Папкова, Ю.И. Энергетические характеристики прохождения звуковой волны сквозь области скачкообразного изменения сечения волновода / Ю.И. Папкова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.05 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 65–74.

Perm Polytech Style: Papkova Yu.I. Energy characteristics of the passage of a sound wave through regions of stepwise changes in the waveguide cross section. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 3, pp. 65-74. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.05
УДК 534.231

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ СКВОЗЬ ОБЛАСТИ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ СЕЧЕНИЯ ВОЛНОВОДА

Ю.И. Папкова

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 07 сентября 2023 г.
Одобрена: 25 июня 2024 г.
Принята к публикации:
30 июня 2024 г.

Ключевые слова:

акустический волновод, нормальные моды, бесконечные системы уравнений, средний поток мощности волны.

АННОТАЦИЯ

В настоящее время теоретической основой для моделирования распространения звука в морских волноводах является анализ краевых задач для уравнения Гельмгольца, при этом дно океана представляет собой неровную границу раздела различных сред и рассматривается как совокупность геологических объектов с различной формой и структурой. В работе представлено аналитическое решение задачи о распространении звука точечным источником в волноводе, имеющем резкое изменение сечения, которое моделируется как цилиндрический выступ или впадина. Потенциал скоростей строится в каждой из частей декомпозиции волновода в виде ряда по нормальным модам, с последующей сшивкой решения на границе. Для определения коэффициентов при нормальных модах используется аппарат бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Представленное решение позволяет значительно упростить исследование важнейшей характеристики звукового поля – поток энергии через сечение. В работе исследуются энергетические характеристики звуковой волны в волноводе, имеющем выступ (впадину). Приводятся примеры численной реализации с параметрами, характерными для геофизических волноводов.

© **Папкова Юлия Игоревна** – к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры «Высшая математика», e-mail: yulia.papkova@gmail.com, ID: 0000-0003-4841-2752.

Yulia I. Papkova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, e-mail: yulia.papkova@gmail.com, ID: 0000-0003-4841-2752.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ENERGY CHARACTERISTICS OF THE PASSAGE OF A SOUND WAVE THROUGH REGIONS OF STEPWISE CHANGES IN THE WAVEGUIDE CROSS SECTION

Yu.I. Papkova

Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 07 September 2023
Approved: 25 June 2024
Accepted for publication:
30 June 2024

Keywords:

acoustic waveguide, normal modes, infinite systems of equations, average wave power flux.

ABSTRACT

At present time, the theoretical basis for modeling sound propagation in marine waveguides is the analysis of boundary value problems for the Helmholtz equation, while the ocean bottom is an uneven interface between different media and is considered as a set of geological objects with different shapes and structures. The paper presents an analytical solution to the problem of sound propagation by a point source in a waveguide with a stepwise change in the cross section, which is modeled as a cylindrical protrusion or cavity. The velocity potential is constructed in each part of the waveguide decomposition as a series in normal modes, followed by matching the solution at the boundary. To calculate the unknown coefficients of normal modes, the theory of infinite systems of linear algebraic equations is used. The presented solution makes it possible to significantly simplify the study of the most important characteristic of the sound field is the energy flux through the cross section. The paper investigates the energy characteristics of a sound wave in a waveguide having a cylindrical protrusion (or cavity). Examples of numerical implementation are given for problem parameters, which are typical for geophysical waveguides.

Введение

Многие задачи теории упругости, электродинамики и акустики в волноводах имеют между собой общность, благодаря которой методы построения аналитических решений данных задач во многом схожи [1]. Например [2], впервые решенное двумерное интегральное уравнения Винера – Хопфа может быть использовано в задачах распространения радиоволн, при конструировании элементной базы радиоэлектроники, в проблеме прочности в механике, в многочисленных других важных областях. Однако при детализации модели волновода, в частности при попытке учесть неоднородность по горизонтальной и вертикальной составляющей поля, задача уже не имеет аналитического решения даже в простейшем приближении, в этом случае используются численные методы для компьютерного моделирования акустических полей в волноводах. Численные методы, такие как метод конечных элементов, например [3], метод конечных разностей [4; 5] и др., и их разнообразные модификации [6–12], позволяют решать волновые задачи акустики для областей с геометрией любого уровня сложности. Несмотря на универсальность вышеперечисленных методов, принципиальным моментом численного моделирования волноводных процессов является вопрос корректности их приложения в каждом конкретном случае. В связи с этим, наряду с построением численных решений, в настоящее время активно развиваются численно-аналитические методы расчета полей, например [13–16], параболические приближения для плавно меняющегося рельефа дна [17–20].

Задача о распространении сигнала в волноводе является классической задачей теории нерегулярных волноводов. Для исследования данных волноводов используется большое количество как специфических методов акустики, так и модификации хорошо известных подходов механики и математической физики. В простейших задачах рассматривается волновод с плоскопараллельными границами, для которого обычно можно найти строгое замкнутое решение [21–23]. В более сложных моделях широкое применение получил метод декомпозиции волновода на элементарные области [1; 24], где аналитические и численно-аналитические решения получаются из условий сопряжения решений в некоторых элементарных областях. При этом в задачах электродинамики оказывается возможным провести сшивку решений на основе метода факторизации [1], в то время как в задачах теории упругости и акустики [25] условия сопряжения приводят к бесконечным системам линейных уравнений.

Численно-аналитическая форма решения, обеспеченная использованием метода декомпозиции, позволяет значительно упростить исследование важнейшей характеристики звукового поля – потока энергии через сечение [25], так как в этом случае упрощаются операции, связанные с интегрированием функций по сечению волновода. Действительно, аналитическая форма полученного решения, дающая явные выражения для звукового поля на границе, позволяет найти энергетические характеристики прохождения звуковой волны через области скачкообразного изменения сечения волновода.

В работе проведены исследования энергетических характеристик акустического поля для типичного морского геофизического волновода с подводным выступом (впадиной). Подобный подход позволяет упростить численное моделирование и стать основой для дальнейшего исследования более сложной структуры дна.

Основные уравнения и структура общего решения задачи

Начало цилиндрической системы координат расположим на поверхности волновода над точечным источником звука с координатами (0, z_0), ось Oz направлена ко дну. Разобьем волновод на две области цилиндрической формы, каждая из которых характеризуется скоростью звука $c_j(z)$ и постоянной глубиной h_j (j = 0, 1). Выступ моделируется, если выполняется условие $h_0 < h_1$, радиус основания цилиндрического выступа при этом r_0, а высота ($h_1 - h_0$) (рис. 1). Звуковое поле в волноводе определяют [1; 21] амплитуды потенциалов скоростей Φ_j в каждой из частичных областей, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1)

$$\Delta\Phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi_0 = -\frac{\delta(z-z_0)\delta(r)}{2\pi r} \text{ и } \Delta\Phi_1 + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi_1 = 0, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ – оператор Лапласа, δ – дельта-функция Дирака, ω – круговая частота источника звука.

