Напряженное состояние и разрушение адгезива при соединении пластин внахлест / В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.06 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 75–84.

Perm Polytech Style: Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. The state of stress and destruction of an adhesive when joining plates with a LAP. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 3, pp. 75-84. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.06

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.06
УДК 539.375

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ АДГЕЗИВА ПРИ СОЕДИНЕНИИ ПЛАСТИН ВНАХЛЕСТ

В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин

Тульский государственный университет, Тула, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 07 сентября 2023 г.
Одобрена: 25 июня 2024 г.
Принята к публикации: 30 июня 2024 г.

Ключевые слова:

линейная упругость, метод конечных элементов, адгезионный слой, соединение внахлест.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена деформация адгезионного слоя конечной толщины, связывающего два тела внахлест в линейно упругой постановке. Напряженное состояние слоя рассматривается на основе средних по толщине и связанных с ними условиями равновесия граничных напряжений. Деформированное состояние слоя определяется посредством его граничных перемещений. На основе связанной полем перемещений адгезионного слоя системы вариационных уравнений равновесия композита методом конечных элементов получено численное решение задачи. Для аппроксимации поля перемещений несущих тел, позволяющей учесть деформации растяжения и сжатия в двух ортогональных направлениях, получено аналитическое решение соответствующей задачи. Показано качественное сходство решений по средним напряжениям в слое, по сравнению с решением в рамках классической теории пластин. Проведено сравнение известных аналитических представлений для данной задачи, полученного численного и упрощенного аналитического решений. Учет изменения по длине слоя среднего напряжения, ортогонального отрыву слоя при конечной его толщине, в предлагаемой постановке задачи может влиять на величину граничных касательных напряжений, а изменение среднего касательного напряжения слоя приводит к разнице напряжений отрыва по границам адгезионного слоя. Данный эффект не может быть учтен в моделях, использующих гипотезу однородности напряженного состояния по толщине слоя без учета граничных напряжений. Используя введенные в модель граничные напряжения слоя в качестве критериальных характеристик, можно моделировать отслоения адгезива от несущих тел по сопрягаемым поверхностям. Показано, что для рассматриваемой задачи достижение критериальных характеристик по отрыву и сдвигу приводит к разрушению по одинаковым поверхностям адгезионного слоя.

© **Богачева Виктория Эдуардовна** – асп. каф. «Вычислительная механика и математика», e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, ID: 0000-0002-6303-2160.
Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф. «Вычислительная механика и математика», e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: 0000-0003-0371-7704.
Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., с.н.с. управления научно-исследовательских работ, e-mail: len4ic92@gmail.com, ID: 0000-0003-2313-2084.
Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф. каф. «Вычислительная механика и математика», e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: 0000-0003-1456-8281.

Viktoriya E. Bogacheva – Postgraduate Student, Department of Computational Mechanics and Mathematics, e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, ID: 0000-0002-6303-2160.
Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computational Mechanics and Mathematics, e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: 0000-0003-0371-7704.
Leonid V. Glagolev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Department of Research Works, e-mail: len4ic92@gmail.com, ID: 0000-0003-2313-2084.
Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computational Mechanics and Mathematics, e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: 0000-0003-1456-8281.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE STATE OF STRESS AND DESTRUCTION OF AN ADHESIVE WHEN JOINING PLATES WITH A LAP

V.E. Bogacheva, V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin

Tula State University, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 07 September 2023
Approved: 25 June 2024
Accepted for publication:
30 June 2024

Keywords:

linear elasticity, finite element method, adhesive layer, lap joint.

ABSTRACT

The deformation of an adhesive layer of a finite thickness connecting two bodies with an overlap in a linear elastic formulation is considered. The stressed state of the layer is considered on the basis of the average thickness and the associated equilibrium conditions of boundary stresses. The deformed state of the layer is determined by its boundary displacements. Based on the system of variational equilibrium equations for the composite coupled by the displacement field of the adhesive layer, a numerical solution to the problem was obtained using the finite element method. To approximate the displacement field of load-bearing bodies, taking into account tensile and compressive deformations in two orthogonal directions, we obtained an analytical solution to the corresponding problem. The qualitative similarity of solutions for average stresses in the layer is shown in comparison with the solution within the classical plate theory. A comparison is made of the known analytical concepts for this problem, available numerical and simplified analytical solutions. By considering the change along the length of the layer of the average stress, orthogonal to the separation of the layer at a finite thickness, in the proposed formulation of the problem we can affect the value of the boundary tangential stresses. While a change in the average shear stress of the layer leads to a difference in the separation stresses along the boundaries of the adhesive layer. This effect cannot be taken into account in models that use the hypothesis of homogeneity of the stress state throughout the layer thickness without taking into account boundary stresses. When using the boundary stresses of the layer introduced into the model as criterion characteristics, it is possible to simulate the detachment of the adhesive from the load-bearing bodies along the mating surfaces. It is shown that for the problem under consideration, the obtaining of the criterion characteristics for detachment and shear results in destruction of the adhesive layer along identical surfaces.

Введение

Исследование прочности соединений в слоистых композитах связано с нахождением напряженно-деформированного состояния их адгезионных слоев (АС) [1–3]. В силу того, что толщины АС существенно уступают толщинам сопрягаемых ими материалов, вводится несколько моделей представления АС. Одна из моделей рассматривает АС в виде слоя нулевой толщины. Дефект слоя в этом случае представляется трещиной Гриффитса с сингулярным полем напряжений, формирующим критерии в виде J-интеграла или удельной упругой энергии [4–8]. Основным недостатком данной модели является формальное исключение реальных механических свойств адгезива из описания деформирования композита.

Вторым, более естественным подходом является рассмотрение адгезивов с реальными толщинами. В этом случае одним из основных методов решения является конечно-элементное моделирование деформирования композита [9–13]. При этом исследуются как напряжения по массиву адгезива, так и напряжения по границе соединения адгезива с несущим телом на основе когезионных элементов [14–16]. Наряду с численными методами используются и аналитические представления, полученные в рамках тех или иных допущений [17–20], основанные на теории балок и пластин [21–22].

Одним из широко исследуемых адгезионных соединений является соединение внахлест, или single-lap bonded joints (SLJ) [9–12; 16–20; 23], показанное на рис. 1.

