пропила посредством нити с алмазным напылением. Пластина фиксировалась в нагружающем устройстве (см. рис. 1, справа), и для одной и той же пластины снимались изображения с вертикальной и горизонтальной поляризацией (рис. 2, 3).

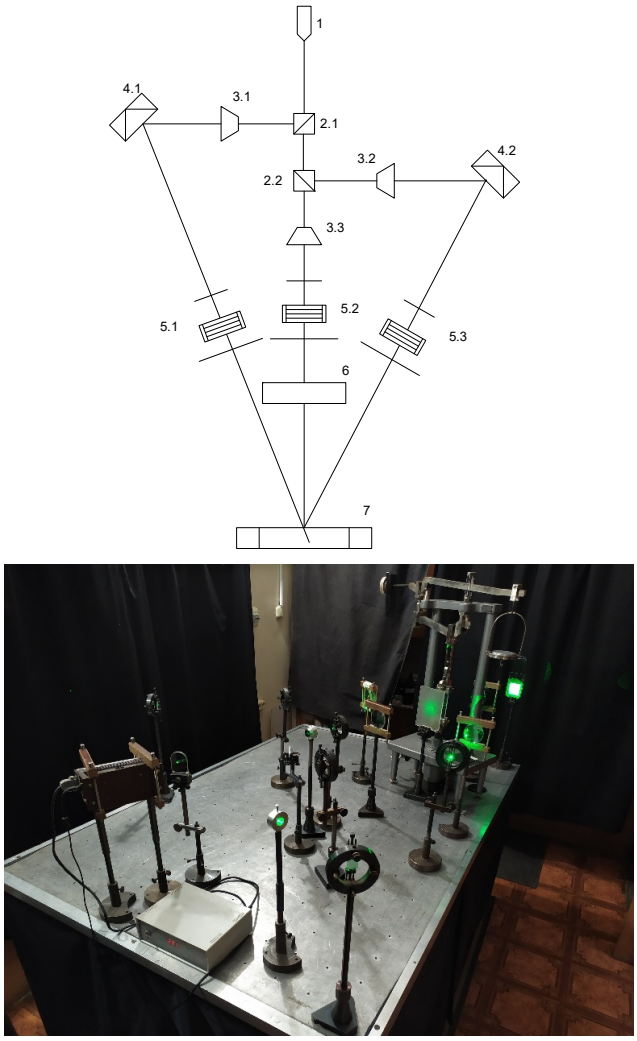


Рис. 1. Оптическая схема рабочей голографической установки: *1* – лазер; *2* – полупрозрачные зеркала; *3* – фазовые пластинки (λ/2); *4* – зеркала; *5* – коллиматор; *6* – образец; *7* – фотопластинка

Fig. 1. Schematic of experimental setup: *1* – laser; *2* – translucent mirrors; *3* – phase plates (λ/2); *4* – mirrors; *5* – collimator; *6* – specimen; *7* – photographic plate

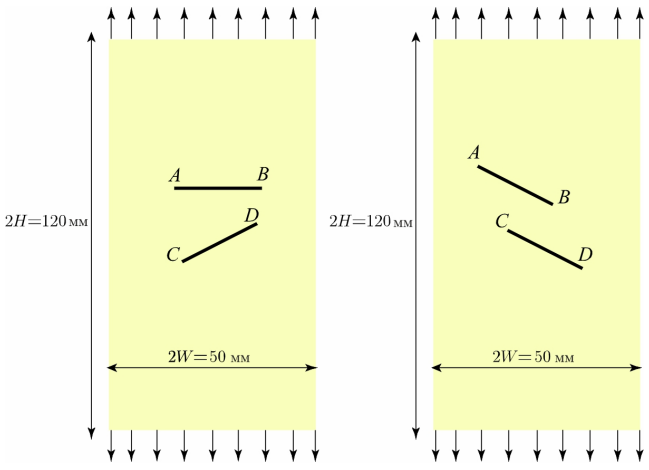


Рис. 2. Схематичное изображение геометрии образцов и системы приложенной нагрузки

Fig. 2. Schematic of the cracked specimens made of optically sensitive material and schematical presentation of the load

В плоской голографической интерферометрии фиксируют два семейства полос абсолютной разности хода с номерами N_1 и N_2. Номера полос связаны с главными напряжениями σ_1 и σ_2 соотношениями Фавра (2), которые представимы в более удобной форме:

$$N_1 = a\sigma_1 + b\sigma_2, \quad N_2 = a\sigma_2 + b\sigma_1. \tag{3}$$

Здесь a, b – константы материала исследуемого образца. Постоянные a, b определяются на основе модельного эксперимента с пластиной, не содержащей дефект. Номера полос в картинах абсолютной разности хода берутся при различных поляризациях опорного пучка – вертикальной и горизонтальной. Значения материальных констант для рассматриваемого натурного эксперимента были определены в [17]:

$$a = -0,256\frac{\text{полос}}{\text{МПа}}, \quad b = -0,190\frac{\text{полос}}{\text{МПа}}. \tag{4}$$

Результаты испытаний и интерференционные картины полос абсолютной разности хода представлены на рис. 3, 4.

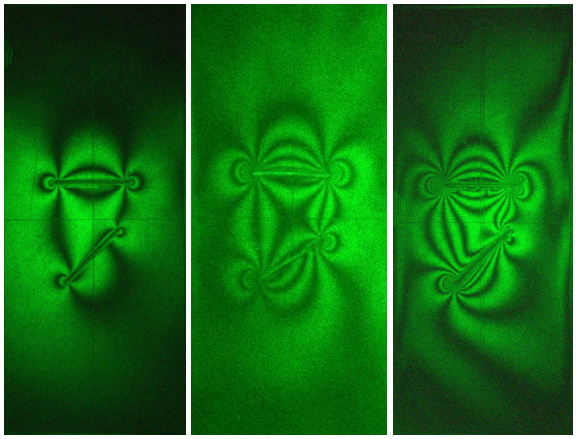


Рис. 3. Интерференционные картины полос: линии абсолютной разности хода (изодромы) в пластине с двумя взаимодействующими трещинами: нагрузка 25, 50 и 75 кг (вертикальная поляризация)

Fig. 3. Interference fringe patterns: absolute difference (isodromes) in a plate with two interacting cracks: 25, 50 and 75 kg (vertical polarization)

Для автоматической (машинной) обработки полученной картины полос абсолютной разности хода было разработано приложение, находящее точки интерференционной картины изодром с минимальной освещенностью. Разработанное приложение позволяет сохранить координаты точек и номера полос в отдельный файл, который используется далее для вычисления параметров механики разрушения. Результаты работы приложения представлены на рис. 9–11, где показаны скелетоны полос абсолютной разности хода. На рис. 10, *а*, особенно отчетливо видны линии, образующие скелетон интерференционной полосы. Таким образом, координаты точек определялись автоматически посредством разработанной процедуры, осуществляющей цифровую обработку изображений, примеры которых приведены на рис. 9–11.

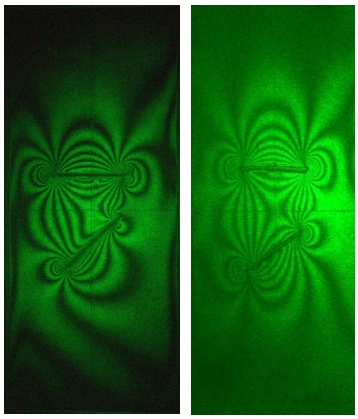


Рис. 4. Интерференционные картины полос: линии абсолютной разности хода (изодромы) в пластине с двумя взаимодействующими трещинами: нагрузка 100 и 125 кг (вертикальная поляризация)

Fig. 4. Interference fringe patterns: absolute difference (isodromes) in a plate with two interacting cracks: 100 and 125 kg (vertical polarization)

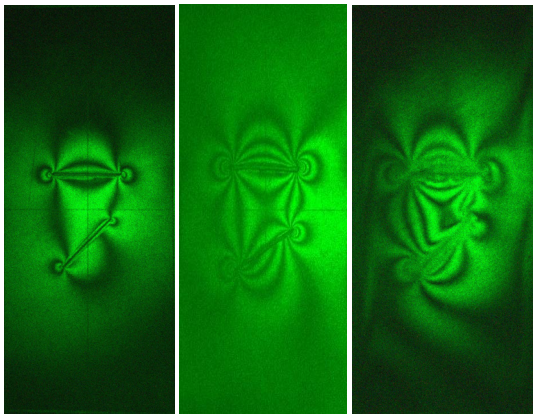


Рис. 5. Интерференционные картины полос: линии абсолютной разности хода (изодромы) в пластине с двумя взаимодействующими трещинами: нагрузка 25, 50 и 75 кг (горизонтальная поляризация)

