Хохлов А.В. Индикаторы применимости нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла со степенными материальными функциями и методики их определения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 1. С. 142–158. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.14

Khokhlov A.V. Applicability indicators for the nonlinear Maxwell-type elasto-viscoplastic model with power material functions and techniques to calibrate them. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 1, pp. 142-158. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.14

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.14
УДК 539.3

ИНДИКАТОРЫ ПРИМЕНИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ТИПА МАКСВЕЛЛА СО СТЕПЕННЫМИ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И МЕТОДИКИ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

А.В. Хохлов

Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия,
Институт естественных наук СВФУ им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 июля 2022 г.
Одобрена: 09 февраля 2023 г.
Принята к публикации:
05 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

вязкоупругопластичность, физическая нелинейность, кривые нагружения, скорость нагружения, скоростная чувствительность, кривые нагружения – разгрузки – отдыха, восстановление, остаточная деформация, индикаторы применимости, идентификация, сверхпластичность, полимеры.

АННОТАЦИЯ

Исследуется физически нелинейное определяющее соотношение (ОС) с двумя материальными функциями для вязкоупругопластичных материалов с целью выявления комплекса моделируемых им реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния материальных функций и ограничений на них, способов идентификации и верификации. Детально изучены свойства кривых нагружения и кривых нагружения – разгрузки – отдыха, порождаемых ОС со степенными материальными функциями (именно такие функции чаще всего используются в теориях ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров, гидродинамике неньютоновских жидкостей и в моделировании сверхпластического течения материалов) в зависимости от длительности и скорости нагружения и разгрузки и показателей двух материальных функций, проанализированы их характерные особенности по сравнению с общими свойствами кривых нагружения и нагружения – разгрузки – отдыха, порождаемых ОС с произвольными материальными функциями (теоремы 1 и 2). Указаны специфические индикаторы применимости (или неприменимости) четырехпараметрической степенной модели, которые необходимо дополнительно проверять по экспериментальным кривым нагружения и нагружения – разгрузки – отдыха материала помимо общих индикаторов применимости ОС с произвольными материальными функциями. Индикаторы (не)применимости – система необходимых признаков применимости ОС (качественных общих свойств порождаемых ОС базовых кривых), которые удобно быстро проверять при анализе данных испытаний конкретных материалов, чтобы судить о (не)применимости выбранного ОС для моделирования этих материалов и целесообразности попыток идентификации.

Разработаны несколько методик определения степенных материальных функций по минимальному набору базовых испытаний материала, основанные на анализе свойств кривых нагружения и нагружения – разгрузки – отдыха материала, более быстрые и экономные, чем общие методики определения произвольных материальных функций. Показано, что для определения всех четырех параметров двух материальных функций достаточно двух кривых нагружения материала с разными скоростями или двух кривых нагружения – разгрузки – отдыха с разными максимальными напряжениями или даже только одной кривой нагружения – разгрузки – отдыха. В каждом из этих трех случаев выведены явные формулы для четырёх параметров степенных материальных функций через параметры двух или одной программ нагружения и измеряемые характерные деформации, указаны способы уменьшения погрешности идентификации за счет использования дополнительных испытаний.

© ПНИПУ

© **Хохлов Андрей Владимирович** – к.т.н., в.н.с., e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru.

Andrew V. Khokhlov – Ph.D. in Technical Sciences, Leading Researcher, e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

APPLICABILITY INDICATORS FOR THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE ELASTO-VISCOPLASTIC MODEL WITH POWER MATERIAL FUNCTIONS AND TECHNIQUES TO CALIBRATE THEM

A.V. Khokhlov

Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russian Federation
Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 July 2022
Approved: 09 February 2023
Accepted for publication:
05 April 2023

Keywords:

viscoelasticity, viscoplasticity, physical non-linearity, stress-strain curves, stress rate, rate sensitivity, loading-unloading-recovery curves, recovery, plastic strain, applicability indicators, identification, superplasticity, polymers.

ABSTRACT

A physically non-linear Maxwell-type constitutive relation with two material functions for non-aging elasto-viscoplastic materials is studied analytically in order to examine the set of basic rheological phenomena that it simulates, to enclose its application field, to obtain necessary phenomenological restrictions which should be imposed on its material functions and to develop identification and validation techniques. Characteristic features of loading-unloading-recovery curves family produced by the model with two power material functions (with four parameters) under loading and unloading at constant stress rates and subsequent rest are analyzed in uni-axial case and compared to general properties of stress-strain-recovery curves produced by the constitutive relation with two arbitrary (increasing) material functions (theorems 1 and 2). Their dependences on loading rate, maximal stress and material functions exponents are examined. Power functions are the most popular in creep models, elastoviscoplasticity, polymer rheology, hydrodinamics of non-newtonian fluids and simulation of superplastic flow. The analysis reveals several specific properties of theoretic loading-unloading-recovery curves produced by power model with four parameters that can be employed as the model applicability indicators which are convenient for check using test data of a material. They should be checked in addition to general applicability indicators for the Maxwell-type constitutive relation with two arbitrary material functions.

A number of effective calibration procedures for the model in the class of power material functions are developed. They are more rapid and effective than general identification techniques for two arbitrary material functions developed previously. The first procedure employs a pair of stress-strain curves at different stress rates, the second one is based on a pair of loading-unloading-recovery curves with various maximal stress values and loading rates and the third one needs only one loading-unloading-recovery curve. The explicit expressions are derived for four material parameters via test data. They enable separate and direct evaluation of the material parameters without error accumulation. Identification techniques versions are considered and their advantages and shortcomings are discussed. The ways to minimize the error using additional tests are proposed.

© PNRPU

Введение

Определяющее соотношение (ОС) типа Максвелла описывает изотермические процессы деформирования физически нелинейных реономных материалов, связывая деформацию $\varepsilon(t)$ с историей изменения напряжения $\sigma(\tau)$:

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1}\int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau\,,\ t>0\,, \qquad (1)$$

где ОС (1) сочетает относительную простоту и широту области применимости: оно обобщает ряд классических моделей (за счет произвольности двух материальных функций (МФ) $F(x)$ и $V(x)$) и описывает весьма широкий круг реологических эффектов, типичных для многих реономных материалов, проявляющих вязкоупругие и пластические свойства [1–8] (обобщение ОС (1) на трехмерное напряженное состояние см. в [8]). ОС (1) основано на разложении полной деформации в сумму упругой и вязкопластической компонент:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v\,,\ \varepsilon_e = F(\sigma)/E\,,\ \dot\varepsilon_v = V(\sigma)/\eta\,.$$

Оно нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для нестареющих материалов, обладающих наследственностью и пластичностью, высокой скоростной чувствительностью и, возможно, разносопротивляемостью. Напряжение и время предполагаются безразмерными, процессы $\sigma(t), t\ge 0$ – кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими, $\sigma(t)\equiv 0$ при $t<0$. В ОС (1) входят две (возрастающие) МФ – $F(x)$, $V(x)$, $x\in(\omega_-,\omega_+)$ и две постоянные – $E,\eta>0$. «Модуль упругости» E и «коэффициент вязкости» η явно выделены из МФ для учёта влияния температуры в форме $E=E(T)$, $\eta=\eta(T)$ [3].

ОС (1) обобщает (включает) классические степенные модели вязкого течения и ползучести (обзор и библиографию по этим темам см. в работах [1–4; 7]), реологические модели Гершеля – Балкли и Шведова – Бингама и частные случаи модели Соколовского – Малверна и Гуревича. В случае $F(x)\equiv 0$, $V(x)=x|x|^{n-1}$,

$n>1$, ОС (1) даёт степенной закон течения (*Norton–Bailey model*), самый популярный (в силу простоты) в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров и гидродинамике неньютоновских жидкостей [9–34]. Он используется для моделирования зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения, течения степенных жидкостей и сверхпластического течения материалов [25–31]. Задав $F(x)=x$ и $V(x)=x|x|^{n-1}$, получим модель с линейной упругостью и степенной вязкостью, которая применялась в ряде работ для описания кривых ползучести, моделирования сверхпластичности и решения конкретных задач [7; 8; 11; 27; 30–34]. Модель с произвольными МФ $F(x)$ и $V(x)$ стала объектом системного исследования лишь в цикле работ автора ([1–8] и др.).

Данная работа – продолжение цикла статей [1–8] по качественному анализу ОС (1) с произвольными МФ с целью определения границ его области применимости, комплекса адекватно моделируемых реологических эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и способов идентификации, настройки и верификации. В них аналитически изучены уравнения семейств порождаемых ОС (1) базовых квазистатических кривых: кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования при постоянных скоростях нагружения или деформирования, кривых циклического нагружения. В результате сопоставления обнаруженных свойств теоретических кривых с типичными качественными свойствами кривых испытаний вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком механических эффектов) выведены дополнительные ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное моделирование основных реологических эффектов, выявлены необходимые признаки применимости ОС (1) по данным испытаний материалов и те эффекты, которые ОС не может описать ни при каких МФ.

В статье будут детально изучены свойства моделей со степенными МФ

$$F=x^m,\ V=x^n,\ m>0,\ n>\min\{m-1;0\} \qquad (2)$$

(условие $n>m-1$ следует из критерия выпуклости вниз кривых релаксации, порождаемых ОС (1) [1]). Прежде всего – специфические свойства кривых нагружения (КН) $\sigma=\sigma(\varepsilon,b)$ с постоянной скоростью b ($\sigma(t)=bt$) и кривых нагружения – разгрузки – отдыха (КНР) $\varepsilon=\varepsilon(\sigma,b,t_*)$ и $\sigma=\sigma(\varepsilon,b,t_*)$, порождаемых ОС (1) с МФ (2) при нагружении со скоростью b в течение времени t_*, разгрузке с той же скоростью и выдержке при нулевом напряжении для наблюдения процесса восстановления:

$$\sigma(t)=bt \text{ при } t\in[0;t_*],\ \sigma(t)=-bt+2bt_* \text{ при } t\in(t_*;2t_*),\ \sigma(t)\equiv 0 \text{ при } t>2t_*. \qquad (3)$$

Основная цель статьи – определение спектра эффектов, наблюдаемых в испытаниях материалов, которые способна или не способна описывать четырехпараметрическая модель (1), (2), выявление индикаторов применимости моделей со степенными МФ и разработка методик их быстрой идентификации по КН и КНР материала. Любое задание семейств аппроксимаций для МФ значительно сокращает количество базовых испытаний и упрощает процедуру идентификации, так как определяются лишь несколько параметров, индивидуализирующих МФ, а не ее значения в узлах сетки, накрывающей рабочий диапазон напряжений. Одновременно значительно сужаются область применимости модели, и следует проверять дополнительные индикаторы применимости (например, в работе [6] установлено, что для модели (1), (2) характерна степенная зависимость скорости установившейся ползучести от напряжения).