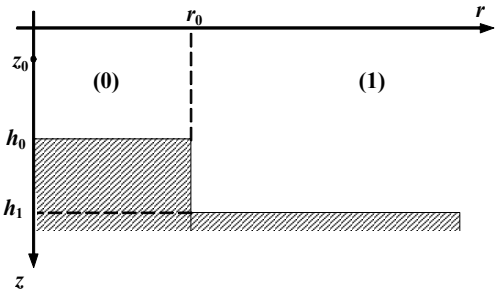


Рис. 1 Волновод с выступом

Fig. 1. Waveguide with protrusion

В качестве граничных условий используем условия того, что поверхность волновода является абсолютно мягкой, а дно и выступ являются абсолютно жесткими:

$$\Phi(r,0) = 0\,,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h_0} = 0 \quad (r < r_0)\,,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h_1} = 0 \quad (r > r_0)\,,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0 \quad (h_0 < z < h_1)\,.$$

В первом приближении эти условия соответствуют условиям на поверхности и на дне для природных акустических морских волноводов. При этом в неограниченной области при $r \to \infty$ для потенциала скоростей должно выполняться [1] условие излучения (условие Зоммерфильда)

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{i\omega\Phi}{c}\right) = 0\,,$$

т.е. поле любого излучателя в этом случае может быть записано в виде расходящейся волны с амплитудой, меняющей по закону $1/\sqrt{r}$.

Рассмотрим решение краевой задачи для уравнений (1) в виде суммы нормальных мод. Каждая нормальная мода представляет собой решение вида $\phi(z;\xi)\psi(\xi r)$, где ξ – константа разделения, которую принято называть «горизонтальным волновым числом». Подставляя это выражение в однородное уравнение Гельмгольца, и, разделяя переменные, получим для ψ следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \xi^2\psi = 0\,.$$

Как известно, решение данного уравнения имеет вид

$$\psi = C_1 H_0^{(1)}(\xi r) + C_2 J_0(\xi r)\,, \quad (2)$$

где $H_0^{(1)}(\xi r)$, $J_0(\xi r)$ – функции Ханкеля и Бесселя нулевого порядка. При этом в неограниченной области волновода решение, описывающее уходящую от излучателя волну, можно записать как $\psi = H_0^{(1)}(\xi r)$.

Для функции φ(z; ξ) с учетом условий на горизонтальных стенках волновода получаем в ограниченной области (0) и неограниченной области (1) (рис. 1) следующие краевые задачи соответственно

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \xi^2\right)\varphi = 0, \quad \varphi(0,\xi) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz}(h_0,\xi) = 0. \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \xi^2\right)\varphi = 0, \quad \varphi(0,\xi) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz}(h_1,\xi) = 0. \quad (4)$$

Данные краевые задачи являются задачами Штурма – Лиувиля и, как следствие, имеют дискретный спектр. Обозначим собственные функции задач (3) и (4) как $\varphi_{0n}(z)$ и $\varphi_{1n}(z)$ соответственно. Заметим, что данные функции принято называть [1] вертикальными собственными функциями волновода. Данные системы функций являются полными и ортогональными в функциональных пространствах $L_2[0; h_j]$ (j =0, 1).

Тогда, пользуясь полнотой системы функций $\{\varphi_{0n}(z;\xi_{0n})\}_{n=0}^{\infty}$, можно представить потенциал скорости $\Phi(r,z)$ во внутренней области (0) в виде суммы нормальных мод:

$$\Phi_0(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{0n}(z;\xi_{0n})\left(A_n J_0(\xi_{0n}r) + B_n H_0^{(1)}(\xi_{0n}r)\right), \quad (5)$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

После подстановки выражения (5) в неоднородное уравнение Гельмгольца (1) с учетом соотношения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \xi_{0n}^2\right)H_0^{(1)}(\xi_{0n}r) = \frac{4i\delta(r)}{2\pi r}$$

получим функциональное равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi_{0n}(z;\xi_n) = \frac{i}{4}\delta(z-z_0)\,. \qquad (6)$$

Используя далее ортогональность собственных функций $\{\varphi_{0n}(z;\xi_{0n})\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке [0; h_0], можно найти, что

$$B_n = \frac{i\varphi_{0n}(z_0;\xi_{0n})}{4\int_0^h \varphi_{0n}^2(s;\xi_{0n})ds}\,.$$

Таким образом, условие в источнике звука выполнено, и потенциалы скорости звука можно записать следующим образом

$$\Phi_0 = \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_{0n}(z_0)\varphi_{0n}(z)}{\gamma_{0n}}H_0^{(1)}(\xi_{0n}r)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_{0n}(z)J_0(\xi_{0n}r)$$
$$\text{при } r \le r_0\,, \qquad (7)$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varphi_{1n}(z)H_0^{(1)}(\xi_{1n}r) \text{ при } r \ge r_0\,, \qquad (8)$$

где $\gamma_{0n} = \int_0^{h_0}\varphi_{0n}^2(s)ds$, ξ_{0n}, ξ_{1n} – горизонтальные собственные числа, которые находятся из краевых задач (3) и (4).

Подставляя выражения звуковых потенциалов в граничные условия и условия непрерывности

$$\Phi_1(r_0,z) = \Phi_0(r_0,z),\ z\in[0;h_0]$$

$$\frac{\partial\Phi_1(r_0,z)}{\partial r} = \begin{cases}\dfrac{\partial\Phi_0(r_0,z)}{\partial r}, & z\in[0;h_0]\\ 0, & z\in(h_0;h_1]\end{cases}, \qquad (9)$$

в силу ортогональности собственных функций $\varphi_{j,n}(z)$ соответствующих краевых задач в $L_2[0; h_j]$, строим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов A_n, C_n:

$$\begin{cases} A_m = \sum_{n=0}^{\infty} C_n M_{mn}^{(1)} + B_m^{(1)},\\ C_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n M_{mn}^{(2)} + B_m^{(2)},\end{cases} \qquad (10)$$

где

$$M_{mn}^{(1)} = \frac{2h_0h_1}{\pi}\cdot\frac{H_0^{(1)}(\xi_{1n}r_0)}{J_0(\xi_{0m}r_0)}\cdot\frac{(-1)^m(n+1/2)\cos\left(\dfrac{\pi h_0(n+1/2)}{h_1}\right)}{h_1^2(m+1/2)^2-h_0^2(n+1/2)^2},$$

$$M_{mn}^{(2)} = \frac{2h_0^2\xi_{0n}}{\pi\xi_{1m}}\cdot\frac{J_1(\xi_{0n}r_0)}{H_1^{(1)}(\xi_{1m}r_0)}\cdot\frac{(-1)^m(m+1/2)\cos\left(\dfrac{\pi h_0(m+1/2)}{h_1}\right)}{h_1^2(n+1/2)^2-h_0^2(m+1/2)^2},$$

$$B_m^{(1)} = -\frac{i}{2}\cdot\frac{H_0^{(1)}(\xi_{0m}r_0)}{J_0(\xi_{0m}r_0)}\cdot\sin\left(\frac{\pi z_0(m+1/2)}{h_0}\right),$$

$$B_m^{(2)} = \frac{ih_0(m+1/2)\cos\left(\dfrac{\pi h_0(m+1/2)}{h_1}\right)}{\pi\xi_{1m}H_1^{(1)}(\xi_{1m}r_0)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m H_1^{(1)}(\xi_{0n}r_0)\sin\left(\dfrac{\pi z_0(n+1/2)}{h_0}\right)}{h_1^2(n+1/2)^2-h_0^2(m+1/2)^2}.$$