Fig. 5. Interference fringe patterns: absolute difference (isodromes) in a plate with two interacting cracks: 25, 50 and 75 kg (horizontal polarization)

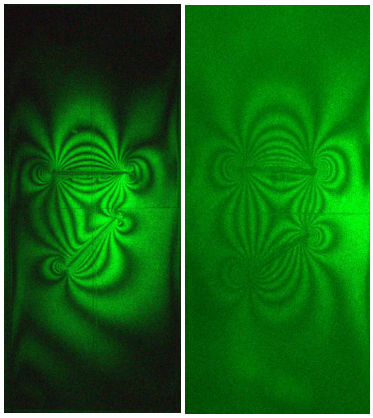


Рис. 6. Интерференционные картины полос: линии абсолютной разности хода (изодромы) в пластине с двумя взаимодействующими трещинами: нагрузка 25, 50 и 75 кг (горизонтальная поляризация)

Fig. 6. Interference fringe patterns: absolute difference (isodromes) in a plate with two interacting cracks: 25, 50 and 75 kg (horizontal polarization)

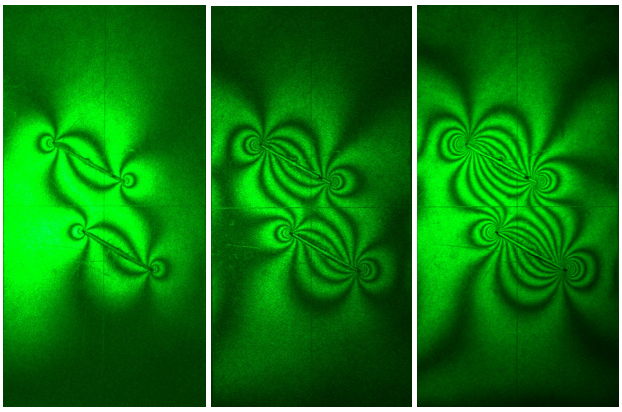


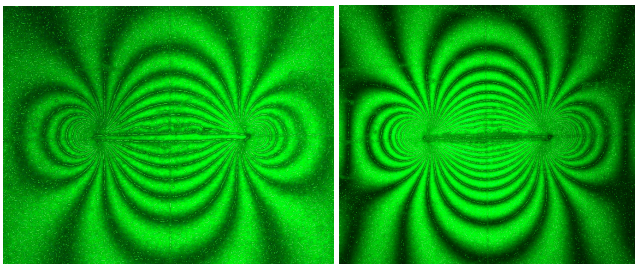
Рис. 7. Интерференционные картины полос: линии абсолютной разности хода (изодромы) в пластине с двумя наклонными трещинами: нагрузка 25, 50 и 75 кг (вертикальная поляризация)

Fig. 7. Interference fringe patterns: absolute path difference (isodromes) in a plate with two inclined cracks: 25, 50 and 75 kg (vertical polarization)



Рис. 8. Интерференционные картины полос: линии абсолютной разности хода (изодромы) в пластине с двумя наклонными трещинами: нагрузка 25, 50 и 75 кг (горизонтальная поляризация)

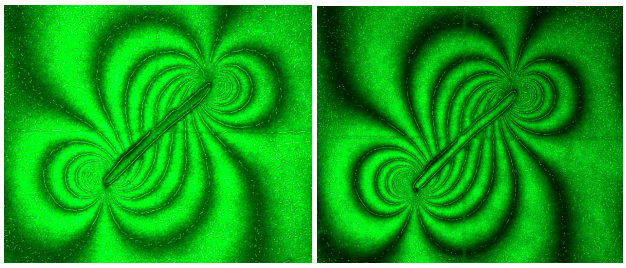
Fig. 8. Interference fringe patterns: absolute path difference (isodromes) in a plate with two inclined cracks 25, 50 and 75 kg (horizontal polarization)



a *b*

Рис. 9. Скелетоны линий абсолютной разности хода вблизи горизонтальной трещины: *a* – горизонтальная поляризация; *b* – вертикальная поляризация

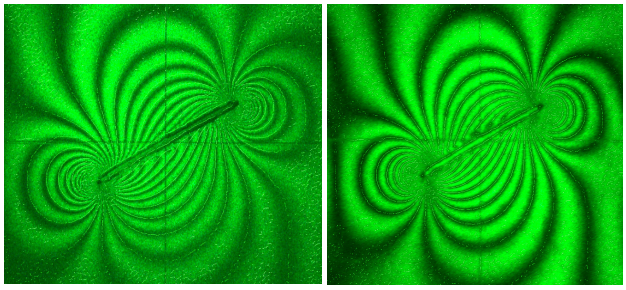
Fig. 9. Skeletons of absolute path difference lines near a horizontal crack: *a* – horizontal polarization; *b* – vertical polarization



a *b*

Рис. 10. Скелетоны линий абсолютной разности хода вблизи наклонной трещины: *a* – горизонтальная поляризация; *b* – вертикальная поляризация

Fig. 10. Skeletons of absolute path difference lines near the inclined crack: *a* – horizontal polarization; *b* – vertical polarization



a b

Рис. 11. Скелетоны линий абсолютной разности хода вблизи наклонной трещины: *a* – горизонтальная поляризация; *b* – вертикальная поляризация

Fig. 11. Skeletons of absolute path difference lines near the inclined crack: *a* – horizontal polarization; *b* – vertical polarization

С помощью определенных порядков интерференционных полос – линий абсолютной разности хода – и координат точек, принадлежащих им, на основании закона Фавра (3) можно определить главные напряжения в каждой точке модели. Общее число точек, извлекаемых из эксперимента, варьировалось от 450 до 500.

2. Идентификация обобщенных коэффициентов разложения М. Уильямса

Экспериментально полученные координаты точек, принадлежащие интерференционной картине, служат основой для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений $\sigma_{ij}(r,\theta)$ у вершины трещины:

$$\sigma_{ij}(r,\theta)=\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^m r^{k/2-1}f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \tag{5}$$

где индекс m принимает значение, равное 1 для нормального отрыва и 2 для поперечного сдвига; a_k^m – амплитудные, масштабные множители, отражающие влияние геометрии образца и системы приложенных нагрузок, называемые в последнее время обобщенными коэффициентами интенсивности напряжений; $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ – зависимости напряжений от угловой координаты θ [5; 6]. Универсальные угловые распределения $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ хорошо известны из решения краевых задач и приведены в [30; 36]:

$$\begin{aligned}
f_{1,11}^{(k)}(\theta)&=(k/2)\left[\left(2+k/2+(-1)^k\right)\cos(k/2-1)\theta-(k/2-1)\cos(k/2-3)\theta\right],\\
f_{1,22}^{(k)}(\theta)&=(k/2)\left[\left(2-k/2-(-1)^k\right)\cos(k/2-1)\theta+(k/2-1)\cos(k/2-3)\theta\right],\\
f_{1,12}^{(k)}(\theta)&=(k/2)\left[-\left(k/2+(-1)^k\right)\sin(k/2-1)\theta+(k/2-1)\sin(k/2-3)\theta\right],
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
f_{2,11}^{(k)}(\theta)&=-(k/2)\left[\left(2+k/2-(-1)^k\right)\sin(k/2-1)\theta-(k/2-1)\sin(k/2-3)\theta\right],\\
f_{2,22}^{(k)}(\theta)&=-(k/2)\left[\left(2-k/2+(-1)^k\right)\sin(k/2-1)\theta+(k/2-1)\sin(k/2-3)\theta\right],\\
f_{2,12}^{(k)}(\theta)&=(k/2)\left[-\left(k/2-(-1)^k\right)\cos(k/2-1)\theta+(k/2-1)\cos(k/2-3)\theta\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Поле перемещений, ассоциированное с вершиной острой трещины, определяется выражением

$$u_i(r,\theta)=\sum_{l=1}^{l=2}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left(a_k^l/G\right)r^{k/2}g_{l,i}^{(k)}(\theta), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
g_{1,1}^{(k)}(\theta)&=\left(\kappa+k/2+(-1)^k\right)\cos(\theta/2)-(k/2)\cos(k/2-2)\theta,\\
g_{1,2}^{(k)}(\theta)&=\left(\kappa-k/2-(-1)^k\right)\sin(\theta/2)+(k/2)\sin(k/2-2)\theta,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
g_{2,1}^{(k)}(\theta)&=-\left(\kappa+k/2-(-1)^k\right)\sin(\theta/2)+(k/2)\sin(k/2-2)\theta,\\
g_{2,2}^{(k)}(\theta)&=\left(\kappa-k/2+(-1)^k\right)\cos(\theta/2)+(k/2)\cos(k/2-2)\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь k – постоянная плоской задачи теории упругости, G – модуль сдвига, $g_{i,j}^{(k)}(\theta)$ – зависимости компонент вектора перемещений от полярного угла. Вся разновидность и разнообразие краевых задач о математических разрезах проявляется в масштабных, амплитудных множителях a_k^m, зависящих от конфигурации образца и комбинации приложенных нагрузок. В настоящее время сложилось ясное и четкое представление о необходимости удержания высших приближений в асимптотических разложениях (5), (8). В целом ряде работ [2; 5; 6; 12–18] показано, что сохранение высших приближений (регулярных, неособых) в асимптотических разложениях М. Уильямса (5), (8) позволяет значительно расширить область действия асимптотических разложений.