1. Ограничения на материальные функции ОС (1) и его область применимости

МФ F определяет в (1) упругую деформацию $\varepsilon_e(\sigma)$. Минимальные первичные ограничения на неё: $F(x)$, $x\in(\omega_-,\omega_+)$ – непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что $F(0)=0$. Эти условия обеспечивают совпадение знаков напряжения и упругой деформации $\varepsilon_e(\sigma)$ и соблюдение условия $\varepsilon_e(0)=0$. Из строгого возрастания $F(x)$ следует возрастание $\varepsilon_e(|\sigma|)$ и энергии упругой деформации с ростом $|\sigma|$ и существование обратной к F функции f. Функция вязкости $V(x)/\eta$ в ОС (1) управляет вязкопластическими свойствами: она регулирует память материала, вязкость, скорость диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность напряжения (в частности, мгновенного модуля и предела текучести) к скорости деформации, длительную прочность [1–8]. Минимальные ограничения на нее: $V(x)$ – непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-,ω_+), такая, что $V(0)=0$. Эти ограничения на МФ обеспечивают, в частности, возрастание диаграмм деформирования и кривых ползучести, убывание кривых релаксации и длительной прочности и термодинамическую согласованность модели, т.е. положительность работы напряжения $\sigma(\tau)$ в произвольном процессе деформирования, и неотрицательность, и возрастание диссипации $W[t,\sigma(\tau)]$ в любой момент времени: $\dot{W}(t)=\sigma(t)V(\sigma(t))/\eta>0$.

Анализ свойств семейств кривых, порождаемых ОС (1) [1–8], показал, что следует различать два основных случая, в которых ОС (моделируемый материал) ведёт себя по-разному: 1) $|V(x)|>0$ при всех $x\neq 0$, 2)

$V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $Z := [\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \le 0$, $\sigma_+ \ge 0$, $\sigma_+ \ne \sigma_-$ (по определению σ_- и σ_+ – нижняя и верхняя грани множества нулей МФ $V(x)$). Во втором случае, пока $\sigma(t) \in Z$, ОС моделирует упругое поведение материала: диссипация мала и петли гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют, кривая деформирования не зависит от скорости нагружения или деформации при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$, где $\varepsilon_\pm = F(\sigma_\pm)/E$; таким образом, σ_+ и σ_- играют роль пределов упругости (порогов ползучести) материала при растяжении и сжатии, а при $\sigma > \sigma_+$ или $\sigma < \sigma_-$ начинают проявляться вязкопластические свойства

Системное исследование ОС (1), проведѐнное в работах [1–8] и др., показало, что его можно применять для описания комплекса основных эффектов, типичных для стабильных реономных материалов, обладающих высокой чувствительностью к скорости нагружения, и, возможно, разносопротивляемостью, для которых характерны следующие особенности поведения: 1) возрастающие кривые нагружения с постоянной скоростью, которые могут быть выпуклыми вверх, но могут и обладать точкой перегиба; 2) положительная скоростная чувствительность; 3) монотонное убывание и выпуклость кривой разгрузки или наличие на ней точки максимума или точки перегиба (в зависимости от скорости и уровня нагрузки); 4) отсутствие восстановления (релаксации деформации) после импульса нагрузки, превышающей предел упругости, и полной разгрузки; 5) существенное влияние длительности и скорости нагружения на величину пластической деформации; 6) выраженная стадия течения при постоянном напряжении на диаграммах деформирования с постоянной скоростью и (возрастающая) зависимость предела текучести от скорости; 7) «неограниченное» нарастание пластической деформации при циклическом нагружении за пределом упругости (рэтчетинг без стабилизации и приспособляемости, циклическое разупрочнение); 8) ползучесть с постоянной скоростью; 9) релаксация напряжения до нулевого или ненулевого значения; 10) возрастание податливости и скоростной чувствительности, увеличение скоростей диссипации, релаксации, ползучести и рэтчетинга с ростом температуры. К таким материалам (в определѐнных режимах деформирования) относятся, например, многие полимеры, их расплавы и растворы, твѐрдые топлива, асфальтобетоны, высокомодульные полиэтиленовые нити, высокопластичные титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах и др.

2. Базовые свойства кривых нагружения с постоянными скоростями

При нагружении $\sigma(t) = bt$ с постоянной скоростью $b > 0$ ОС (1) порождает КН

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}[F(\sigma) + (\tau_r b)^{-1} I(\sigma)],\ b, \sigma > 0,$$
$$I(s) = \int_0^s V(x)dx,\ \tau_r := \eta / E. \tag{4}$$

Если $\sigma_+ > 0$ и $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0; \sigma_+]$, то при $\sigma < \sigma_+$ $I(\sigma) \equiv 0$, и потому КН (4) имеет вид $\varepsilon(\sigma, b) = F(\sigma)/E$, т.е. ОС описывает поведение нелинейно упругого материала, и КН не зависит от скорости нагружения при $\sigma < \sigma_+$. Если $\sigma > \sigma_+$ то $V(x) > 0$ и $I(\sigma) > 0$, и потому КН зависят от скорости b, семейство КН (4) убывает по b при $\sigma > \sigma_+$, а семейство КН в обратной форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по b (и по ε). МФ $I(s)$ выпукла вниз при $\sigma > \sigma_+$, поскольку $I''(s) = V'(s) > 0$

В результате анализа неявного представления КН (4) при указанных выше минимальных ограничениях на МФ в [4; 7] найдены базовые свойства КН $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$, $b > 0$ [7, теорема 1]. Многие свойства КН нелинейного ОС (1) аналогичны свойствам КН линейного интегрального ОС вязкоупругости [35]. В частности, ОС (1) тоже не способно описывать поведение материалов с отрицательной скоростной чувствительностью [36–39] и материалов, у которых достоверно установлена зависимость мгновенного модуля от скорости нагружения или деформирования (полимеры при достаточно высоких температурах, медь, олово, алюминий, титановые сплавы в режиме сверхпластичности и др. [4; 25–27, 40–43], полимеры в стеклообразном состоянии и многие другие материалы не проявляют заметной чувствительности к СН при достаточно малых деформациях) – этот эффект можно описать только при замене мгновенного модуля секущим или усреднённым по окрестности нуля. Это индикаторы его области неприменимости наряду с неспособностью ОС (1) моделировать ползучесть с возрастающей скоростью, затухающую память, восстановление после полной разгрузки, эффект Маллинза и приспособляемость при мягких несимметричных циклических нагружениях [1–8]. Но, в отличие от КН линейного ОС, которые всегда выпуклы вверх, КН ОС (1) могут иметь точки перегиба и выпуклость вниз на некотором интервале (при достаточно малой деформации $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}(b)$, как у многих эластомеров, пенопластов и биологических тканей: связок, сухожилий, сосудов [4; 15; 44–48]), если $F''(x) < 0$; мгновенные модули при растяжении и сжатии $E_\pm = E / F'(0\pm)$ (предельные значения касательного модуля КН при $\varepsilon \to 0 \pm 0$) не зависят от скорости b и МФ V, но могут быть различны; зависимость КН от скорости нагружения нелинейна и может быть разной при растяжении и сжатии; мгновенная и равновесная диаграммы ОС (1) (пределы семейства КН $\sigma(\varepsilon, b)$ при $b \to 0+$ и при $b \to \infty$) уже не обязательно

прямолинейны: 1) при $b\to\infty$ семейство КН $\sigma(\varepsilon,b)$ сходится на луче $\varepsilon\ge 0$ к кривой $\sigma=f(E\varepsilon)$, $f:=F^{-1}$ (кривая ∞ на рис. 1, *a*); 2) при $b\to 0+$ семейство КН $\sigma(\varepsilon,b)$ сходится к постоянной $\sigma=\sigma_+$ на луче $\varepsilon\ge\varepsilon_+$, где $\varepsilon_+=E^{-1}F(\sigma_+)$, а при $\varepsilon\in[0;\varepsilon_+]$ – к функции $\sigma=f(E\varepsilon)$ (кривая 0 на рис. 1, *a*). Равновесная КН ОС (1) имеет разный вид в случаях $\sigma_+=0$ или $\sigma_+>0$: если $\sigma_+=0$, семейство КН $\sigma=\sigma(\varepsilon,b)$ сходится при $b\to 0+$ к прямой $\sigma\equiv 0$ на всем луче $\varepsilon\ge 0$, а если $\sigma_+>0$, оно сходится к диаграмме идеально упругопластического материала с пределом текучести $\sigma_y=\sigma_+$ и начальным участком упругого деформирования $\sigma=f(E\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0;\varepsilon_+]$ [7]. Задание $\sigma_+>0$ и $V(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\sigma_+]$ обеспечивает совпадение начальных участков всех КН $\sigma(\varepsilon,b)$ при $\varepsilon\in[0;\varepsilon_+]$ (т.е. при $\sigma\le\sigma_+$) с кривой мгновенного деформирования $\sigma=f(E\varepsilon)$ (см. рис. 1, *a*).

Для степенных МФ (2) $I(s)=(n+1)^{-1}s^{n+1}$ и КН (4) принимает вид

$$\varepsilon(\sigma,b)=E^{-1}\sigma^m+(\gamma b)^{-1}(n+1)^{-1}\sigma^{n+1}. \qquad (5)$$

В случае $n>m-1\ge 0$ $F''(x)\ge 0$ и $V(x)$ возрастает, поэтому все КН $\sigma(\varepsilon,b)$ с $b>0$ выпуклы вверх на полуоси $\varepsilon>0$ (выпуклость вверх КН вплоть до начала разрушения или до площадки текучести характерна для многих полимеров, асфальтобетонов, металлов и сплавов [9; 15; 17; 20; 21; 25–27; 42; 49; 50]). При $m<1$ это не так: на КН есть точка перегиба и участок выпуклости вниз в окрестности нуля (см. рис. 1, *b*).

На рис. 1, *b*, приведены КН $\sigma(\varepsilon,b)$ модели с $F=x^m$, $V=x^n$, $m=0.5$, $n=1$, $\eta=E=10$, $\tau_r=1$ для разных СН: $b=1\cdot10^{-i};2\cdot10^{-i};3\cdot10^{-i}$, $i=4;3;2;1$ (КН для $b=1\cdot10^{-i}$ помечены стрелками). Штриховые КН – предельные кривые $\sigma=f(E\varepsilon)$, $f=y^{1/m}$, при $b\to\infty$ (КН мгновенного нагружения) и $\sigma=0$ при $b\to 0$ (равновесная КН). Штрихпунктирная кривая – геометрическое место точек перегиба $(\tilde\varepsilon(b),\tilde\sigma(b))$ КН с разными $b>0$; множество $\{(\tilde\varepsilon(b),\tilde\sigma(b))\,|\,b>0\}$ не зависит от η и τ_r, так как $\tilde\sigma$ и $\tilde\varepsilon$ зависят только от параметра $\tau_r b$ [4], а η входит только в него.