Заметим, что для неоднородного профиля скорости звука $c_j(z)$ представленные выше формулы будут давать приближенные значения коэффициентов и свободных членов бесконечной системы при больших значениях индексов m, n в силу того, что вертикальные собственные функции асимптотически приближаются с ростом номера к соответствующим вертикальным собственным функциям $\sin\pi z(n+1/2)/h_j$ для постоянного профиля скорости звука. Можно показать, что представленная выше бесконечная система удовлетворяет условиям квазирегулярности для постоянного профиля скорости звука, данные оценки с точностью до бесконечно малых будут соответствовать и неоднородному случаю.

Рассмотрим волновод с впадиной, данный рельеф дна можно встретить в любом районе Мирового океана. На рис. 2 изображен гидроакустический волновод, имеющий впадину с радиальной симметрией, внутри которого расположен точечный гармонический источник звука. Разобьем волновод на три области, определяемые скоростью звука $c_j(z)$ и постоянной глубиной h_j (j = 0, 1, 2), плотность жидкости ρ полагаем постоянной во всех областях. Распространение звуковых волн описывается неоднородным уравнением Гельмгольца (1).

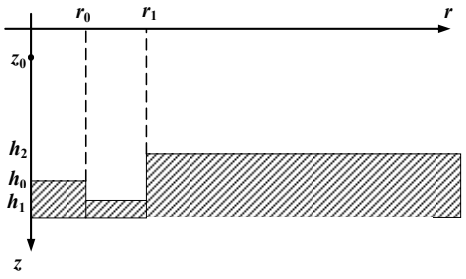


Рис. 2. Волновод с впадиной

Fig.2. Waveguide with cavity

Полагаем, что поверхность волновода является акустически мягкой, а дно – акустически жестким:

$$\Phi(r,0) = 0;\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_L = 0,$$

где L – кривая, определяющая форму дна.

Решение для волновода с впадиной, удовлетворяющее как граничным условиям на горизонтальных стенках волновода, так и условию излучения, снова строится в виде суммы нормальных мод.

Общее решение для данной краевой задачи имеет следующий вид:

$$\Phi_0 = \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_{0n}(z_0)\varphi_{0n}(z)}{\gamma_{0n}}H_0^{(1)}\left(\xi_{0n}r\right)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n^0\varphi_{0n}(z)J_0\left(\xi_{0n}r\right);$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}A_n^1\varphi_{1n}(z)J_0\left(\xi_{1n}r\right)+\sum_{n=0}^{\infty}B_n^1\varphi_{1n}(z)H_0^{(1)}\left(\xi_{1n}r\right);$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}B_n^2\varphi_{2n}(z)H_0^{(1)}\left(\xi_{2n}r\right),$$

где $\gamma_{jn} = \int_0^{h_j}(\varphi_{jn}(s))^2 ds$, ξ_{jn}, $\varphi_{jn}(z)$ – собственные числа и собственные функции соответствующих краевых задач.

Из условий непрерывности звукового поля на границах раздела частичных областей $r = r_k$ ($k = 0, 1$):

$$\Phi_1(R_0,z) = \begin{cases}\Phi_0(R_0,z), & z\in[0;h_0]\\ \Phi_1(R_0,z), & z\in(h_0;h_1]\end{cases};$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}(R_0,z) = \begin{cases}\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial r}(R_0,z), & z\in[0;h_0)\\ 0, & z\in[h_0;h_1]\end{cases},$$

$$\Phi_1(R_1,z) = \begin{cases}\Phi_2(R_1,z), & z\in[0;h_2]\\ \Phi_1(R_1,z), & z\in(h_2;h_1]\end{cases};$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}(R_1,z) = \begin{cases}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r}(R_1,z), & z\in[0;h_2)\\ 0, & z\in[h_2;h_1]\end{cases}$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов $\left\{A_n^j\right\}$ и $\left\{B_n^j\right\}$ в представлении амплитуды потенциала скоростей:

$$\begin{cases}\gamma_{1m}\dfrac{J_0(\xi_{1m}r_0)}{J_0(\xi_{1m}r_1)}x_m^1+\gamma_{1m}y_m^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^1x_n^0-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^2y_n^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^2\dfrac{J_0(\xi_{1n}r_0)}{J_0(\xi_{1n}r_1)}x_n^1=Q_m^1;\\ \gamma_{1m}\xi_{1m}\dfrac{J_1(\xi_{1m}r_0)}{J_0(\xi_{1m}r_1)}x_m^1+\gamma_{1m}\xi_{1m}\dfrac{H_1^{(1)}(\xi_{1m}r_0)}{H_0^{(1)}(\xi_{1m}r_0)}y_m^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^1\xi_{0n}\dfrac{J_1(\xi_{0n}r_0)}{J_0(\xi_{0n}r_0)}x_n^0=Q_m^2;\\ \gamma_{1m}x_m^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^4x_n^1+\gamma_{1m}\dfrac{H_0^{(1)}(\xi_{1m}r_1)}{H_0^{(1)}(\xi_{1m}r_0)}y_m^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^4\dfrac{H_0^{(1)}(\xi_{1n}r_1)}{H_0^{(1)}(\xi_{1n}r_0)}y_n^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^3y_n^2=0;\\ \gamma_{1m}\xi_{1m}\dfrac{J_1(\xi_{1m}r_1)}{J_0(\xi_{1m}r_1)}x_m^1+\gamma_{1m}\xi_{1m}\dfrac{H_1^{(1)}(\xi_{1m}r_1)}{H_0^{(1)}(\xi_{1m}r_0)}y_m^1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{m,n}^3\xi_{2n}\dfrac{H_1^{(1)}(\xi_{2n}r_1)}{H_0^{(1)}(\xi_{2n}r_1)}y_n^2=0,\end{cases} \quad (11)$$

$$m = 0,1,2\ldots$$

где

$$x_n^0 = A_n^0J_0(\xi_{0n}r_0);\ x_n^1 = A_n^1J_0(\xi_{1n}r_1);$$
$$y_n^1 = B_n^1\ H_0^{(1)}(\xi_{1n}r_0);\ y_n^2 = B_n^2\ H_0^{(1)}(\xi_{1n}r_1);$$

$$I_{m,n}^1 = \int_0^{h_0}\varphi_{0n}\varphi_{1m}dz;\ Q_m^1 = \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{\gamma_{0n}}I_{m,n}^1H_0^{(1)}\left(\xi_{0n}r_0\right);$$

$$I_{m,n}^2 = \int_{h_0}^{h_1}\varphi_{1n}\varphi_{1m}dz;\ \ Q_m^2 = \frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{\gamma_{0n}}I_{m,n}^1\xi_{0n}H_1^{(1)}\left(\xi_{0n}r_0\right);$$

$$I_{m,n}^3 = \int_0^{h_2}\varphi_{2n}\varphi_{1m}dz;\ I_{m,n}^4 = \int_{h_2}^{h_1}\varphi_{1n}\varphi_{1m}dz$$