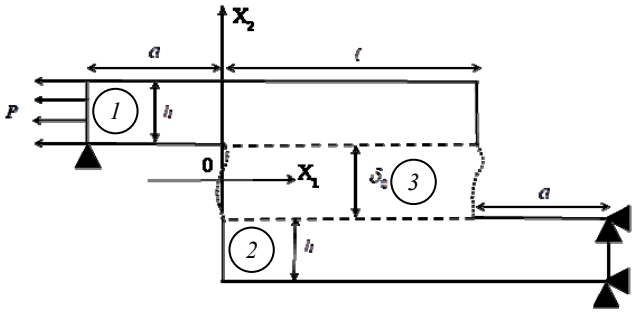


Рис. 1. Схема нагружения соединения внахлест

Fig. 1. Lap joint loading scheme

В этом случае два одинаковых тела *1* и *2* сопрягаются адгезивом *3* на участке длиной ℓ. В рамках упругого деформирования рассматриваемого композита наиболее известные аналитические результаты получены в работах [17; 18]. В работе [17] использовалась концепция «дифференциального сдвига», согласно которой тела 1 и 2 работают только на растяжение, благодаря которому в адгезионном слое *3* реализуются однородные по толщине сдвиговые деформации. Однако модель [17] не учитывает изгиб конструкции, благодаря которому в слое *3* наряду со сдвиговыми формируются

и отрывные напряжения в направлении оси X_2. Данный эффект был рассмотрен в работе [18]. Отметим, что коэффициент Пуассона в слое полагается нулевым. Влияние упругопластического деформирования адгезива в рамках его сдвиговых деформаций было рассмотрено в [24]. В работах [17; 18; 24] пренебрегалось напряжением в адгезиве вдоль оси действия внешней нагрузки. Его учет в постановочной части задачи был рассмотрен в [25], а влияние соответствующего напряжения на переход в пластическое состояние адгезива показано в статье [26].

Построение аналитических решений [17; 18; 26] связано с известным допущением относительно деформации ε_{22}, которой пренебрегается, по сравнению с другими плоскими деформациями. В данной работе, как и в работе [27], предлагается учесть ее влияние в упрощенном аналитическом решении на формирование отрывных напряжений в адгезионном слое SLJ соединения на основе общей постановки задачи сопряжения двух тел посредством тонкого слоя [28]. Полученное решение сравнивается с решениями [17; 18] и конечно-элементным решением в рамках общей вариационной постановки задачи.

Отметим, что напряженное состояние в тонком слое, сопряженном на определенном участке с деформируемыми телами, в классических решениях [17; 18] определяется по полю его граничных перемещений. В этом случае граничные условия на торцевой свободной поверхности не ставятся, и напряжения на торце слоя определяются из найденного поля перемещений, что приводит к известным противоречиям, связанным с присутствием вектора напряжения на свободной торцевой поверхности слоя. В силу этих ограничений в данных решениях не прослеживается кромочный эффект [29] вблизи угловой точки свободной поверхности адгезионного слоя, связанный с тождественным выполнением условий свободной поверхности.

Постановка задачи

Следуя работе [28], запишем условия равновесия тел *1* и *2* в виде системы вариационных уравнений для тела *1*:

$$\int\limits_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds + \int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + \\ +0.5\delta_0 \left(\int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int\limits_{L_1} \mathrm{P}^1 \cdot \delta \mathrm{u}\, dl \tag{1}$$

и тела *2*:

$$\int\limits_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds - \int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ +0.5\delta_0 \left(\int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int\limits_{\ell} \overline{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int\limits_{L_2} \mathrm{P}^2 \cdot \delta \mathrm{u}\, dl, \tag{2}$$

где S_k, $k = 1,2$ – площади тел *1* и *2*; u – векторное поле перемещений в телах *1* и *2*; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с компонентами:

$$\overline{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2)\, dx_2 ,$$

$$\overline{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2)\, dx_2 ,$$

$$\overline{\sigma}_{21}(x_1) = \overline{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2)\, dx_2 ,$$

$$\overline{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \\ \overline{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0,5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \tag{3}$$

$$\overline{\varepsilon}_{21}(x_1) = \overline{\varepsilon}_{12}(x_1) = \\ = 0,5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \tag{4}$$

где $u_k^{\pm}$ – компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя соответственно; L_k – граница приложения внешней нагрузки для тела *1* и *2*. Постулируется жесткое сцепление между границами области *3* и областями *1*, *2*.

Средние напряжения в слое связаны с его граничными напряжениями условиями равновесия, которые приводят к следующей взаимосвязи [28]:

$$\sigma_{12}^{\pm} = \overline{\sigma}_{12} \mp 0,5\delta_0 \frac{\partial \overline{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \; \sigma_{22}^{\pm} = \overline{\sigma}_{22} \mp 0,5\delta_0 \frac{\partial \overline{\sigma}_{12}}{\partial x_1}, \tag{5}$$

где $\sigma_{12}^{\pm}$, $\sigma_{22}^{\pm}$ – компоненты тензора напряжений на верхней и нижней границе слоя соответственно. Используется условие равенства компонент граничных напряжений слоя и напряжений на соприкасающихся к слою поверхностей тел *1* и *2*. Достижение граничных компонент критических значений на отрыв и сдвиг может рассматриваться в качестве критерия отслоения адгезива от несущего тела.

Примем определяющие соотношения в форме закона Гука с нулевым коэффициентом Пуассона:

$$\sigma_{ik} = E\varepsilon_{ik} , \tag{6}$$

где E – модуль упругости тел *1* и *2*; $i = 1,2$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\overline{\sigma}_{ik} = E_3 \overline{\varepsilon}_{ik} , \tag{7}$$

где E_3 – модуль упругости адгезива.

Для учета влияния деформаций консоли рассмотрим подход, аналогичный [30], однако в качестве неизвестных функций введем функции ψ_k, отвечающие за растяжение – сжатие консолей вдоль оси X_2 [27], а не угол поворота материальных нормалей к срединной поверхности. Распределение перемещений в консолях при данном нагружении принимаем в следующем виде

$$\begin{aligned} u_1^k\left(x_1,x_2\right) &= u_1^{\pm}\left(x_1\right), \\ u_2^k\left(x_1,x_2\right) &= u_2^{\pm}\left(x_1\right)+\psi_k\left(x_1\right)\left(x_2 \mp \delta_0/2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

В этом случае деформацию консолей будут определять компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^k\left(x_1,x_2\right) &= u_1^{\pm\prime}, \varepsilon_{22}^k\left(x_1,x_2\right) = \psi_k, \\ \varepsilon_{12}^k\left(x_1,x_2\right) &= 0{,}5\left(u_2^{\pm\prime}+\psi_k{}'\left(x_2 \mp \delta_0/2\right)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