3. Определение степенных материальных функций ОС по двум кривым нагружения с раз скоростями

В статье [5] найдены индикаторы применимости ОС (1) с произвольными МФ по семейству КН материала с разными скоростями нагружения и разработана общая методика идентификации ОС по двум КН с разными скоростями, выведены явные формулы для определения массивов значений обеих материальных функций

$$\gamma I(\sigma)=B[\varepsilon(\sigma,b_2)-\varepsilon(\sigma,b_1)],\ B=b_1b_2/(b_1-b_2), \qquad (6)$$

$$cF(\sigma)=(b_1-b_2)^{-1}[b_1\varepsilon(\sigma,b_1)-b_2\varepsilon(\sigma,b_2)] \qquad (7)$$

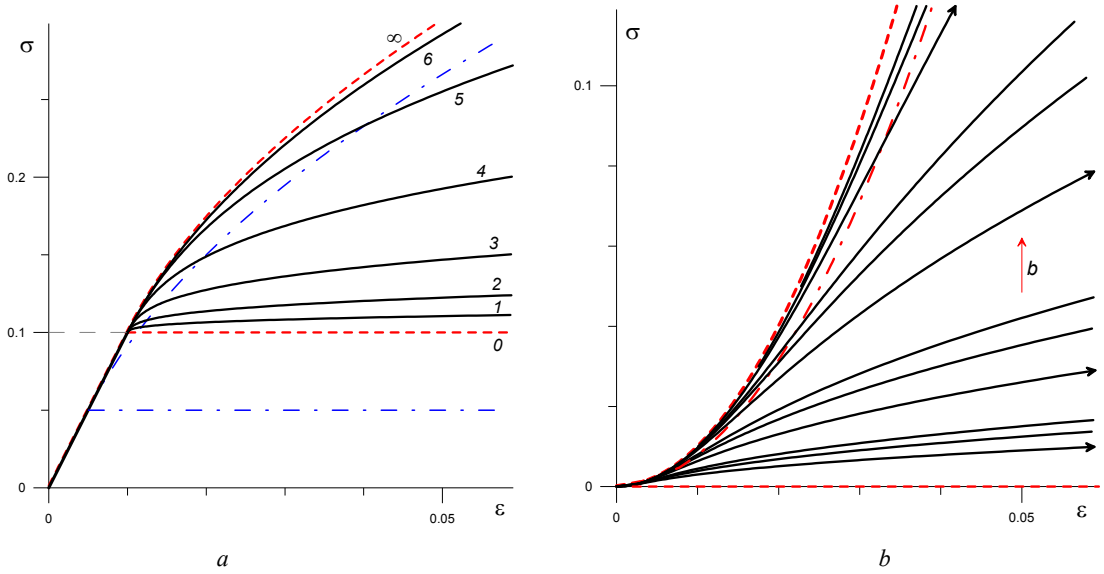


Рис 1. Разные типы кривых нагружения $\sigma(\varepsilon,b)$, порождаемых ОС (1): *a* – кривые нагружения модели с $\sigma_+>0$ для скоростей $b=0.1^{-i}$, $i=1,...,6$ (кривые *1-6*) и предельные (штриховые) кривые при $b\to 0+$ и при $b\to\infty$; *b* – КН модели с $\sigma_+=0$, $\tau_r=1$, $F=x^{1/2}$ и $V=x$ для скоростей $b=1\cdot10^{-i};2\cdot10^{-i};3\cdot10^{-i}$, $i=4;3;2;1$

Fig. 1. Different types of stress-strain curves $\sigma(\varepsilon,b)$ generated by the constitutive equation (1) with different material functions and at various stress rates: *a* – in a case when $\sigma_+>0$ under stress rates $b=0.1^{-i}$, $i=1,...,6$ (curves *1-6*, limit curves at $b\to 0+$ or $b\to\infty$ are traced as red dashed lines); *b* – in a case when $\sigma_+=0$, $\tau_r=1$, $F=x^{1/2}$, $V=x$ at rates $b=1\cdot10^{-i};2\cdot10^{-i};3\cdot10^{-i}$, $i=4;3;2;1$

в любых заданных точках $\sigma \in [0;\omega_+]$ из рабочего диапазона напряжения по скоростям нагружения b_1, b_2 и двум измеряемым деформациям $\varepsilon(\sigma, b_j)$. Из (4) следует, что разность двух КН $\delta(\sigma, b_1, b_2) = \varepsilon(\sigma, b_2) - \varepsilon(\sigma, b_1)$ не зависит от МФ F, а функция $B\delta(\sigma, b_1, b_2)$ не зависит от b_1, b_2 (это один из индикаторов применимости ОС по парам экспериментальных КН) и для любой пары напряжений σ_1, σ_2 справедливо равенство

$$[\varepsilon(\sigma_2, b_2) - \varepsilon(\sigma_2, b_1)] / [\varepsilon(\sigma_1, b_2) - \varepsilon(\sigma_1, b_1)] = I(\sigma_2) / I(\sigma_1)$$

(левая часть, в которую входят лишь измеряемые деформации, не зависит от b_1, b_2). Если какой-то из этих индикаторов (или еще двух, найденных в [5]) явно нарушается у семейства КН материала, то применять ОС (1) для его моделирования не следует.

Рассмотрим методику определения степенных МФ (2). Предварительно найдем специфические индикаторы применимости степенной модели (1), (2) по семейству КН, помимо общих индикаторов применимости ОС (1), обнаруженных в [5]. В силу (5) для МФ (2) разность двух КН с произвольными СН b_1, b_2 – степенная функция σ:

$$\delta = \varepsilon(\sigma, b_2) - \varepsilon(\sigma, b_1) = \gamma (n+1)^{-1} B^{-1} \sigma^{n+1}. \qquad (8)$$

Логарифмы величин δ и σ связаны линейной зависимостью

$$\ln \delta(\sigma, b_1, b_2) = (n+1) \ln \sigma + \ln(\gamma/(n+1)) - \ln B, \qquad (9)$$

и угловой коэффициент этой прямой (он равен $n+1$) не зависит от СН b_i (от выбранной пары КН). Изменение b_1, b_2 вызывает только сдвиг прямой (9) вдоль оси δ на величину $\ln B_{12} - \ln B_{34}$, зависящую лишь от отношений b_2/b_1 и b_4/b_3 (*если,* $b_4/b_3 = b_2/b_1$, *то* $B_{34} = B_{12}$ *и прямая* (9) *и разность КН (8) не меняются*). Линейность связи $\ln\delta$ и $\ln\sigma$ и параллельность прямых (9) удобно проверять по двум-трем КН материала с разными СН: точки с координатами $\ln s_i$ и $\ln \delta(s_i, b_1, b_2)$ должны располагаться вдоль прямой. Если указанные свойства (индикаторы) отсутствует у данных испытания материала, то степенная модель (1), (2) не может описать его поведение и надо использовать другие МФ, например, экспоненциальные или линейные комбинации степенных функций (2) с разными показателями. Если присутствует, можно переходить к идентификации МФ (2).

МФ (2) задаются четырьмя параметрами η, n, m и E, и для их определения требуется система четырех уравнений. Ее можно получить по одной КН материала, применив метод наименьших квадратов или воспользовавшись уравнением КН (5) при четырех значениях $\sigma = \sigma_k$ и измерив деформации $\varepsilon(\sigma_k, b)$. Но можно исключить приближенное решения системы четырех нелинейных уравнений, получив явные формулы, выражающие η, n, m и E через деформации, измеренные в двух испытаниях материала с разными скоростями. Для этого подставим в (8) два разных значения $\sigma = \sigma_k$ и поделим уравнения друг на друга для исключения γ:

$$[\varepsilon(\sigma_2, b_2) - \varepsilon(\sigma_2, b_1)] / [\varepsilon(\sigma_1, b_2) - \varepsilon(\sigma_1, b_1)] = (\sigma_2/\sigma_1)^{n+1}$$

Отсюда выразим n и $\eta = 1/\gamma$ через четыре измеряемые деформации $\varepsilon(\sigma_i, b_j)$:

$$n+1 = [\ln(\sigma_2/\sigma_1)]^{-1} \ln \frac{\varepsilon(\sigma_2, b_2) - \varepsilon(\sigma_2, b_1)}{\varepsilon(\sigma_1, b_2) - \varepsilon(\sigma_1, b_1)},$$
$$\eta = \frac{(b_1 - b_2)\sigma_1^{n+1}}{(n+1) b_1 b_2 [\varepsilon(\sigma_1, b_2) - \varepsilon(\sigma_1, b_1)]}. \qquad (10)$$

Подставив σ_1 и σ_2 в (7) и поделив уравнения для исключения c, получим

$$m = [\ln(\sigma_2/\sigma_1)]^{-1} \ln \frac{b_1\, \varepsilon(\sigma_2, b_1) - b_2\, \varepsilon(\sigma_2, b_2)}{b_1\, \varepsilon(\sigma_1, b_1) - b_2\, \varepsilon(\sigma_1, b_2)},$$
$$E = c^{-1} = \frac{(b_1 - b_2)\sigma_1^m}{b_1\, \varepsilon(\sigma_1, b_1) - b_2\, \varepsilon(\sigma_1, b_2)}. \qquad (11)$$

Таким образом, для вычисления всех параметров двух степенных МФ достаточно двух испытаний с разными скоростями b_1 и b_2 и четырех измеренных деформаций при σ_1 и σ_2. Величины σ_1 и σ_2 следует выбирать так, чтобы знаменатель $\ln(\sigma_2/\sigma_1)$ больше отличался от нуля (т.е. σ_2/σ_1 – от единицы). С целью уменьшения погрешности целесообразно вычислять n, η, m и E как средние значения из полученных по формулам (10), (11) с фиксированными b_1 и b_2 (по тем же двум КН материала), но с различными парами значений σ_1, σ_2 из рабочего диапазона напряжений.

4. Свойства семейства кривых нагружения – разгрузки – отдыха ОС (1)

Для программы нагрузки – разгрузки – отдыха (3) с длительностью стадии нагружения t_* и максимальным напряжением $\sigma_* = bt_* > \sigma_+$ ОС (1) даёт отклик $\varepsilon(t) = \Lambda(t; b, t_*)$:

$$\Lambda(t; b, t_*) = cF(bt) + \gamma \int_0^t V(b\tau)\, d\tau \text{ при } t \in [0; t_*], \qquad (12)$$

$$\Lambda(t; b, t_*) = 0.5\, p(b, T) + cF(b(T-t)) + \gamma \int_{T/2}^t V(b(T-\tau))\, d\tau$$

при $t \in (t_*; 2t_*)$, (13)

$$\Lambda(t;b,t_*) = p(b,T) = \text{const} \text{ при } t > T\,, \qquad (14)$$

где $b > 0$, $T = 2t_*$, а p – остаточная деформация после цикла нагрузки – разгрузки:

$$p(b,T) = \Lambda(T;b,T) = 2\eta^{-1}\int_0^{t_*} V(b\tau)d\tau = \gamma T\sigma_*^{-1} I(\sigma_*)\,,$$
$$I(s) = \int_0^s V(x)dx\,. \qquad (15)$$

Для любых $b, t_* > 0$ функция $\Lambda(t)$ непрерывная и кусочно-гладкая.

Формулы (3) и (12)–(14) – параметрическое представление семейства кривых нагружения – разгрузки – отдыха (КНР) $\varepsilon(\sigma;b,t_*)$ (или $\sigma(\varepsilon;b,t_*)$), порождаемых ОС (1).