Энергетические характеристики волновода

Согласно [26; 27] средней поток мощности волны в областях декомпозиции волновода вычисляется следующим образом:

$$W = \frac{1}{4}\int_0^{h_j}\left(p^*v_r + pv_r^*\right)dz,$$

где $p = -i\omega\rho\Phi$ – звуковое давление, v – колебательная скорость $v_r = \Phi_r'$, $v_z = \Phi_z'$ * – знак комплексного сопряжения.

Подставляя выражения (2) и проводя соответствующие преобразования, получим формулы для среднего потока мощности сквозь зону стыка областей (0) и (1) волновода. Тогда средний поток мощности от источника в области над выступом (0) через сечение $r = r_0$ выражается как сумма средних потоков мощности каждой из нормальных мод

$$W_{(0)} = \frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{N_0}\frac{\varphi_{0n}(z_0)\xi_{0n}}{4}\times$$
$$\times\left(\left(J_1\left(\xi_{0n}r_0\right)Y_0\left(\xi_{0n}r_0\right)-J_0\left(\xi_{0n}r_0\right)Y_1\left(\xi_{0n}r_0\right)\right)\left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{4\gamma_{0n}}+\operatorname{Im}A_n\right)+\right.$$
$$+\frac{\omega}{4\pi}\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\varphi_{0n}(z_0)\,|\,\xi_{0n}\,|\operatorname{Im}A_n\left(K_0\left(|\,\xi_{0n}\,|\,r_0\right)I_1\left(|\,\xi_{0n}\,|\,r_0\right)+\right.$$
$$\left.\left.+K_1\left(|\,\xi_{0n}\,|\,r_0\right)I_0\left(|\,\xi_{0n}\,|\,r_0\right)\right),\right.$$

где $N_0 + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области над выступом, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [28].

Средний поток мощности области без выступа (1), подводимый через сечение $r = r_0$, представляет собой сумму средних потоков мощности распространяющихся нормальных волн:

$$W_{(1)} = \frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{N_1}|\,C_n\,|^2\ \gamma_{1n}\xi_{1n}\left(J_1\left(\xi_{1n}r_0\right)Y_0\left(\xi_{1n}r_0\right)-\right.$$
$$\left.-J_0\left(\xi_{1n}r_0\right)Y_1\left(\xi_{1n}r_0\right)\right),$$

где $N_1 + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области без выступа.

Согласно закону сохранения энергии следует равенство:

$$\frac{W_{(1)}}{W_{(0)}} = 1,$$

которое может служить критерием точности решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Также можно вычислить [29] еще одну важную характеристику – среднюю «перекрестную» энергию, приходящуюся на единицу длины волновода нормальной волны и ее сопряженной

$$E = \frac{1}{4}\int_0^{h_j} \left(v_r v_r^* + v_z v_z^* \right) dz,$$

используя аналитическую форму представленного решения, получаем

$$\begin{aligned}
\left(v_r\right)_0 = \sum_{n=0}^{N_0} \varphi_{0n}(z)\,\xi_{0n} \Bigg[\left(\operatorname{Re} A_n J_1\left(\xi_{0n} r_0\right) - \frac{\varphi_{0n}(z_0)}{4\gamma_{0n}} Y_1\left(\xi_{0n} r_0\right) \right) + \\
+ i \left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{4\gamma_{0n}} J_1\left(\xi_{0n} r_0\right) + \operatorname{Im} A_n J_1\left(\xi_{0n} r_0\right) \right) \Bigg] + \\
+ \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \varphi_{0n}(z) \left|\xi_{0n}\right| \Bigg[\left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{2\pi\gamma_{0n}} K_1\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) - \operatorname{Re} A_n I_1\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) \right) - \\
- i \operatorname{Im} A_n I_1\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) \Bigg];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(v_r\right)_1 = \sum_{n=0}^{N_1} \varphi_{1n}(z) \xi_{1n} \Big[\left(\operatorname{Re} C_n J_1\left(\xi_{1n} r_0\right) - \operatorname{Im} C_n Y_0\left(\xi_{1n} r_0\right) \right) + \\
+ i \left(\operatorname{Re} C_n Y_1\left(\xi_{1n} r_0\right) + \operatorname{Im} C_n J_1\left(\xi_{1n} r_0\right) \right) \Big] + \\
+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \varphi_{1n}(z) \left|\xi_{1n}\right| \Big[\operatorname{Im} C_n K_1\left(\left|\xi_{1n}\right| r_0\right) - i \operatorname{Re} C_n K_1\left(\left|\xi_{1n}\right| r_0\right) \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(v_z\right)_0 = \sum_{n=0}^{N_0} \varphi'_{0n}(z) \Bigg[\left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{4\gamma_{0n}} Y_0\left(\xi_{0n} r_0\right) - \operatorname{Re} A_n J_0\left(\xi_{0n} r_0\right) \right) - \\
- i \left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{4\gamma_{0n}} J_0\left(\xi_{0n} r_0\right) + \operatorname{Im} A_n J_0\left(\xi_{0n} r_0\right) \right) \Bigg] - \\
- \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \varphi'_{0n}(z) \Bigg[\left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{2\pi\gamma_{0n}} K_0\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) + \operatorname{Re} A_n I_0\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) \right) + \\
+ i \operatorname{Im} A_n I_0\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) \Bigg];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(v_z\right)_1 = \sum_{n=0}^{N_1} \varphi'_{1n}(z) \Big[\left(\operatorname{Im} C_n Y_0\left(\xi_{1n} r_0\right) - \operatorname{Re} C_n J_0\left(\xi_{1n} r_0\right) \right) - \\
- i \left(\operatorname{Re} C_n Y_0\left(\xi_{1n} r_0\right) + \operatorname{Im} C_n J_0\left(\xi_{1n} r_0\right) \right) \Big] - \\
- \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \varphi'_{0n}(z) \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{Im} C_n K_0\left(\left|\xi_{1n}\right| r_0\right) - i \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} C_n K_0\left(\left|\xi_{1n}\right| r_0\right) \right].
\end{aligned}$$