При распределении деформаций в консолях в виде (7), (8) работа внутренних напряжений в теле *1* будет равна:

$$\begin{aligned} \int\limits_{S_1} \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} ds = \int_{-a}^{\ell}\int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\Bigg(\sigma_{11}\frac{d\delta u_1^{+}}{dx_1}+\sigma_{22}\delta\left(\psi_1\right)+ \\ +\sigma_{12}\delta\left(u_2^{+\prime}+\psi_1{}'\left(x_2-\delta_0/2\right)\right)\Bigg)dx_1dx_2, \end{aligned} \tag{10}$$

а в теле *2*:

$$\begin{aligned} \int\limits_{S_2} \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} ds = \int_{0}^{\ell+a}\int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2}\Bigg(\sigma_{11}\frac{d\delta u_1^{-}}{dx_1}+\sigma_{22}\delta\left(\psi_2\right)+ \\ +\sigma_{12}\delta\left(u_2^{-\prime}+\psi_2{}'\left(x_2+\delta_0/2\right)\right)\Bigg)dx_1dx_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Введем в рассмотрение обобщенные силы и моменты:

$$Q_{11}^1 = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{11}dx_2\ ,\ Q_{22}^1 = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{22}dx_2\ ,$$

$$Q_{12}^1 = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{12}dx_2\ ,\ M_{12}^1 = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{12}\left(x_2-\delta_0/2\right)dx_2\ ,$$

$$Q_{11}^2 = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2}\sigma_{11}dx_2\ ,\ Q_{22}^2 = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2}\sigma_{22}dx_2\ ,$$

$$Q_{12}^2 = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2}\sigma_{12}dx_2\ ,\ M_{12}^2 = \int_{-h-\delta_0/2}^{-\delta_0/2}\sigma_{12}\left(x_2+\delta_0/2\right)dx_2\ .$$

Проинтегрировав по частям ряд слагаемых, содержащих производную от вариации функций $u_1^{\pm}$ и ψ_k в (1), (2), (10), (11), и приравняв слагаемые при равных вариациях, приходим к системам дифференциальных уравнений для участка $x_1 \in \left[-a;0\right)$:

$$\frac{dQ_{11}^1}{dx_1}=0\ ,\ \frac{dQ_{12}^1}{dx_1}=0\ ,\ \frac{dM_{12}^1}{dx_1}-Q_{22}^1=0\ , \tag{12}$$

для участка $x_1 \in \left(0;\ell\right]$:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{11}^1}{dx_1}+0{,}5\delta_0\frac{d\overline{\sigma}_{11}}{dx_1}=\overline{\sigma}_{21},\ \frac{dQ_{12}^1}{dx_1}+0{,}5\delta_0\frac{d\overline{\sigma}_{12}}{dx_1}=\overline{\sigma}_{22}, \\ \frac{dM_{12}^1}{dx_1}-Q_{22}^1=0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{11}^2}{dx_1}+0{,}5\delta_0\frac{d\overline{\sigma}_{11}}{dx_1}=-\overline{\sigma}_{21},\ \frac{dQ_{12}^2}{dx_1}+0{,}5\delta_0\frac{d\overline{\sigma}_{12}}{dx_1}=-\overline{\sigma}_{22}, \\ \frac{dM_{12}^2}{dx_1}-Q_{22}^2=0, \end{aligned} \tag{14}$$

для участка $x_1 \in \left(\ell;\ell+a\right]$:

$$\frac{dQ_{11}^2}{dx_1}=0\ ,\ \frac{dQ_{12}^2}{dx_1}=0\ ,\ \frac{dM_{12}^2}{dx_1}-Q_{22}^1=0\ , \tag{15}$$

с условиями сопряжения:

$$u_1^{+}\Big|_{x_1=-0}=u_1^{+}\Big|_{x_1=+0}\ ,\ u_2^{+}\Big|_{x_1=-0}=u_2^{+}\Big|_{x_1=+0}\ ,\ \psi_1\Big|_{x_1=-0}=\psi_1\Big|_{x_1=+0}\ , \tag{16}$$

$$\begin{aligned} Q_{11}^1\Big|_{x_1=-0} &= \left(Q_{11}^1+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}^1\Big|_{x_1=-0} &= \left(Q_{12}^1+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{12}\right)\Big|_{x_1=+0}, M_{12}^1\Big|_{x_1=-0}=M_{12}^1\Big|_{x_1=+0} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} u_1^{-}\Big|_{x_1=\ell-0}=u_1^{-}\Big|_{x_1=\ell+0}, u_2^{-}\Big|_{x_1=\ell-0}=u_2^{-}\Big|_{x_1=\ell+0}, \\ \psi_2\Big|_{x_1=\ell-0}=\psi_2\Big|_{x_1=\ell+0}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \left(Q_{11}^2+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=\ell-0}=Q_{11}^2\Big|_{x_1=\ell+0}, \\ \left(Q_{12}^2+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{12}\right)\Big|_{x_1=\ell-0}=Q_{12}^2\Big|_{x_1=\ell+0}, \\ M_{12}^2\Big|_{x_1=\ell-0}=M_{12}^2\Big|_{x_1=\ell+0}, \end{aligned} \tag{19}$$

естественными граничными условиями на левом и правом торце тела *1*:

$$Q_{11}^1\Big|_{x_1=-a}=Q_1=Ph\ ,\ Q_{12}^1\Big|_{x_1=-a}=0\ ,\ M_{12}^1\Big|_{x_1=-a}=0\ , \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \left(Q_{11}^1+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=\ell}=0, \left(Q_{12}^1+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{12}\right)\Big|_{x_1=\ell}=0, \\ M_{12}^1\Big|_{x_1=\ell}=0, \end{aligned} \tag{21}$$

и граничными условиями на торцах тела *2*:

$$\begin{aligned} \left(Q_{11}^2+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=0}=0, \left(Q_{12}^2+0{,}5\delta_0\overline{\sigma}_{12}\right)\Big|_{x_1=0}=0, \\ M_{12}^2\Big|_{x_1=0}=0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$u_1^{-}\Big|_{x_1=\ell+a}=0\ ,\ u_2^{-}\Big|_{x_1=\ell+a}=0\ ,\ \psi_2\Big|_{x_1=\ell+a}=0\ . \tag{23}$$

С учетом выражений (9) определяющие соотношения (6) получим в виде:

$$\sigma_{11}^k=E\frac{du_1^{\pm}}{dx_1}\ ,\ \sigma_{22}^k=E\psi_k\ ,\ \sigma_{12}^k=0{,}5E\left(u_2^{\pm\prime}+\psi_k{}'\left(x_2 \mp \delta_0/2\right)\right). \tag{24}$$

