Пожарский, Д.А. Контактные задачи о включении в плоском упругом клине / Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская, Б.В. Соболь. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.04 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 4. – С. 36–43.

Perm Polytech Style: Pozharskii D.A., Pozharskaya E.D., Sobol B.V. Contact Problems of an Inclusion in a Plane Elastic Wedge. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2024, no. 4, pp. 36-43. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2024
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.04
УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ВКЛЮЧЕНИИ В ПЛОСКОМ УПРУГОМ КЛИНЕ

Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская, Б.В. Соболь

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 26 февраля 2024 г.
Одобрена: 07 октября 2024 г.
Принята к публикации:
17 октября 2024 г.

Ключевые слова:

теория упругости, плоские контактные задачи, включение, клин, интегральные уравнения, асимптотические методы.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются плоские контактные задачи для изотропного однородного упругого клина, на биссектрисе которого расположено тонкое жесткое включение конечной длины. Внешние грани клина находятся в условиях жесткой или скользящей заделки. Задачи симметричны относительно биссектрисы клина. Включение полностью сцеплено с упругой средой в области контакта. К включению приложена касательная сила, под действием которой оно смещается вдоль биссектрисы на заданную величину. При помощи интегрального преобразования Меллина контактные задачи сводятся к интегральным уравнениям относительно касательных контактных напряжений, из которых предельными переходами можно получить интегральные уравнения соответствующих задач для упругой полосы. Частными случаями также являются задачи об одном или двух включениях в упругой плоскости. Вводится основной безразмерный геометрический параметр, характеризующий относительную удаленность включения от вершины клина. Для решения интегральных уравнений применяются три метода. Первый метод состоит в получении замкнутого решения, основанного на специальной аппроксимации символа ядра. Второй метод, регулярный асимптотический, включает разложение решения по степеням малого параметра и эффективен для включений, относительно удаленных от вершины клина. Третий метод, сингулярный асимптотический, связан с разложением решения на несколько частей и решением интегральных уравнений Винера – Хопфа. Берется вырожденное решение и суперпозиция решений типа погранслоя. Этот метод работает для включений, расположенных относительно близко к вершине клина. При помощи трех методов проводится численный анализ для различных типов граничных условий, значений угла клина, коэффициента Пуассона и основного безразмерного параметра.

© **Пожарский Дмитрий Александрович** – д. ф.-м. н., проф., зав. каф. прикл. матем.,
e-mail: pozharda@rambler.ru, ID: 0000-0001-6372-1866.
Пожарская Елизавета Дмитриевна – асп. каф. информ. технол.,
e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru, ID: 0000-0002-5745-6135.
Соболь Борис Владимирович – д. техн. н., проф., зав. каф. информ. технол.,
e-mail: b.sobol@mail.ru, ID: 0000-0003-2920-6478.

Dmitrii A. Pozharskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Applied Mathematics, e-mail: pozharda@rambler.ru, ID: 0000-0001-6372-1866.
Elizaveta D. Pozharskaya – Postgraduate Student, Department of Informational Technologies,
e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru, ID: 0000-0002-5745-6135.
Boris V. Sobol – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Informational Technologies,
e-mail: b.sobol@mail.ru, ID: 0000-0003-2920-6478.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

CONTACT PROBLEMS OF AN INCLUSION IN A PLANE ELASTIC WEDGE

D.A. Pozharskii, E.D. Pozharskaya, B.V. Sobol

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 February 2024
Approved: 07 October 2024
Accepted for publication:
17 October 2024

Keywords:

elasticity theory, plane contact problems, inclusion, wedge, integral equations, asymptotic methods.

ABSTRACT

Plane contact problems are considered for an isotropic homogeneous elastic wedge with a thin rigid inclusion of a finite length located on its bisector. The outer faces of the wedge are subject to rigid or sliding fixation. The problems are symmetric with respect to the bisector of the wedge. The inclusion is completely coupled with the elastic medium in the contact region. A tangential force is applied to the inclusion, under the action of which it is displaced along the bisector by a given value. Using the Mellin integral transform, the contact problems are reduced to integral equations with respect to tangential contact stresses, from which the integral equations of the corresponding problems for an elastic strip can be obtained by limiting passages. Special cases also include problems with one or two inclusions in an elastic plane. The main dimensionless geometric parameter is introduced, which characterizes the relative distance of the inclusion from the wedge apex. Three methods are used to solve the integral equations. The first method consists of obtaining a closed solution based on a special approximation of the kernel symbol. The second method, regular asymptotic, involves expansion of the solution in powers of a small parameter and is effective for inclusions relatively distant from the wedge apex. The third method, singular asymptotic, involves expansion of the solution into several parts and solution of the Wiener – Hopf integral equations. A degenerate solution and a superposition of boundary layer solutions are taken. This method works for inclusions located relatively close to the wedge apex. Using the three methods, a numerical analysis is performed for different types of boundary conditions, values of the wedge angle, Poisson's ratio, and the main dimensionless parameter.