После идентификации порядков номеров полос абсолютной разности хода и процедуры тарировки [17] закон Фавра (3) дает возможность получить систему нелинейных алгебраических уравнений относительно обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений $a_1^1,a_2^1,...,a_P^1$ и $a_1^2,a_2^2,...,a_L^2$, P,L – число слагаемых, сохраняемых в разложениях (5) и (8) для нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно. Подстановка выражений для главных напряжений

$$\sigma_1,\sigma_2=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2+4\sigma_{12}^2} \tag{11}$$

в соотношения закона Фавра $N_1 = a\sigma_1 + b\sigma_2$, $N_2 = a\sigma_2 + b\sigma_1$ позволяет вывести систему нелинейных алгебраических уравнений [17], решение которой осуществляется с помощью линеаризации. С целью линеаризации системы уравнений вводятся в рассмотрение вспомогательные функции

$$\begin{gathered} g^1_{m_1} = \left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2_{m_1} + 4\left(\sigma^2_{12}\right)_{m_1} - \left[N_1/d - (c/d)\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right]^2_{m_1}, \\ g^2_{m_2} = \left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2_{m_2} + 4\left(\sigma^2_{12}\right)_{m_2} - \left[(c/d)\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) - N_2/d\right]^2_{m_2}, \\ c = (a+b)/2, \quad d = (a-b)/2, \quad m_1 = 1...M_1, \quad m_2 = 1...M_2, \end{gathered} \tag{12}$$

где приняты обозначения: M_1, M_2 – количество точек, взятых для анализа из интерференционных картин, соответствующих вертикальной и горизонтальной поляризациям соответственно. Если в сформулированную систему уравнений (12) подставить некоторые начальные приближения для масштабных множителей, то, очевидно, что функции $g^1_{m_1}\left(a^1_1, a^1_2, ..., a^1_P, a^2_1, a^2_2, ..., a^2_L\right)$, $g^1_{m_2}\left(a^1_1, a^1_2, ..., a^1_P, a^2_1, a^2_2, ..., a^2_L\right)$ не обратятся в нуль. Для того, чтобы скорректировать оценки для амплитудных множителей, можно воспользоваться итерационной схемой, основанной на разложении функций $g^1_{m_1}\left(a^1_1, a^1_2, ..., a^1_P, a^2_1, a^2_2, ..., a^2_L\right)$, $g^1_{m_2}\left(a^1_1, a^1_2, ..., a^1_P, a^2_1, a^2_2, ..., a^2_L\right)$ в ряд Тейлора

$$\begin{gathered} \left(g^1_{m_1}\right)_{i+1} = \left(g^1_{m_1}\right)_i + \sum_{k=1}^{P} \frac{\partial g^1_{m_1}}{\partial a^1_k}\left(\Delta a^1_k\right)_i + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial g^1_{m_1}}{\partial a^2_k}\left(\Delta a^2_k\right)_i, \\ \left(g^2_{m_1}\right)_{i+1} = \left(g^2_{m_1}\right)_i + \sum_{k=1}^{P} \frac{\partial g^2_{m_1}}{\partial a^1_k}\left(\Delta a^1_k\right)_i + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial g^2_{m_1}}{\partial a^2_k}\left(\Delta a^2_k\right)_i, \end{gathered} \tag{13}$$

$\left(\Delta a^1_k\right)_i = \left(a^1_k\right)_{i+1} - \left(a^1_k\right)_i$, $\left(\Delta a^2_k\right)_i = \left(a^2_k\right)_{i+1} - \left(a^2_k\right)_i$ – поправки к значениям амплитудных множителей. Скорректированные значения амплитудных множителей определяются из условий $\left(g^1_{m_1}\right)_{i+1} = 0$, $\left(g^2_{m_2}\right)_{i+1} = 0$. Получаем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. В матричной форме систему уравнений можно представить следующим образом:

$$G_i = -B_i\left(\Delta a\right)_i, \ \left(\Delta a\right)_i = -\left(B_i^T B_i\right)^{-1} B_i^T G_i, \tag{14}$$

где $G_i = \left(g^1_1 \ g^1_2 ... g^1_{m_1} ... g^1_{M_1} \ g^2_1 \ g^2_2 ... g^2_{m_2} ... g^2_{M_2}\right)_i$ – вектор-строка, составленная из левых частей соотношений (13), матрицы B_i и $\left(\Delta a\right)_i$ определяются выражениями

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1_1}{\partial a^1_1} & \frac{\partial g^1_1}{\partial a^1_2} & \cdots & \frac{\partial g^1_1}{\partial a^1_P} & \frac{\partial g^1_1}{\partial a^2_1} & \frac{\partial g^1_1}{\partial a^2_2} & \cdots & \frac{\partial g^1_1}{\partial a^2_L} \\ \frac{\partial g^1_2}{\partial a^1_1} & \frac{\partial g^1_2}{\partial a^1_2} & \cdots & \frac{\partial g^1_2}{\partial a^1_P} & \frac{\partial g^1_2}{\partial a^2_1} & \frac{\partial g^1_2}{\partial a^2_2} & \cdots & \frac{\partial g^1_2}{\partial a^2_L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^1_{M_1}}{\partial a^1_1} & \frac{\partial g^1_{M_1}}{\partial a^1_2} & \cdots & \frac{\partial g^1_{M_1}}{\partial a^1_P} & \frac{\partial g^1_{M_1}}{\partial a^2_1} & \frac{\partial g^1_{M_1}}{\partial a^2_2} & \cdots & \frac{\partial g^1_{M_1}}{\partial a^2_L} \\ \frac{\partial g^2_1}{\partial a^1_1} & \frac{\partial g^2_1}{\partial a^1_2} & \cdots & \frac{\partial g^2_1}{\partial a^1_P} & \frac{\partial g^2_1}{\partial a^2_1} & \frac{\partial g^2_1}{\partial a^2_2} & \cdots & \frac{\partial g^2_1}{\partial a^2_L} \\ \frac{\partial g^2_2}{\partial a^1_1} & \frac{\partial g^2_2}{\partial a^1_2} & \cdots & \frac{\partial g^2_2}{\partial a^1_P} & \frac{\partial g^2_2}{\partial a^2_1} & \frac{\partial g^2_2}{\partial a^2_2} & \cdots & \frac{\partial g^2_2}{\partial a^2_L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^2_{M_2}}{\partial a^1_1} & \frac{\partial g^2_{M_2}}{\partial a^1_2} & \cdots & \frac{\partial g^2_{M_2}}{\partial a^1_P} & \frac{\partial g^2_{M_2}}{\partial a^2_1} & \frac{\partial g^2_{M_2}}{\partial a^2_2} & \cdots & \frac{\partial g^2_{M_2}}{\partial a^2_L} \end{pmatrix}_i \quad \left(\Delta a\right)_i = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^1_2 \\ \vdots \\ a^1_P \\ a^2_1 \\ a^2_2 \\ \vdots \\ a^2_L \end{pmatrix}_i$$

На каждом этапе итерационной схемы решается система линейных алгебраических уравнений и определяются поправки к значениям масштабных множителей. Выход из итерационной процедуры осуществляется при достижении разности между масштабными множителями, полученными на $i+1$ и i-й итерациях, меньшей, чем наперед заданная точность:

$$\sqrt{\left[\left(\Delta a^1_1\right)_i\right]^2 + \left[\left(\Delta a^1_2\right)_i\right]^2 + ... + \left[\left(\Delta a^1_P\right)_i\right]^2 + \left[\left(\Delta a^2_1\right)_i\right]^2 + \left[\left(\Delta a^2_2\right)_i\right]^2 + ... + \left[\left(\Delta a^2_L\right)_i\right]^2} \le \varepsilon. \tag{15}$$

Линеаризация позволяет решить систему линейных уравнений в замкнутой форме с помощью итерационной схемы. В ходе вычислений было установлено, что найденные амплитудные (масштабные) множители ряда М. Уильямса находятся в хорошем соответствии с 1) определенными методом корреляции цифровых изображений коэффициентами ряда Уильямса; 2) результатами конечно-элементных расчетов, что будет обсуждаться ниже. Вычисленные с помощью итерационной процедуры значения масштабных множителей для первой конфигурации образца сведены в табл. 1–4 для пластины с двумя неколлинеарными трещинами и в табл. 5–8 для пластины с двумя наклонными параллельными трещинами.

