Конечно-разностный анализ плоскопараллельного и плоскорадиального потоков при упругом режиме фильтрации жидкости и газа / М.О. Еремин, Р.А. Бакеев, Ю.П. Стефанов, А.О. Чирков, А. Пажин. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.08 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 97–107.

Perm Polytech Style: Eremin M.O., Bakeev R.A., Stefanov Yu.P., Chirkov A.O., Pazhin A. Finite-difference analysis of plane-parallel and plane-radial flows in the elastic mode of liquid and gas filtration. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 3, pp. 97-107. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.08

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.08
УДК 532.546

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО И ПЛОСКОРАДИАЛЬНОГО ПОТОКОВ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

М.О. Еремин, Р.А. Бакеев, Ю.П. Стефанов, А.О. Чирков, А. Пажин

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 06 мая 2024 г.
Одобрена: 26 июня 2024 г.
Принята к публикации: 30 июня 2024 г.

Ключевые слова:

закон Дарси, фильтрация, упругий режим, флюид, поровое давление, численное моделирование, проницаемость.

АННОТАЦИЯ

Теория фильтрации жидкостей и газов через пористые среды исторически применялась для решения большого количества прикладных проблем – от движения подземных вод до закономерностей консолидации биологических тканей. В работе рассмотрены две базовые задачи физики нефтяного и газового пластов – плоскопараллельный и плоскорадиальный потоки жидкости и идеального газа через пористый деформируемый скелет. В качестве уравнения фильтрации флюидов применяется линейный закон Дарси. Определяющие соотношения для скелета включают в себя член, учитывающий влияние флюидного давления на его деформацию. В свою очередь определяющие соотношения для флюида учитывают влияние скелета на сжимаемость флюида. Таким образом, сформулирована связанная задача при упругом режиме фильтрации флюида. В работе выполнена верификация модели на основе аналитических решений, а также численных решений, полученных другими авторами. Показано, что полученные численные решения, а именно распределения порового давления, скоростей фильтрации и массовых расходов с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями. Дополнительно рассмотрена фильтрация флюида через квазиизотропную среду. Показано, что наличие слоя с пониженной проницаемостью не приводит к нелинейности в распределении скорости для жидкости и в произведении плотности на скорость для газа, однако их значение при этом снижается. Профиль распределения давления, напротив, скачкообразно меняется при переходе от слоя к слою. Предложены новые формулы для определения эффективной проницаемости квазиизотропной среды на основе данных численного моделирования плоскопараллельного потока. Полученные результаты могут найти применение при расчете параметров эксплуатации нефтяных и газовых месторождений.

© **Еремин Михаил Олегович** – д. ф.-м. н., н. с. лаб. механики структурно-неоднородных сред, e-mail: eremin@ispms.ru.
Бакеев Рустам Альфредович – к. ф.-м. н., с. н. с. лаб. механики структурно-неоднородных сред, e-mail: rustam@ispms.ru.
Стефанов Юрий Павлович – д. ф.-м. н., с. н. с. лаб. механики структурно-неоднородных сред, e-mail: yu_st@mail.ru.
Чирков Артем Олегович – м. н. с. лаб. механики структурно-неоднородных сред, e-mail: chirkov@ispms.ru.
Пажин Альберт – м. н. с. лаб. механики структурно-неоднородных сред, e-mail: alvian99@mail.ru.

Mikhail O. Eremin – Doctor of Physics and Mathematics, Researcher at the Laboratory of Mechanics of Non-homogeneous Media, e-mail: eremin@ispms. ru.
Rustam A. Bakeev – Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher at the Laboratory of Mechanics of Non-homogeneous Media, e-mail: rustam@ispms.ru.
Yuri P. Stefanov – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher at the Laboratory of Mechanics of Non-homogeneous Media, e-mail: yu_st@mail.ru.
Artem O. Chirkov – Junior Researcher at the Laboratory of Mechanics of Non-homogeneous Media, e-mail: chirkov@ispms.ru.
Albert Pazhin – Junior Researcher at the Laboratory of Mechanics of Non-homogeneous Media, e-mail: alvian99@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

FINITE-DIFFERENCE ANALYSIS OF PLANE-PARALLEL AND PLANE-RADIAL FLOWS IN THE ELASTIC MODE OF LIQUID AND GAS FILTRATION

M.O. Eremin, R.A. Bakeev, Yu.P. Stefanov, A.O. Chirkov, A. Pazhin

Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 06 May 2024
Approved: 26 June 2024
Accepted for publication: 30 June 2024

Keywords:

Darcy's law, filtration, elastic mode, fluid, pore pressure, numerical modeling, permeability.

ABSTRACT

The theory of filtration of liquids and gases through porous media has historically been used to solve a large number of applied problems – from the movement of groundwater to the regularities of consolidation of biological tissues. This work examines two basic problems of the physics of oil and gas reservoirs – plane-parallel and plane-radial flows of liquid and ideal gas. Darcy's linear law is used as the equation of fluid motion. The constitutive equations for the skeleton include a term that takes account of the effect of fluid pressure on its deformation. In turn, the constitutive equations for the fluid take account of the influence of the skeleton on the compressibility of the fluid. In this way, a coupled problem is formulated for the elastic regime of fluid filtration. The model is verified based on analytical solutions, as well as numerical solutions obtained by other authors. It is shown that the obtained numerical solutions, namely the distributions of pore pressure, filtration rates and mass flow rates, coincide with high accuracy with analytical solutions. Additionally, fluid filtration through a quasi-isotropic medium is considered. It is shown that the presence of a layer with reduced permeability does not lead to nonlinearity in the velocity distribution for liquids and in the product of density and velocity for gas, but their values decrease. The pressure distribution profile, on the contrary, changes abruptly when moving from layer to layer. Formulas are proposed for determining the effective permeability of a medium based on numerical simulation data of a plane-parallel flow. The results obtained can be used in calculating the operating parameters of oil and gas fields.

Введение

В 1856 г. А. Дарси́ публикует работу [1], посвященную исследованию фильтрации воды через песчаный слой. Исследование показало, что скорость фильтрации прямо пропорциональна разности напоров на входе и выходе в слой и обратно пропорциональна толщине слоя. Коэффициентом пропорциональности является проницаемость слоя, зависящая от его внутренних свойств. Данный закон был впоследствии назван в честь его открывателя – закон Дарси́ – и применяется для описания фильтрации жидкостей и газов через различные пористые среды в настоящее время, например в [2].

Безусловно, за примерно 170 лет закон претерпел ряд изменений. Например, была сформулирована дифференциальная форма закона, а также подробно исследованы границы применимости линейного приближения и случаев, когда фильтруется не вода, а неньютоновские жидкости, например, нефть. Оказалось, что при очень малых скоростях фильтрации силы межмолекулярного взаимодействия оказывают значительное влияние, что приводит к нелинейности в зависимости скорости фильтрации от градиента давления. Например, в работе [3] отмечается, что для нивелирования ошибок в определении проницаемости плотных горных пород при режимах фильтрации вблизи нижней границы применимости закона Дарси́ необходимы измерения крайне низких расходов жидкости, что требует развития новых экспериментальных методик. В результате в работе был предложен новый метод регуляризации экспериментальных данных по фильтрации с низкими скоростями для оценки эффективной проницаемости плотных горных пород от градиента флюидного давления, который оказался более эффективным, по сравнению с другими методами. При больших скоростях, напротив, нелинейность обусловлена сравнительно высокой инерционностью потока. Вязкость флюида также оказывает влияние на скорость фильтрации, которая в итоге оказалась в знаменателе уравнения фильтрации [4; 5].