Запишем выражения обобщенных сил и моментов с учетом (23):

$$Q_{11}^k = Eh\frac{du_1^{\pm}}{dx_1}, Q_{22}^k = Eh\psi_k, Q_{12}^k = 0{,}5E\left(u_2^{\pm\prime}h \pm \psi_k{}'\frac{h^2}{2}\right),$$
$$M_{12}^k = 0{,}5E\left(\pm u_2^{\pm\prime}\frac{h^2}{2} + \psi_k{}'\frac{h^3}{3}\right). \quad (25)$$

Из (7), (3) и (4) получим связь средних напряжений в слое взаимодействия с его граничными перемещениями:

$$\overline{\sigma}_{11} = \frac{E_3}{2}\frac{d\left(u_1^+ + u_1^-\right)}{dx_1}, \overline{\sigma}_{22} = \frac{E_3}{\delta_0}\left(u_2^+ - u_2^-\right),$$
$$\overline{\sigma}_{12} = 0{,}5E_3\left(\frac{u_1^+ - u_1^-}{\delta_0} + 0{,}5\left(u_2^{+\prime} + u_2^{-\prime}\right)\right). \quad (26)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (12)–(15) с учетом связей (25), (26) является замкнутой относительно шести неизвестных функций u_1^+, u_1^-, u_2^+, u_2^-, ψ_1, ψ_2. Каждая искомая функция входит в систему со второй производной включительно. Четыре участка интегрирования системы приводит к двадцати четырем постоянным интегрирования. Удовлетворение двенадцати граничных условий (20)–(23) с учетом двенадцати условий сопряжения решений (16)–(19) даст решение поставленной задачи.

Решение задачи

Аналитическое решение для участка $x_1 \in [-a;0)$ с учетом граничных условий (20) запишем в виде:

$$\begin{cases} u_1^+ = \dfrac{Q_1}{Eh}x_1 + C_1; \\ u_2^+ = \dfrac{2}{Eh}C_2 - C_3\dfrac{h}{2}\left[e^{2\sqrt{6}(x_1+2a)/h} + e^{-2\sqrt{6}x_1/h}\right]; \\ \psi_1 = C_3\left[e^{2\sqrt{6}(x_1+2a)/h} + e^{-2\sqrt{6}x_1/h}\right]. \end{cases} \quad (27)$$

Решение для участка $x_1 \in (\ell;\ell+a]$ с учетом граничных условий (23) имеет вид:

$$\begin{cases} u_1^- = \dfrac{1}{Eh}\left[x_1 - (\ell+a)\right]C_4; \\ u_2^- = \dfrac{2}{Eh}\left[x_1 - (\ell+a)\right]C_5 + C_6\dfrac{h}{2}\left[e^{2\sqrt{6}x_1/h} - e^{-2\sqrt{6}\left[x_1 - 2(\ell+a)\right]/h}\right]; \\ \psi_2 = C_6\left[e^{2\sqrt{6}x_1/h} - e^{-2\sqrt{6}\left[x_1 - 2(\ell+a)\right]/h}\right]. \end{cases} \quad (28)$$

Решение для участка $x_1 \in (0;\ell]$:

$$\begin{cases} u_1^+ = C_{10}e^{\lambda_1 x_1} + C_{11}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{12}e^{\lambda_3 x_1} + C_{13}e^{-\lambda_3 x_1} + \\ + \dfrac{1}{2}C_7 x_1 + \dfrac{1}{2}C_8 - \dfrac{\delta_0}{2Eh}C_9; \\ u_1^- = -C_{10}e^{\lambda_1 x_1} - C_{11}e^{-\lambda_1 x_1} - C_{12}e^{\lambda_3 x_1} - C_{13}e^{-\lambda_3 x_1} + \\ + \dfrac{1}{2}C_7 x_1 + \dfrac{1}{2}C_8 - \dfrac{\delta_0}{2Eh}C_9; \\ u_2^+ = C_{10}\dfrac{m_{12}}{\lambda_1}e^{\lambda_1 x_1} - C_{11}\dfrac{m_{12}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{12}\dfrac{m_{14}}{\lambda_3}e^{\lambda_3 x_1} - \\ - C_{13}\dfrac{m_{14}}{\lambda_3}e^{-\lambda_3 x_1} + \dfrac{1}{Eh}C_9 x_1 + \\ + \dfrac{1}{2}C_{14} + C_{15}e^{\mu_1 x_1} + C_{16}e^{-\mu_1 x_1} + C_{17}e^{\mu_3 x_1} + C_{18}e^{-\mu_3 x_1}; \\ u_2^- = C_{10}m_{15}e^{\lambda_1 x_1} - C_{11}m_{15}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{12}m_{16}e^{\lambda_3 x_1} - \\ - C_{13}m_{16}e^{-\lambda_3 x_1} + \dfrac{1}{Eh}C_9 x_1 + \\ + \dfrac{1}{2}C_{14} - C_{15}e^{\mu_1 x_1} - C_{16}e^{-\mu_1 x_1} - C_{17}e^{\mu_3 x_1} - C_{18}e^{-\mu_3 x_1}; \\ \psi_1 = C_{10}\dfrac{m_{11}}{\lambda_1}e^{\lambda_1 x_1} - C_{11}\dfrac{m_{11}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{12}\dfrac{m_{13}}{\lambda_3}e^{\lambda_3 x_1} - \\ - C_{13}\dfrac{m_{13}}{\lambda_3}e^{-\lambda_3 x_1} + \\ + C_{15}m_{17}e^{\mu_1 x_1} + C_{16}m_{17}e^{-\mu_1 x_1} + C_{17}m_{18}e^{\mu_3 x_1} + \\ + C_{18}m_{18}e^{-\mu_3 x_1}; \\ \psi_2 = C_{10}m_{19}e^{\lambda_1 x_1} - C_{11}m_{19}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{12}m_{20}e^{\lambda_3 x_1} - \\ - C_{13}m_{20}e^{-\lambda_3 x_1} + \\ + C_{15}m_{17}e^{\mu_1 x_1} + C_{16}m_{17}e^{-\mu_1 x_1} + C_{17}m_{18}e^{\mu_3 x_1} + \\ + C_{18}m_{18}e^{-\mu_3 x_1}; \end{cases} \quad (29)$$

где $m_1 = -\dfrac{E_3}{Eh}\left(\dfrac{E_3}{2Eh + \delta_0 E_3} - \dfrac{1}{\delta_0}\right)$; $m_2 = -\dfrac{E_3 h}{4\left(2Eh + \delta_0 E_3\right)}$;

$m_3 = \left(2E + \dfrac{\delta_0 E_3}{h}\right)\Big/\left(\dfrac{\delta_0 E_3 h}{6} + \dfrac{Eh^2}{12}\right)$; $m_4 = E_3\Big/\left(\dfrac{\delta_0 E_3 h}{6} + \dfrac{Eh^2}{12}\right)$;