Деформация в момент начала разгрузки $\varepsilon_* = \Lambda(t_*;b,t_*)$ выражается из (13):

$$\varepsilon_*(b,t_*) = cF(\sigma_*) + 0.5\,p(b,T)\,. \qquad (16)$$

Если $\sigma_* > \sigma_+$ (в частности, при любых $b, t_* > 0$ в случае $\sigma_+ = 0$), то $p(b,T) > 0$, так как $V(x) > 0$ при $x > \sigma_+$. При фиксированном $\sigma_* > \sigma_+$ величины ε_* и p растут линейно по t_* (и убывают по b). Так же ведёт себя и диссипация за цикл нагрузки – разгрузки:

$$W(b,T) = \gamma\int_0^T \sigma(\tau)V(\sigma(\tau))d\tau = \gamma T\sigma_*^{-1}Y(\sigma_*)\,,$$
$$Y(s) = \int_0^s xV(x)dx = sI(s) - \int_0^s I(x)dx$$

При фиксированных $t, T > 0$ функция $\Lambda(t;b,t_*)$ (и КНР $\sigma(\varepsilon;b,t_*)$) возрастает по b, так как F и V возрастают. При $t \in [0;t_*]$ $\Lambda(t;b,t_*)$ возрастает по t (соответственно $\sigma(\varepsilon,b)$ возрастает по ε), а если $F''(x) \ge 0$, то $\Lambda(t)$ выпукла вниз, а КН $\sigma(\varepsilon,b)$ выпукла вверх [5]. На участке разгрузки $(t_*;2t_*)$ функция $\Lambda(t)$ может вести себя по-разному в зависимости от свойств МФ и параметров программы нагружения (3): она может убывать и быть выпуклой вверх всём интервале $(t_*;2t_*)$ (как у многих материалов – см. обзор в [4])), а может возрастать в правой окрестности t_* и иметь точку максимума и при этом может быть выпуклой вверх на всём $(t_*;2t_*)$ или иметь точку перегиба. Соответственно, на кривой разгрузки $\varepsilon(\sigma;b,t_*)$ могут быть точка перегиба и интервал возрастания деформации. Такое поведение кривых разгрузки тоже наблюдается у многих материалов [20; 43–45; 47–53] (см. подробнее в [4]). Общие свойства КНР (12)–(14), порождаемых ОС (1) с произвольными МФ, исследованы в статьях [4; 7].

Теорема 1. Пусть $F(x)$ – непрерывная строго возрастающая кусочно-гладкая функция, $V(x)$ – непрерывная возрастающая функция на интервале (ω_-,ω_+), $\omega_-\omega_+ < 0$, $F(0) = 0$, $V(0) = 0$. Тогда деформация (12)–(14), порождаемая нагрузкой – разгрузкой (3) с постоянной скоростью $b > 0$ за время $T = 2t_*$, обладает следующими свойствами.

1) Для любых $b, t_* > 0$ (при $bt_* \in (\omega_-,\omega_+)$) функция $\Lambda(t;b,t_*)$ непрерывна по t при $t \ge 0$.

2) Для любых $t, t_* > 0$ семейство $\varepsilon = \Lambda(t;b,t_*)$ возрастает по b при $t \ge 0$.

3) На отрезке $[0,t_*]$ деформация $\varepsilon(t) = \Lambda(t;b,t_*)$ всегда возрастает, $\Lambda(0;b,t_*) = 0$, деформация в момент начала разгрузки $\varepsilon_* = \Lambda(t_*;b,t_*) = cF(\sigma_*) + 0{,}5\,p(b,T)$; если $F''(x) \ge 0$, то $\varepsilon(t)$ выпукла вниз; если нет, то $\varepsilon(t)$ может иметь точку перегиба.

4) При $t \ge 2t_*$ деформация $\varepsilon(t) = \Lambda(t;b,t_*)$ постоянна: $\varepsilon(t) = p(b,T)$**,** остаточная деформация выражается формулой (15), $p(b,T) = 0$ только для моделей с $\sigma_+ > 0$ в случае $\sigma_* \le \sigma_+$ (в частности, $p(b,T) > 0$ при любых $b, t_* > 0$ для моделей с $\sigma_+ = 0$).

5) На интервале разгрузки $t \in (t_*;2t_*)$ деформация $\Lambda(t;b,t_*)$ может вести себя по-разному в зависимости от свойств МФ V и параметров программы нагружения: может монотонно убывать на всём $(t_*;2t_*)$ или иметь одну точку максимума, может быть выпуклой вверх на $(t_*;2t_*)$ или иметь одну точку перегиба.

6) Для любых $b, t_* > 0$ скорость деформации $\dot\Lambda(t)$ имеет разрывы первого рода в точках $t = t_*$ и $t = 2t_*$, её скачки выражаются формулами

$$\dot\Lambda(t_* + 0) - \dot\Lambda(t_* - 0) = -2cbF'(bt_*)\,,$$
$$\dot\Lambda(2t_* + 0) - \dot\Lambda(2t_* - 0) = bcF'(0) = \dot\Lambda(0 + 0). \qquad (17)$$

Скачки (17) не зависят от МФ V, скачок $\dot\Lambda(t)$ в т. $t = 2t_*$ может равняться нулю, если $F'(0) = 0$.

Для моделей с произвольными степенными МФ (2) $I(s) = (n+1)^{-1}s^{n+1}$, $p(b,t_*) = 2\gamma(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*$, и формулы (12)-(14) для деформации принимают вид:

$$\Lambda(t;b,t_*) = c(bt)^m + \gamma(n+1)^{-1}b^n t^{n+1} \text{ при } t \in [0;t_*]\,;$$

$$\Lambda(t;b,t_*) = cb^m(2t_* - t)^m - \gamma(n+1)^{-1}b^n(2t_* - t)^{n+1} +$$
$$+ 2\gamma(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*, \qquad (18)$$
$$t \in [t_*;2t_*];$$

$$\Lambda(t;b,t_*) = 2\gamma(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*\,,\ t \ge 2t_*\,. \qquad (19)$$

Исследование функции (18) позволяет найти критерии существования точки максимума и точки перегиба у кривой разгрузки (18) и ряд других свойств.

Теорема 2. Для любых t_*, $b>0$ кривая разгрузки (18) степенной модели (1),(2) с $n > m-1 > 0$ обладает следующими свойствами.

1) Деформация (18) имеет точку максимума $\hat{t}$ в интервале $(t_*;2t_*)$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$(bt_*)^{n-m} > m\,\tau_r / t_*\text{, или } t_* / \tau_r > m\sigma_*^{m-n}\,, \qquad (20)$$

момент времени $\hat{t}$ и максимальная деформация $\varepsilon_{\max} = \Lambda(\hat{t})$, выражаются формулами

$$\hat{t} = 2t_* - b^{-1}(\tau_r bm)^{1/(n-m+1)}\,,$$
$$\varepsilon_{\max} = \frac{c(n+1-m)}{(n+1)}(mb\tau_r)^{\frac{m}{n-m+1}} + \frac{2c}{(n+1)}(bt_*)^n t_*\tau_r^{-1}\,, \qquad (21)$$

функция $\hat{t}(\tau_r, b)$ убывает по τ_r (при $n > m-1$) и $\hat{t} \to 2t_*$ при $\tau_r \to 0$.

2) Множество решений M неравенства (20) в области параметров нагружения $\{(t_*,b)\}$ не пустое для любой модели (1), (2): в случае $n > m$ оно имеет вид $b > b_m$, где граничная скорость $b_m = (m\tau_r)^k t_*^{-(k+1)}$, $k = (n-m)^{-1}$, а в случае $n-m \in (-1;0)$ оно имеет вид $0 < b < b_m$; с убыванием τ_r множество M расширяется.

3) Функция (18) имеет точку перегиба в интервале $(t_*;2t_*)$ тогда и только тогда, когда $m>1$ и выполнено неравенство

$$(bt_*)^{n-m} > m(m-1)n^{-1}\,\tau_r t_*^{-1}\,,$$
$$\text{или } t_* / \tau_r > m(m-1)n^{-1}\sigma_*^{m-n}\,, \qquad (22)$$

абсцисса точки перегиба выражается формулой

$$\tilde{t} = 2t_* - b^{-1}[\tau_r bn^{-1}m(m-1)]^{1/(n-m+1)}\,; \qquad (23)$$

если $m=1$, то функция (18) выпукла вверх на всём интервале $(t_*;2t_*)$ при любых b, τ_r, n.

4) Наличие точки максимума деформации (18) на участке разгрузки $(t_*;2t_*)$ всегда сопровождается наличием точки перегиба, при этом $\tilde{t} > \hat{t}$.

5) Отношение $(2t_* - \tilde{t})/(2t_* - \hat{t}) = [n^{-1}(m-1)]^{1/(n-m+1)}$ не зависит от b, t_* и τ_r.

6) Для моделей с $n > m$ функции $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ (при фиксированном t_*) возрастают и при $b \to \infty$ $\hat{t}(b) \to 2t_*$ и $\tilde{t}(b) \to 2t_*$; для моделей с $n-m \in (-1;0)$ $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ убывают и $\hat{t}(b) \to 2t_*$, $\tilde{t}(b) \to 2t_*$ при $b \to 0$, а если $n = m$, то $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ не зависят от b.

7) Если неравенство (20) не соблюдается, то деформация (18) убывает на всем участке разгрузки; если не выполнено неравенство (22), то функция (18) убывает и выпукла вверх на всем интервале $(t_*;2t_*)$.

8) Остаточная деформация и диссипация за цикл нагрузки – разгрузки (3) – степенные функции σ_*, а отношение $Q = W/(\sigma_* p)$ не зависит от всех параметров нагружения σ_*, t_*, b: $p(b,t_*) = \gamma(n+1)^{-1}\sigma_*^n T$, $W(b,T) = \gamma(n+2)^{-1}\sigma_*^{n+1}T$, $Q = 1-(n+2)^{-1}$.

Все обнаруженные свойства КНР опираются на ограничение $n > m-1$ для показателей МФ (2), следующее из условия выпуклости вниз кривых релаксации ОС (1) [1]: $V'(x)/V(x) > F''(x)/F'(x)$, $x>0$. В случае $n < m-1$ поведение отклика (18) модели (1),(2) может заметно отличаться от описанного. Отметим, что условия выпуклости кривых релаксации всегда выполнено для моделей с $F(x) = x$, так как $V' > 0$.

Для модели с линейной упругостью и степенной вязкостью (с $F(x) = x$, $V(x) = x^n$, $n>0$) по (15) $p = 2\gamma(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*$, и формулы (12)–(14) дают:

$$\Lambda(t) = cbt + \gamma(n+1)^{-1}b^n t^{n+1} \text{ при } t \in [0;t_*]\,;$$
$$\Lambda(t) = cb(2t_* - t) - \gamma(n+1)^{-1}b^n(2t_* - t)^{n+1} + 2\gamma(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*$$
$$\text{при } t \in (t_*;2t_*)\,; \qquad (24)$$
$$\Lambda(t) = 2\gamma(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_* \text{ при } t > 2t_*\,.$$

Критерий (20) существования точки максимума в интервале $(t_*;2t_*)$ у КНР (24) принимает вид $\sigma_*^{n-1} > \tau_r / t_*$ (её абсцисса $\hat{t} = 2t_* - (\tau_r b)^{1/n} b^{-1}$ возрастает по b при $n>1$ и убывает при $n \in (0;1)$, а при $n=1$ не зависит от b), а в случае $\sigma_*^{n-1} \le \tau_r / t_*$ деформация (24) убывает на всём интервале $(t_*;2t_*)$. На интервале $(t_*;2t_*)$ функция (24) всегда выпукла вверх (т.е. для существования на интервале $(t_*;2t_*)$ точки перегиба необходимо, чтобы упругая деформация зависела от напряжения нелинейно) [7].