Таблица 1

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины А в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 1

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined non – parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip A

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 222{,}9869\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -9{,}1228\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -25{,}8818\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = -0{,}9840\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}3305\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 0{,}1290\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = -0{,}0049\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = 0{,}00393\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0010\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = -0{,}0172\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = -0{,}0121\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = 0{,}0011\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0003\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0004\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = -0{,}00007\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}00003\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = -0{,}00003\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00002\ \text{Pa/cm}^4$	$a_{10}^2 = 0{,}00001\ \text{Pa/cm}^4$

Таблица 2

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины В в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 2

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined non-parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip B

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 229{,}6520\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = 16{,}6262\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -28{,}3924\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = 0{,}6703\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}4055\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 0{,}1777\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = -0{,}0362\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = 0{,}0973\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0134\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = 0{,}0305\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = -0{,}0067\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = -0{,}0011\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0012\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0012\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = -0{,}0001\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0009\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = 0{,}00009\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00087\ \text{Pa/cm}^4$	$a_{10}^2 = 0{,}0069\ \text{Pa/cm}^4$

Таблица 3

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины С в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 3

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined non-parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip C

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 178{,}5776\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -76{,}4100\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -17{,}1055\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = -2{,}6836\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}0888\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 0{,}2619\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = -0{,}0938\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = -0{,}0231\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0123\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = 0{,}0050\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = -0{,}0008\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = 0{,}0008\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = -0{,}0002\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0004\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = 0{,}00004\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0007\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = -0{,}00003\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00005\ \text{Pa/cm}^4$	$a_{10}^2 = 0{,}00002\ \text{Pa/cm}^4$

Таблица 4

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины D в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 4

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined non-parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip D

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 145{,}0405\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -88{,}9855\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -5{,}9816\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = -4{,}8492\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}0820\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 1{,}0561\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = 0{,}1256\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = -0{,}1003\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = -0{,}04227\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = -0{,}0018\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = 0{,}0115\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = 0{,}0043\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0008\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0028\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = -0{,}0002\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0036\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = 0{,}0007\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00115\ \text{Pa/cm}^4$	$a_{10}^2 = 0{,}0064\ \text{Pa/cm}^4$

Таблица 5

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины A в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 5

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip A

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 211{,}8383\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -89{,}7620\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -19{,}9518\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0\ \text{Pa}$
$a_3^1 = 1{,}1271\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}4105\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = -0{,}1352\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = 0{,}1322\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = 0{,}0502\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0120\ \text{a/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = -0{,}0184\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = -0{,}0321\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = 0{,}0021\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0005\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0014\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = -0{,}00011\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0001\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = -0{,}00009\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00002\left(\text{Pa/cm}^4\right)$	$a_{10}^2 = 0{,}00001\left(\text{Pa/cm}^4\right)$

Таблица 6

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины B в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 6

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip B

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 180{,}96021\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -66{,}3012\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -10{,}5075\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = 1{,}0721\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}5579\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 0{,}6389\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = 0{,}1325\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = -0{,}1365\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = -0{,}05371\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = 0{,}0967\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = -0{,}0055\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = -0{,}01244\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0079\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0021\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = -0{,}0001\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0002\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = -0{,}00044\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = 0{,}0003\ \text{Pa/cm}^4$	$a_{10}^2 = 0{,}00012\ \text{Pa/cm}^4$

Таблица 7

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины C в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 7

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip C

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 173{,}2205\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -61{,}9956\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -10{,}1354\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = -2{,}6836\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}1288\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 0{,}2619\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = -0{,}0938\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = -0{,}0442\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0351\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = 0{,}0142\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = -0{,}0023\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = 0{,}0014\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = -0{,}0003\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0009\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = 0{,}00012\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0008\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = -0{,}00006\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00005\left(\text{Pa/cm}^4\right)$	$a_{10}^2 = 0{,}00002\left(\text{Pa/cm}^4\right)$

Таблица 8

Коэффициенты ряда М. Уильямса для поля напряжений в окрестности вершины D в пластине с двумя непараллельными трещинами (метод голографической фотоупругости)

Table 8

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined parallel cracks (the holographic photoelasticity method). The crack tip D

Коэффициенты разложения для нормального отрыва	Коэффициенты разложения для поперечного сдвига
$a_1^1 = 203{,}5004\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$	$a_1^2 = -85{,}0945\ \text{Pa}\cdot\text{cm}^{1/2}$
$a_2^1 = -19{,}6459\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 0$
$a_3^1 = -4{,}8492\ \text{Pa/cm}^{1/2}$	$a_3^2 = -0{,}0820\ \text{Pa/cm}^{1/2}$
$a_4^1 = 1{,}0561\ \text{Pa/cm}$	$a_4^2 = 0{,}1256\ \text{Pa/cm}$
$a_5^1 = -0{,}1003\ \text{Pa/cm}^{3/2}$	$a_5^2 = -0{,}05431\ \text{Pa/cm}^{3/2}$
$a_6^1 = -0{,}0043\ \text{Pa/cm}^2$	$a_6^2 = 0{,}0224\ \text{Pa/cm}^2$
$a_7^1 = 0{,}0056\ \text{Pa/cm}^{5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0011\ \text{Pa/cm}^{5/2}$
$a_8^1 = -0{,}0033\ \text{Pa/cm}^3$	$a_8^2 = -0{,}0010\ \text{Pa/cm}^3$
$a_9^1 = 0{,}0044\ \text{Pa/cm}^{7/2}$	$a_9^2 = 0{,}0009\ \text{Pa/cm}^{7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00117\ \text{Pa/cm}^4$	$a_{10}^2 = 0{,}0069\ \text{Pa/cm}^4$

3. Метод корреляции цифровых изображений

Как описано ранее, переопределенный метод в целом использует большой набор точек данных для получения небольшого числа неизвестных коэффициентов с использованием большой системы уравнений. Таким образом, этот метод может быть применен для вычисления выбранного числа коэффициентов в разложении Уильямса из компонентов смещения, известных для большого числа точек. В настоящем исследовании компоненты смещения получены непосредственно методом корреляции цифровых изображений. Следуя этому математическому подходу, можно вычислить неизвестные параметры рядов смещений или, что эквивалентно, коэффициенты разложения Уильямса. В рамках экспериментальной части были выполнены исследования с помощью метода корреляции цифровых изображений. Фотография экспериментальной установки изображена на рис. 12. Распределение компоненты тензора деформации показано на рис. 13. Для вычислений обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений были использованы представления (8). Поля смещений и деформаций были получены путем сопоставления эталонного и деформированного изображений. Эта процедура была выполнена для двух уровней нагрузок, чтобы убедиться, что образец остается в области упругости. Величины нагрузок были разделены на поперечное сечение образца при растяжении для получения распределенной нагрузки, приложенной к образцу.



Рис. 12. Оборудование, использованное для проведения процедуры метода корреляции цифровых изображений

Fig. 12. Equipment used for the procedure of the digital image correlation method

Применяя распределения деформаций и перемещений, с помощью переопределенного метода были вычислены коэффициенты ряда Уильямса. Было установлено очень хорошее соответствие между вычисленными коэффициентами двумя экспериментальными методами, в силу чего дополнительно полученные значения не приводятся. Коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения вычисляются с погрешностью 0,01 %, погрешность возрастает с увеличением порядкового номера коэффициента, но для десятого коэффициента не превышает 7 %.

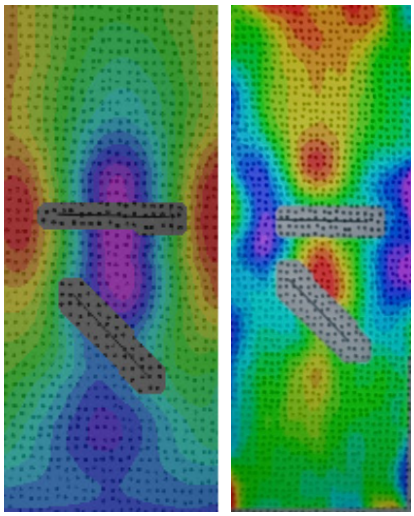


Рис. 13. Распределение продольной и поперечной деформации в пластине

Fig. 13. Distribution of longitudinal deformation in the plate

Извлеченные из эксперимента коэффициенты разложения ряда Уильямса для полей напряжений и перемещений можно сопоставить с численными, чтобы проверить оценки цифровой обработки экспериментальных данных и найденных на основании эксперимента коэффициентов. Для сравнения в конечно-элементном пакете SIMULIA Abaqus была выполнена большая серия расчетов методом конечных элементов для одного и того же типа образца с трещинами (см. рис. 2). Проверка подтвердила экспериментальные результаты. Ниже приводится процедура конечно-элементного определения коэффициентов разложения М. Уильямса.