$d = \left(m_1 + m_3 + m_2 m_4\right)^2 - 4m_1 m_3$; $\lambda_1 = \sqrt{\dfrac{m_1 + m_3 + m_2 m_4 + \sqrt{d}}{2}}$;

$\lambda_2 = -\sqrt{\dfrac{m_1 + m_3 + m_2 m_4 + \sqrt{d}}{2}}$; $\lambda_3 = \sqrt{\dfrac{m_1 + m_3 + m_2 m_4 - \sqrt{d}}{2}}$;

$\lambda_4 = -\sqrt{\dfrac{m_1 + m_3 + m_2 m_4 - \sqrt{d}}{2}}$; $m_5 = \dfrac{24}{h^2}$; $m_6 = -\dfrac{24E_3}{\delta_0 Eh^2}$;

$m_7 = -\dfrac{12}{h}$; $m_8 = \dfrac{16E_3}{\delta_0 Eh}$; $m_9 = \dfrac{\delta_0\lambda_1^3 Eh}{2} + \dfrac{E_3}{\delta_0}\left(\dfrac{4Eh\lambda_1}{E_3} - \dfrac{4}{\delta_0\lambda_1}\right)$;

$m_{10} = \dfrac{\delta_0\lambda_3^3 Eh}{2} + \dfrac{E_3}{\delta_0}\left(\dfrac{4Eh\lambda_3}{E_3} - \dfrac{4}{\delta_0\lambda_3}\right)$; $D = \left(m_8 + m_5\right)^2 -$

$- 4\left(m_5 m_8 - m_6 m_7\right)$; $\mu_1 = \sqrt{\dfrac{m_5 + m_8 + \sqrt{D}}{2}}$; $\mu_2 = -\sqrt{\dfrac{m_5 + m_8 + \sqrt{D}}{2}}$;

$\mu_3 = \sqrt{\dfrac{m_5 + m_8 - \sqrt{D}}{2}}$; $\mu_4 = -\sqrt{\dfrac{m_5 + m_8 - \sqrt{D}}{2}}$;

$$m_{11}=\frac{\delta_0\lambda_1^2 m_9}{2E_3}\frac{1}{\frac{\delta_0 Eh^2\lambda_1^3}{24E_3}-\frac{\delta_0 E\lambda_1}{E_3}+\frac{4}{h\lambda_1}-\frac{2h\lambda_1}{3}};$$

$$m_{12}=\frac{\delta_0 Eh^2\lambda_1}{24E_3}\left[\left(\frac{24}{h^2\lambda_1}-\lambda_1\right)m_{11}+\frac{12m_9}{Eh^2}\right];$$

$$m_{13}=\frac{\delta_0\lambda_3^2 m_{10}}{2E_3}\frac{1}{\frac{\delta_0 Eh^2\lambda_3^3}{24E_3}-\frac{\delta_0 E\lambda_3}{E_3}+\frac{4}{h\lambda_3}-\frac{2h\lambda_3}{3}};$$

$$m_{14}=\frac{\delta_0 Eh^2\lambda_3}{24E_3}\left[\left(\frac{24}{h^2\lambda_3}-\lambda_3\right)m_{13}+\frac{12m_{10}}{Eh^2}\right];$$

$$m_{15}=\frac{4Eh\lambda_1}{E_3}-\frac{4}{\delta_0\lambda_1}-\frac{m_{12}}{\lambda_1};\ m_{16}=\frac{4Eh\lambda_3}{E_3}-\frac{4}{\delta_0\lambda_3}-\frac{m_{14}}{\lambda_3};$$

$$m_{17}=\frac{\mu_1^2-m_8}{m_7};\ m_{18}=\frac{\mu_3^2-m_8}{m_7};\ m_{19}=\frac{m_1-\lambda_1^2}{m_2\lambda_1}+\frac{m_{11}}{\lambda_1};$$

$$m_{20}=\frac{m_1-\lambda_3^2}{m_2\lambda_3}+\frac{m_{13}}{\lambda_3}.$$

Для нахождения восемнадцати постоянных интегрирования в (27)–(29) используем двенадцать условий сопряжения (16)–(19) и шесть граничных условий (21), (22). После определения постоянных интегрирования в результате численного решения системы линейных уравнений находим напряженное состояние в слое:

$$\begin{cases}\bar{\sigma}_{11}=0,5E_3C_7;\\ \bar{\sigma}_{12}=C_{10}m_{21}e^{\lambda_1 x_1}+C_{11}m_{21}e^{-\lambda_1 x_1}+C_{12}m_{22}e^{\lambda_3 x_1}+C_{13}m_{22}e^{-\lambda_3 x_1};\\ \bar{\sigma}_{22}=C_{10}m_{23}e^{\lambda_1 x_1}-C_{11}m_{23}e^{-\lambda_1 x_1}+C_{12}m_{24}e^{\lambda_3 x_1}-C_{13}m_{24}e^{-\lambda_3 x_1}+\\ +C_{15}\frac{2E_3}{\delta_0}e^{\mu_1 x_1}+C_{16}\frac{2E_3}{\delta_0}e^{-\mu_1 x_1}+C_{17}\frac{2E_3}{\delta_0}e^{\mu_3 x_1}+C_{18}\frac{2E_3}{\delta_0}e^{-\mu_3 x_1};\end{cases} \quad (30)$$

где $m_{21}=\frac{E_3}{\delta_0}+\frac{E_3}{4}\left(\frac{4Eh\lambda_1^2}{E_3}-\frac{4}{\delta_0}\right);$

$$m_{22}=\frac{E_3}{\delta_0}+\frac{E_3}{4}\left(\frac{4Eh\lambda_3^2}{E_3}-\frac{4}{\delta_0}\right);$$

$$m_{23}=\frac{E_3}{\delta_0}\left(\frac{2m_{12}}{\lambda_1}-\frac{4Eh\lambda_1}{E_3}+\frac{4}{\delta_0\lambda_1}\right);$$

$$m_{24}=\frac{E_3}{\delta_0}\left(\frac{2m_{14}}{\lambda_3}-\frac{4Eh\lambda_3}{E_3}+\frac{4}{\delta_0\lambda_3}\right).$$

Наряду с полученным решением (30) приведем отличные от нуля компоненты напряжения в адгезионном слое решения [17]:

$$\bar{\sigma}_{12}=-\frac{Q_1}{\ell}\frac{w}{2}\frac{\cosh\left(wX/\ell\right)}{\sinh\left(w/2\right)} \quad (31)$$