Краткие исторические экскурсы по развитию теории фильтрации применительно к исследованию течения грунтовых вод можно найти в работе [6], применительно к проблемам добычи жидких углеводородов – в работе [5]. Теория фильтрации находит свое применение и при рассмотрении закономерностей деформации (консолидации) различных материалов, например, губчатых резин и биологических тканей [7; 8], а также песчаных грунтов [9]. Представленный ниже литературный обзор, охватывает некоторые работы, посвященные упругому режиму фильтрации в коллекторе.

Фильтрация флюида в упругом режиме предполагается за счет упругих свойств самого флюида и среды. Флюид при этом может представлять собой смесь нефти и газа. В этом случае растворенный газ также играет роль в формировании притока всей смеси к скважинам. Первые работы по фильтрации газированной жидкости были выполнены в 30–40-е гг. XX столетия как за рубежом [10], так и в бывшем СССР [11; 12].

Работы [7–9] рассматривали движущиеся флюиды как несжимаемые, но не рассматривали полученные уравнения как описывающие упругий режим фильтрации. Как отмечается в работе В.Н. Николаевского [13],

теория течения упругой жидкости в деформируемой упругой пористой среде, по-видимому, впервые была сформулирована в работе В.Н. Щелкачева [14], где было показано, что при определенных преобразованиях основное дифференциальное уравнения фильтрации жидкости сводится к уравнению пьезопроводности, аналогу уравнения теплопроводности [14; 15]. Очевидно, что попытка рассмотрения течения сжимаемой жидкости в сжимаемом каркасе привела к необходимости разработки соответствующих определяющих соотношений, в первую очередь, зависимости плотности жидкости от порового давления, а также пористости и проницаемости среды от эффективных напряжений в скелете [13]. Исследования показали, что в упругом режиме при понижении пластового давления степень извлечения нефти может существенно увеличиться за счет снижения упругой энергии как самой нефти, так и скелета. Данный эффект связан с изменениями, происходящими в поровом пространстве и в совокупности с нагнетательными скважинами на контуре обводнения позволяет существенно повысить нефтеотдачу [16]. Подобный подход является дополнением к классическому методу вытеснения нефти при закачке рабочих жидкостей в нагнетательные скважины. При математическом решении задач вытеснения нефти традиционно применяются модели фильтрации многофазных жидкостей, как, например, в работе [17].

Как отмечалось выше, при добыче нефти или газа в окрестностях пласта происходят изменения в поровом пространстве за счет изменения напряженно-деформированного состояния (далее НДС). Очевидно, что изменение НДС сказывается на фильтрационно-емкостных свойствах среды, прежде всего на пористости и проницаемости скелета. Так, во многих работах предполагается степенной закон зависимости проницаемости от пористости вида: $K_P = K_0\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^N$ [18; 19], где K_0 – исходная проницаемость, φ, φ_0 – текущее и начальное значение пористости соответственно, N – показатель степени. Как показывают эксперименты [20], породы проявляют нелинейный характер изменения проницаемости только в первом цикле нагружения, когда происходят необратимые деформации. Дальнейшее циклирование нагрузки происходит в упругом режиме даже при сравнительно высоких значениях эффективного давления. Однако подобное поведение вероятно только при сохранении начальной ориентации эллипсоида напряжений при повторных циклах нагружения (эффект Кайзера) [21]. Изменение проницаемости также часто описывают функциями пластового или эффективного давления, см., например, обзор [22]. Другие исследования убедительно свидетельствуют, что наличие флюида в поровом пространстве оказывает влияние и на другие физико-механические характеристики вмещающей среды, например [23–29].

Для удобства описания движения флюидов в предположении постоянства проницаемости и вязкости в среде Л.С. Лейбензоном была предложена функция следующего вида [11]:

$$\mathcal{F} = \int \rho_{fl}\left(P_{fl}\right)dp + C, \tag{1}$$

где ρ_{fl} – плотность флюида, P_{fl} – флюидное давление.

Рассмотрение полного дифференциала от функции $\mathcal{F}$ позволяет показать, что она удовлетворяет уравнению Лапласа, и в случае установившегося движения $\Delta\mathcal{F} = 0$. Для простейших флюидов – упругой жидкости и идеального газа – функция Лейбензона представлена уравнениями (2а) и (2б) соответственно [4]:

$$\mathcal{F} = \frac{\rho}{\beta_{fl}} + C, \tag{2а}$$

$$\mathcal{F} = \frac{\rho_{AT} P_{fl}^2}{2P_{AT}} + C, \tag{2б}$$

где β_f – сжимаемость жидкости, ρ_{AT} – плотность газа при атмосферном давлении, P_{AT} – атмосферное давление. Запись уравнения Дарси́ через функцию Лейбензона позволяет определить распределения функции вдоль трубки тока при удовлетворении граничным и начальным условиям для различных одномерных потоков и уже через нее определить распределения флюидного давления, массового и объемного расходов. Распределения функции $\mathcal{F}$ для плоскопараллельного и плоскорадиального потоков даны уравнениями (3а) и (3б) соответственно. Получаемые аналитические распределения флюидного давления приведены ниже при обсуждении результатов моделирования.

$$\mathcal{F}\left(x\right) = \mathcal{F}_c - \frac{\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_g}{L}x, \tag{3а}$$

$$\mathcal{F}\left(r\right) = \mathcal{F}_c - (\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_g)\frac{\ln\left(R_c / r\right)}{\ln\left(R_c / r_c\right)}, \tag{3б}$$

где $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{F}_g$ – значение функции Лейбензона на контуре питания и на галерее соответственно, L – расстояние между контуром питания и скважиной, r_c, R_c – радиус скважины и контура питания соответственно.

Отметим, что при рассмотрении наиболее полной постановки задачи, т.е. движения сжимаемого флюида в деформируемой пористой среде, требуется определить 8 функций координат и времени – давления, трех компонент вектора скорости, плотности, вязкости, проницаемости и пористости. Последнее приводит к неголономности системы уравнений и возможности получить аналитические решения лишь в ограниченном числе случаев при значительной идеализации. Однако рассмотрение идеализированных случаев позволяет верифицировать разрабатываемые численные подходы

к интегрированию неголономных систем уравнений, чему и посвящена настоящая работа. В следующем разделе представлена постановка задачи движения упругого флюида в деформируемой пористой среде. Рассматривается два идеализированных потока флюида – плоскопараллельный и плоскорадиальный, и два вида флюидов – идеальная жидкость и идеальный газ. Согласно проведенному литературному обзору, вопрос оценки эффективной проницаемости среды при ее неоднородном строении является актуальным. По этой причине в последнем разделе статьи предложен новый подход к определению эффективной проницаемости неоднородной среды.