На рис. 2, *а*, приведены графики $\varepsilon = \Lambda(t;b,t_*)$ нелинейной модели Максвелла с $F = x$, $V = x^2$, $\eta = 10$, $E = 10$ ($\tau_r = 1$) для $t_* = 5$ и разных СН: $b = 0.01i$, $i = 1,...,7$. Кривая *4* для $b = 0.04$ совпадает с $\Lambda(t;b)$ для СН $b_m := (\tau_r^{-1} t_*^n)^{1/(1-n)} = 1/25$, разделяющей кривые, убывающие на $(t_*;2t_*)$, и кривые с точкой максимума деформации (она зарождается в т. $t = t_*$: $\dot{\Lambda}(t_* + 0) = 0$).

С ростом СН график $\Lambda(t;b)$ смещается вверх, точка максимума $\hat{t}$ – вправо ($n=2>1$) и $\hat{t}(b)\to 2t_*$ при $b\to\infty$ (при больших СН интервал возрастания $(t_*;\hat{t})$ исчерпывает почти весь интервал $(t_*;2t_*)$).

На рис. 2, *b*, приведены графики $\Lambda(t;b,t_*)$ моделей с $F=x$, $V=x^2$, $\eta=10$ и разными $E=100;\ 40;\ 20;\ 10;\ 8;\ 5$ (т.е. $\tau_r=0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}25;\ 2{,}0$) для $t_*=5$, $b=0{,}05$. Голубая кривая (для $\tau_r=1{,}25$) разделяет кривые с монотонным поведением на $(t_*;2t_*)$ и кривые с точкой максимума деформации. С убыванием τ_r/t_* (ростом E) график $\Lambda(t;b,t_*)$ на $(0;2t_*)$ целиком смещается вниз, а точка максимума $\hat{t}$ сдвигается вправо, и $\hat{t}\to 2t_*$ при $E\to\infty$. Штриховая кривая – предельная кривая семейства $\Lambda(t;b,t_*)$ при $E\to\infty$, $\eta=\text{const}$ (т.е. $\tau_r\to 0$), т.е. отклик нелинейно вязкого элемента.

Отклики на треугольный импульс нагрузки на рис. 2, *a*, с точкой максимума на $(t_*;2t_*)$ и большими остаточными деформациями качественно весьма сходны с наблюдаемыми в испытаниях асфальтобетонов, твёрдых топлив, полиамидов, фторопласта-4 и других материалов [21; 22; 43; 50].

После исключения t из параметрического представления (3) и (12)–(14), получим КНР в осях $\sigma-\varepsilon$. При $t\in[0;t_*]$ (когда $\sigma=bt$) – уравнение кривой нагружения (4), а при $t\in(t_*;2t_*)$ (когда $\sigma=-bt+2bt_*$, $x=-b\tau+2bt_*$) – кривой разгрузки:

$$\varepsilon(\sigma;b,t_*)=p(t_*,b)+cF(\sigma)-\gamma b^{-1}I(\sigma), \qquad (25)$$

где p и $I(s)$ определены формулой (15). Так как $\sigma(t)$ – линейная функция на каждом из интервалов $(0;t_*)$ и $(t_*;2t_*)$, то все найденные условия существования точки максимума или точки перегиба у функции $\varepsilon(t)=\Lambda(t;b,t_*)$ сохраняются для КНР в форме $\varepsilon=\varepsilon(\sigma;b,t_*)$.

На рис. 3 приведены КНР $\sigma(\varepsilon;b,t_*)$ для модели (2) с $m=1{,}5$, $n=2$ (т.е. $n>m$), $\eta=10$, $E=10$, $\tau_r=1$ для $t_*=5$ и разных СН ($b=0{,}01i$, $i=1,\ldots,8$, – на рис. 6, *a*, и $b=0{,}1i$ – на рис. 3, *b*).

Голубая КНР *2* на рис. 3, *a*, соответствует СН $b=0{,}02$, немного превышающей СН $b_m=0{,}018$ (см. п.2 теоремы 2) разделяющую кривые с монотонным убыванием деформации при разгрузке и кривые с её нарастанием в начале разгрузки (при φ).

С ростом СН ветвь нагрузки смещается вверх, ветвь разгрузки – вправо, точка с максимальной деформацией и точка перегиба сдвигаются вниз к оси $\sigma=0$ (так как φ, то $\lambda=2$ и $\lambda=2$ возрастают с ростом СН – см. п.2 теоремы 2), остаточная деформация растёт.

Синие штриховые кривые – КНР для фиксированной СН ($\lambda=2$ на рис. 3, *a*, и $\lambda\le 2$ на рис. 3, *b*) с разными $\varepsilon<100\%$.

Штрихпунктирная прямая – мгновенная КН $\sigma=\sigma(\varepsilon;\infty,t_*)=Ef(\varepsilon)=E\varepsilon^{2/3}$.

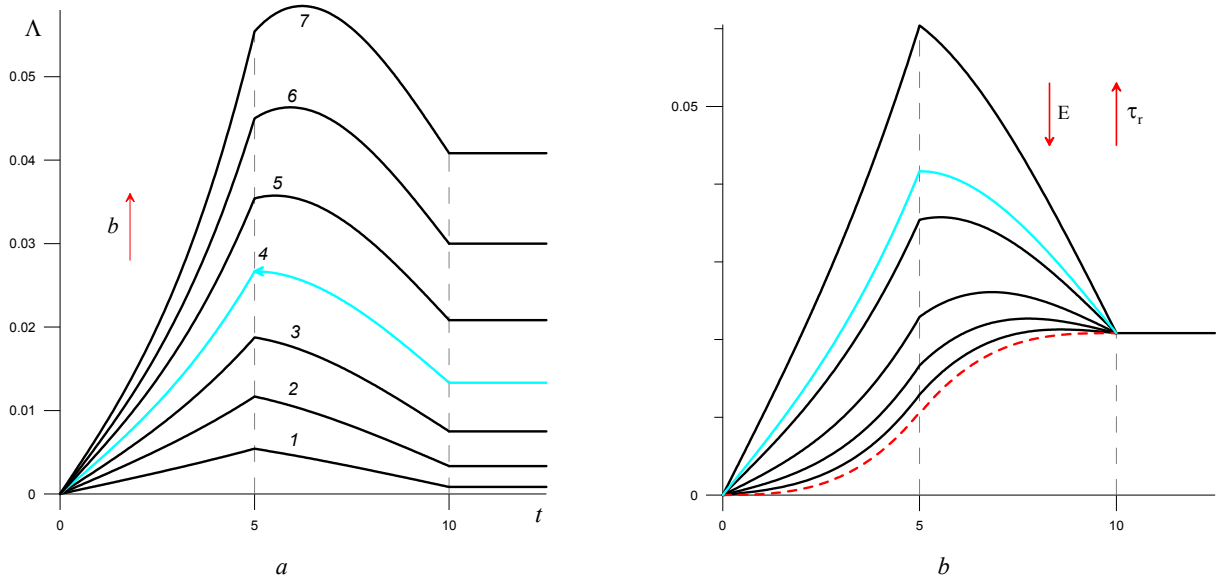


Рис. 2. Графики $\varepsilon=\Lambda(t;b,t_*)$ нелинейных моделей с $F=x$, $V=x^2$ и разными τ_r: *a* – модели с $\tau_r=1$ для $t_*=5$ и разных СН $b=0.01i$, $i=1,\ldots,7$; *b* – моделей с $\tau_r=0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ \ 1{,}0;\ 1{,}25;\ 2{,}0$ для $t_*=5$, $b=0{,}05$

Fig. 2. Loading-unloading-rest curves $\varepsilon=\Lambda(t;b,t_*)$ for $t_*=5$ generated by the models with $F=x$, $V=x^2$ and different values of τ_r: *a* – the model with $\tau_r=1$ at stress rates $b=0.01i$, $i=1,\ldots,7$; *b* – the models with $\tau_r=0.1;\ 0.25;\ 0.5;\ 1.0;\ 1.25;\ 2.0$ at stress rate $b=0.05$

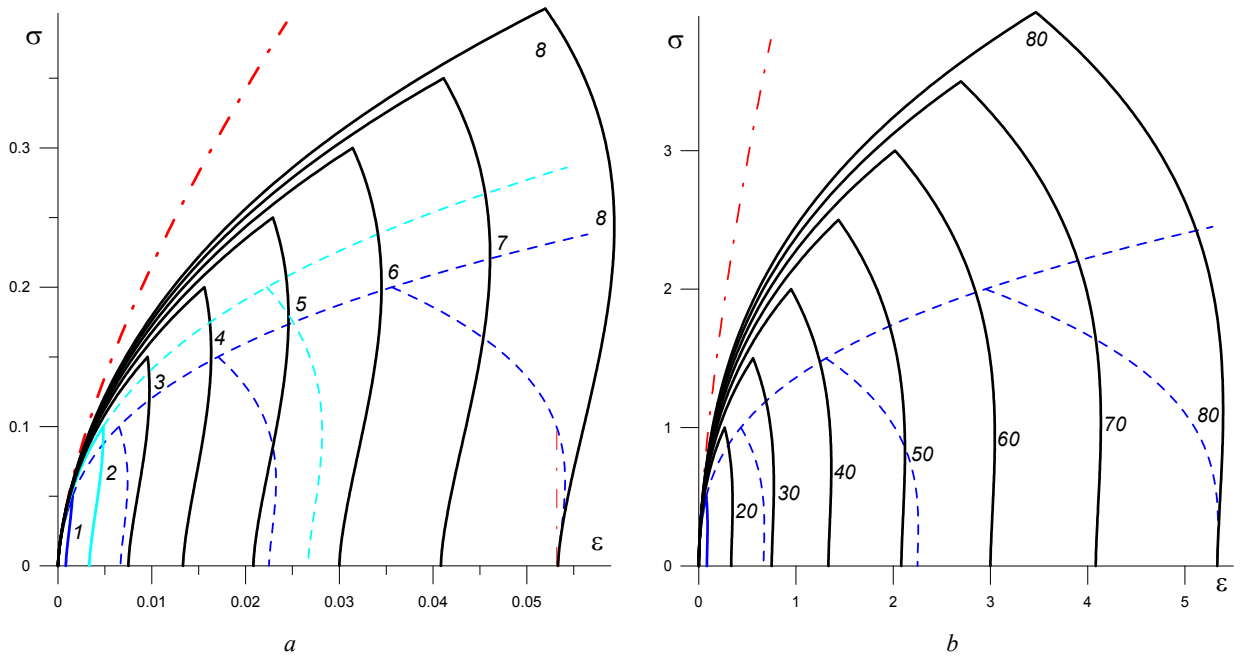


Рис. 3. КНР $\sigma(\varepsilon;b,t_*)$ модели (18) с $m=1{,}5$, $n=2$ и $\tau_r=1$ для $t_*=5$ и разных скоростей нагружения: *a* – для $b=0{,}01k$, $k=1,\ldots,8$; *b* – для $b=0{,}1k$