и решения [18]:

$$\bar{\sigma}_{12}=-\frac{Q_1}{8c}\left[\frac{\beta c}{h}\left(1+3K\right)\frac{\cosh\left(\beta X/h\right)}{\sinh\left(\beta c/h\right)}+3\left(1-K\right)\right], \quad (32)$$

$$\bar{\sigma}_{22}=\frac{Q_1 h}{c^2\Delta}\left[\begin{array}{l}\left(R_2\lambda^2\frac{K}{2}+\lambda K'\cosh\lambda\cos\lambda\right)\cosh\frac{\lambda X}{c}\cos\frac{\lambda X}{c}+\\ +\left(R_1\lambda^2\frac{K}{2}+\lambda K'\sinh\lambda\sin\lambda\right)\sinh\frac{\lambda X}{c}\sin\frac{\lambda X}{c}\end{array}\right], \quad (33)$$

где $X=x_1-0,5\ell\in\left[-0,5\ell;0,5\ell\right]$; $w=\sqrt{\frac{2G_3\ell^2}{Eh\delta_0}}$;

$G_3=0,5E_3$; $c=0,5\ell$;

$$K=\frac{\cosh\left(U_2c\right)\sinh\left(U_1a\right)}{\sinh\left(U_1a\right)\cosh\left(U_2c\right)+2\sqrt{2}\cosh\left(U_1a\right)\sinh\left(U_2c\right)};$$

$U_1=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3Q_1}{Eh}}$; $U_2=\frac{\sqrt{2}U_1}{4}$; $K'=KcU_1$; $\beta=2\sqrt{\frac{2G_3h}{E\delta_0}}$;

$\gamma=\left(\frac{6E_3h}{E\delta_0}\right)^{1/4}$; $\lambda=\frac{\gamma c}{h}$; $R_1=\cosh\lambda\sin\lambda+\sinh\lambda\cos\lambda$;

$R_2=\sinh\lambda\cos\lambda-\cosh\lambda\sin\lambda$;

$\Delta=0,5\left(\sinh\left(2\lambda\right)+\sin\left(2\lambda\right)\right)$.

Рассмотрим распределение поля напряжений в адгезионном слое при критической внешней нагрузке, полученной в экспериментальном образце согласно работе [16] со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a=83,75$ мм, $\ell=12,5$ мм, $E=70,1$ ГПа, $E_3=4,89$ ГПа, $\delta_0=0,2$ мм. В качестве материала консолей использовался алюминиевый сплав Al6082-T651, в качестве адгезива – смола Araldite AV138. Критическая нагрузка составила $Q_1=0,24$ МН/м.

На рис. 2 и 3 приведено сравнение решений (30)–(33). Здесь и далее напряжения отнесены к модулю напряжения сдвига (32) на торце слоя: $\hat{\sigma}_{ik}=\bar{\sigma}_{ik}\big/\left|\bar{\sigma}_{12}\left(0\right)\right|$, а координата x_1 отнесена к длине адгезива ℓ: $\hat{x}_1=x_1/\ell$. График *1* на рис. 2 соответствует решению (30), график *2* – решению (31), график *3* – решению (32).

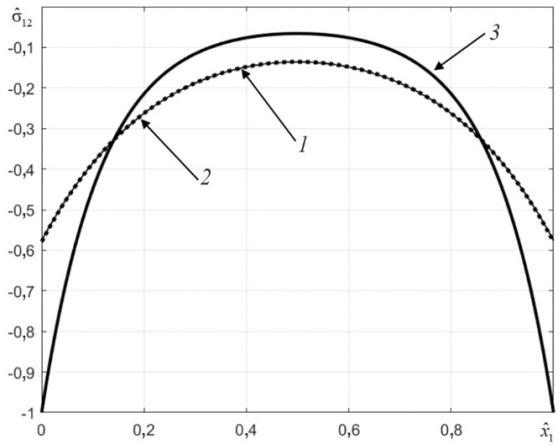


Рис. 2. Распределение напряжений сдвига по длине адгезива в рамках аналитических решений

Fig. 2. Distribution of shear stresses along the length of the adhesive within analytical solutions

Из рис. 2 видим совпадение решений (30), (31) и отличное от них практически в два раза на краях слоя решение (32).

На рис. 3 приведено распределение отрывных напряжений по длине слоя в рамках решения (30).

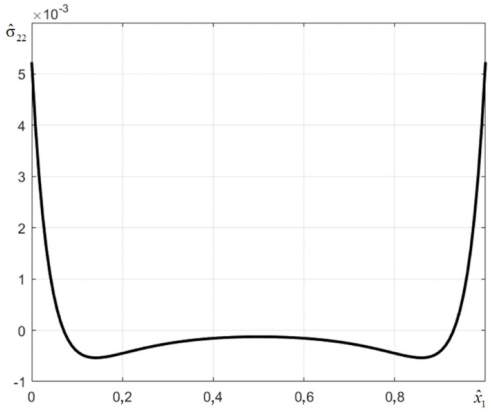


Рис. 3. Распределение напряжений отрыва по длине адгезива в решении (30)

Fig. 3. Separation stress distribution along the adhesive length in solution (30)

По представленному на рис. 3 распределению имеет место незначительное значение отрывных напряжений, порядка 0,5 %, от напряжений сдвига (32) на торцах слоя. Отметим, что для модели [17] отрывные напряжения тождественно равны нулю.

На рис. 4 и рис. 5 пунктирной линией показано распределение средних напряжений, полученных в рамках постановки задачи (1)–(7) методом конечных элементов (МКЭ) с квадратичным законом распределения поля перемещений на элементе. Непрерывной кривой показано решение в рамках модели [18] (32) и (33). График *1* и график *2* на рис. 4 соответствует напряжению $\overline{\sigma}_{22}$, график *3* и график *4* – напряжению $\overline{\sigma}_{12}$.

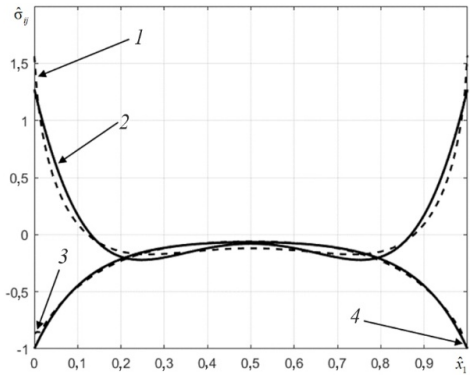


Рис. 4. Распределение напряжений отрыва и сдвига по длине адгезива

Fig. 4. Distribution of separation and shear stresses along the length of the adhesive

Из анализа распределений напряжений на рис. 4 видим, что средние напряжения отрыва на торцах слоя превосходят сдвиговые. Кроме того, решение МКЭ (1)–(7) дает большие по модулю значения напряжений отрыва и меньшее значение сдвиговых напряжений, по сравнению с решениями (32), (33), что подтверждается решениями МКЭ [19; 31] и связано с отсутствием учета деформации ε_{22} в несущих консолях модели [18]. Однако из сравнения решений рис. 2 – рис. 4 видим, что эффект от учета деформации ε_{22} незначителен, по сравнению с учетом изгиба консолей в модели [18], которая дает более близкие значения к решению 2D-задачи. Используя связи (5) для нахождения граничных напряжений отрыва $\sigma_{22}^{\pm}$ по изменению вдоль длины слоя средних касательных напряжений, получаем, что максимальные значения отрывных напряжений будут реализовываться на нижней поверхности адгезива при $x_1 = 0$ и верхней поверхности слоя на противоположном торце слоя.