4. Компьютерное моделирование в SIMULIA Abaqus

Для верификации цифровой обработки экспериментальных данных в коммерческом программном пакете SIMULIA Abaqus, осуществляющем конечно-элементный анализ, рассмотрена модель пластины с двумя неколлинеарными трещинами, аналогичная изученной в лабораторных поляризационно-оптических экспериментах. Ключевой целью численных экспериментов является вычисление коэффициентов более высокого порядка из численного конечно-элементного решения. Образец с трещинами имеет ту же геометрию, свойства материала и нагрузку, что и в голографических экспериментах (рис. 14). Анализ проводится с помощью 8-узловых элементов плоской деформации. Типичная сетка, содержащая сингулярные конечные элементы, вокруг вершины трещины, показана на рис. 14. Сетка содержит 72 элемента в окружном направлении и 50 в радиальном направлении. Сингулярные элементы были использованы для каждой вершины трещины (см. рис. 14). Рассчитанная интенсивность касательных напряжений показана на рис. 15. Для реализации переопределенного метода выбиралось семейство круговых

контуров, охватывающих вершину трещины, и полученные в результате конечно-элементного расчета значения компонент тензора напряжений, экспортировались в систему компьютерной алгебры Maple, где осуществлялись вычисления параметров ряда Уильямса. Пример контуров, охватывающих вершину, задействованных в вычислениях, показан на рис. 16. На рис. 17 показаны результаты конечно-элементного анализа для второго экспериментального образца с двумя параллельными наклонными трещинами.

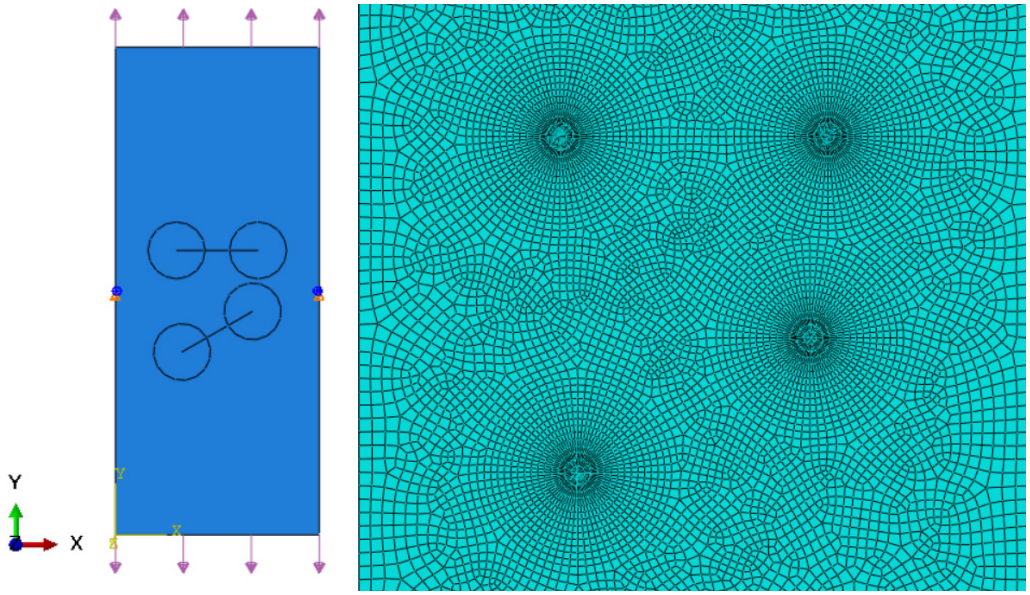


Рис. 14. Геометрия образца с трещинами и пример сетки в конечно-элементном пакете SIMULIA Abaqus

Fig. 14. Schematic of the cracked specimen, schematical presentation and mesh of the load in Abaqus

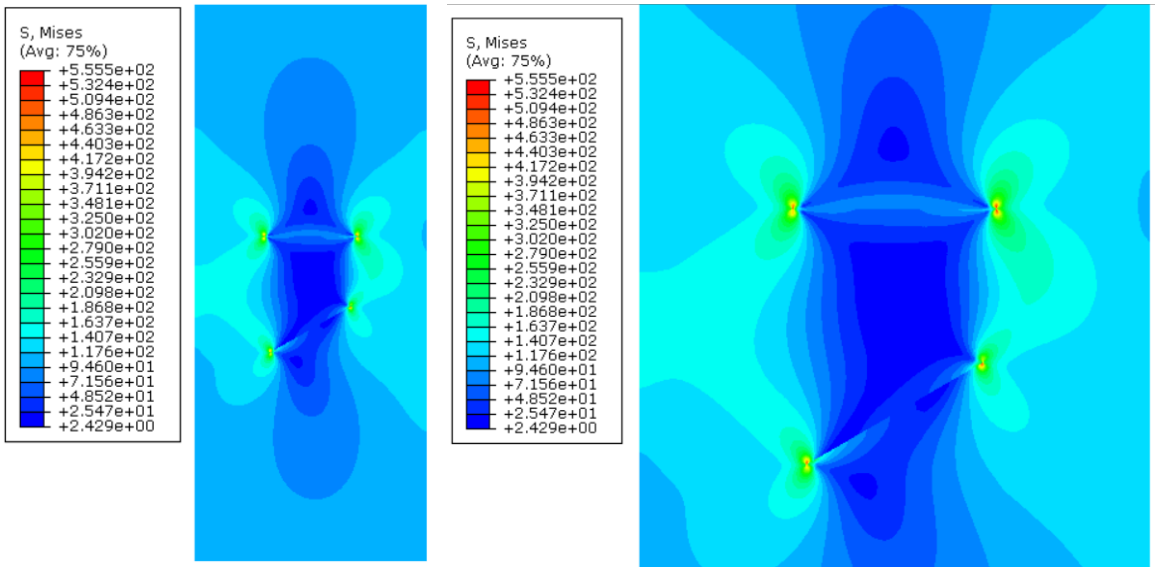


Рис. 15. Распределение интенсивности касательных напряжений: пластина с двумя трещинами (слева) и увеличенная центральная часть пластины (справа)

Fig. 15. The distribution of the von Mises stress (left) and zoomed central part of the cracked plate (right)

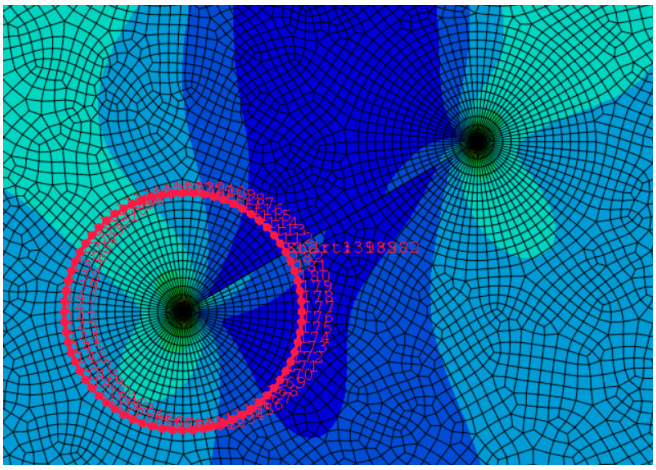


Рис. 16. Контур, охватывающий вершину трещины, предназначенный для вычисления параметров механики разрушения

Fig. 16. The contour used to extract fracture mechanics parameters form finite element analysis