Введение

Контактным задачам теории упругости посвящено большое число монографий, изданных как в нашей стране, так и за рубежом [1–10]. Такие задачи возникают в акустике [11] и динамике [12], исследовании поверхностей с периодическим рельефом [13–17], при касании экрана смартфона [18], в пальпационной томографии [19]. При решении контактных задач для ряда тел канонической формы может применяться метод интегральных преобразований [20], а для тел вращения — метод граничных состояний [21; 22]. Краевые и контактные задачи для упругих тел клиновидной формы изучались в [2; 5; 8; 23–25]. Помимо прямых численных методов были развиты асимптотические методы, позволяющие получать решения контактных задач в аналитической форме [2–5; 8]. Получено точное решение контактной задачи о тонком эллиптическом включении в упругом пространстве [26], интегральные уравнения которой получены на основе решения Миндлина [27]. Рассматривались плоские задачи о тонком жестком [26] или упругом [28] включении в полосе. Исследовались периодические системы включений в упругой плоскости [3; 29]. При помощи регулярного асимптотического метода в трехмерной постановке изучались задачи о единичном тонком эллиптическом включении в однородном [30] или составном [31] упругом клине (двугранном угле), а также о периодической системе эллиптических включений в пространственном клине с жестко заделанными гранями [32]. В настоящей статье, по-видимому, впервые рассматриваются плоские контактные задачи о включении в клине. Для решения интегральных уравнений применяются регулярный и сингулярный асимптотические методы, а также метод специальной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения, приводящий к замкнутому решению. Последний метод позволяет контролировать точность асимптотических решений, но применим не для всех значений угла клина и коэффициента Пуассона.

Интегральные уравнения и метод специальной аппроксимации

В полярных координатах r, φ рассмотрим упругий клин $\{r\in[0,\infty);\ \varphi\in[-\alpha,\alpha]\}$ с тонким жестким включением $a\le r\le b$ на биссектрисе $\varphi=0$. Между включением и упругой средой осуществляется полное сцепление в области контакта. К включению приложена касательная сила интенсивности $2T$, направленная вдоль оси r (рис. 1). Под действием силы включение сдвигается на величину δ. Внешние грани клина подчинены условиям жесткой или скользящей заделки (задачи A и B соответственно). Материал клина имеет параметры упругости G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). В силу симметрии достаточно рассматривать область $0\le\varphi\le\alpha$, граничные условия в которой имеют вид

$$\varphi=0:\quad u_\varphi=0;\quad u_r=\delta\ \ (r\in(a;b));\quad \tau_{r\varphi}=0\ \ (r\notin(a;b));$$

$$\varphi=\alpha:\ A)\ u_r=0,\quad u_\varphi=0;\ B)\ u_\varphi=0,\quad \tau_{r\varphi}=0.$$

Для вывода интегральных уравнений смешанных задач A и B относительно неизвестного касательного напряжения $\tau_{r\varphi}=\tau(r)$, $a\le r\le b$, $\varphi=0$, рассматриваются более простые вспомогательные задачи, в которых граничное условие контакта для u_r при $\varphi=0$ заменяется заданием

напряжения $\tau_{r\varphi}$ (на всей полуоси r). Решения этих задач находятся при помощи интегрального преобразования Меллина. Затем, используя условие контакта, получаем интегральное уравнение ($\theta = G4(1-\nu)\kappa^{-1}$, $\kappa = 3-4\nu$)

$$\int_a^b \tau(\rho)\, k\left(\ln\frac{\rho}{r}\right) d\rho = \pi\theta\delta \quad (a \le r \le b),$$

$$k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos\,(ut)du,$$

$$A)\;\; L(u) = \frac{2\kappa\ \mathrm{sh}^2(\alpha u) - 2\kappa^{-1}u^2\sin^2\alpha}{\kappa\ \mathrm{sh}(2\alpha u) - u\sin(2\alpha)}, \qquad (1)$$

$$B)\;\; L(u) = \frac{\mathrm{sh}(2\alpha u) - \kappa^{-1}u\sin(2\alpha)}{\mathrm{ch}(2\alpha u) - \cos(2\alpha)}.$$

Кроме контактного напряжения требуется определить связь между силой T и смещением δ при помощи условия равновесия включения

$$\int_a^b \tau(r)dr = T.$$

Интегральные уравнения (1) можно также вывести из интегральных уравнений соответствующих пространственных задач [30] путем специального предельного перехода к плоским задачам. Поскольку в [30] ядра интегральных уравнений имеют скрытую форму симметрии, предварительно следует их симметризовать путем сдвига контура интегрирования [23, с. 201]. В пределе при $\alpha\to 0$, $\alpha u = t$, символ ядра $L(u)$ (1) для задачи B совпадает с известным символом ядра соответствующей задачи о включении в упругой полосе (формула (3.11) в [26]).