Fig. 3. Loading-unloading-rest curves $\sigma(\varepsilon;b,t_*)$ for $t_*=5$ generated by the model (18) with $m=1.5$, $n=2$ and $\tau_r=1$ at different stress rates: *a* – $b=0.01k$, $k=1,\ldots,8$; *b* – $b=0.1k$

5. Индикаторы (не)применимости ОС (1) по КНР

Из установленных в [4; 7] общих свойств КНР (12)–(14), порождаемых ОС (1) с произвольными МФ при нагружениях (3), вытекают необходимые признаки применимости ОС, которые удобно проверять при анализе экспериментальных функций $\Lambda(t;b,t_*)$ и КНР материалов и использовать в качестве индикаторов (не)применимости ОС для моделирования этих материалов [7]. Такая проверка – своеобразный этап верификации модели, предшествующий идентификации, оценка целесообразности ее выбора. Например, из (15) следует, что для любого нагружения (3) с заданным максимальным напряжением $\sigma_*>\sigma_+$ остаточная деформация $p(b,T)$ пропорциональна T, а из (16) следует, что

$$\varepsilon_*(b,t_*)-0.5p(b,T)=cF(\sigma_*), \qquad (26)$$

т.е. разность деформаций (26) не зависит от T, b и МФ V. Для двух или трех нагружений вида (3) с разными $T=T_i$ но *одинаковыми* $\sigma_*=b_iT_i/2$ из (15), (16) следуют еще три общих свойства ОС (1) (с любыми МФ):

$$\varepsilon_{*2}-\varepsilon_{*1}=0{,}5(p_2-p_1)=$$
$$=0{,}5\gamma(T_2-T_1)\sigma_*^{-1}I(\sigma_*)=\gamma B^{-1}I(\sigma_*), \qquad (27)$$

$$(p_2-p_1)/(\varepsilon_{*2}-\varepsilon_{*1})=2\text{, или}$$
$$(\varepsilon_{*2}-0{,}5p_2)/(\varepsilon_{*1}-0{,}5p_1)=1, \qquad (28)$$

$$(\varepsilon_{*3}-\varepsilon_{*1})/(\varepsilon_{*2}-\varepsilon_{*1})=(T_3-T_1)/(T_2-T_1). \qquad (29)$$

где $p_i=p(b_i,T_i)$ и $\varepsilon_{*i}=\varepsilon_*(b_i,T_i)$, $B=b_1b_2/(b_1-b_2)$ (как в (6)). Эти формулы связывают измеряемые характерные деформации p_i и ε_{*i} с двумя параметрами программ нагружения (3). Существенно, что отношения деформаций (28), (29), (30) не зависят и от МФ, и от напряжения σ_*, и потому эти свойства удобно использовать как необходимые признаки (индикаторы) применимости ОС (1), которые легко проверять по данным испытаний некоторого материала, зарегистрировав деформации p_i и ε_{*i}.

Таким образом, прежде, чем применять ОС (1) для моделирования поведения некоторого материала, следует провести несколько испытаний на нагрузку – разгрузку – отдых вида (3) с разными величинами t_* и σ_* и проверить наличие у функций $\Lambda(t;b,t_*)$ и КНР материала таких же качественных свойств (индикаторов применимости ОС (1)), что и у теоретических КНР ОС (1) с любыми t_*, b и σ_* [7].

1. Постоянство деформации (14) при $t\ge T:=2t_*$ (отсутствие заметного восстановления после полной разгрузки).

2. Пропорциональность остаточной деформации (15) длительности нагружения и разгрузки T в опытах с любым фиксированным максимальным напряжением $\sigma_*>\sigma_+$ и разными скоростями нагружения, т.е. $p(b,T)/T$ не зависит от T, и

$$p_2 / p_1 = T_2 / T_1 = b_1 / b_2 . \quad (30)$$

3. Независимость от T разности деформаций $\varepsilon_* - 0,5p$ в испытаниях (3) с одинаковым $\sigma_* > \sigma_+$ (см. (26)), т.е. выполнение равенств (28) и $\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1} = (p_2 - p_1)/2$.

4. Выполнение пропорции (29) в трех испытаниях с фиксированным $\sigma_* > \sigma_+$ и разными скоростями нагружения.

5. В любых двух опытах с одинаковой скоростью нагружения b и разными $T = T_i$ и $\sigma_* = bT_i$ измеряемые функции времени $S_i(t) = \Lambda(T - t, b, T_i) + \Lambda(t, b, T_i) - -p(b, T_i)$, $t \in (0; T_i/2)$, совпадают при всех $t \in (0; T_m/2)$, $T_m = \min\{T_i\}$, т.е. значения функции $S(t,b,T) := \Lambda(T - t, b, T) + \Lambda(t, b, T) - p(b, T)$, $t \in (0; T/2)$, не зависят от T.

6. В любых двух опытах с одинаковой скоростью b и разными $T = T_i$ и σ_* функции $D_i(t) := \Lambda(T - t, b, T_i) - \Lambda(t, b, T_i) - p(b, T_i)$, $t \in (0; T_i/2)$, совпадают при всех $t \in (0; T_m/2)$, т.е. функция $D(t,b,T) := \Lambda(T - t, b, T) - \Lambda(t, b, T) - p(b, T)$, $t \in (0; T/2)$, не зависит от T.

По данным испытаний материала свойства 5 и 6 удобно проверять в форме $S_i(t)/S_j(t) \equiv 1$, $D_i(t)/D_j(t) \equiv 1$ при $t \in (0; T_m/2)$ или

$$Q_{i/j}(t) = [D_i(t) - D_j(t)]/[D_i(t) + D_j(t)] \equiv 0, \quad t \in (0; T_m/2) \quad (31)$$

(поскольку возможно, что $D_i(t)$ обращается в нуль).

Естественно, под проверкой постоянства функции измеряемых величин (ее независимости от аргумента) понимается приближенное равенство с определенным допуском. Если все проверки дают положительный результат, можно переходить к идентификации. Если какие-то из указанных признаков явно отсутствуют у КНР материала, то применять ОС (1) для его моделирования не рекомендуется, поскольку верификация модели по данным испытаний разного типа покажет заметные количественные отклонения модельных величин от экспериментальных.

6. Базовая методика определения материальных функций ОС (1) по КНР

Проведенный в [4; 7] анализ КНР ОС (1) позволил предложить несколько способов прямого определения предела упругости σ_+ и значений МФ $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ в любом заданном наборе точек $s_i > \sigma_+ \geq 0$ из рабочего диапазона напряжений (например, $s_i = \sigma_+ + ih$, $i = 1, ..., K$) по серии КНР материала (или функций $\Lambda(t; b, t_*)$) для нагружений вида (3) с разными напряжениями $\sigma_* = s_i$ (или только по одной КНР). Существенно, что можно вычислить σ_+ и МФ $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ *по отдельности, последовательно.*

Для определения σ_+ можно использовать несколько характерных признаков данных испытаний. По семейству КНР материала находим максимальное значение уровня напряжения $\sigma_* = s_i$, при котором петля гистерезиса отсутствует, т.е. кривая разгрузки совпадает с кривой нагружения. Можно найти σ_+ и непосредственно по измеренной зависимости деформации от времени, проанализировав графики функций $\delta(t) = \Lambda(T - t) - \Lambda(t)$, $t \in [0, t_*]$: если $\delta(t)$ мало отклоняется от нуля при $\sigma_* = s_m$, то $\sigma_+ > \sigma_m$ (если материал упругий, то $\delta(t) \equiv 0$).

Для определения МФ лучше использовать точки излома КНР (как материала, так и порождаемых ОС (1)): 1) точку начала разгрузки: $t = t_*$, $\sigma = \sigma_* = bt_*$, $\varepsilon = \varepsilon_*(\sigma_*, t_*)$; 2) точку окончания разгрузки: $t = 2t_*$ $\sigma = 0$, $\varepsilon = p(\sigma_*, t_*)$; теоретические величины деформации вычисляются по формулам (16) и (15). В формулу (15) для остаточной деформации не входит МФ F. Измерив деформации $\varepsilon_*(s_i, t_*)$ и $p_i = p(s_i, T_i)$ (как деформацию в момент окончания третьей стадии нагружения (3) или ее полусумму с деформацией в момент $t = 2t_*$) в серии испытаний с разными напряжениями $s_i = \sigma_{*i} = b_i T_i/2$, можно найти значения функций $cF(s_i)$ и $\gamma I(s_i)$ (см. (15)) в любых точках s_i из рабочего диапазона напряжений (например, $s_i = \sigma_+ + ih$):

$$cF(s_i) = \varepsilon_*(s_i, t_*) - 0.5p_i , \ \gamma I(s_i) = 0.5 b_i p_i = s_i p_i / T_i , \quad (32)$$

а после аппроксимации $\gamma I(x)$ гладкой функцией можно найти значения МФ $\gamma V(x) = \gamma I'(x)$ (не только в узлах s_i) [7]. Можно также вместо определения по измеренным величинам $\varepsilon_*(s_i, t_*)$ при всех $\sigma_* = s_i$ найти $cF(s_i)$ из (12) только по данным испытания с наибольшим напряжением $\sigma_* = s_K$, регистрируя деформацию в те моменты времени t_i, когда $bt_i = s_i$.

Таким образом, для определения МФ в K узловых точках (в [7] показано, как их количество можно удвоить) необходимо провести K испытаний материала с разными $\sigma_* = s_i = b_i T_i/2$, измеряя в каждом из них всего два характерных значения деформации $p_i = p(\sigma_{*i}, T_i)$ и $\varepsilon_{*i} = \varepsilon_*(\sigma_{*i}, T_i)$ в точках излома КНР. Важно, что МФ определяются из той же серии испытаний, по которой проверяются индикаторы применимости ОС.

Выше мы рассматривали случай $\min s_i > \sigma_+ \geq 0$, где σ_+ – предел упругости и порог ползучести материала

при растяжении; в частности, при $\sigma_+ = 0$ значения МФ можно определить при любых $s_i > 0$. Если же испытания материала на ползучесть и деформирование с постоянными скоростями показывают, что следует задать $\sigma_+ > 0$ (релаксация и ползучесть отсутствуют при $\sigma < \sigma_+$, кривая деформирования не зависит от скорости нагружения или деформации при достаточно малых ε и после разгрузки нет остаточной деформации), то следует положить $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0;\sigma_+]$, а значения $cF(x)$ на этом отрезке определить по диаграмме (упругого) деформирования материала (КН, порождаемая ОС (1), задается при $\sigma < \sigma_+$ уравнением $\varepsilon = cF(\sigma)$). Чтобы определить η и E отдельно от МФ V и F, нужно наложить на V и F некоторое нормировочное условие, например $F(1) = 1$, $V(1) = 1$ или $F'(0) = 1$, $V'(0) = 1$.

7. Индикаторы применимости и идентификация модели со степенными материальными функциями по двум КНР

Рассмотрим процедуру определение МФ в случае, когда они выбраны степенными, т.е. имеют вид (2). Тогда каждая МФ $F(x)/E$, $V(x)/\eta$ задается двумя параметрами – η, n и m, E, и для их определения требуется система четырех независимых уравнений.