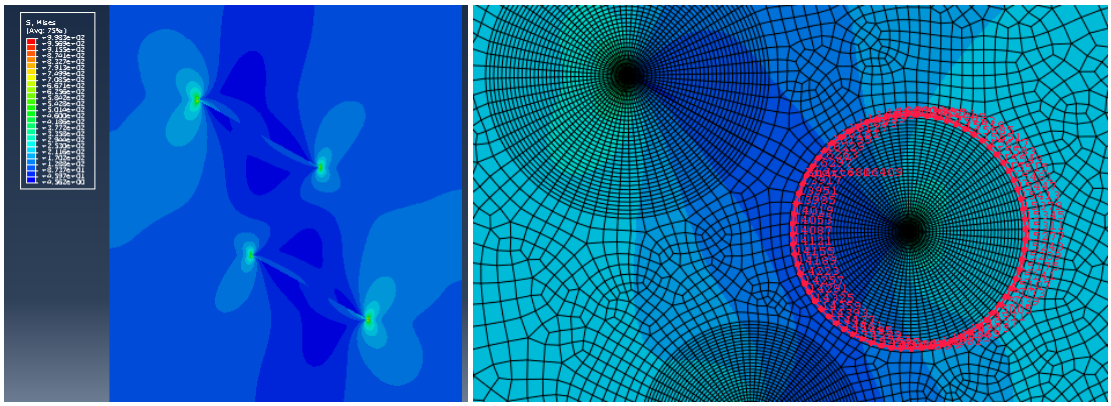


Рис. 17. Распределение интенсивности напряжений в пластине с двумя параллельными трещинами и контур, охватывающий вершину трещины, предназначенный для вычисления параметров механики разрушения

Fig. 17. Distribution of the von Mises stress and the contour used to extract fracture mechanics parameters form finite element analysis

Асимптотическое решение М. Уильямса (5) может быть представлено в матричной форме

$$\sigma = CA, \tag{16}$$

где A – вектор – столбец, состоящий из неизвестных коэффициентов ряда Уильямса, соответствующих первой и второй моде нагружения; σ – вектор – строка, включающая вычисленные методом конечных элементов, значения компонент тензора напряжений:

$$\sigma = \left(\sigma_{11}(r_1,\theta_1)\ \sigma_{11}(r_2,\theta_2)\dots\sigma_{11}(r_L,\theta_L)\ \sigma_{11}(r_L,\theta_L)\ \sigma_{12}(r_1,\theta_1)\ \sigma_{12}(r_2,\theta_2)\dots\sigma_{12}(r_L,\theta_L)\right.$$
$$\left.\sigma_{22}(r_1,\theta_1)\,\sigma_{22}(r_1,\theta_1)\dots\sigma_{22}(r_L,\theta_L)\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ \dots \\ a_P^1 \\ a_1^2 \\ a_3^2 \\ \dots \\ a_L^2 \end{pmatrix}$$

Матрица C (матрица размерности $M \times P + (L-1)$) имеет вид

$$\begin{pmatrix}
r_1^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{P/2-1} f_{1,11}^{(M)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,11}^{(1)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{K/2-1} f_{2,11}^{(L)}(\theta_1) \\
r_2^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{P/2-1} f_{1,11}^{(M)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,11}^{(1)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{K/2-1} f_{2,11}^{(L)}(\theta_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
r_L^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_M) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_M) & r_L^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_L^{P/2-1} f_{1,11}^{(M)}(\theta_M) & r_L^{-1/2} f_{2,11}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_L^{K/2-1} f_{2,11}^{(L)}(\theta_M) \\
r_1^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_1^{P/2-1} f_{1,12}^{(M)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,12}^{(1)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{K/2-1} f_{2,12}^{(L)}(\theta_1) \\
r_2^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{P/2-1} f_{1,12}^{(M)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,12}^{(1)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{K/2-1} f_{2,12}^{(L)}(\theta_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
r_L^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_L^{P/2-1} f_{1,12}^{(M)}(\theta_M) & r_L^{-1/2} f_{2,12}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_L^{K/2-1} f_{2,12}^{(L)}(\theta_M) \\
r_1^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{P/2-1} f_{1,22}^{(M)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,22}^{(1)}(\theta_1) & r_2^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_1^{K/2-1} f_{2,22}^{(L)}(\theta_1) \\
r_2^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{P/2-1} f_{1,22}^{(M)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,22}^{(1)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{K/2-1} f_{2,22}^{(L)}(\theta_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
r_L^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_L^{P/2-1} f_{1,22}^{(M)}(\theta_M) & r_L^{-1/2} f_{2,22}^{(1)}(\theta_M) & r_L^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_M) & \dots & r_L^{K/2-1} f_{2,22}^{(L)}(\theta_M)
\end{pmatrix}$$

Аналитическое решение данной системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов A может быть представлено в форме

$$A = \left(C^T C\right)^{-1} C^T \sigma, \tag{17}$$

где $\left(C^T C\right)^{-1} C^T$ – псевдо-обратная матрица для матрицы C и матрица $C^T C$ не является сингулярной.

Таблица 9

Коэффициенты ряда Уильямса, вычисленные посредством метода конечных элементов для вершин *A*, *B*, *C*, *D*

Table 9

Coefficients of the Williams series expansion for the plate with two inclined non-parallel cracks. The crack tip *A*, *B*, *C*, *D*

Коэффициенты ряда Уильямса, вершина *A*	Коэффициенты ряда Уильямса, вершина *B*	Коэффициенты ряда Уильямса, вершина *C*	Коэффициенты ряда Уильямса, вершина *D*
$a_1^1 = 222{,}9869\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$	$a_1^1 = 229{,}6520\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$	$a_1^1 = 178{,}5776\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$	$a_1^1 = 145{,}0405\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$
$a_1^2 = -9{,}1228\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$	$a_1^2 = 16{,}6262\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$	$a_1^2 = -76{,}4100\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$	$a_1^2 = -88{,}9855\ \text{Pa}\sqrt{\text{cm}}$
$a_2^1 = -25{,}8818\ \text{Pa}$	$a_2^1 = -28{,}3924\ \text{Pa}$	$a_2^1 = -17{,}1055\ \text{Pa}$	$a_2^1 = -5{,}9816\ \text{Pa}$
$a_2^2 = 6{,}9421\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 7{,}8099\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 5{,}6921\ \text{Pa}$	$a_2^2 = 3{,}1423\ \text{Pa}$
$a_3^1 = -0{,}9840\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$	$a_3^1 = 0{,}6703\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$	$a_3^1 = -2{,}6836\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$	$a_3^1 = -4{,}8492\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$
$a_3^2 = -0{,}3305\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$	$a_3^2 = -0{,}4055\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$	$a_3^2 = -0{,}0888\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$	$a_3^2 = -0{,}0820\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1/2}$
$a_4^1 = 0{,}1290\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$	$a_4^1 = 0{,}1777\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$	$a_4^1 = 0{,}2619\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$	$a_4^1 = 1{,}0561\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$
$a_4^2 = -0{,}0049\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$	$a_4^2 = -0{,}0362\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$	$a_4^2 = -0{,}0938\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$	$a_4^2 = 0{,}1256\ \text{Pa}(\text{cm})^{-1}$
$a_5^1 = 0{,}0393\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$	$a_5^1 = 0{,}0973\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$	$a_5^1 = -0{,}0231\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$	$a_5^1 = -0{,}1003\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$
$a_5^2 = 0{,}0010\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0134\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$	$a_5^2 = 0{,}0123\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$	$a_5^2 = -0{,}0427\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3/2}$
$a_6^1 = -0{,}0172\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$	$a_6^1 = 0{,}0305\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$	$a_6^1 = 0{,}0050\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$	$a_6^1 = -0{,}0018\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$
$a_6^2 = -0{,}012\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$	$a_6^2 = -0{,}0067\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$	$a_6^2 = -0{,}0008\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$	$a_6^2 = 0{,}0115\ \text{Pa}(\text{cm})^{-2}$
$a_7^1 = 0{,}0011\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$	$a_7^1 = -0{,}0011\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$	$a_7^1 = 0{,}0008\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$	$a_7^1 = 0{,}0043\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$
$a_7^2 = 0{,}0003\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0012\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$	$a_7^2 = -0{,}0002\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$	$a_7^2 = 0{,}0008\ \text{Pa}(\text{cm})^{-5/2}$
$a_8^1 = 0{,}0003\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$	$a_8^1 = -0{,}0012\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$	$a_8^1 = -0{,}0004\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$	$a_8^1 = -0{,}0028\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$
$a_8^2 = -0{,}00007\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$	$a_8^2 = -0{,}0001\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$	$a_8^2 = 0{,}00004\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$	$a_8^2 = -0{,}0002\ \text{Pa}(\text{cm})^{-3}$
$a_9^1 = 0{,}00003\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$	$a_9^1 = 0{,}0009\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$	$a_9^1 = 0{,}0007\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$	$a_9^1 = 0{,}0036\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$
$a_9^2 = -0{,}00003\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$	$a_9^2 = 0{,}00009\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$	$a_9^2 = -0{,}00003\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-7/2}$	$a_9^2 = 0{,}0007\ \text{Pa}(\text{cm})^{-7/2}$
$a_{10}^1 = -0{,}00002\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$	$a_{10}^1 = -0{,}00087\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$	$a_{10}^1 = -0{,}00005\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$	$a_{10}^1 = -0{,}00115\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$
$a_{10}^2 = 0{,}00001\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$	$a_{10}^2 = 0{,}0069\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$	$a_{10}^2 = 0{,}00002\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$	$a_{10}^2 = 0{,}0064\ \text{Pa}\cdot(\text{cm})^{-4}$

Наряду с решением в замкнутой форме, описанным выше, рассматриваемая проблема отыскания коэффициентов ряда Уильямса сводилась к задаче минимизации целевой функции, определяемой равенством

$$J(A) = (1/2)\left(\sigma - CA\right)^T \left(\sigma - CA\right). \qquad (18)$$

Далее разыскивался минимум целевой функции с помощью алгоритма Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно [36; 37]. Результаты вычислений представлены в табл. 9.