Далее, зная средние «перекрестные» энергии, можно, согласно [30], вычислить энергетический уровень

$$L = 10 \lg\left(\frac{E_{(1)}}{E_{(0)}} \right).$$

Полученное аналитическое решение позволяет также исследовать энергетические характеристики распространения звука проникновения звуковой волны сквозь области скачкообразного изменения сечения волновода с впадиной. Средний поток мощности от источника в области через сечение $r = r_0$ есть сумма средних потоков мощности каждой из нормальных мод

$$\begin{aligned}
W_0 = \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{\varphi_{0n}(z_0)\xi_{0n}}{4} \left(J_1(\xi_{0n} r_0) Y_0(\xi_{0n} r_0) - J_0(\xi_{0n} r_0) Y_1(\xi_{0n} r_0) \right) \times \\
\times \left(\frac{\varphi_{0n}(z_0)}{4\gamma_{0n}} + \operatorname{Im} A_n^0 \right) + \\
+ \frac{\omega}{4\pi} \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \varphi_{0n}(z_0) \left|\xi_{0n}\right| \operatorname{Im} A_n^0 \times \\
\times \left(K_0\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) I_1\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) + K_1\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) I_0\left(\left|\xi_{0n}\right| r_0\right) \right),
\end{aligned}$$

где $N_0 + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области над впадиной.

Средний поток мощности области с впадиной, подводимый через сечения $r = r_i$, ($i = 0,1$) есть сумма средних потоков мощности распространяющихся нормальных волн:

$$\begin{aligned}
W_{1i} = \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{N_1} \gamma_{1n} \xi_{1n} \left(Y_0(\xi_{1n} r_i) J_1(\xi_{1n} r_i) - Y_1(\xi_{1n} r_i) J_0(\xi_{1n} r_i) \right) \times \\
\times \left(\left|B_n^1\right|^2 + \operatorname{Re} B_n^1 \operatorname{Re} A_n^1 + \operatorname{Im} B_n^1 \operatorname{Im} A_n^1 \right) + \\
+ \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \gamma_{1n} \left|\xi_{1n}\right| \left(K_0\left(\left|\xi_{1n}\right| r_i\right) I_1\left(\left|\xi_{1n}\right| r_i\right) + K_1\left(\left|\xi_{1n}\right| r_i\right) I_0\left(\left|\xi_{1n}\right| r_i\right) \right) \times \\
\times \left(\operatorname{Re} B_n^1 \operatorname{Re} A_n^1 + \operatorname{Im} B_n^1 \operatorname{Im} A_n^1 \right),
\end{aligned}$$

где $N_1 + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области с впадиной.

Аналогично находится средний поток мощности области, подводимый через сечение $r = r_1$:

$$W_2 = \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{N_2} \left|B_n^2\right|^2 \gamma_{2n} \xi_{2n} \left(J_1(\xi_{2n} r_1) Y_0(\xi_{2n} r_1) - J_0(\xi_{2n} r_1) Y_1(\xi_{2n} r_1) \right),$$

где $N_2 + 1$ – число распространяющихся нормальных волн данной области.

Зная средние потоки мощности в различных областях волновода, можно найти энергетические уровни

$$L_1 = 10 \lg\left(\frac{W_0}{W_{1_0}} \right), \; L_2 = 10 \lg\left(\frac{W_{1_1}}{W_2} \right).$$

Согласно закону сохранения энергии на стыке областей декомпозиции следует равенство:

$$L_1 = L_2.$$

Численные результаты

Представленная выше теория позволяет найти решение для ступенчатого морского акустического волновода в виде суммы нормальных мод. При этом коэффициенты при модах определяются из решения бесконечных систем (10) и (11). Для численного решения бесконечных систем использовался метод простой редукции, когда неизвестные и уравнения с номерами, большими некоторого N, отбрасывались. Численный анализ показывает, что неизвестные с номерами, меньшими $[N/2]$, сходятся к искомому решению бесконечной

системы с ростом N. Неизвестные с номерами, заключенными на интервале $[N/2; N]$, несут в себе погрешность, связанную с методом простой редукции. Подобное явление наблюдается и при использовании метода редукции для регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, а именно значения первых неизвестных из редуцированной системы всегда дают более точное приближение к искомому решению бесконечной системы, чем последние [24].

Полученные формулы позволяют провести расчеты потоков энергии в сечении волновода $r = r_0$ для каждой из областей декомпозиции волновода, что дает возможность исследовать трансформацию звуковой волны сквозь неоднородность волновода. В табл. 1 приведены значения среднего потока мощности $W_{(0)}$ через зону стыка областей (0) и (1) при разных значениях отношения характерных размеров в областях декомпозиции волновода h_0/h_1 (скачкообразное расширение волновода) и положения источника z_0.

Из данных табл. 1 видно, что значения среднего потока мощности $W_{(0)}$ существенно зависят от относительной высоты подводного выступа h_0/h_1 и положения источника z_0. Можно увидеть, что с погружением источника в целом возрастает средний поток мощности через скачок сечения волновода, при этом погружение источника звука с $z_0 = 0{,}1h_1$ до $z_0 = 0{,}2h_1$ приводит к увеличению среднего потока мощности $W_{(0)}$ в среднем в 3,5 раза для выступа любой высоты. Интересен также тот факт, что резкий спад $W_{(0)}$ наблюдается, когда $h_0 = 0{,}7h_1$ для всех значений z_0, в то же время при $h_0 = 0{,}8h_1$ и $h_0 = 0{,}9h_1$ имеется возрастание величины $W_{(0)}$. При высоте выступа $h_0 = 0{,}4h_1$, наоборот, имеется ярко выраженный максимум для любого представленного расположения источника.

В табл. 2 приведены значения энергетического уровня L через зону стыка областей (0) и (1) при разных значениях отношения характерных размеров в областях декомпозиции волновода h_0/h_1 (скачкообразное расширение волновода) и частоты ω.