Предварительно укажем специфические индикаторы применимости моделей со степенными МФ (2), помимо общих индикаторов применимости ОС (1), обнаруженных выше (п. 5). Несколько специфических индикаторов применимости модели (1), (2) по КН (по первой стадии КНР) были найдены в п.3. Дополним список. В случае МФ (2) формулы (15) и (16) для деформации в момент начала разгрузки $\varepsilon_*(b,t_*) = \Lambda(t_*)$ и остаточной деформации $p = p(b,2t_*) = \Lambda(2t_*)$ принимают вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_* = c\sigma_*^m + 0.5p\,, \\ p = 2\gamma(n+1)^{-1}t_*\sigma_*^n = 2\gamma(n+1)^{-1}b^{-1}\sigma_*^{n-1}. \end{gathered} \tag{33}$$

Разность $\varepsilon_* - 0,5p = E^{-1}\sigma_*^m$ – степенная функция σ_* и не зависит от t_*, а p – степенная функция от t_* при заданной СН b и степенная функция от σ_* при фиксированном t_*, т.е. *логарифмы величин* $\varepsilon_* - 0,5p$ *и* p *связаны с* $\ln\sigma_*$ (или $\ln t_*$) *линейными зависимостями.* Линейная связь логарифмов легко проверяется по серии КНР материала с разными σ_*: экспериментальные точки должны располагаться вдоль прямой. Угловые коэффициенты этих прямых совпадают с показателями МФ (2) m и n (или $n+1$) и не зависят от параметров нагружений вида (3) (от t_* и b), использованных в испытаниях. Наличие указанных линейных зависимостей – специфические индикаторы применимости степенной модели (1), (2). Если они не выполнены для данных испытания материала, то ОС (1), (2) не может описать его поведение. Если присутствуют, можно переходить к идентификации МФ (2).

Систему четырёх уравнений для параметров η, n, m, E можно получить из двух испытаний материала на нагрузку – разгрузку с $\sigma_{*2} \neq \sigma_{*1}$, измерив значения деформации p_1, p_2, ε_{*1}, ε_{*2} и вычислив $\varepsilon_{*i} - 0,5p_i$. Их теоретические значения:

$$\begin{gathered} p_1 = \frac{2t_{*1}\sigma_{*1}^n}{\eta(n+1)},\ p_2 = \frac{2t_{*2}\sigma_{*2}^n}{\eta(n+1)},\ \varepsilon_{*1} - 0,5p_1 = E^{-1}\sigma_{*1}^m, \\ \varepsilon_{*2} - 0,5p_2 = E^{-1}\sigma_{*2}^m \end{gathered} \tag{34}$$

Приравнивая левые части этих формул измеренным величинам, найдем n, η и m, E:

$$\begin{gathered} p_2 / p_1 = (t_{*2}\sigma_{*2}^n)/(t_{*1}\sigma_{*1}^n), \\ (\varepsilon_{*2} - 0,5p_2)/(\varepsilon_{*1} - 0,5p_1) = (\sigma_{*2}/\sigma_{*1})^m, \\ n = \frac{\ln(p_2 p_1^{-1} t_{*1} t_{*2}^{-1})}{\ln(\sigma_{*2}/\sigma_{*1})},\ \eta = \frac{2t_{*1}\sigma_{*1}^n}{p_1(n+1)}, \\ m = \frac{\ln[(\varepsilon_{*2} - 0,5p_2)/(\varepsilon_{*1} - 0,5p_1)]}{\ln(\sigma_{*2}/\sigma_{*1})},\ E = \frac{\sigma_{*1}^m}{\varepsilon_{*1} - 0,5p_1}. \end{gathered} \tag{35}$$

При $t_{*2} = t_{*1}$ формула для n упрощается, а в случае $b_1 = b_2$ она принимает вид $n+1 = \ln(p_2/p_1)/\ln(\sigma_{*2}/\sigma_{*1})$. Таким образом, достаточно всего двух испытаний с разными σ_* (и $b_1 = b_2$ или $t_{*2} = t_{*1}$), чтобы найти все четыре параметра степенных МФ. При этом используются только параметры нагружения (3) σ_{*1}, σ_{*2}, $b_1 = b_2$ и четыре измеренные характерные деформации p_1, p_2, ε_{*1}, ε_{*2} (по две для каждого напряжений σ_{*1} и σ_{*2}). Величины σ_{*1}, σ_{*2} следует выбирать так, чтобы знаменатель $\ln(\sigma_{*2}/\sigma_{*1})$ в (35) больше отличался от нуля (а σ_{*2}/σ_{*1} – от единицы).

Чтобы уменьшить погрешность можно вычислить n и η как средние значения величин n_i и η_i по результатам $N > 2$ испытаний с разными $\sigma_{*i} \in (0;\omega_+]$, $i = 1;...;N$:

$$\begin{gathered} n = (N-1)^{-1}\sum_1^{N-1}\frac{\ln(p_{i+1}/p_i) - \ln(t_{*i+1}/t_{*i})}{\ln(\sigma_{*i+1}/\sigma_{*i})}, \\ \eta = 2(N-1)^{-1}\sum_1^{N-1}\frac{t_{*i}\sigma_{*i}^{n_i}}{p_i(n_i+1)}, \end{gathered}$$

т.е. найти константы n и η, минимизирующие среднеквадратичные уклонения от последовательностей вы-

численных по зарегистрированным деформациям величин n_i и η_i (можно вычислить среднее и по всем $N(N-1)/2$ парам КНР) Для этого придется провести больше двух испытаний, но они нужны и для проверки выполнения индикаторов применимости модели (1), (2), предваряющей идентификацию.

После определения параметров n, η и m, E можно в качестве первого этапа верификации, опираясь на теорему 2, проверить, обеспечивают ли найденные степенные МФ наблюдаемое в испытаниях наличие или отсутствие точки перегиба ветви разгрузки КНР и, возможно, возрастание деформации в начале разгрузки (в определённых диапазонах СН и длительностей нагрузки – разгрузки), чтобы убедиться, что они верно отражают эти характерные особенности кривых разгрузки материала при исследуемых режимах нагружения – разгрузки. Если нет, следует модифицировать алгоритм идентификации и включить в него ограничения на параметры МФ, обеспечивающие наличие точек перегиба и максимума, которые указаны в теореме 2.

Можно было бы для определения показателя n и в качестве индикатора применимости ОС (1) со степенными МФ (2) использовать свойство 8 из теоремы 2 (независимость отношения $Q := W/(\sigma_* p) = (n+1)/(n+2)$ от параметров нагружения (3)), но это нецелесообразно из-за сложности достоверного измерения диссипации энергии W за цикл нагрузки – разгрузки. Лучше использовать эту формулу для расчёта диссипации по измеренной пластической деформации, если установлено (в результате верификации), что степенная модель (1), (2) хорошо описывает поведение материала.

8. Способ определения материальных функций по одной кривой нагрузки – разгрузки материала

В статье [7] выведены явные выражения для значений МФ $cF(x)$ и $\gamma V(x)$ в любой точке через деформации измеренные лишь в *одном* испытании вида (3) с $\sigma_* > x$:

$$cF(x) = 0,5[\Lambda(T - xb^{-1}) + \Lambda(xb^{-1}) - p(b,T)], \quad x \in [0, \sigma_*]. \tag{36}$$

$$\gamma I(x) = 0,5b[p - \Lambda(T - xb^{-1}) + \Lambda(xb^{-1})]. \tag{37}$$

Для вычисления значений $cF(x)$ и $\gamma I(x)$ в *любой* точке $x \in [0, \sigma_*]$ достаточно измерить деформацию в моменты времени $t = x/b$ и $t = T - x/b$ и остаточную деформацию $p = \Lambda(T)$. По (37) находятся значения $\gamma I(x)$ при любом x, а затем – значения МФ $\gamma V = \gamma I'(x)$. Формулы (36), (37) удобно использовать для определения МФ F по одному единственному испытанию материала вида (3) с достаточно большим $\sigma_* = bt_*$, в котором переменная $x = bt$ пробегает весь рабочий диапазон напряжений $[0, \sigma_*]$. Проведение нескольких испытаний (возможно при разных b и T) позволит оценить разброс результатов, осреднить найденные значения МФ в каждой точке и понизить погрешность идентификации. Первый метод идентификации, требующий значительно большего количества испытаний, будет более устойчив по отношению к отклонениям реальной программы нагружения от идеальной программы (3) с постоянной скоростью (неизбежные на начальном участке нагружения и в окрестности точек переключения $t = t_*$ и $t = 2t_*$), так как использует только две измеряемых деформации в моменты $t = t_*$ и $t = 2t_*$, т.е. интегральные характеристики стадий нагрузки и разгрузки. Поэтому для близких к нулю значений аргумента x (им соответствуют малые $t = x/b$ в (36),(37)) целесообразно определять $cF(x)$ и $\gamma V(x)$ не по формулам (36) и (37), а по методике, изложенной в п.6, т.е. по серии испытаний вида (3) с различными (малыми) σ_*. Такие испытания необходимы и для проверки индикаторов применимости ОС (см. п. 5).

Для степенных МФ (2) $I(x) = (n+1)^{-1} x^{n+1}$ и тождества (36), (37) при $t = t_*/2$, т.е. $x = 0,5bt_* = 0,5\sigma_*$, дают ещё два уравнения для параметров n, η и m, E:

$$\begin{aligned} 2c(0,5bt_*)^m &= \Lambda(1,5t_*) + \Lambda(0,5t_*) - p, \\ 2\gamma(n+1)^{-1}(0,5bt_*)^{n+1} &= b[p - \Lambda(1,5t_*) + \Lambda(0,5t_*)]. \end{aligned} \tag{38}$$

Вместе с уравнениям (33) они дают систему 4 уравнений; все деформации в правых частях формул измеряются в опыте (при $t = 0,5t_*; t_*; 1,5t_*; 2t_*$). Поделив первые уравнения (33) и (38), исключаем $c\sigma_*^m$ и получаем уравнение для показателя m, а поделив вторые уравнения – для показателя n:

$$\begin{aligned} 2^{-m} &= [\Lambda(1,5t_*) + \Lambda(0,5t_*) - p]/[2\varepsilon_* - p], \\ 2^{-n-1} &= [p - \Lambda(1,5t_*) + \Lambda(0,5t_*)]p^{-1}, \text{ т.е.} \\ m &= (\ln 2)^{-1} \ln \frac{2\varepsilon_* - p}{\Lambda(1,5t_*) + \Lambda(0,5t_*) - p}, \\ n &= (\ln 2)^{-1} \ln \frac{0,5p}{p - \Lambda(1,5t_*) + \Lambda(0,5t_*)}, \end{aligned} \tag{39}$$

Теперь из (33) находим E и η:

$$\begin{aligned} E = c^{-1} &= \sigma_*^m / (\varepsilon_* - 0,5p), \\ \eta = \gamma^{-1} &= 2p^{-1}(n+1)^{-1}(\sigma_*^n t_*), \end{aligned} \tag{40}$$

Таким образом, второй способ идентификации позволяет определить значения МФ $cF(x)$ и $\gamma V(x)$ в *любой* точке $x \in [0, \sigma_*]$ из *одного* испытания (одного образца) на нагрузку – разгрузку (до напряжения σ_*, сов-

падающего с верхней границей рабочего диапазона). Проведение нескольких испытаний (возможно при разных b и T) и определение параметров (39), (40) по каждой КНР позволят оценить разброс результатов (большой разброс – индикатор неприменимости ОС (1) со степенными МФ, слабая зависимость материальных параметров (39), (40) от параметров программы нагружения (3) свидетельствует об адекватности степенной модели (1), (2)), осреднить найденные значения МФ в каждой точке и понизить погрешность идентификации.