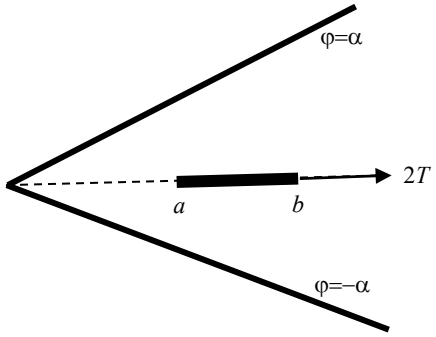


Рис. 1. Клин с включением

Fig. 1. Wedge with an inclusion

Важную роль играет асимптотика функций-символов (1) в нуле и бесконечности:

$$L(u) = Au + O(u^3) \;\; (u \to 0),$$
$$L(u) = 1 + O(u^n \exp(-2\alpha u)) \;\; (u \to \infty),$$

$$A)\;\; A = \frac{2\kappa\alpha^2 - 2\kappa^{-1}\sin^2\alpha}{2\kappa\alpha - \sin(2\alpha)}, \quad n = 2, \qquad (2)$$

$$B)\;\; A = \frac{2\alpha - \kappa^{-1}\sin(2\alpha)}{1-\cos(2\alpha)}, \quad n = 1, \quad \alpha \ne \pi.$$

При $\alpha=\pi$, $L(u)=\mathrm{cth}(\pi u)$, задача B соответствует задаче о включении в упругой плоскости. В этом случае интегральное уравнение (1) совпадает с уравнением контактной задачи о вдавливании штампа в упругую полуплоскость и имеет точное решение (формула (6.96) в [5]).

Введем безразмерные обозначения

$$x = \lambda\ln(r/a) - 1, \quad \xi = \lambda\ln(\rho/a) - 1,$$
$$\lambda = 2/\ln(b/a), \quad g = \lambda\delta/a, \qquad (3)$$
$$\varphi(\xi) = \rho\tau(\rho)/(a\theta), \quad T_* = T/(a\theta).$$

Параметр λ характеризует относительную удаленность включения от вершины клина. В обозначениях (3) уравнение (1) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g \quad (|x| \le 1). \qquad (4)$$

Для получения приближенного решения уравнения (4) при учете свойств (2) используем метод специальной аппроксимации [5]

$$L(u) \approx \mathrm{th}(Au) \quad (-\infty < u < \infty). \qquad (5)$$

После взятия интеграла [33]

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{th}(Au)}{u}\cos(ut)\,du = -\ln\left|\mathrm{th}\frac{\pi t}{4A}\right|$$

в ядре уравнения (4) и введения новых переменных [5] приходим к интегральному уравнению Штаермана о вдавливании двух одинаковых штампов в упругую полуплоскость, имеющему точное решение [1]. В результате получим

$$\varphi(x) = \frac{\pi g \exp(\pi/(2A\lambda))}{2A\lambda K(\exp(-\pi/(A\lambda)))\sqrt{2[ch(\pi/(A\lambda)) - ch(\pi x/(A\lambda))]}},$$
$$T_* = \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx = \frac{gK(\sqrt{1-\exp(-2\pi/(A\lambda))})}{\lambda K(\exp(-\pi/(A\lambda)))}. \qquad (6)$$

Здесь $K(t)$ – полный эллиптический интеграл. Относительная погрешность решения (6) не превосходит относительной погрешности ε аппроксимации (5) [5]. Решение (6) является точным в задаче A при $\alpha=\pi$, $L(u)=th(\pi u)$ (включение в плоскости с жесткой заделкой по лучу), а также в задаче B при $\alpha=\pi/2$, $L(u)=th(\pi u/2)$ (два симметричных включения в плоскости). Значение погрешности ε чувствительно к коэффициенту Пуассона (рис. 2).

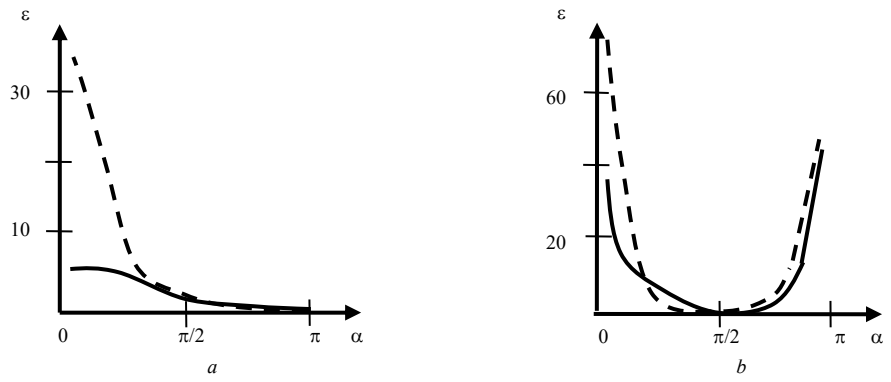


Рис. 2. Графики относительной погрешности ε(α) (%) для задач *A* (*a*) и *B* (*b*) при ν=0,25 (сплошные линии) и ν=0,45 (пунктир)

Fig. 2. Plots of relative error ε(α) (%) for problems *A* (*a*) and *B* (*b*) for ν=0.25 (solid lines) and ν=0.45 (dashed lines)

В задаче *A* при любом угле $\alpha\in(0,\pi]$ погрешность ε<6 % при ν=0,25 и ε<4 % при ν=0,5. В задаче *B* при $\alpha\to\pi$ значение ε существенно возрастает при любом ν. В связи с тем, что погрешность аппроксимации (5) приемлема не при всех значениях α и ν, требуется привлечение других методов.