1. Математическая постановка задачи

Основой математической модели является полная система уравнений механики деформируемого твердого тела, представленная ниже уравнениями (4)–(15). В систему входят закон сохранения массы (4), необходимый для вычисления относительного изменения объема расчетной ячейки в процессе деформирования в рамках метода Уилкинса, закон сохранения количества движения (5), применяемый для вычисления скоростей узлов разностной сетки на каждом шаге интегрирования по времени, и геометрические соотношения (6), (7) [30; 31] для расчета приращений деформаций и поворота расчетных ячеек в скелете.

$$\rho V = \rho_0 V_0 , \tag{4}$$

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} , \tag{5}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} , \tag{6}$$

$$2\dot{\omega}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} , \tag{7}$$

где ρ, V – текущие значения плотности и объема скелета, индекс «0» относится к начальным значениям соответственно, v_i – компоненты вектора скорости частиц скелета; x_i – декартовы координаты, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций Коши, ω_{ij} – компоненты тензора поворота. При учете наличия флюида (жидкости или газа) предполагается, что он сплошным образом занимает весь объем связанной пористости в скелете. В этом случае плотность $\rho = (1-\varphi)\rho_s$, где ρ_s – плотность твердой фазы, φ – пористость скелета. В уравнении движения (3) σ_{ij} является напряжениями в скелете, учитывающими также влияние флюидного давления, в соответствии с формулами, представленными ниже.

Приращение полных деформаций $d\varepsilon_{ij}^T$ полагается чисто упругим в (8), далее индексы E и T опущены. Соотношения гипоупругой изотропной среды, насыщенной флюидом, используются в качестве определяющих соотношений, связывающих приращения компонент тензора напряжений и компонент тензора деформаций (9), (10). Приращения компонент тензора напряжений представляются в виде суммы шаровой P и девиаторной S_{ij} частей. В силу того, что тензор напряжений для флюида имеет только шаровую часть, то в соотношение (9), по сравнению с классическим случаем, добавляется дополнительный член $\beta_s \dot{P}_{fl}$, где β_s – сжимаемость твердой фазы.

$$d\varepsilon_{ij}^T = d\varepsilon_{ij}^E , \tag{8}$$

$$\dot{P} = -K\left(\frac{\dot{V}}{V} + \beta_s \dot{P}_{fl}\right), \tag{9}$$

$$\dot{S}_{ij} + S_{ik}\dot{\omega}_{kj} - S_{kj}\dot{\omega}_{ik} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\dot{V}}{V}\delta_{ij}\right), \tag{10}$$

где V – относительный объем ячейки. Для корректного определения приращений девиаторных напряжений применяется коротационная производная Яуманна, чтобы вычесть поворот элемента среды как целого, не влияющего на их величину. Для рассмотренных ниже задач поворот элементов среды является незначительным, однако производная Яуманна не исключена из рассмотрения, поскольку применяется по умолчанию в методе Уилкинса [32], который использовался для решения задач в работе. Недостатки производной Яуманна, а также возможность и условия использования других коротационных производных (Олдройда, Коттера – Ривлина и т.д.) подробно обсуждено в работе [33].

Рассмотрим уравнения, описывающие движение флюида (фильтрацию). В модели для этого применяется линейный закон Дарси́ (11).

$$\varphi\rho_{fl}\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\varphi\frac{\partial P_{fl}}{\partial x_j} - R_i , \; R_i = \frac{\eta\varphi^2\left(w_i - v_i\right)}{K_p} , \tag{11}$$

где ρ_{fl} – плотность флюида, w_i – компоненты вектора скорости флюида, η – динамическая вязкость.

При течении флюида в пористой среде в уравнение (11) вводится массовая сила R_i, связанная с взаимодействием (трением) системы «скелет – жидкость», в соответствии с гипотезой Н.Е. Жуковского [34]. Отметим, что в случае предположения об установившемся характере движения флюида левая часть в уравнении (11) обращается в ноль, что приводит к выражению следующего вида:

$$w_i - v_i = -\frac{K_P^{'}}{\eta}\frac{\partial P_{fl}}{\partial x_i} = -\chi\frac{\partial P_{fl}}{\partial x_i} . \tag{12}$$

Другими словами, при моделировании скорость флюида w_i рассчитывается относительно скелета, в уравнении (12) $K_P^{'} = K_P / \varphi$ – проницаемость скелета с учетом пористости. Для расчета объемной деформации флюида применяется формула (13), аналогичная расчету объемной деформации скелета:

$$\dot{\varsigma} = \mathrm{div}\bar{w}. \qquad (13)$$

Для расчета флюидного давления применяются следующие определяющие соотношения для жидкости (14а) и газа (14б) соответственно:

$$\left(\beta_{fl}\varphi_0 - \beta_s B\right)\dot{P}_{fl} = -\varphi_0\dot{\varsigma} + B\dot{\theta}, \qquad (14а)$$

$$\dot{P}_{fl} = -P_{AT}\frac{\rho}{\rho_{AT}}\dot{\varsigma} + \frac{B}{\beta_{fl}\varphi_0 - \beta_s B}\dot{\theta}, \qquad (14б)$$

где β_{fl} – сжимаемость флюида, φ_0 – начальная пористость скелета, $B = \varphi + \beta_s K - 1$, P_{AT}, ρ_{AT} – атмосферное давление и плотность при атмосферном давлении соответственно.

В процессе деформирования пористость в скелете меняется по следующему закону:

$$\left(\beta_{fl}\varphi_0 - \beta_s B\right)\dot{\varphi} = \varphi_0 B\left(\beta_s\dot{\varsigma} - \beta_{fl}\dot{\theta}\right). \qquad (15)$$

Уравнение (15) является эмпирическим уравнением, полученным в результате обобщения значительного объема экспериментальных данных [13]. По сути уравнение описывает изменение пористости в результате объемных изменений, происходящих как в скелете $\dot{\theta}$, так и во флюиде $\dot{\varsigma}$. В уравнение эти вклады входят с разными знаками ввиду разнонаправленности движений в скелете и во флюиде. Сжимаемости твердой фазы и флюида выступают в качестве коэффициентов пропорциональности. При малых деформациях пористость меняется по линейному закону.

В модели проницаемость скелета считалась постоянной в процессе деформирования $K_p = K_0$. Представленная выше модель модифицирована из работы [18].

Начальные и граничные условия

В табл. 1 и 2 представлены параметры связанной модели для жидкости и газа, соответственно.