Заключение

В работе вычислены амплитудные (масштабные) коэффициенты высших приближений асимптотического разложения М. Уильямса полей напряжений и перемещений в изотропном линейно упругом материале с помощью двух подходов: экспериментального, базирующегося на методе цифровой голографической фотоупругости, и вычислительного, зиждущегося на методе конечных элементов. В рамках метода цифровой голографической фотоупругости выполнена цифровая обработка изображений экспериментальных интерференционных картин, полученных методом голографической фотоупругости. В ряде М. Уильямса удержаны первые десять слагаемых для каждой моды нагружения. Это позволяет дать более точную оценку полей напряжений и смещений вблизи вершин трещин и расширить область действия степенного ряда Уильямса. Приложение JavaScript специально разработано для интерпретации и анализа экспериментальных данных, полученных в ходе экспериментов, проводимых интерференционно-оптическими методами. Разработанный инструмент позволяет находить и собирать точки, которые принадлежат к интерференционным полосам с минимальной интенсивностью света. Точки, определенные с помощью приложения, используются далее для расчетов

коэффициента интенсивности напряжений, Т-напряжений и коэффициентов членов более высокого порядка в разложении Уильямса. Параметры механики разрушения рассчитываются с использованием модифицированного переопределенного метода и алгоритма Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS) для минимизации целевой функции, который также применяется к численным результатам, найденным с помощью метода конечных элементов. Показано, что результаты, полученные с помощью двух подходов, хорошо согласуются друг с другом.

Следовательно, можно сделать вывод, что цифровая обработка интерференционных картин обеспечивает аналитическую реконструкцию поля напряжений вблизи вершины трещины и позволяет проводить детальный анализ поля напряжений у вершины трещины. Цифровая обработка является эффективным средством повышения точности фотоупругих данных за счет повышения резкости контуров интерференционных полос. Разработанные процедуры значительно упрощают анализ механических полей на больших расстояниях от вершины трещины. Параметры разрушения для смешанных режимов нагружения, а именно, коэффициенты интенсивности напряжений, Т-напряжения и коэффициенты разложения в ряд Уильямса более высокого порядка, получены для пластины с двумя взаимодействующими непараллельными трещинами с использованием 1) алгоритма, основанного на классическом переопределенного метода и 2) метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS) – алгоритма минимизации целевой функции. Процедура переопределенного метода основана только на поле напряжений. Выявлено, что данный подход характеризуется простотой и точностью. Также показано, что метод BFGS имеет неоспоримые преимущества перед классическим переопределенным методом.

Библиографический список

1. Матвиенко, Ю.Г. Основы физики и механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2022. – 144 с.
2. Матвиенко, Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2021. – 208 с.
3. Ritchie, R.O. Introduction to fracture mechanics / R.O. Ritchie, D. Liu. – Amsterdam: Elsevier, 2021. – 168 p.
4. Saxena, A. Basic fracture mechanics and its applications / A. Saxena. – Boca Raton: CRC Press, 2022. – 342 p.
5. Hello, G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions / G. Hello // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 144–145. – P. 265–275.
6. Hello, G. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium / G. Hello, M.B. Tahar, J.-M. Roeland // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49. – P. 556–566.
7. Dugnani, R. Stress intensity factor by combined perturbation method and universal weight functions / R. Dugnani, L. Ma // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 126. – 103994.
8. A data-driven model for predicting the mixed-mode stress intensity factors of a crack in composite / X. Zhang, T. Zhao, Y. Liu, Q. Chen, Z. Wang, Z. Wang // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 288. – 109385.
9. Ru, M. On enrichment strategies and methods to extract stress intensity factors using extended finite element method for biomaterials / M. Ru, C. Liu, Y. Wei // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 281. – 109060.
10. Stress intensity factor calculation of the cracks interacted by the oval-holes in anisotropic elastic solids under remote and non-uniform surface stresses / Q-h. Rao, C-c. Zhao, W. Yi, D. Sun, Z. Liu // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – Vol. 121. – 103475.
11. Assessment of amplitude factors of asymptotic expansion at the crack tip in flexoelectric solid under mode I and II loadings / T. Profant, J. Sladek, V. Sladek, M. Kotoul // International Journal of Solids and Structures. – 2023. – Vol. 269. – 112194.
12. Nejati, M. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms / M. Nejati, S. Gholi, M.R. Ayatollahi // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 91. – P. 837–862.
13. Melching, D. Advanced crack tip characterization using conjugate work integrals / D. Melching, E. Breitbarth // International Journal of Fatigue. – 2023. – Vol. 169. – 107501.
14. On the experimental characterization of the crack tip displacement fields on nonplanar elements: Numerical and experimental analysis / A. Camacho-Reyes, F.V. Antunes, J.M. Vasco-Olmo, F.A. Diaz, L.A. Felipe-Sese // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 124. – 103803.
15. Stepanova, L.V. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale / L.V. Stepanova, O.N. Belova // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – Vol. 119. – 103298.
16. Stepanova, L.V. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations / L.V. Stepanova, O.N. Belova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2022. – Vol. 30, iss. 19. – P. 3862–3884.
17. Степанова, Л.В. Применение метода голографической интерферометрии для реконструкции ряда М. Уильямса у вершины трещины / Л.В. Степанова, Д.А. Семенов, Г.С. Анисимов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. – Т. 29, № 1. – С. 15–46.
18. Степанова, Л.В. Идентификация коэффициентов интенсивности напряжений, Т-напряжений и коэффициентов регулярных слагаемых высокого порядка в разложении Уильямса с помощью молекулярно-динамического моделирования / Л.В. Степанова, О.Н. Белова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 2. – С. 47–77.
19. Experimental stress determination of blunt notches under combinations of modes I and II loading / S.K. Alavi, M.R. Ayatollahi, M. Daneshfar, B. Bahrami // Engineering Structures. – 2023. – Vol. 278. – 115517.
20. Shuai, J. Simple crack tip and stress intensity factor determination method for mode I crack using digital image correlation/nanoscale / J. Shuai, J. Zhao, L. Lei // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – Vol. 122. – 103621.
21. Ramesh, K. Digital Photoelasticity. Advanced Techniques and Applications / K. Ramesh. – Sham: Springer, 2013. – 430 p.

22. Ramesh, K. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications / K. Ramesh, S. Sasikumar // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. – 106186.

23. Разумовский, И.А. Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела / И.А. Разумовский. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 240 с.

24. Vivekanandan, A. Study of crack interaction effects under thermal loading by digital photoelasticity and finite elements / A. Vivekanandan, K. Ramesh // Experimental Mechanics. – 2020. – Vol. 60(3). – P. 295–316.

25. Vivekanandan, A. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity / A. Vivekanandan, K. Ramesh // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 99. – P. 104–117.

26. Ramesh, K. Developments in Photoelasticity-A renaissance / K. Ramesh. – IOP Publishing, 2021. – 225 p.

27. Anand, C. Simulating Isochromatic Fringes from Finite Element Results of FEniCS / C. Anand, S. Natarajan, K. Ramesh // Experimental Techniques. – 2023.

28. Sasikumar, S. Framework to select refining parameters in Total fringe order photoelastcity (TFP) / S. Sasikumar, K. Ramesh // Optics and Lasers in Engineering. – 2023. – Vol. 160. – 107277.

29. Application of artificial neural networks for state analysis based on the photoelastic method / A. Konurin, S. Neverov, A. Neverov, D. Orlov, I. Zharov, M. Konurina // Geohazard Mechanics. – 2023.

30. Lee, H. Time-staged photoelastic image prediction using multi-stage convolutional autoencoders / H. Lee, H. An, D.-W. Lee // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2022. – Vol. 116. – 105265.