Таблица 1

Зависимость среднего потока мощности $W_{(0)}$ через сечение $r = r_0$ от высоты выступа h_0/h_1 и положения источника z_0 для следующих параметров волновода $h_1 = 100$ м, $r_0 = 2h_1$, $c = 1460$ м/с, ω = 100 рад/с

Table 1

Dependence of the average power flux $W_{(0)}$ through the section $r = r_0$ on the protrusion height h_0/h_1 and the source position z_0 for the following waveguide parameters $h_1 = 100$ m, $r_0 = 2h_1$, $c = 1460$ m/s, ω = 100 rad/s

$z_0 = 0.1h_1$

h_0/h_1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$W_{(0)}$	0,000466	0,000063	0,000138	0,000033	0,000020	0,000008	0,000057	0,000061

$z_0 = 0.2h_1$

h_0/h_1	-	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$W_{(0)}$	-	0,000191	0,000473	0,000121	0,000074	0,000024	0,000174	0,000184

$z_0 = 0.3h_1$

h_0/h_1	-	-	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$W_{(0)}$	-	-	0,000813	0,000230	0,000149	0,000044	0,000248	0,000254

Таблица 2

Зависимость энергетического уровня L в сечении $r = r_0$ от высоты выступа h_0/h_1 и частоты ω для следующих параметров волновода $h_1 = 100$ м, $r_0 = 2h_1$, $c = 1460$ м/с, $z_0 = 0{,}1h_1$

Table 2

Dependence of the energy level L for the section $r = r_0$ on the protrusion height h_0/h_1 and frequency ω for the following waveguide parameters $h_1 = 100$ m, $r_0 = 2h_1$, $c = 1460$ m/s, $z_0 = 0.1h_1$

ω = 50 рад/с

h_0/h_1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
L	0,667954	1,015026	1,351402	1,556649	1,544030	1,304603	0,899177	0,377024

ω = 100 рад/с

h_0/h_1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
L	1,522634	2,093684	1,983074	1,569850	1,127358	1,488416	0,594496	0,514390

ω =200 рад/с

h_0/h_1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
L	3,175774	1,518363	2,598074	1,030743	1,746812	1,847459	0,742270	1,547922

Данные табл. 2 показывают, что зависимость энергетического уровня L от относительной высоты выступа имеет сложный характер, существенно зависящий от частоты. Очевидно, что с ростом частоты в целом растут значения и энергетического уровня, тем не менее эта зависимость представляет собой осциллирующую функцию, которая имеет один максимум для ω = 50 рад/с, два для ω = 100 рад/с и три максимума для ω = 200 рад/с. Из данных табл. 2 можно заметить резкий спад энергетического уровня L в сечении $r = r_0$ при h_0 =80 м для всех приведенных частот ω и при h_0 = 90 м для ω = 50 рад/с и ω = 200 рад/с, что связано с относительно небольшим размером выступа по высоте.

Как известно [8; 24; 30], изменение амплитуды поля в волноводе характеризуется величиной потерь при распространении (интенсивность):

$$TL = -20\lg\left|\frac{\Phi}{\tilde{\Phi}}\right|,$$

где $\tilde{\Phi} = \dfrac{Qe^{ikr}}{4\pi r}$ – амплитуда потенциала скоростей, создаваемая точечным источником звука на расстоянии r = 1 м в безграничной среде; Q – объемная колебательная скорость. В табл. 3 приведены значения энергетического уровня L и величины потерь $TL(z_0)$ через зону стыка областей (0) и (1) при разных значениях отношения h_0/h_1.

Таблица 3

Сравнение энергетического уровня L и величины потерь $TL(z_0)$ для $r = r_0$ в зависимости от высоты выступа h_0/h_1 при h_1 = 100 м, $r_0 = 2h_1$, c = 1460 м/с, $z_0 = 0{,}1h_1$, ω = 100 рад/с

Table 3

Comparison of energy level L and loss value $TL(z_0)$ for the section $r = r_0$ on the protrusion height h_0/h_1 for the following waveguide parameters h_1 = 100 m, $r_0 = 2h_1$, c = 1460 m/s, $z_0 = 0{,}1h_1$, ω = 100 rad/s

h_0/h_1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
L	1,522634	2,093684	1,983074	1,569850	1,127358	1,488416	0,594496	0,514390
TL	–91,5919	–39,9224	–41,7737	–50,9208	–53,8741	–44,9289	–45,3429	–46,9909

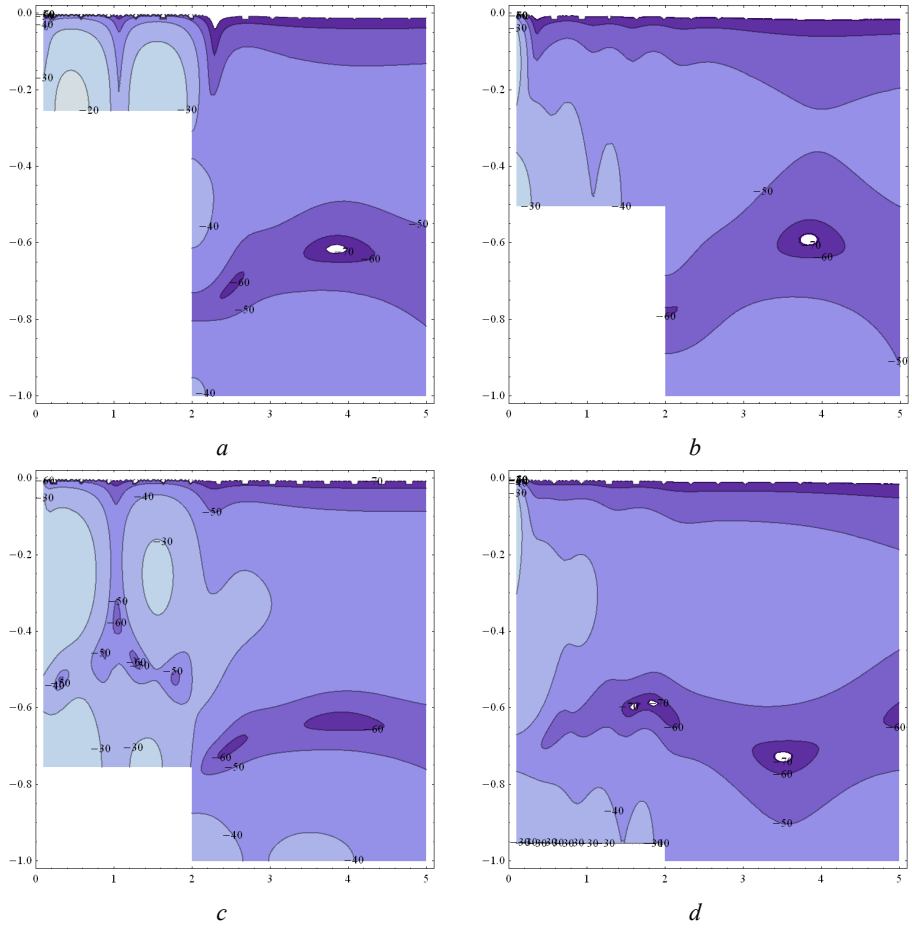


Рис. 3. Величина потерь в зависимости от высоты выступа (*a*–*d*) – $h_0 = 0{,}25h_1$, $h_0 = 0{,}5h_1$, $h_0 = 0{,}75h_1$, $h_0 = 0{,}95h_1$ при h_1 = 100 м, $r_0 = 2h_1$, c = 1460 м/с, $z_0 = 0{,}1h_1$, ω = 100 рад/с

Fig. 3. Loss value on the protrusion height for the following waveguide parameters (*a*–*d*) – $h_0 = 0.25h_1$, $h_0 = 0.5h_1$, $h_0 = 0.75h_1$, $h_0 = 0.95h_1$ when h_1 = 100 m, $r_0 = 2h_1$, c = 1460 m/s, $z_0 = 0.1h_1$, ω =100 rad/s

Из данных табл. 3 видно, при возрастании энергетического уровня L наблюдается уменьшение величины $TL(z_0)$ до тех пор, пока величина выступа не оказывается малой в сравнении с глубиной волновода ($h_0 < 0{,}7h_1$), где величина потерь оказывается практически неизменной.