Таблица 1

Физико-механические параметры связанной модели для жидкости

Table 1

Physical and mechanical parameters of the coupled model for liquid

ρ, г/см^3	K, ГПа	μ, ГПа	φ	$K_P^{'}$, Д	η, Па·с	ρ_{fl}, г/см^3	β_s 10^{-11}, Па$^{-1}$	β_{fl} 10^{-11}, Па$^{-1}$
2,2	8	6	0,19	19	10^{-3}	1,04	2,8	30

Таблица 2

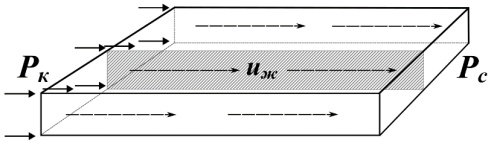
Физико-механические параметры связанной модели для идеального газа

Table 2

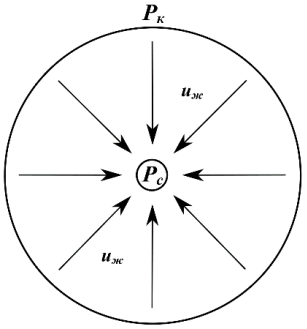
Physical and mechanical parameters of the coupled model for ideal gas

ρ, г/см^3	K, ГПа	μ, ГПа	φ_0	$K_P^{'}$, Д	η, Па·с	ρ_{AT}, г/см^3	β_s 10^{-11}, Па$^{-1}$	P_{AT}, Па
2,2	8	6	0,19	1	1,039 10^{-5}	7,168 10^{-3}	2,8	10^5

Схемы движения флюида при плоскопараллельном и плоскорадиальном потоках представлены на рис. 1 (*a*, *b* соответственно). В качестве граничных условий задавалось давление на контуре питания $P_к$ и давление в скважине P_c. В случае плоскопараллельного потока численное решение фактически проводилось в одномерной постановке. Длина области составляла: а) 250 м для жидкости, $P_к = 20$ МПа, $P_c = 0$ МПа, таким образом, депрессия составляет 20 МПа; б) 1 м для газа, $P_к = 5$ МПа, $P_c = 0{,}1$ МПа, таким образом, депрессия составляет 4,9 МПа. Количество расчетных ячеек равно 196. В случае плоскорадиального потока численное решение проводилось в двумерной постановке. Радиус контура питания составлял: а) 125 м для жидкости, депрессия составляет 20 МПа; б) 1 м для газа, депрессия составляет 4,9 МПа (аналогично одномерному случаю). Количество расчетных ячеек вдоль диаметра равно 256. Радиус скважины равен трем размерам одной ячейки. Начальные условия соответствуют нулевым значениям всех параметров в скелете и во флюиде для жидкости, и начальное флюидное давление равно 0,1 МПа для газа.



a



b

Рис. 1. Схемы одномерных потоков флюида:
a – плоскопараллельный, *b* – плоскорадиальный

Fig. 1. Schemes of one-dimensional fluid flows:
a – plane-parallel, *b* – plane-radial

Порядок решения системы уравнений

Сравнивая представленную систему с классической системой уравнения механики деформируемого твердого тела, содержащей в самом простом случае 15 уравнений и 15 неизвестных функций, отметим, что, кроме отыскания 3 компонент вектора скорости скелета (уравнение (5)), 6 компонент тензора напряжений (соотношения (9)–(10)) и 6 компонент тензора скоростей деформаций в скелете (соотношение (6)), необходимо также определить 3 компоненты вектора скорости флюида (уравнение (12)), флюидное давление (уравнение (14)), объемную деформацию флюида (уравнение (13)), дополнительно в систему введено кинетическое уравнение (15), описывающее изменение пористости в процессе деформации. Таким образом, в самом общем случае система уравнений представлена 21 уравнением с 21 неизвестной функцией координат и времени. Отметим, что количество параметров в модели значительно возросло, по сравнению с классическим случаем неучета влияния флюида, однако это совершенно необходимо при решении связанной задачи. Константами при решении задач являются упругие модули скелета, динамическая вязкость, сжимаемости твердой фазы и флюида.

При численном решении задач на каждом шаге итераций по времени, ограниченных условием устойчивости Куранта, изначально определяется поле скоростей в скелете и во флюиде с учетом граничных условий, далее во всей вычислительной области рассчитываются все параметры НДС: приращения деформаций, из них с использованием уравнений состояния рассчитываются приращения напряжений в скелете и порового давления. Поскольку для решения задачи применяется явная конечно-разностная схема для решения динамических уравнений [32], то критерием выхода из итерационного процесса является достижение квазистационарного состояния в распределении параметров НДС.

2. Результаты моделирования и обсуждение

Плоскопараллельный поток в однородной среде

Рассмотрим результаты моделирования фильтрации при плоскопараллельном потоке. Подставив значения функции Лейбензона на контуре питания и на галерее, получим следующие выражения для распределения флюидного давления для жидкости (16а) и идеального газа (16б) соответственно [4]:

$$P_{fl}(x) = P_к - \frac{P_к - P_c}{L}x, \qquad (16а)$$

$$P_{fl}(x) = \sqrt{P_к^2 - \frac{P_к^2 - P_c^2}{L}x}. \qquad (16б)$$

На рис. 2 (*a*, *b*) представлено сравнение распределений давления флюида, полученного при моделировании плоскопараллельного потока с аналитическим решением для жидкости и идеального газа соответственно. Очевидно, решения хорошо совпадают как количественно, так и качественно. Незначительное различие (ошибка по всей длине профилей не превышает 1 %) обусловлено учетом влияния сжимаемости скелета, изменением пористости, что не учитывается при выводе аналитических выражений для распределения флюидного давления. Аналогичные результаты для плоскопараллельного потока были ранее получены моделированием с использованием метода дискретных элементов в работе [35]. Дополнительно проведено сравнение скорости фильтрации, полученной в рамках численного моделирования и аналитического решения для жидкости и идеального газа соответственно. Расчеты показали, что скорости фильтрации составляют ≈1,52 мм/с и ≈1,51 мм/с для численного и аналитического расчетов соответственно.

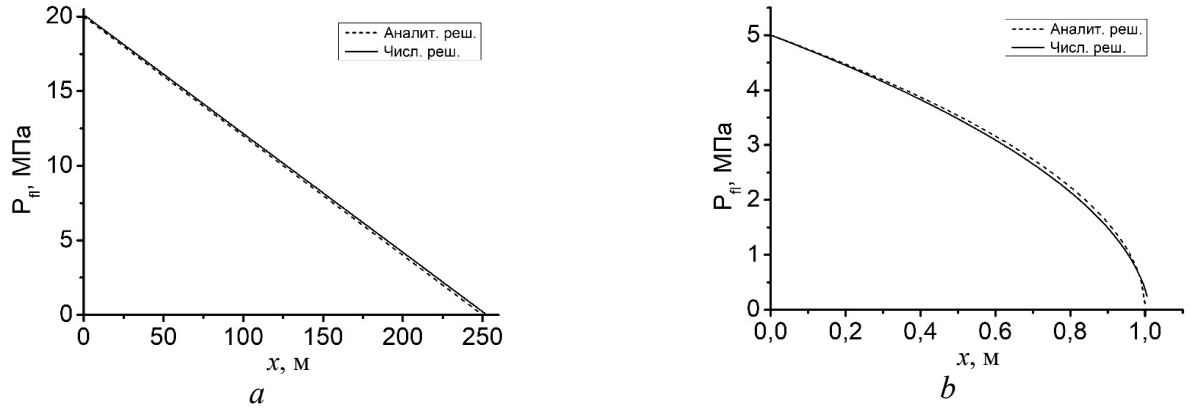


Рис. 2. Распределение давления флюида, полученного при моделировании плоскопараллельного потока в сравнении с аналитическим решением: для жидкости (*a*), для идеального газа (*b*)

Fig. 2. Distribution of fluid pressure obtained by modeling a plane-parallel flow in comparison with the analytical solution: for a liquid (*a*), for an ideal gas (*b*)

Отметим, что в случае с идеальным газом сравнивается фактически массовый расход, или произведение плотности на скорость фильтрации. Объясняется это нелинейностью профиля флюидного давления и, соответственно, возрастающей скоростью фильтрации по мере приближения к галерее за счет расширения газа. Расчеты показали, что массовый расход составляют ≈85,8 кг/(м^2·с) и ≈86,2 кг/(м^2·с) для численного и аналитического расчетов соответственно.