Напряжения $\overline{\sigma}_{11}$ в моделях [17; 18] тождественно равны нулю. На рис. 5 приведено распределение средних напряжений вдоль оси X_1 в рамках решения МКЭ (график *1*) и решения (30) (график *2*).

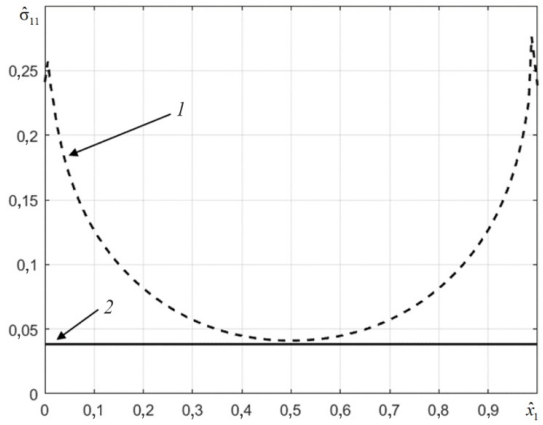


Рис. 5. Распределение напряжений $\overline{\sigma}_{11}$ вдоль оси X_1 по длине адгезива

Fig. 5. Stress $\overline{\sigma}_{11}$ distribution along axis X_1 along the length of the adhesive

Из анализа поведения решений на рис. 5 видно, что соответствующие напряжения в районе торцевых поверхностей адгезионного слоя в решении МКЭ практически в пять раз превышают напряжения решения (30).

Соотношение (5) при постоянном значении напряжений $\overline{\sigma}_{11}$ приводит к тому, что касательные напряжения по границам слоя $\sigma_{12}^{\pm}$ равны средним. В этом случае при рассмотрении критерия отслоения адгезива по сдвиговым напряжениям верхние и нижние поверхности адгезива будут равноправны с позиции начала расслоения композита. Упрощенные решения (30)–(33) приводят к аналогичным результатам. Однако решение МКЭ при конечном значении толщины адгезива и существенной нелинейной зависимости напряжений в районе торцевых поверхностей слоя дает однозначный выбор поверхности отслоения адгезива. При этом если будет реализован сдвиговой крите-

рий отслоения, то образование свободных поверхностей по (5) будет соответствовать отрывному критерию. Таким образом, если процесс разрушения адгезива определяется адгезионными связями с сопрягаемыми поверхностями, то процесс отслоения в рассматриваемом образце будет однозначно определяться одной и той же поверхностью вне зависимости от наступления сдвигового или отрывного критерия отслоения.

Заключение

На основе модели деформирования слоистого композита с тонким адгезионным слоем решена задача нагружения SLJ образца. Проведено сравнение известных аналитических решений с конечно-элементным решением общей постановки 2D-задачи и с упрощенным решением, полученным на основе аппроксимации поля перемещений, учитывающей деформации растяжения – сжатия. Показано качественное соответствие найденного решения с решением в рамках теории пластин. Предложенная 2D-постановка задачи, в которой отсутствует сингулярность при конечной толщине адгезива, позволяет определить граничные по адгезионному слою напряжения взаимодействия с сопрягаемыми телами. Сопоставляя граничные напряжения с критическими напряжениями по отрыву и сдвигу, можно моделировать механизм отслоения адгезива от сопрягаемых им внахлест материалов.

Библиографический список

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Черепанов, Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

3. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М.: Мир, 1982. – 232 с.

4. Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids / A.A. Griffith // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. – 1921. – Vol. 221. – P. 163–189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006

5. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

6. Устинов, К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Ч. 2. Случай сдвиговой трещины / К.Б. Устинов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 131–142. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.09

7. Кулиев, В.Д. К проблеме разрушения многослойных композитных материалов / В.Д. Кулиев, Н.Л. Борисова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – Т. 26, № 4. – С. 63–71.

8. Barbieri, L. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams / L. Barbieri, R. Massabo, C. Berggreen // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 201. – P. 298–321.

9. Schmidt, P. A finite element method for failure analysis of adhesively bonded structures / P. Schmidt, U. Edlund // Int. J. Adhes. Adhes. – 2011. – Vol. 30, no. 8. – P. 665–681. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.05.012

10. Hildebrand, M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals / M. Hildebrand // Int. J. Adhes. Adhes. – 1994. – Vol. 14, no. 4. – P. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6

11. He, X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints / X. He // Int. J. Adhes. Adhes. – 2011. – Vol. 31, no. 4. – P. 248–264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006

12. Carpenter, W.C. Stresses in bonded connections using finite elements / W.C. Carpenter // Int. J. Numer. Methods Engng. – 1980. – Vol. 15. – P. 1659–1680. DOI: 10.1002/nme.1620151108

13. Borg, R. Simulating DCB, ENF and MMB experiments using shell elements and a cohesive zone model / R. Borg, L. Nilsson, K. Simonsson // Composites Science and Technology. – 2004. – Vol. 64, no. 2. – P. 269–278. DOI: 10.1016/S0266-3538(03)00255-0

14. Dávila, C.G. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements / C.G. Dávila, P.P. Camanho, A. Turon // Journal of Aircraft. – 2008. – Vol. 42, no. 2. – P. 663–672. DOI: 10.2514/1.32832

15. De Moura, M.F.S.F. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading / M.F.S.F. De Moura, J.P.M. Gonçalves // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51, no. 5. – P. 1123–1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009

16. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints / J.M.M. Dionisio, L.D.C. Ramalho, I.J. Sanchez-Arce, R.D.S.G. Campilho, J. Belinha // Int. J. Fract. – 2021. – Vol. 232. – P. 77–91. DOI: 10.1007/s10704-021-00594-z

17. Volkersen, O. Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nietverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten / O. Volkersen // Luftfarhtforschung. – 1938. – Vol. 15. – P. 41–47.