Для наглядной оценки влияния выступа на величину потерь $TL(z_0)$ представлен рис. 3.

На рис. 3 заметны качественные изменения величины потерь $TL(z_0)$ в зависимости от высоты выступа в областях (0) и (1).

Заметим, что на всех рисунках имеется область повышенных потерь TL при $r \approx 2r_0,\ z \approx 0{,}6h_1$.

Заключение

Таким образом, в статье получено численно-аналитическое решение задачи о звуковом поле в волноводе с подводным выступом и впадиной цилиндрической формы, которое позволяет исследовать различные эффекты, связанные с формой дна, в частности, энергетические характеристики. Приведенные результаты представляют сведения о влиянии неровностей дна с радиальной симметрией на процесс распространения волн в волноводе. Они позволяют для каждого конкретного случая рассчитать, является ли влияние формы неровностей дна существенным или в какой мере этим влиянием можно пренебречь.

Библиографический список

1. Митра, Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 327 с.

2. Точное решение задачи об акустике в произвольной многослойной среде при компактном взаимодействии с клиновидным штампом / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 4. – С. 5–11.

3. Wei, Guan Finite-difference modeling of the monopole acoustic logs in a horizontally stratified porous formation / Guan Wei, Hu Hengshan, He Xiao // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – Vol. 125, no. 4. – P. 1942–1951.

4. Acoustic scatterng from a solid aluminum cylinder in contact with a sand sediment: Measurements, modeling and interpretation / Kevin L. Williams, Steven G. Kargl, Eric I. Thorsos, David S. Burnett, Joseph L. Loped, Mario Zampolli, Philip L. Marston // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – Vol. 127, no. 6. – P. 3356–3372.

5. Завадский, В.Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах / В.Ю. Завадский. – М.: Наука, 1972. – 558 с.

6. Haldar, S. Free vibration analysis of composite right angle triangular plate using a shear flexible element / S. Haldar, D. Sengupta, A.H. Sheikh // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2003. – Vol. 22(3). – P. 229–255.

7. Cheung, Y.K. Three-dimensional vibration analysis of cantilevered and completely free isosceles triangular plates / Y.K. Cheung, D. Zhou // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39 (3). – P. 673–687.

8. Zhang, X.F. Vibration of arbitrarily-shaped triangular plates with elastically restrained edges / X.F. Zhang, W.L. Li // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 357. – P. 195–206.

9. Lv, X. Free vibration of arbitrary-shaped laminated triangular thin plates with elastic boundary conditions / X. Lv, D. Shi // Results in Physics. – 2018. – Vol. 11. – P. 523–533.

10. Free vibration analysis of moderately thick composite materials arbitrary triangular plates under multi-points support boundary conditions / Q. Wang, F. Xie, T. Liu, B. Qin, H. Yu // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020. – Vol. 184(12). – P. 105789.

11. Kaur, N. On vibration of bidirectional tapered triangular plate under the effect of thermal gradient / N. Kaur, A. Khanna // Journal of mechanics materials and structures. – 2021. – Vol. 16 (1). – P. 49-62.

12. Численное моделирование процессов взаимовлияния волны возмущения в водороде и перегородки в модельном канале / М.А. Серегина, В.А. Бабушкина, В.Я. Модорский, И.Е. Черепанов, А.О. Микрюков // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 6. – С. 68–77.

13. Buckingham, M.J. On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space / M.J. Buckingham, E.M. Giddens // J.Acoust.Soc.Am. – 2006. – Vol. 1, no. 4. – P. 123–142.

14. Luo, W. Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount / W. Luo, H. Schmidt // J.Acoust. Soc.Am. – 2009. – No. 1. – P. 52–65.

15. Григорьев, В.А. Звуковое поле в мелководном волноводе арктического типа с дном, содержащим газонасыщенный осадочный слой / В.А. Григорьев, В.Г. Петников, А.В. Шатравин // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 389–405.

16. Liu, K. A parallel radial bisection algorithm for inverse scattering problem / K. Liu, Y. Xu, J. Zou // Inverse Prob. Sci. Eng. – 2013. – No. 21. – P. 197–209.

17. Trofimov, M.Y. A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction / M.Y. Trofimov, S.B. Kozitskiy, A.D. Zakharenko // Wave Motion. – 2015. – Vol. 58. – P. 42–52.

18. Katsnelson, B. Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water / B. Katsnelson, P. Petrov // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2019. – Vol. 146, no. 3. – P. 1343–1352.

19. Horizontal Ducting of sound by curved nonlinear internal gravity waves in the continental shelf areas / Y.-T. Lin, K.G. McMahon, J.F. Lynch, W.L. Siegmann // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2013. – Vol. 133, no. 1. – P. 37–49.

20. Knighly, G.H. Higher-order parabolic wave equation / G.H. Knighly, D. Lee, D.F. Mary // J.Acoust.Soc.Am. – 1987. – No. 2. – P. 580–587.

21. Бреховских, Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 343 с.

22. Толстой, И. Акустика океана / И. Толстой, К.С. Клей. – М.: Мир, 1969. – 301 с.

23. Кацнельсон, Б.Г. Акустика мелкого моря / Б.Г. Кацнельсон, В.Г. Петников. – М.: Наука, 1997. – 191 с.

24. Папкова, Ю.И. Звуковое поле в морском волноводе с цилиндрической неоднородностью / Ю.И. Папкова, С.О. Папков // Акустический журнал. – 2019. – № 5, Т. 65. – С. 52–64.

25. Шендеров, Е.Л. Излучение и рассеяние звука / Е.Л. Шендеров. – Л.: Судостроение, 1989. – 304 с.

26. Щуров, В.А. Движение акустической энергии в океане / В.А. Щуров. – Владивосток: ТОИ ДВО РАН, 2019. – 204 с.

27. Papkova, Yu.I. Energy characteristics of the hydroacoustic field in a nonuniform marine medium with a containing a cylindri-

cal body floating on the surface / Yu.I. Papkova, S.O. Papkov, A.A. Yaroshenko // Physical Oceanography. – 2006. – Vol. 16, no. 3. – P. 168–176.

28. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. / ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 831 с.

29. Тютекин, В.В. Энергетические соотношения для акустических волноводов / В.В. Тютекин, Ю.И. Бобровницкий // Докл. АН СССР, 1985. – Т. 285, № 4. – С. 598–604.