Плоскорадиальный поток в однородной среде

Аналогично рассмотрим результаты моделирования фильтрации при плоскорадиальном потоке. Подставив значения функции Лейбензона на контуре питания и на галерее, получим следующие выражения для распределения флюидного давления для жидкости (17а) и идеального газа (17б) соответственно [4]:

$$P_{fl}\left(x\right) = P_к - \frac{P_к - P_c}{\ln\left(R_к / r_c\right)} \ln\left(R_к / r\right) \overline{w}\,, \qquad (17а)$$

$$P_{fl}\left(x\right) = \sqrt{P_к^2 - \frac{P_к^2 - P_c^2}{\ln\left(R_к / r_c\right)} \ln\left(R_к / r\right)}\,. \qquad (17б)$$

На рис. 3 (*a*, *b*) представлено сравнение распределений давления флюида, полученных при моделировании плоскорадиального потока с аналитическим решением для жидкости и идеального газа соответственно. Видно, что в случае плоскорадиального потока профили давления, полученные численным моделированием, также хорошо согласуются количественно и качественно с аналитическими решениями как для жидкости, так и для газа. Максимальная ошибка в определении давления не превышает 1 %. На рис. 4 (*a*, *b*) дополнительно проведено сравнение скорости фильтрации, полученной в рамках численного моделирования и аналитического решения для жидкости и идеального газа соответственно.

Выполненная серия тестовых расчетов показала, что численные решения хорошо согласуются с аналитическими, что свидетельствует об адекватности модели и возможности ее применения для моделирования течения флюида в более сложных по строению средах, чем изотропные.

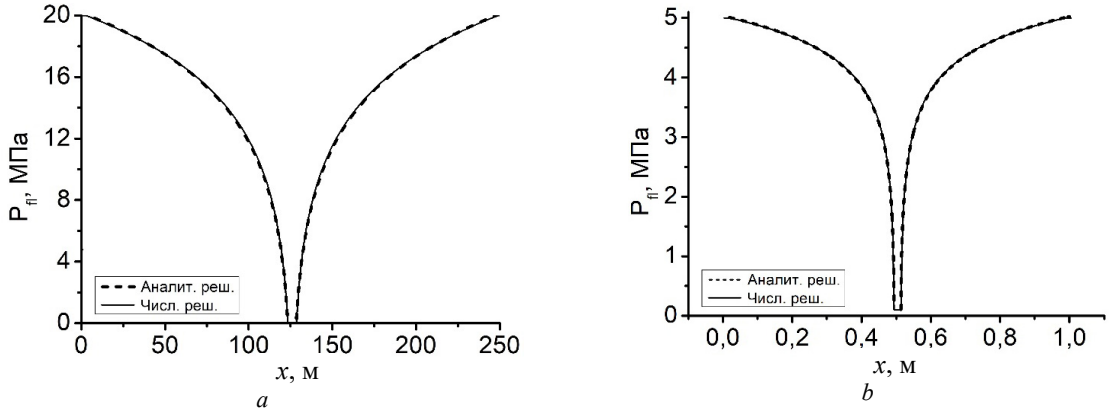


Рис. 3. Распределение давления флюида, полученного при моделировании плоскорадиального потока в сравнении с аналитическим решением: для жидкости (*a*), для идеального газа (*b*)

Fig. 3. Distribution of fluid pressure obtained by modeling a plane-radial flow in comparison with the analytical solution: for a liquid (*a*), for an ideal gas (*b*)

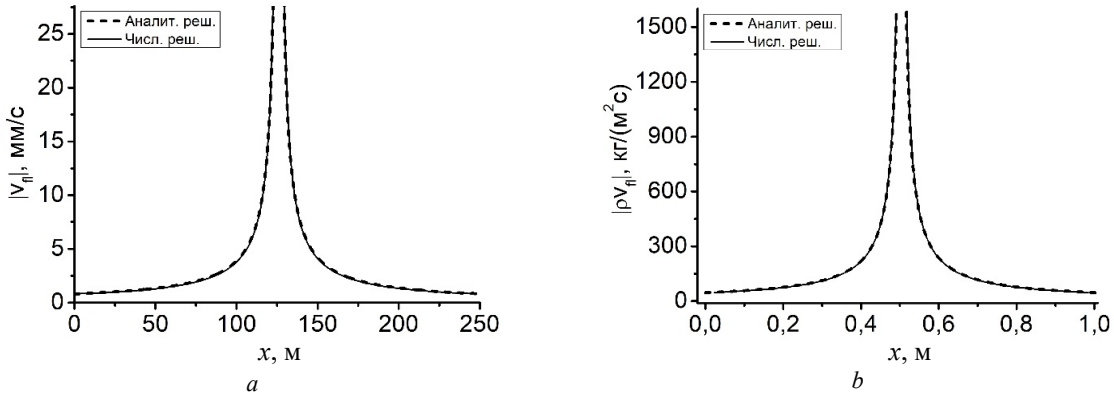


Рис. 4. Распределение скорости фильтрации флюида, полученного при моделировании плоскорадиального потока в сравнении с аналитическим решением: для идеальной жидкости (*a*), для идеального газа (*b*)

Fig. 4. Distribution of fluid filtration rate obtained by modeling a plane-parallel flow in comparison with the analytical solution: for a liquid (*a*), for an ideal gas (*b*)

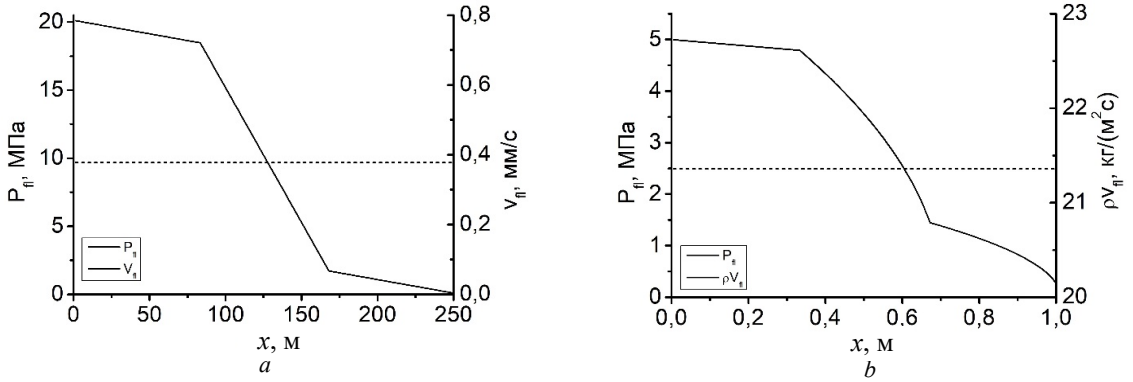


Рис. 5. Распределения давления и скорости флюида, полученного при моделировании плоскопараллельного потока в неоднородной среде для жидкости (*a*), газа (*b*)

Fig. 5. Distribution of fluid pressure and fluid speed obtained by modeling a plane-parallel flow in a non-uniform medium for liquid (*a*), gas (*b*)

В следующем подразделе представлены результаты моделирования плоскопараллельного потока в неоднородной среде. В качестве структурной неоднородности выступает слой, занимающий в центре треть расчетной области между контуром питания и галереей, и обладающий в 10 раз меньшей проницаемостью, чем остальная область. Внутри отдельного участка среда также предполагается изотропной, таким образом, вся расчетная область является квазиизотропной.