Регулярный асимптотический метод

Для относительно удаленных от вершины клина включений (при достаточно больших λ) применим метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра λ^{-1}, который основан на следующей лемме [2; 4; 5].

Лемма. При всех $0\le t<\infty$ ядро $k(t)$ вида (1) можно представить в форме

$$k(t) = -\ln t + F(t),$$

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{[L(u)-1]\cos(ut)+\exp(-u)}{u}\,du, \qquad (7)$$

причем функция $F(t)$ представима при $|t|<2\alpha$ абсолютно сходящимся рядом

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n},$$

$$a_0 = \int_0^\infty \frac{L(u)-1+\exp(-u)}{u}\,du, \qquad (8)$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty [L(u)-1]\,u^{2n-1}du \quad (n=1,\ 2,\ ...)\ .$$

Для доказательства леммы следует разложить cos(*ut*) в ядре (1) в ряд Тейлора, принять во внимание значение интеграла (формула (3.951.8) в [33])

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-u)-\cos(ut)}{u}\,du = \ln t$$

и учесть свойства (2). Из леммы следует, что регулярный асимптотический метод применим при $\lambda>\alpha^{-1}$. Значения a_0, a_1 и a_2 даны в табл. 1.

Таблица 1

Значения постоянных (8) для разных α и ν

Table 1

Values of constants (8) for different α and ν

α	π/4	π/2	3π/4	π/4	π/2	3π/4
Задача	А, ν = 0,25			Б, ν = 0,25		
$a_0\cdot10^3$	98,2	568	974	193	693	1958
$a_1\cdot10^3$	368	115	47,6	333	83,3	0
$-a_2\cdot10^3$	146	10,1	1,59	109	4,86	–0,369
Задача	А, ν = 0,5			Б, ν = 0,5		
$a_0\cdot10^3$	–620	–193	817	–307	693	2125
$a_1\cdot10^3$	1017	208	63,4	583	83,3	–9,26
$-a_2\cdot10^3$	573	25,7	2,65	213	4,86	0,797

Разыскивая решение интегрального уравнения (4), (7) в виде ряда по степеням λ^{-1}, приравнивая члены при равных степенях этого параметра, получим цепочку интегральных уравнений с логарифмическим ядром, каждое из которых имеет точное решение. В результате получим асимптотическое решение ($\lambda\to\infty$)

$$\varphi(x) = \frac{T_*\lambda}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1+\frac{a_1}{\lambda^2}\left(1-2x^2\right)+\frac{a_2\left(7-8x^2-8x^4\right)}{2\lambda^4}+O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right)\right], \qquad (9)$$

$$T_* = \frac{\pi g}{\lambda}\left[\ln(2\lambda)+a_0+\frac{a_1}{\lambda^2}-\frac{a_1^2-9a_2}{4\lambda^4}+O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right)\right]^{-1}.$$

Как показывают расчеты, погрешность асимптотического решения (9) при $\lambda\ge2\alpha^{-1}$ не превышает 5 % (такая же оценка была получена в задаче о вдавливании штампа в грань клина [5]). В табл. 2 дано сравнение асимптотики (9) для интегральной характеристики

$$T_0 = \lambda T_* / g \qquad (10)$$

с точным решением (6) для задачи *B* при $\alpha=\pi/2$ и любом ν. В выбранном частном случае погрешность асимптотики при $\lambda \geq 4\pi^{-1}$ не превосходит даже 1 %.

Таблица 2

Интегральная характеристика (10) в задаче *B* при $\alpha=\pi/2$

Table 2

Integral characteristic (10) in problem *B* for $\alpha=\pi/2$

λ	0,5	1	2	3	4
Асимптотика (9)	3,82	2,16	1,50	1,26	1,13
Точное решение (6)	3,43	2,15	1,50	1,26	1,13

Сингулярный асимптотический метод

Для относительно близких к вершине клина включений (при достаточно малых λ) используем сингулярный асимптотический метод [4; 5; 23]. При $\lambda \to 0$ интегрирование в уравнении (4) можно распространить на всю числовую ось и получить вырожденное решение

$$\varphi(x) = g / (A\lambda), \qquad (11)$$

которое справедливо вдали от краев области контакта $x = \pm 1$. Приближенное решение при малых λ можно также получить в виде суперпозиции решений типа полуслоя, несущих корневые особенности в концах включения $x = \pm 1$ и удовлетворяющих интегральным уравнениям Винера – Хопфа на полубесконечном интервале [34]. Для приближенного решения уравнений Винера – Хопфа применяется идея Койтера [35] аппроксимировать символ ядра на действительной оси легко факторизуемым выражением

$$L(u) \approx \frac{u\sqrt{u^2+D^2}\,(u^2+E^2)}{(u^2+C^2)(u^2+F^2)}, \quad \frac{DE^2}{C^2F^2} = A\,. \qquad (12)$$