30. Computational ocean acoustics / F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, H. Schmidt. – Springer Science & Business Media, 2011. – 794 p.

References

1. Mitra R., Li S. Analiticheskiye metody teorii volnovodov [Analytical methods of the theory of waveguides]. – M.: Mir, 1974. 327 s.

2. Babeshko V.A., Yevdokimova O.V., Babeshko O.M., Yevdokimov V.S. Tochnoye resheniye zadachi ob akustike v proizvol'noy mnogosloynoy srede pri kompaktnom vzaimodeystvii s klinovidnym shtampom. // Vestnik PNIPU. Mekhanika. – 2023. – №4. – S. 5-11.

3. Wei Guan, Hengshan Hu, Xiao He. Finite-difference modeling of the monopole acoustic logs in a horizontally stratified porous formation.// J.Acoust.Soc.Am. – 2009. – v.125, № 4.- P.1942 – 1951.

4. Kevin L. Williams, Steven G. Kargl, Eric I. Thorsos, David S. Burnett, Joseph L. Loped, Mario Zampolli, Philip L. Marston. Acoustic scatterng from a solid aluminum cylinder in contact with a sand sediment: Measurements, modeling and interpretation.// J.Acoust.Soc.Am. – 2010. – v.127, № 6. – P. 3356 – 3372.

5. Zavadskiy V. YU. Vychisleniye volnovykh poley v otkrytykh oblastyakh i volnovodakh [Calculation of wave fields in open areas and waveguides]. M.: Izd vo «Nauka». 1972. 558 s.

6. Haldar S., Sengupta D., Sheikh A.H. Free Vibration Analysis of Composite Right Angle Triangular Plate Using a Shear Flexible Element. // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2003. – 22(3). – P. 229 – 255.

7. Cheung Y.K., Zhou D. Three-dimensional vibration analysis of cantilevered and completely free isosceles triangular plates // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – 39 (3). – P. 673 – 687.

8. Zhang X.F., Li W.L.. Vibration of arbitrarily-shaped triangular plates with elastically restrained edges. // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – 357. – P. 195 – 206.

9. Lv X., Shi D. Free vibration of arbitrary-shaped laminated triangular thin plates with elastic boundary conditions. // Results in Physics. – 2018. – 11. – P. 523 – 533.

10. Wang Q., Xie F., Liu T., Qin B., Yu H. Free vibration analysis of moderately thick composite materials arbitrary triangular plates under multi-points support boundary conditions. // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020. – 184(12). – P.105789.

11. Kaur N., Khanna A. On vibration of bidirectional tapered triangular plate under the effect of thermal gradient. // Journal of mechanics materials and structures. – 2021. – 16 (1). – P. 49-62.

12. Seregina M.A., Babushkina V.A., Modorskiy V.YA., Cherepanov I.Ye., Mikryukov A.O. Chislennoye modelirovaniye protsessov vzaimovliyaniya volny vozmushcheniya v vodorode i peregorodki v model'nom kanale. // Vestnik PNIPU. Mekhanika. – 2023. – №6. – S. 68-77.

13. Buckingham M.J., Giddens E.M. On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space// J.Acoust.Soc.Am. – 2006. – v. 1, № 4. – P. 123 – 142.

14. Luo W., Schmidt H. Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount // J.Acoust.Soc.Am. – 2009. – № 1. – P. 52 – 65.

15. Grigor'yev V.A., Petnikov V.G., Shatravin A.V. Zvukovoye pole v melkovodnom volno-vode arkticheskogo tipa s dnom, soderzhashchim gazonasyshchennyy osadochnyy sloy [Sound field in shallow wave-water of the Arctic type with a bottom containing a gas-saturated sedimentary layer] // Akust. zhurn. – 2017. – T. 63. № 4. – S. 389 – 405.

16. Liu K., Xu Y., Zou J. A parallel radial bisection algorithm for inverse scattering problem // Inverse Prob. Sci. Eng. – 2013. – № 21. – P. 197 – 209.

17. Trofimov M. Y., Kozitskiy S. B., Zakharenko A. D. A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction //Wave Motion. – 2015. – V.58. – P. 42 – 52.

18. Katsnelson B., Petrov P. Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2019. – V. 146, N. 3. – P. 1343 – 1352.

19. Lin Y.–T., McMahon K. G., Lynch J.F., Siegmann W.L. Horizontal Ducting of sound by curved nonlinear internal gravity waves in the continental shelf areas // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2013. – V. 133, N. 1. – P. 37 – 49.

20. Knighly G. H., Lee D., Mary D. F. Higher-order parabolic wave equation //J.Acoust.Soc.Am. – 1987. – № 2. – P. 580 – 587.

21. Brekhovskikh L.M. Volny v sloistykh sredakh [Waves in layered media]. – M.: Nauka, 1973. – 343 s.

22. Tolstoy I., Kley K. S. Akustika okeana [Acoustics of the ocean]. – M.: Mir, 1969. – 301 s.

23. Katsnel'son B.G., Petnikov V.G. Akustika melkogo moray [Acoustics of the shallow sea]. – M.: Izd vo «Nauka», 1997. – 191 s.

24. Papkova Yu.I., Papkov S.O. Zvukovoye pole v morskom volnovode s tsilindricheskoy neodnorodnost'yu [Sound field in a marine waveguide with cylindrical inhomogeneity]// Akusticheskiy zhurnal. – 2019. – №5 T. 65. – S 52-64.

25. Shenderov Ye.L. Izlucheniye i rasseyaniye zvuka [Emission and scattering of sound]. – L. Sudostroyeniye, 1989. – 304 s.

26. Shchurov V.A. Dvizheniye akusticheskoy energii v okeane [Movement of acoustic energy in the ocean]. – Vladivostok: TOI DVO RAN. – 2019. – 204 s.

27. Papkova Yu. I., Papkov S. O., Yaroshenko A. A. Energy characteristics of the hydroacoustic field in a nonuniform marine medium with a containing a cylindrical body floating on the surface // Physical Oceanography. – 2006. – V. 16. № 3. – P. 168 – 176.

28 Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheski-mi tablitsami [Reference book on special functions with formulas, graphs and mathematical tables]: Per. s ang./ Red. Abramovitsa M., Stigan I. M.: Nauka. – 1979. 831 s.

29. Tyutekin V.V., Bobrovnitskiy YU.I. Energeticheskiye sootnosheniya dlya akusticheskikh volnovodov [Energy ratios for acoustic waveguides]. Dokl. AN SSSR. – 1985. – T. 285. № 4. – S. 598 – 604.

30. Jensen F.B., Kuperman W. A., Porter M. B., Schmidt H. Computational ocean acoustics. – Springer Science & Business Media, 2011. – 794 p.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-27-20021.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Financing. The study was supported by grant No. 24-27-20021 from the Russian Science Foundation.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
Author's contribution 100 %.