Плоскопараллельный поток в неоднородной среде

Сравним результаты моделирования фильтрации при плоскопараллельном потоке в однородной и неоднородной средах. На рис. 5 (*a*, *b*) представлены распределения давления и скорости флюида в неоднородной среде для жидкости и газа, соответственно.

Согласно полученным результатам, при наличии структурного слоя с пониженной проницаемостью, скорость фильтрации снижается приблизительно в 4 раза для обоих флюидов. В отличие от однородной среды, для которой профили давления представляют собой гладкие функции координаты (см. рис. 2, 3), при переходе от одного участка расчетной области к другому для неоднородной среды (см. рис. 5) наблюдается скачкообразное изменение градиента флюидного давления, схожие результаты были получены в работе [36]. В профиле распределении давления для случая идеального газа в неоднородной среде наблюдается интересная особенность (см. рис. 5, *b*), а именно давление на первом сегменте, фактически, распределено линейно, как в случае с жидкостью, в отличие от других сегментов. Это объясняется незначительной величиной депрессии на границах данного участка.

Расчет эффективной проницаемости

Воспользуемся формулой для скорости фильтрации в предположении, что флюид течет через среду с эффективными характеристиками. В таком случае массовая скорость фильтрации для несжимаемой жидкости определяется формулой (18) [4]:

$$\rho_0 w^* = \rho_0 \frac{K_P^*}{\eta} \frac{P_к - P_c}{L} = \text{const}, \qquad (18)$$

поскольку вязкость жидкости, длина и величина депрессии остаются постоянными для двух расчетов, представленных на рис. 3, можно записать:

$$\frac{K_P}{w} = \frac{K_P^*}{w^*}. \qquad (19)$$

Согласно полученным результатам моделирования, массовая скорость фильтрации снижается приблизительно в 4 раза, следовательно, из формулы (19) – $K_P^* \approx 1/4 K_P$. Аналогичный результат получается и для идеального газа.

Отметим, что закон фильтрации, выведенный Дарси́, в простейшей форме аналогичен по форме записи закону Ома из электростатики [4], или падение напора связано с наличием гидросопротивления. Таким образом, можно предположить, что в случае, когда вся область состоит из нескольких участков с разной проницаемостью и разной длиной, то справедливо равенство (20а) для жидкости и (20б) для идеального газа:

$$\frac{K_P^* \left(P_к - P_c\right)}{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_P^i \Delta P_i}{L_i}, \qquad (20а)$$

$$\frac{K_P^* \left(P_к^2 - P_c^2\right)}{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_P^i \left(P_к^2 - P_c^2\right)_i}{L_i}, \qquad (20б)$$

где K_P^i – проницаемость *i*-го участка, ΔP_i – депрессия на *i*-м участке, L_i – длина *i*-го участка.

Воспользовавшись формулой (20а), была рассчитана эффективная проницаемость рассмотренной области при одинаковой длине участков L_i: $K_P^* 20 = K_P 1,7 + \frac{1}{10} K_P 16,6 + K_P 1,7 \approx 5,06 K_P$, откуда следует, что $K_P^* \approx 1/4 K_P$. Отметим, что, поскольку и формула (19),

и формула (20) требуют проведения численных расчетов, определение эффективной проницаемости по формуле (19) оказывается более быстрым, так как достаточно сравнить значения массовых скоростей фильтрации.

Заключение

Результаты численного моделирования, полученные с использованием описанной модели, находятся в хорошем качественном и количественном согласии с аналитическими решениями, а также численными решениями других авторов. Это позволяет сделать вывод об адекватности модели и возможности ее дальнейшего использования для описания более сложных случаев фильтрационных потоков.

Наличие структурной неоднородности в виде слоя с пониженной проницаемостью приводит к скачкообразному изменению порового давления на входе в слой и выходе из него. Скорость фильтрации для жидкости и произведение плотности на скорость фильтрации для газа при этом снижаются, сохраняя линейный характер распределения вдоль всего профиля для плоскопараллельного потока.

Полученные результаты имеют прикладное значение для расчетов параметров эксплуатации нефтяных и газовых месторождений. В дальнейшей работе планируется использовать представленную модель для оценки закономерностей истечения газа при заблаговременной и предварительной дегазации угольных пластов, а также ряда проблем, возникающих в окрестностях добывающих и нагнетательных скважин.