31. Brinez-de Leon, J.C. PhotoelastNet: a deep convolutional neural network for evaluating the stress field by using a single color photoelasticity image / J.C. Brinez-de Leon, M. Rico-Garcia, A. Restrepo-Martinez // Applied Optics. – Iss. 7. – P. D50-62.

32. Fringe pattern analysis to evaluate light sources and sensors in digital photoelasticity / H. Fandino-Toro, Y. Aristizabal-Lopez, A. Restrepo-Martinez, J. Brinez-de Leon // Applied Optics. – 2023. – Vol. 62, iss. 10. – P. D2560–2568.

33. Zhao, W. Accuracy improvement of demodulating the stress field with StressUnet in photoelasticity / W. Zhao, G. Zhang, J. Li // Applied Optics. – 2022. – Vol. 61. – P. 8678–8687.

34. Ayatollahi, M.R. Digital image correlation methos for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension specimen / M.R. Ayatollahi, M. Moazzami // Optics and Lasers in Engineering. – 2017. – Vol. 90. – P. 26–33.

35. Favre, H. Sur une novelle methode optic de determination des tensions interieres / H. Favre // Revue d'Optic. – 1929. – Vol. 8(193). – P. 241–289.

36. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Cham: Springer, 2006. – 686 p.

37. Artificial neural network in prediction of mixed-mode I/II fracture load / B. Bahrami, H. Talebi, M.R. Ayatollahi, M.R. Khosravani // International Journal of Mechanical Sciences. – 2023. – Vol. 248. – 108214.

References

1. Matvienko Yu.G. Basics of Physics and Fracture Mechanics [Osnovy fiziki i mehaniki razrushenija]. Moscow, Fizmatlit, 2022, 144 p.

2. Matvienko Yu.G. Two-parametric fracture mechanics [Dvuhparametricheskaja mehanika razrushenija]. Moscow, Fizmatlit, 2021, 208 p.

3. Ritchie R.O., Liu D. Introduction to fracture mechanics. Elsevier, 2021.

4. Saxena A. Basic Fracture Mechanics and its Applications. Boca Raton, CRC Press, 2022, 342 p.

5. Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, No. 144-145, pp. 265-275. http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012.

6. Hello G., Tahar, M.B., Roeland, J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures,* 2012, Vol.49, pp. 556-566. http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024.

7. Dugnani R., Ma L. Stress intensity factor by combined perturbation method and universal weight functions. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2023, Vol. 126, 103994. Doi:10.1016/j.tafmec.2023.103994.

8. Zhang X., Zhao T., Liu Y., Chen Q., Wang Z., Wang Z. A data-driven model for predicting the mixed-mode stress intensity factors of a crack in composite. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, Vol. 288, 109385.doi:10.1016/j,engfracmech.2023.109385.

9. Ru M., Liu C., Wei Y. On enrichment strategies and methods to extract stress intensity factors using extended finite element method for biomaterials. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, Vol. 281, 109060.doi:10.1016/j,engfracmech.2023.109060.

10. Rao Q-h., Zhao C-c., Yi W., Sun D., Liu Z. Stress intensity factor calculation of the cracks interacted by the oval-holes in anisotropic elastic solids under remote and non-uniform surface stresses. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2022, Vol. 121, 103475. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103475.

11. Profant T., Sladek J., Sladek V., Kotoul M. Assessment of amplitude factors of asymptotic expansion at the crack tip in flexoelectric solid under mode I and II loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 2023, Vol. 269, 112194.doi:10.1016/j.ijsolstr.2023.112194.

12. Nejati M., Gholi S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, Vol. 91, P. 837-862. doi:10.106/j.apm.2020.09.025.

13. Melching D., Breitbarth E. Advanced crack tip characterization using conjugate work integrals. *International Journal of Fatigue,* 2023, Vol. 169, 107501. Doi:10/1016/j.ijfatigue.2023.107501.

14. Camacho-Reyes A., Antunes F.V., Vasco-Olmo J.M., Diaz F.A., Felipe-Sese L.A. On the experimental characterisation of the crack tip displacement fields on nonplanar elements: Numerical and experimental analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2023, Vol. 124, 103803. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.103803.

15. Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2022, Vol. 119, 103298. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298

16. Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations.

Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2022, doi:10.1080/ 15376494.2022.2084800

17. Stepanova L.V., Semenov D.A., Anisimov G.S. Application ofholography method for therestoration of the Williams series near the crack tip [Primenenie metoda golograficheskoj interferometrii dlja rekonstrukcii rjada M. Uil'jamsa u vershiny treshhiny].Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaiaseriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 15–45. DOI:http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-45.

18. Stepanova L.V., Belova O.N. Identification of stress intensity factors, T-stresses and higher-order coefficients of regular terms in the Williams series expansion through molecular dynamics simulations [Identifikacija kojefficientov intensivnosti naprjazhenij, T-naprjazhenij i kojefficientov reguljarnyh slagaemyh vysokogo porjadka v razlozhenii Uil'jamsa s pomoshh'ju molekuljarno-dinamicheskogo modelirovanija]. PNRPU Mechanics Bulletin, 2023, no. 2, pp. 47-77. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.06

19. Alavi S.K., Ayatollahi M.R., Daneshfar M., Bahrami B. Experimental stress determination of blunt notches under combinations of modes I and II loading. *Engineering Structures,* 2023, Vol. 278. 115517. Doi:10.1016/engstruct.2022.115517.

20. Shuai J., Zhao J., Lei L. Simple crack tip and stress intensity factor determination method for mode I crack using digital image correlation// nanoscale. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, Vol. 122, 103621. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103621.

21. Ramesh K. Digital Photoelasticity. Advanced Techniques and Applications. Sham: Springer, 2013. 430 p.

22. Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, 106186.

23. Razumovskij I.A. Interference-optic methos of solid mechanics [Interferencionno-opticheskie metody mehaniki deformiruemogo tverdogo tela]. Moscow: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2007, 240 p.

24. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of crack interaction effects under thermal loading by digital photoelasticity and finite elements. *Experimental Mechanics,* 2020, V. 60(3), P. 295-316.

25. Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2019, Vol. 99, P. 104-117.

26. Ramesh K. Developments in Photoelasticity-A renaissance. IOP Publishing, 2021.

27. Anand C., Natarajan S., Ramesh K. Simulating Isochromatic Fringes from Finite Element Results of FEniCS. *Experimental Techniques,* 2023. https://doi.org/10.1007/s40799-023-00639-z

28. Sasikumar S., Ramesh K. Framework to select refining parameters in Total fringe order photoelastcity (TFP). *Optics and Lasers in Engineering,* 2023, Vol. 160, 107277.

29. Konurin A., Neverov S., Neverov A., Orlov D., Zharov I., Konurina M. Application of artificial neural networks for state analysis based on the photoelastic method. *Geohazard Mechanics,* 2023. Doi:10.1016/j.ghm.2023.03.001.

30. Lee H., An H., Lee D.-W. Time-staged photoelastic image prediction using multi-stage convolutional autoencoders. *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* 2022. Vol. 116, 105265. Doi:10.1016/j.engappai.2022.105265.

31. Brinez-de Leon J.C., Rico-Garcia M., Restrepo-Martinez A. PhotoelastNet : a deep convolutional neural network for evaluating the stress field by using a single color photoelasticity image, *Applied Optics*, 2022, Vol. 61, Issue 7, P. D50-62. doi.org/10.1364/AO.444563.

32. Fandino-Toro H., Aristizabal-Lopez Y., Restrepo-Martinez A., Brinez-de Leon J. Fringe pattern analysis to evaluate light sources and sensors in digital photoelasticity. *Applied Optics,* 2023, Vol. 62, Issue 10, P. D2560-2568. doi.org/10.1364/AO.483735.

33. Zhao W., Zhang G., Li J. Accuracy improvement of demodulating the stress field with StressUnet in photoelasticity. *Applied Optic,* 2022, Vol. 61, Issue 29, P. 8678-8687. doi.org/10.1364/AO.464466.

34. Ayatollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation methos for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension specimen. *Optics and Lasers in Engineering,* 2017, Vol. 90, P. 26-33. Doi:10.1016/j.optlaseng.2016.09.011.

35. Favre H. Sur une novelle methode optic de determination des tensions interieres. *Revue d'Optic,* 1929, Vol. 8(193), P. 241-289.

36. Nocedal J., Wright., S.J. Numerical Optimization. Cham, Springer, 2006, 686 p.

37. Bahrami B., Talebi H., Ayatollahi M.R., Khosravani M.R. Artificial neural network in prediction of mixed-mode I/II fracture load. *International Journal of Mechanical Sciences,* 2023, Vol. 248. 108214.doi:10.1016/j.ijmecsci.2023.108214.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант №21-11-00346).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (grant No. 21-11-00346).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.