В результате асимптотическое решение при малых λ получим в виде

$$\varphi(x) = \frac{g}{2\lambda}\left[\zeta\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)+\zeta\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)\right],$$

$$\zeta(t) = \frac{\exp(-Dt)}{\sqrt{\pi A t}} + \frac{\operatorname{erf}\sqrt{Dt}}{A} + \frac{S\exp(-Et)}{\sqrt{A(D-E)}}\operatorname{erf}\sqrt{(D-E)\,t}, \qquad (13)$$

$$S = -(C-E)(F-E)/E\,,$$

где erf(*x*) – интеграл вероятности.

Интегральную характеристику решения (приложенную к включению силу) на основе (13) найдем в виде

$$T_* = \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx = \frac{g}{\lambda}\left[\left(\frac{1+SE^{-1}}{\sqrt{AD}}+\frac{2}{A\lambda}-\frac{1}{2AD}\right)\operatorname{erf}\sqrt{\frac{2D}{\lambda}}+ \right.$$

$$\left. +\frac{\sqrt{2}\exp(-2D/\lambda)}{A\sqrt{\pi\lambda D}}-\frac{S\exp(-2E/\lambda)}{E\sqrt{A(D-E)}}\operatorname{erf}\sqrt{\frac{2(D-E)}{\lambda}}\right]. \qquad (14)$$

При $\lambda \to 0$ в характеристике (14) можно учитывать главный член асимптотики

$$T_* \approx 2g/(A\lambda^2),$$

что соответствует вырожденному решению (11).

При *D*<*E* в формулах (13) и (14) следует перейти к функции

$$\frac{\operatorname{erf}\sqrt{(D-E)}}{\sqrt{(D-E)}} = \frac{\operatorname{erfi}\sqrt{(E-D)}}{\sqrt{(E-D)}}, \quad \operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(t^2)dt\,.$$

Параметры аппроксимации *C*, *D* и *E* и ее относительная погрешность ε_0 даны в табл. 3 (параметр *F* находится из второй формулы (12)).

Таблица 3

Параметры аппроксимации (12) и погрешность ε_0 (%)

Table 3

Parameters of approximation (12) and error ε_0 (%)

α	π/4	π/2	3π/4	π/4	π/2	3π/4
Задача	*A*, ν=0,25			*B*, ν=0,25		
C	0,960	0,920	0,750	0,990	1,00	0,330
D	0,809	0,878	1,31	3,35	3,30	0,718
E	4,50	1,40	1,70	1,40	2,00	0,800
ε_0	0,2	0,2	0,2	0,4	0,1	0,6
Задача	*A*, ν=0,5			*B*, ν=0,5		
C	1,90	0,730	0,890	2,08	1,00	3,30
D	5,27	2,29	1,94	1,65	3,30	0,753
E	1,80	0,700	1,70	3,30	2,00	1,00
ε_0	1,0	1,0	0,3	0,5	0,1	0,5

Результаты расчетов интегральной характеристики (10) тремя методами приведены в табл. 4.

Таблица 4

Интегральная характеристика (10) в задаче *A* при $\alpha=\pi/4$, ν=0,5

Table 4

Integral characteristic (10) in problem *A* for $\alpha=\pi/4$, ν=0,5

λ	0,5	1	2	3
Решение (6)	10,65	5,77	3,32	2,51
Решение (9)	–	–	3,40	2,48
Решение (14)	10,19	5,30	–	–

На рис. 3 показаны зависимости интегральной характеристики (10) от угла α. Минимальное отличие между жесткой и скользящей заделкой внешних граней клина наблюдается в окрестности угла клина $2\alpha=3\pi/4$.

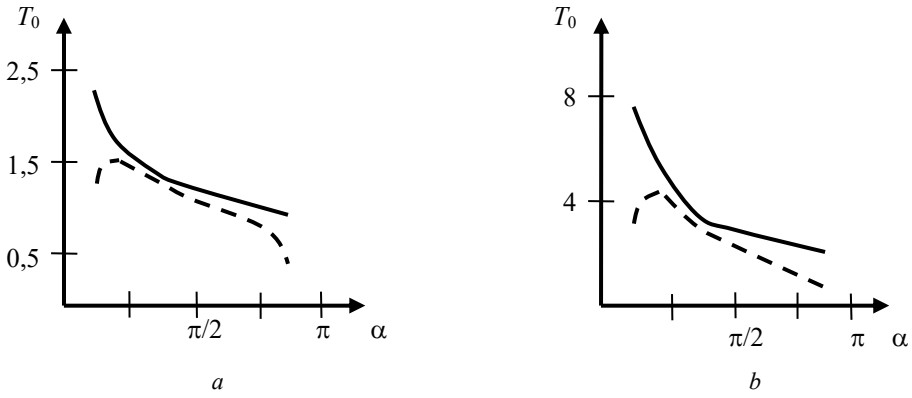


Рис. 3. Графики зависимостей $T_0(\alpha)$ при λ=3 (*a*) и λ=0,5 (*b*) для задач *A* (сплошные линии), *B* (пунктир) при ν=0,25