Библиографический список

1. Darcy, H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
2. Knyazeva, A.G. Coupled model of a biological fluid filtration through a flat layer with due account for barodiffusion / A.G. Knyazeva, N.N. Nazarenko // Transport in Porous Media – 2022. – Vol. 141 – P. 331–358. DOI: 10.1007/s11242-021-01720-0
3. Барышников, Н.А. Применение метода регуляризации квадратичного отклонения для анализа результатов лабораторных исследований нелинейных фильтрационных потоков / Н.А. Барышников, Е.В. Зенченко, С.Б. Турунтаев // Динамические процессы в геосферах. – 2022 – Т. 14, № 1. – С. 85–92.
4. Басниев, К.С. Подземная гидромеханика: учебник для вузов / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
5. Борхович, С.Ю. Подземная гидромеханика: учебно-методическое пособие / С.Ю. Борхович, И.В. Пчельников, С.Б. Колесова. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2017. – 176 с.
6. Эмих, В.Е. Развитие методов комплексного анализа в задачах теории фильтрации / В.Е. Эмих // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – № 56(5). – С. 130–138. DOI: 10.15372/PMTF20150511
7. Artamonova, N.B. Finite element implementation of a geometrically and physically nonlinear consolidation model / N.B. Artamonova, S.V. Sheshenin // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2023. – Vol. 35, no. 4. – P. 1291–1308. DOI: 10.1007/s00161-022-01124-5
8. Еремина, Г.М. Численное исследование механического поведения тазобедренного сустава при терапевтическом акустическом воздействии / Г.М. Еремина, А.Ю. Смолин // Российский Журнал Биомеханики. – 2023. – № 1. – С. 32–44.
9. Шешенин, С.В. Моделирование нелинейной консолидации пористых сред / С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 1. – С. 167–176. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.13
10. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media // Soil Science. – 1946. – Vol. 46, no. 2 – 770 p.
11. Лейбензон, Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л.С. Лейбензон. – М.-Л.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 244 с.
12. Христианович, С.А. О движении газированной жидкости в пористых породах / С.А. Христианович // Прикладная математика и механика. – 1941. – Т. 10, № 2. – С. 277–282.
13. Николаевский, В.Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газов / В.Н. Николаевский // Прикладная механика и техническая физика. – 1961. – № 4. – С. 67–76.
14. Щелкачев, В.Н. Основные уравнения упругой жидкости в упругой пористой среде / В.Н. Щелкачев // Доклады АН СССР. – 1946. – Т. 52. № 2. – С. 103–106.
15. Чарный, И.А. Подземная гидрогазодинамика / И.А. Чарный. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 397 с.
16. Kovalenko, Yu.F. Elastic regime for exploiting an oil field / Yu.F. Kovalenko, S.A. Khristianovich // Soviet Mining Science – 1991. – Vol. 27, no. 1. – P. 15–32. DOI: 10.1007/BF02499682
17. Васильева, М.В. Численное решение задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами методом конечных элементов / М.В. Васильева, Г.А. Прокофьев // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24, № 2. – С. 46–62.
18. Kapustyanskii, S.M. Nonholonomic model of deformation of highly porous sandstone under its internal crushing / S.M. Kapustyanskii, V.N. Nikolaevskii, A.G. Zhilenkov // Izvestiya, Physics of the solid earth – 2010. – Vol. 46, no. 12. – P. 82–93.
19. Effectiveness of embedded discontinuities technique in capturing geomechanical behavior in naturally fractured reservoirs / B. Maciel [et al.] // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. – 2024. – Vol. 14 – P. 665–691. DOI: 10.1007/s13202-023-01735-x
20. Исследование зависимости проницаемости горной породы от ее напряженно-деформированного состояния / А.Л. Хашпер [и др.] // Геологический вестник. – 2019. – № 1 – С. 133–140. DOI: 10.31084/2619-0087/2019-1-10
21. The Kaiser effect under multiaxial nonproportional compression of sandstone / I.A. Panteleev [et al.] // Doklady Physics. – 2020. – Vol. 65 – P. 396–399. DOI: 10.1134/S1028335820110075
22. A critical review of coal permeability models / Q. Gao [et al.] // Fuel. – 2022. – Vol. 326. – 125124 p. DOI: 10.1016/j.fuel.2022.125124
23. Biot, M.A. General theory of three-dimensional consolidation / M.A. Biot // Journal of Applied Physics. – 1941. – Vol. 12. – P. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886
24. Rice, J.R. Pore pressure effects in inelastic constitutive formulations for fissured rock masses / J.R. Rice // Advances in Civil Engineering through Engineering Mechanics. – New York, 1977. – P. 360–363.
25. Detournay, E. Fundamentals of poroelasticity / E. Detournay, A.H.-D. Cheng // Comprehensive Rock Engineering:

Principles, Practice and Projects – Pergamon Press: Oxford – 1993. – Vol. 2. – P. 113–171.

26. Rudnicki, J.W. Coupled deformation-diffusion effects in the mechanics of faulting and failure of geomaterials / J.W. Rudnicki // Applied Mechanics Review. – 2002. – Vol. 54, no. 6. – P. 483–502.

27. Cheng, A.H.-D. Fundamental solution and integral equation / A.H.-D. Cheng // Poroelasticity. – 2016. – Vol. 27. – P. 397–473. DOI: 10.1007/978-3-319-25202-5_8

28. Смолин, А.Ю. О влиянии флюидонасыщенности пористого покрытия на механическое поведение системы покрытие – подложка при контактном нагружении / А.Ю. Смолин, Г.М. Еремина // Известия вузов. Физика – 2020 – № 9. DOI: 10.17223/00213411/63/9/80

29. Shilko, E.V. Nonlinear mechanical effect of free water on the dynamic compressive strength and fracture of high-strength concrete / E.V. Shilko, I.S. Konovalenko, I.S. Konovalenko // Materials. – 2021. – Vol. 14. – P. 4011. DOI: 10.3390/ma14144011

30. Deformation and fracture behavior of particle-reinforced metal matrix composites and coatings / R.R. Balokhonov [et al.] // Physical Mesomechanics. – 2022. – Vol. 25, no. 6. – P. 492–504. DOI: 10.1134/S1029959922060029

31. Radchenko, P.A. Effect of projectile rotation on high-velocity impact fracture / P.A. Radchenko, S.P. Batuev, A.V. Radchenko // Physical Mesomechanics. – 2022. – Vol. 25, no. 2. – P. 119–128.

32. Wilkins, M.L. Computer simulation of dynamic phenomena / M.L. Wilkins. – Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1999. – 246 p.

33. Трусов, П.В. О геометрически нелинейных определяющих соотношениях упругого материала / П.В. Трусов, Н.С. Кондратьев, А.И. Швейкин // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 182–200. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.13

34. Жуковский, Н.Е. Собрание сочинений / Н.Е. Жуковский. – М.-Л.: Гослитиздат, 1949. – Т. 3. – 700 с.

35. Димаки, А.В. Нелинейные закономерности контактного взаимодействия неметаллических материалов, обусловленные вязкостью и разрушением: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.В. Димаки. – Томск, 2017. – 214 с.

36. Nematov, A. On numerical method for modeling oil filtration problems in piecewise-inhomogeneous porous medium / A. Nematov, E.S. Nazitova, R.T. Sadikov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering – 2021. – Vol. 1032, no. 012018. DOI: 10.1088/1757-899X/1032/1/012018

References

1. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. – Paris, 1856. – 647 p.

2. Knyazeva, A.G., Nazarenko, N.N. Coupled Model of a Biological Fluid Filtration Through a Flat Layer with Due Account for Barodiffusion // Transport in Porous Media – 2022. – V.141 – pp. 331-358. doi: 10.1007/s11242-021-01720-0

3. Baryshnikov N.A., Zenchenko E.V., Turuntaev S.B. Primenenie metoda reguliarizatsii kvadratichnogo otkloneniia dlia analiza rezul'tatov laboratornykh issledovanii nelineinykh fil'tratsionnykh potokov [Nonlinear flow computation using total-variation regularization] // Dinamicheskie protsessy v geosferakh. – 2022 – V. 14, No 1. – pp. 85-92.

4. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. Podzemnaia gidromekhanika. Uchebnik dlia VUZov [Underground Fluid Mechanics]. – M.: Nedra, 1993. – 416 p.

5. Borkhovich S.Iu., Pchel'nikov I.V., Kolesova S.B. Podzemnaia gidromekhanika: uchebno-metodicheskoe posobie [Underground hydromechanics: educational and methodological manual]. – Izhevsk: izdatel'skii tsentr «Udmurtskii universitet», 2017. – 176 p.

6. Emikh, V.E. Razvitie metodov kompleksnogo analiza v zadachakh teorii fil'tratsii // Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika [Development of methods of comprehensive analysis in problems of filtration theory]. – 2015. – No56(5), pp. 130-138. Doi: 10.15372/PMTF20150511

7. Artamonova, N.B., Sheshenin, S.V. Finite element implementation of a geometrically and physically nonlinear consolidation model // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2023. – V. 35, No. 4. – pp.1291–1308. doi: 10.1007/s00161-022-01124-5

8. Eremina G.M., Smolin A.Yu. Numerical study of the mechanical behavior of the hip joint under therapeutic acoustic impact // Russian Journal of Biomechanics. – 2023. – No. 1. – pp. 32–44.