18. Goland, M. The stresses in cemented joints / M. Goland, E. Reissner // J. Appl. Mech., Trans. ASME. – 1944. – Vol. 66. – P. A17–A27.

19. Adams, R.D. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints / R.D. Adams, N.A. Peppiatt // Journal of Strain Analysis. – 1974. – Vol. 9, no. 3. – P. 185–196. DOI: 10.1243/03093247V093185

20. Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study / L.F.M. da Silva, P.J.C. das Neves, R.D. Adams, A. Wang, J.K. Spelt // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2009. – Vol. 29, no. 3. – P. 331–341. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007

21. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – М.: Высш. школа, 1982. – 400 с.

22. Огибалов, П.М. Оболочки и пластины: учебное пособие для механико-математических факультетов университетов / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. – 695 с.

23. Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints / C.C.R.G. de Sousa, R.D.S.G. Campilho, E.A.S. Marques, M. Costa, L.F.M. da Silva // J Materials: Design and Applications. – 2016. – Special Issue: MDA2016. – P. 1–14. DOI: 10.1177/1464420716675746

24. Hart-Smith, L.J. Adhesive-bonded single-lap joints / L.J. Hart-Smith // NASA Technical Report CR-112236. – 1973.

25. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto, V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin // International Journal of Solids

and Structures. – 2020. – Vol. 193–194. – P. 447–454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039

26. Глаголев, В.В. Модель сдвигового упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя / В.В. Глаголев, А.А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 93–100. DOI: 10.31857/S0572329920060070

27. Глаголев, В.В. Энергетическое произведение в модели трещиноподобного дефекта при нагружении типа моды II / В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 48–58. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.05

28. Glagolev, V.V. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter / V.V. Glagolev, A.A. Markin // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

29. Assessment of plate theories for free-edge effects / M. D'Ottavio, P. Vidal, E. Valot, O. Piolit // Composites Part B: Engineering. – 2013. – Vol. 48. – P. 111–121. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.12.007

30. Mindlin, R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R.D. Mindlin // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29

31. Carpenter, W.C. Goland and Reissner were correct / W.C. Carpenter // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. – 1989. – Vol. 24, no. 3. – P. 185–187. DOI: 10.1243/03093247V243185

References

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. Mekhanika mnogoslojnykh konstruktsij [Mechanics of laminated constructions]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p.

2. Cherepanov G.P. Mekhanika razrusheniya kompozicionnyh materialov [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Nauka, 1974, 640 p.

3. Fudzii T., Dzako M. Mekhanika razrusheniya kompozicionnyh materialov [Fracture Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Mir, 1982, 232 p.

4. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A*, 1921, vol. 221, pp. 163-189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006

5. Cherepanov G.P. Mekhanika hrupkogo razrusheniya [Mechanics of brittle failure]. Moscow, Nauka, 1974, 640 p.

6. Ustinov K.B. On delamination of a strip along the boundary between two elastic layers. Part 2. Case of shear crack. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016. no. 2. pp. 131-142. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.09

7. Kuliev V.D., Borisova N.L. K probleme razrusheniya mnogoslojnyh kompozitnyh materialov [To the problem of destruction of multilayer composite materials]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2015, vol. 26, no. 4, pp. 63-71.

8. Barbieri L., Massabo R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 201, pp. 298-321.

9. Schmidt P., Edlund U. A finite element method for failure analysis of adhesively bonded structures, *Int. J. Adhes. Adhes*. 2011, vol. 30, no. 8, pp. 665-681. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.05.012

10. Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals. *Int. J. Adhes. Adhes*, 1994, vol. 14, no. 4, pp. 261-267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6

11. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Adhes. Adhes*, 2011, vol. 31, no. 4, pp. 248-264. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006

12. Carpenter W. C. Stresses in bonded connections using finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engng*, 1980, vol. 15, pp. 1659-1680. DOI: 10.1002/nme.1620151108

13. Borg R., Nilsson L., Simonsson K. Simulating DCB, ENF and MMB experiments using shell elements and a cohesive zone model. *Composites Science and Technology*, 2004, vol. 64, no. 2, pp. 269-278. DOI: 10.1016/S0266-3538(03)00255-0

14. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements. *Journal of Aircraft*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 663-672. DOI: 10.2514/1.32832

15. De Moura M.F.S.F., Gonçalves J.P.M. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 5, pp. 1123-1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009

16. Dionisio J. M. M., Ramalho L. D. C., Sanchez-Arce I. J., Campilho R. D. S. G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints. *Int. J. Fract*, 2021, vol. 232, pp. 77-91. DOI: 10.1007/s10704-021-00594-z

17. Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nietverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfarhtforschung*, 1938, vol. 15, pp. 41-47.

18. Goland M., Reissner E. The stresses in cemented joints. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 1944, vol. 66, pp. A17-A27.

19. Adams R.D., Peppiatt N.A. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints. *Journal of Strain Analysis*, 1974, vol. 9, no. 3, pp. 185-196. DOI: 10.1243/03093247V093185

20. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K. Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2009, vol. 29, no. 3, pp. 331-341. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007

21. Rzhanitsyn A. R. Stroitel'naya mekhanika [Structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1982, 400 p.

22. Ogibalov P. M., Koltunov M. A. Obolochki i plastiny: uchebnoye posobiye dlya mekhaniko-matematicheskikh fakul'tetov universitetov [Shells and plates: a textbook for university departments of mechanics and mathematics]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1969, 695 p.

23. de Sousa C.C.R.G., Campilho R.D.S.G., Marques E.A.S., Costa M, da Silva L.F.M. Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints. *J Materials: Design and Applications*, 2016, special issue: MDA2016, pp. 1-14. DOI: 10.1177/1464420716675746

24. Hart-Smith L.J. Adhesive-bonded single-lap joints. *NASA Technical Report CR-112236*, 1973.

25. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 193-194, pp. 447-454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039

26. Glagolev V.V., Markin A.A. Model of Shear Elastic-Plastic Deformation of a Thin Adhesive Layer. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 837-843. DOI: 10.3103/S0025654420060072

27. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Energy product in a crack-like defect model under loading of mode II type. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 48-58. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.05

28. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 158, pp. 141-149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

29. D'Ottavio M., Vidal P., Valot E., Piolit O. Assessment of Plate Theories for Free-Edge Effects. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 48, pp. 111-121. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.12.007

30. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, pp. 31-38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29

31. Carpenter W.C. Goland and Reissner were correct. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1989, vol. 24, no. 3, pp. 185-187. DOI: 10.1243/03093247V243185

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, https://rscf.ru/project/23-21-00017/ в Тульском государственном университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation Grant No. 23-21-00017, https://rscf.ru/project/23-21-00017/ at Tula State University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.