Fig. 3. Plots of relation $T_0(\alpha)$ for λ=3 (*a*) and λ=0.5 (*b*) for problems *A* (solid lines) and *B* (dashed lines) for ν=0,25

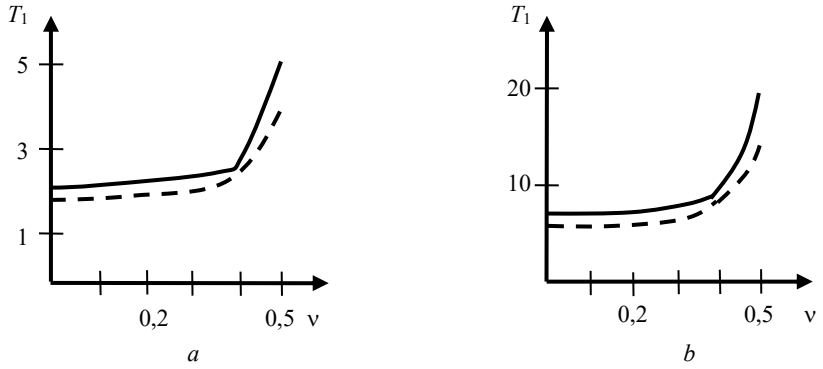


Рис. 4. Графики зависимостей $T_1(\nu)$ при λ=3 (*a*) и λ=0,5 (*b*) для задач *A* (сплошные линии), *B* (пунктир) при $\alpha=\pi/4$

Fig. 4. Plots of $T_1(\nu)$ relation for λ=3 (*a*) and λ=0.5 (*b*) for problems *A* (solid lines) and *B* (dashed lines) for $\alpha=\pi/4$

Отличие между решениями задач *A* и *B* нарастает при $\alpha\to 0$ и особенно при $\alpha\to\pi$, когда меняется тип символа ядра интегрального уравнения контактной задачи *B* с тангенса на котангенс гиперболический (при $\alpha=\pi$).

На рис. 4 показаны зависимости интегральной характеристики

$$T_1 = T_0\, 4(1-\nu)/\kappa = \lambda T/(agG) \qquad (15)$$

от коэффициента Пуассона ν (здесь T – размерная сила). Минимальное отличие между жесткой и скользящей заделкой внешних граней клина наблюдается в окрестности значения ν=0,4.

Заключение

Показана близость решений плоских контактных задач о включении в упругом клине, получаемых по методу специальной аппроксимации символа ядра интегрального уравнения и по асимптотическим методам «больших» и «малых» λ. При уменьшении λ (приближении включения к вершине клина) возрастают контактные напряжения и приложенная к включению сила при смещении включения на заданную величину. При жесткой заделке граней клина (задача *A*) контактные напряжения и сила больше, чем для случая скользящей заделки (задача *B*). При определенных углах и коэффициентах Пуассона отличие интегральных характеристик решений контактных задач *A* и *B* может быть минимальным. Для несжимаемого материала клина (ν=0,5) интегральные характеристики в обеих задачах существенно возрастают. При уменьшении угла клина интегральная характеристика в задаче *A* возрастает, а в задаче *B* достигает максимума при некотором остром угле. При необходимости (в задаче *B* при $\alpha\to\pi$) можно усложнить структуру аппроксимации (12) в сингулярном асимптотическом методе по типу аппроксимаций Паде.

Библиографический список

1. Штаерман, И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

2. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

3. Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.

4. Александров, В.М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В.М. Александров, Е.В. Коваленко. – М.: Наука, 1986. – 336 с.

5. Александров, В.М. Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.

6. Gladwell, G.M.L. Contact problems in the classical theory of elasticity / G.M.L. Gladwell. – Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. – 736 p.

7. Kalker, J.J. Three-dimensional elastic bodies in rolling contact / J.J. Kalker. – Dordrecht: Kluwer, 1990. – 314 p.

8. Alexandrov, V.M. Three-dimensional contact problems / V.M. Alexandrov, D.A. Pozharskii. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 406 p.