9. Sheshenin, S.V., Artamonova, N.B. The Simulation of the Nonlinear Consolidation of Porous Media // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2022. – No. 1. – pp. 167–176. doi: 10.15593/perm.mech/2022.1.13

10. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media // Soil Science. – 1946. – V. 46, No. 2 – 770 p.

11. Leibenzon L.S. Dvizhenie prirodnykh zhidkostei i gazov v poristoi srede [Movement of natural liquids and gases in porous media]. M.-L.: OGIZ Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1947. 244 p.

12. Khristianovich S.A. O dvizhenii gazirovannoi zhidkosti v poristykh porodakh [On the movement of carbonated liquid in porous rocks] // Prikladnaia matematika i mekhanika. – 1941. – V. 10, No. 2. – pp. 277-282.

13. Nikolaevskii V.N. K postroeniiu nelineinoi teorii uprugogo rezhima fil'tratsii zhidkosti i gazov [Construction of a nonlinear theory of the elastic regime of liquid and gas filtration] // Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika. – 1961. – No 4. – pp. 67-76.

14. Shchelkachev V.N. Osnovnye uravneniia uprugoi zhidkosti v uprugoi poristoi srede [Basic equations of an elastic fluid in an elastic porous medium] / Doklady AN SSSR. – 1946. – V. 52. No2, C. 103-106.

15. Charnyi I.A. Podzemnaia gidrogazodinamika [Underground fluid-gas dynamics]– M.:Gostoptekhizdat, 1963. – 397 p.

16. Kovalenko, Yu.F., Khristianovich, S.A. Elastic regime for exploiting an oil field // Soviet Mining Science – 1991. – Vol.27, No. 1. – pp. 15-32. doi: 10.1007/BF02499682

17. Vasil'eva M.V., Prokof'ev G.A. Chislennoe reshenie zadachi dvukhfaznoi fil'tratsii s neodnorodnymi koeffitsientami metodom konechnykh elementov [Numerical solution to the problem of two-phase filtration with heterogeneous coefficients by the finite element method]// Matematicheskie zametki SVFU. – 2017. – V. 24, No 2. pp. 46-62.

18. Kapustyanskii S.M., Nikolaevskii V.N., Zhilenkov A.G. Nonholonomic model of deformation of highly porous sandstone under its internal crushing // Izvestiya, Physics of the solid earth – 2010. – V. 46, No. 12. – pp. 82-93.

19. Effectiveness of embedded discontinuities technique in capturing geomechanical behavior in naturally fractured reservoirs / B. Maciel [et al.] // Journal of Petroleum Exploration

and Production Technology. – 2024. – V. 14 – pp. 665-691. doi: 10.1007/s13202-023-01735-x

20. Issledovanie zavisimosti pronitsaemosti gornoi porody ot ee napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia [Research of dependence of rock permeability on its stress-strain state] / A.L. Khashper [et al.] // Geologicheskii vestnik. – 2019. – No. 1. – C. 133-140. doi: 10.31084/2619-0087/2019-1-10

21. The Kaiser Effect under Multiaxial Nonproportional Compression of Sandstone/ I.A. Panteleev [et al.] // Doklady Physics. – 2020. – V. 65 – pp. 396-399. doi: 10.1134/S1028335820110075

22. A critical review of coal permeability models / Q. Gao [et al.] // Fuel. – 2022. – V. 326. – 125124 p. doi: 10.1016/j.fuel.2022.125124

23. Biot, M.A. General theory of three-dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – V. 12. – pp. 155-164. doi: 10.1063/1.1712886

24. Rice J.R. Pore pressure effects in inelastic constitutive formulations for fissured rock masses // Advances in Civil Engineering through Engineering Mechanics – New York, 1977. – pp. 360–363

25. Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. In Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects – Pergamon Press: Oxford – 1993. – V 2. – pp. 113–171.

26. Rudnicki J.W. Coupled deformation-diffusion effects in the mechanics of faulting and failure of geomaterials // Applied Mechanics Review. – 2002. – V. 54, No. 6. – pp. 483-502

27. Cheng, A.H.-D. Fundamental Solution and Integral Equation // Poroelasticity. – 2016. V. 27. – pp. 397–473. doi: 10.1007/978-3-319-25202-5_8

28. Smolin, A.Iu., Eremina, G.M. O vliianii fliuidonasyshchennosti poristogo pokrytiia na mekhanicheskoe povedenie sistemy pokrytie – podlozhka pri kontaktnom nagruzhenii [The Effect of Fluid-Saturation on Mechanical Behavior of the Coating–Substrate System under Contact Loading]// Izvestiia vuzov. Fizika – 2020 – No 9. doi: 10.17223/00213411/63/9/80

29. Shilko, E.V., Konovalenko, I.S., Konovalenko, I.S. Nonlinear Mechanical Effect of Free Water on the Dynamic Compressive Strength and Fracture of High-Strength Concrete // Materials. – 2021. – V. 14. – pp. 4011. doi: 10.3390/ma14144011

30. Deformation and Fracture Behavior of Particle-Reinforced Metal Matrix Composites and Coatings / R.R. Balokhonov [et al.] // Physical Mesomechanics. – 2022. – V. 25, No. 6. – pp. 492-504. doi: 10.1134/S1029959922060029

31. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V., Effect of Projectile Rotation on High-Velocity Impact Fracture // Physical Mesomechanics. – 2022. – V. 25, No. 2. – pp. 119-128.

32.Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1999, 246 p.

33. Trusov, P.V., Kondratev, N.S., Shveykin, A.I. О геометрически нелинейных определяющих соотношениях упругого материала // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – No. 3. – pp. 182–200. doi: 10.15593/perm.mech/2015.3.13

34. Zhukovskii N. E. Sobranie sochinenii. Tom Z. – M.-L.: Goslitizdat, 1949. – 700 p.

Zhukovskii N. E. Complete works. Volume 3. – M.: Goslitizdat, 1949. – 700 p.

35. Dimaki A.V. Nelineinye zakonomernosti kontaktnogo vzaimodeistviia nemetallicheskikh materialov, obuslovlennye viazkost'iu i razrusheniem, dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk [Nonlinear patterns of contact interaction of non-metallic materials due to viscosity and destruction, PhD thesis], Tomsk, 2017, 214 p.

36. Nematov, A., Nazitova, E.S., Sadikov, R.T. On numerical method for modeling oil filtration problems in piecewise-inhomogeneous porous medium // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering – 2021. – V.1032, No. 012018. doi:10.1088/1757-899X/1032/1/012018

Финансирование. Разработка оригинального программного обеспечения выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема FWRW-2021-0002. Остальная работа выполнена при поддержке проекта РНФ 21-71-10079.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The development of the original software was carried out according to the Government research assignment for ISPMS SB RAS, project no. FWRW-2021-0002. The rest of the work was performed due to support of the Russian science foundation (grant No. 21-71-10079).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.