9. Popov, V.L. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction / V.L. Popov, M. Heß. – Berlin: Springer, 2015. – 265 p. DOI: 10.1007/978-3-642-53876-6

10. Barber, J.R. Contact mechanics / J.R. Barber. – Berlin: Springer, 2018. – 585 p. DOI: 10.1007/978-3-319-70939-0

11. Точное решение задачи об акустике в произвольной многослойной среде при контактном взаимодействии с клиновидных штампом / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. – С. 5–11. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.01

12. Goryacheva, I.G. Dynamics of deformable contacting bodies with sliding, rolling and spinning / I.G. Goryacheva, A.A. Zobova // International Journal of Mechanical Sciences. – 2022. – Vol. 216. – P. 106981. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106981

13. Tsukanov, I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces / I.Y. Tsukanov // Tribology Letters. – 2019. – Vol. 67, no. 4. – P. 107. DOI: 10.1007/s11249-019-1220-5

14. Yakovenko, A. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space / A. Yakovenko, I. Goryacheva // Tribology International. – 2021. – Vol. 161. – P. 107078. DOI: 10.1016/j.triboint.2021.107078

15. Цуканов, И.Ю. К вопросу о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости / И.Ю. Цуканов // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86, № 5. – С. 685–694. DOI: 10.31857/S0032823522050125

16. Lyubicheva, A.N. The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies / A.N. Lyubicheva, I.Y. Tsukanov // European Journal of Mechanics / A Solids. – 2022. – Vol. 91. – P. 104405. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104405

17. Pozharskaya, E.D. Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account / E.D. Pozharskaya, D.A. Pozharskii, B.V. Sobol // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, no. 5. – P. 1578–1586. DOI: 10.3103/S0025654423700218

18. Argatov, I.I. A macro model for electroadhesive contact of a soft finger with a touchscreen / I.I. Argatov, F.M. Borodich // IEEE Transactions on Haptics. – 2020. – Vol. 13, no. 3. – P. 504–510. DOI: 10.1109/TOH.2020.2969628

19. Argatov, I.I. Collective indentation as a novel strategy for mechanical palpation tomography / I.I. Argatov, X.Q. Jin, L.M. Keer // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2020. – Vol. 143. – P. 104063. DOI: 10.1016/j.jmps.2020.104063

20. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М.-Л.: изд-во АН СССР, 1963. – 368 с.

21. Иванычев, Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел врщения с массовыми силами / Д.А. Иванычев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05

22. Иванычев, Д.А. Два способа организации скалярного произведения в методе граничных состояний / Д.А. Иванычев // Вестник Донского государственного технического университета. – 2020. – Т. 20, № 1. – С. 15–24. DOI: 10.23947/1992-5980-2020-20-1-15-24

23. Пожарский, Д.А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения / Д.А. Пожарский. – Ростов н/Д: ООО «ДГТУ-Принт», 2019. – 312 с.

24. Keer, L.M. Hetenyi's elastic quarter space problem revisited / L.M. Keer, J.C. Lee, T. Mura // International Journal of Solids and Structures. – 1983. – Vol. 19, no. 6. – P. 497–506.

25. Keer, L.M. A contact problem for the elastic quarter space Hetenyi's elastic quarter space problem revisited / L.M. Keer, J.C. Lee, T. Mura // International Journal of Solids and Structures. – 1984. – Vol. 20, no. 5 – P. 513–524.

26. Александров, В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболь. – М.: Наука, 1993. – 224 с.

27. Mindlin, R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R.D. Mindlin // Physics. – 1936. – Vol. 7, no. 5. – P. 195–202.

28. Грилицкий, Д.В. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением / Д.В. Грилицкий, А.А. Евтушенко, Г.Т. Сулим // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, вып. 3. – С. 542–549.

29. Грилицкий, Д.В. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями / Д.В. Грилицкий, Г.Т. Сулим // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 3. – С. 520–529.

30. Александров, В.М. Задача о включении в трехмерном упругом клине / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 4. – С. 635–646.

31. Александров, В.М. Пространственная задача о тонком включении в составном упругом клине / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75, вып. 5. – С. 843–849.

32. Pozharskaya, E.D. Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge / E.D. Pozharskaya // Тенденции развития науки и образования. – 2023. – № 96, ч. 9. – С. 177–180. DOI: 10.18411/trnio-04-2023-501

33. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

34. Нобл, Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобл. – М., Л.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 276 с.

35. Koiter, W.T. Approximate solution of Wiener – Hopf type integral equations with applications. Part I-III / W.T. Koiter // Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc. Ser.~B. – 1954. – Vol. 57. – P. 558–579.

References

1. Shtaerman I.Y. Kontaktnaia zadacha teorii uprugosti [Contact problem of the alsticity theory]. Moscow, Gostekhizdat, 1949, 270 p.
2. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti [Non-classical mixed problems of the elasticity theory]. Moscow, Nauka, 1974, 456 p.
3. Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M. Kontaktnye zadachi dlia tel s tonkimi pokrytiiami i prosloikami [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]. Moscow, Nauka, 1983, 488 p.
4. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. Zadachi mekhaniki sploshnyh sred so smeshannymi granichnymi usloviiami [Problems with mixed boundary conditions in continuum mechanics]. Moscow, Nauka, 1986, 336 p.
5. Aleksandrov V.M., Romalis B.L. Kontaktnye zadachi v mashinostroenii [Contact problems in machine-building]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 176 p.
6. Gladwell G.M.L. Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen aan den Rijn, Sijthoff and Noordhoff, 1980, 736 p.
7. Kalker J.J. Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. Dordrecht, Kluwer, 1990, 314 p.
8. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. Dordrecht, Kluwer, 2001, 406 p.
9. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. Berlin, Springer, 2015, 265 p. doi: 10.1007/978-3-642-53876-6
10. Barber J.R. Contact mechanics. Berlin, Springer, 2018, 585 p. doi: 10.1007/978-3-319-70939-0
11. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. Tochnoe reshenie zadachi ob akustike v proizvol'noi mnogosloinoi srede pri kontaktnom vzaimodeistvii s klinovidnym shtampom [Exact solution of the problem of acoustics in an arbitrary multilayer medium during contact interaction with a wedge shaped stamp]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, No. 4, pp. 5-11. doi: 10.15593/perm.mech/2023.4.01
12. Goryacheva I.G., Zobova A.A. Dynamics of deformable contacting bodies with sliding, rolling and spinning. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, Vol. 216, pp. 106981. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106981
13. Tsukanov I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces. *Tribology Letters*, 2019, Vol. 67, No. 4, pp. 107. doi: 10.1007/s11249-019-1220-5
14. Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space. *Tribology International*, 2021, Vol. 161, pp. 107078. doi: 10.1016/j.triboint.2021.107078
15. Tsukanov I.Y. On the contact problem for a wavy cylinder and an elastic half-plane. *Mechanics of Solids*, 2022, Vol. 57, No. 8, pp. 2104-2110. doi: 10.3103/S002565442208026X
16. Lyubicheva A.N., Tsukanov I.Y. The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2022, Vol. 91, pp. 104405. doi: 10.1016/j.euromechsol.2021.104405
17. Pozharskaya E.D., Pozharskii D.A., Sobol B.V. Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account. *Mechanics of Solids*, 2023, Vol. 58, No. 5, pp. 1578-1586. doi: 10.3103/S0025654423700218
18. Argatov I.I., Borodich F.M. A macro model for electroadhesive contact of a soft finger with a touchscreen. *IEEE Transactions on Haptics*, 2020, Vol. 13, No. 3, pp. 504-510. doi: 10.1109/TOH.2020.2969628
19. Argatov I.I., Jin X.Q., Keer L.M. Collective indentation as a novel strategy for mechanical palpation tomography. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, Vol. 143, pp. 104063. doi: 10.1016/j.jmps.2020.104063
20. Ufliand Ia.S. Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti [Integral transforms in problems of the elasticity theory]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of USSR Publishing, 1963, 368 p.
21. Ivanychev D.A. Reshenie kontaktnoi zadachi teorii uprugosti dlia anizotropnykh tel vrascheniia s massovymi silami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass force]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, No. 2, pp. 49-62. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.05
22. Ivanychev D.A. Dva sposoba organizatsii skaliarnogo proizvedeniia v metode granichnykh uslovii [Two ways of organizing scalar product in the boundary state method]. *Vestnik of Don State Technical University*, 2020, Vol. 20, No. 1, pp. 15-24. doi: 10.23947/1992-5980-2020-20-1-15-24
23. Pozharskii D.A. Fundamental'nye resheniia statiki uprugogo klina i ikh prilozheniia [Fundamental solutions of statics of an elastic wedge and their applications]. Rostov-on-Don, DSTU-Print, 2019, 312 p. https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2089067
24. Keer L.M., Lee J.C., Mura T. Hetenyi's elastic quarter space problem revisited. *International Journal of Solids and Structures*, 1983, Vol. 19, No. 6, pp. 497-506.
25. Keer L.M., Lee J.C., Mura T. A contact problem for the elastic quarter space Hetenyi's elastic quarter space problem revisited. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, Vol. 20, No. 5, pp. 513-524.
26. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol B.V. Tonkie kontsentratory napriazhenii v uprugikh telakh [Thin stress concentrators in elastic bodies]. Moscow, Nauka, 1993, 224 p.
27. Mindlin R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, 1936, Vol. 7, No. 5, pp. 195-202.
28. Grilitskii D.V., Evtushenko A.A., Sulim G.T. Stress distribution in a strip with a thin elastic inclusion. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979, Vol. 43, No. 3, p. 582-589.
29. Grilitskii D.V., Sulim G.T. Periodic problem for an elastic plane with thin-walled inclusions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, Vol. 39, No. 3, p. 494-503.
30. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. The problem of an inclusion in a three-dimensional elastic wedge. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, Vol. 66, No. 4, pp. 617-628.
31. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. The three-dimensional problem of a thin inclusion in a composite elastic wedge. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, Vol. 75, No. 5, pp. 589-594. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2011.11.013
32. Pozharskaya E.D. Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge. *Trends of Development of Science and Education*, 2023, No. 96, Part 9, pp. 177-180. doi: 10.18411/trnio-04-2023-501
33. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka, 1971, 1108 p.
34. Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf technique. London, Pergamon Press, 1958, 264 p.
35. Koiter W.T. Approximate solution of Wiener–Hopf type integral equations with applications. Part I-III. *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc. Ser.~B*, 1954, Vol. 57, pp. 558-579.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00014, https://rscf.ru/project/24-21-00014/.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-21-00014, https://rscf.ru/project/24-21-00014/.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.