Разработанные методики позволяют определить МФ $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ при $x>0$ по испытаниям на растяжение. Если поведение материала (его кривых ползучести и релаксации, диаграмм деформирования с постоянной скоростью) при сжатии не отличается от поведения при растяжении, то МФ можно продолжить в область $x>0$, считая их нечетными. Если же поведение материала при сжатии иное, то для определения МФ на интервале $(\omega_-;0)$ необходимо применить одну из описанных методик идентификации, взяв за основу данные испытаний на сжатие.

Заключение

В данной работе продолжен качественный анализ физически нелинейного определяющего соотношения (ОС) (1) для нестареющих вязкоупругопластичных материалов [1–8]. Детально изучены свойства кривых нагружения (КН) и кривых нагружения – разгрузки – отдыха (КНР), порождаемых ОС (1) со степенными материальными функциями (2) (именно такие МФ широко используются в теориях ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров, гидродинамике неньютоновских жидкостей и в моделировании сверхпластического течения материалов) в зависимости от длительности и скорости нагружения и разгрузки и показателей двух материальных функций, проанализированы их характерные особенности по сравнению с общими свойствами КН и КНР, порождаемых ОС (1) с произвольными МФ (теоремы 1 и 2). Задание любого конкретного семейства аппроксимаций для МФ значительно сокращает количество базовых испытаний и упрощает процедуру идентификации, так как определяются лишь несколько параметров, индивидуализирующих МФ, а не ее значения в узлах сетки, накрывающей рабочий диапазон напряжений. Одновременно значительно сужаются область применимости модели, и следует проверять дополнительные индикаторы применимости. В статье указаны специфические индикаторы применимости (или неприменимости) четырехпараметрической степенной модели (1), (2) (см. п. 3 и 7), которые необходимо дополнительно проверять по экспериментальным КН и КНР материала помимо общих индикаторов применимости ОС (1) с произвольными МФ (п. 3, 5). Индикаторы (не)применимости – система необходимых признаков применимости ОС (качественных общих свойств порождаемых ОС базовых кривых, например КН и КНР), которые удобно быстро проверять при анализе данных испытаний конкретных материалов, чтобы судить о (не)применимости выбранного ОС для моделирования этих материалов и целесообразности попыток идентификации. Найденные специфические индикаторы (не)применимости степенной модели (1), (2) дополняют обнаруженные ранее индикаторы применимости по кривым ползучести и восстановления: скорость установившейся ползучести и остаточная деформации после полной разгрузки связаны степенными зависимостями с уровнем напряжения.

Разработаны несколько методик определения степенных материальных функций (2) по минимальному набору базовых испытаний материала, основанные на анализе свойств КН и КНР материала, более быстрые и экономные, чем общие методики определения произвольных МФ по КН и КНР (см. п. 3, 5–8). Показано, что для определения всех четырех параметров двух МФ (2) достаточно двух КН материала с разными скоростями (п. 3) или двух испытаний вида (3) (двух КНР) с разными максимальными напряжениями σ_* (п. 7), или даже только одной КНР (п. 8). В каждом из этих трех случаев выведены явные формулы (см. (10), (11), (35) и (39), (40)) для четырех параметров степенных МФ через параметры двух или одной программ нагружения (3) и измеряемые характерные деформации, указаны способы уменьшения погрешности идентификации за счет использования дополнительных испытаний.

В следующих работах (вслед за статьей [54]) разработанные методики идентификации ОС (1) по КН и КНР (после проверки найденных индикаторов применимости ОС (1)) будут применены к данным испытаний полиамида-6, фторопласта-4 и изотропных композитов на их основе, полученных автором совместно с С.Б. Сапожниковым (в ЮУрФУ) и с А.А. Охлопковой, Н.А. Лазаревой и А.В. Бабайцевым (в СВФУ и МАИ) в 2022 г., а также – испытаний новых алюминиевых сплавов, проведенных в МИСИС А.В Михайловской.

Библиографический список

1. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // Вестник Самарского гос. технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 20, № 3. – С. 524-543. DOI: 10.14498/vsgtu1512

2. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2017. – № 6. – С. 31–55. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55

3. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 1. – С. 160–179. DOI: 10.14498/vsgtu1524

4. Хохлов А.В. Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для реономных материалов // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 293–324. – DOI: 10.14498/vsgtu1573

5. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по диаграммам нагружения с постоянными скоростями // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – № 4. – С. 2–10. DOI: 10.31044/1814-4632-2018-4-2-10

6. Хохлов А.В. Индикаторы применимости и методики идентификации нелинейной модели типа Максвелла для реономных материалов по кривым ползучести при ступенчатых нагружениях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2018. – № 6. – С. 92–112. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112

7. Khokhlov A.V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell–type elastoviscoplastic model using loading–unloading curves // Mechanics of Composite Materials. – 2019. – Vol. 55, no. 2. – P. 195–210. DOI: 10.1007/s11029-019-09809-w

8. Хохлов А.В. О возможности описания знакопеременности и немонотонности зависимости от времени коэффициента Пуассона при ползучести с помощью нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – № 3. – С. 16–24. DOI: 10.31044/1814-4632-2019-3-16-24

9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

10. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука, 1973. – 287 с.

11. Малинин Н.Н. Расчёты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.

12. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.

13. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. – 278 с.

14. Betten J. Creep Mechanics. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.

15. Lakes R.S. Viscoelastic Materials. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 461 p.

16. Радченко В.П., Кичаев П.Е. Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. – Самара: Самарский гос. тех. ун-т, 2011. – 157 с.

17. Bergstrom J.S. Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling. – Elsevier, William Andrew, 2015. – 520 p.

18. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.

19. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials // Int. J. Fatigue. – 1998. – Vol. 20, no. 1. – P. 9–34.

20. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations / A. Launay, M.H. Maitournam, Y. Marco, I. Raoult, F. Szmytka // Int. J. Plasticity. – 2011. – Vol. 27. – P. 1267–1293.

21. A modified viscoplastic model to predict the permanent deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures / M.K. Darabi, R.K.A. Al-Rub, E.A. Masad, C.-W. Huang, D.N. Little // Int. J. Plasticity. – 2012. – Vol. 35. – P. 100–134.

22. О законе накопления поврежденности и критерии разрушения в высоконаполненных полимерных материалах / Д.Л. Быков, А.В. Казаков, Д.Н. Коновалов [и др.] // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 5. – С. 76–97.

23. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the Constitutive Equation for Uniaxial Creep of a Power-Law Material through Instrumented Microindentation Testing and Modeling // Materials Transactions. – 2014. – Vol. 55, no 2. – P. 275–284.

24. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Двойственные задачи плоских ползущих течений степенной несжимаемой среды // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2016. – Т.20, № 3. – С. 496–507.

25. Кайбышев О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов. – М.: Металлургия, 1984. – 264 с.

26. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in metals and ceramics. – Cambridge Univ. Press, 1997. – 287 p.

27. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 363 p.

28. Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation / V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome, V.N. Chuvil'deev, V.I. Kopylov. – N.Y.: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p

29. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests // Mech. Time-Depend. Mater. – 2007. – Vol. 11. – P. 159–172.

30. Megahed M., Ponter A.R.S., Morrison C.J. An experimental and theoretical investigation into the creep properties of a simple structure of 316 stainless steel // Int. J. Mech. Sci. – 1984. – Vol. 26, no. 3. – P. 149–164.

31. Еникеев Ф.У. Экспериментальная оценка скоростной чувствительности сверхпластичного материала с сильно неоднородным напряженно-деформированным состоянием // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2007. – Т. 73, № 10. – С. 44–50.

32. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Математическая модель ползучести микронеоднородного нелинейно-упругого материала // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 157–163.

33. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep Analysis with a Stress Range Dependent Constitutive Model // Arch. Appl. Mech. – 2009. – Vol.79. – P. 619–630.

34. Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation // Engineering Structures. – 2012. – Vol. 34, no 1. – P. 111–123.

35. Хохлов А.В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 65–95. DOI: 10.14498/vsgtu1543

36. Криштал М.М. Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор). Часть I. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести // Физическая мезомеханика. – 2004. – Т. 7, № 5. – С. 5–29.

37. Рудской А.М., Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов. – СПб: Наука, 2009. – 218 с.

38. Thermo-viscoplastic modeling incorporating dynamic strain aging effect on the uniaxial behavior of Z2CND18.12N stainless steel / D. Yu, X. Chen, W. Yu, G. Chen // Int. J. Plasticity. – 2012. – Vol. 37. – P. 119–139.

39. Трусов П.В., Чечулина Е.А. Прерывистая текучесть: физические механизмы, экспериментальные данные, макрофеноменологические модели // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2014. – № 3. – С. 186–232.

40. Lin Y.C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working // Materials and Design. – 2011. – Vol. 32. – P. 1733–1759.

41. McClung A.J.W., Ruggles-Wrenn M.B. The rate (time)-dependent mechanical behavior of the PMR-15 thermoset polymer at elevated temperature // Polymer Testing. – 2008. – Vol. 27. – P. 908–914.

42. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model / M. Kastner, M. Obst, J. Brummund [et al.] // Mechanics of Materials. – 2012. – Vol. 52. – P. 40–57.

43. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage / K.-S. Yun, J.-B. Park, G.-D. Jung, S.-K. Youn // Int. J. of Solids and Structures. – 2016. – Vol. 34. – P. 118–127.

44. Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 568 p.

45. Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect // European Polymer Journal. – 2009. – Vol. 45. – P. 601–612.

46. Logarithmic rate based elasto-viscoplastic cyclic constitutive model for soft biological tissues / Y. Zhu, G. Kang, C. Yu, L.H. Poh // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2016. – Vol. 61. – P. 397–409.

47. Qi H., Boyce M. Stress-strain behavior of thermoplastic polyurethanes // Mech. Mater. – 2005. – Vol. 37, no. 8. – P. 817–839.

48. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // Mech. Mater. – 2014. – Vol. 69. – P. 116–131.

49. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // Int. J. Plasticity. – 2003. – Vol. 19. – P. 1069–1095.

50. Cao W., Kim Y.R. A viscoplastic model for the confined permanent deformation of asphalt concrete in compression // Mechanics of Materials. – 2016. – Vol. 92. – P. 235–247.

51. Khan A.S., Lopez-Pamies O. Time and temperature dependent response and relaxation of a soft polymer // Int. J. Plasticity. – 2002. – Vol. 18. – P. 1359–1372.

52. Drozdov A.D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal // Int. J. Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47. – P. 3221–3233.

53. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // Int. J. Plasticity. – 2011. – Vol. 27. – P. 512–521.

54. Khokhlov A.V., Shaporev A.V., Stolyarov O.N. Loading-unloading-recovery curves for polyester yarns and identification of the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model // Mechanics of Composite Materials. – 2023. – Vol. 59, no. 1. – P. 129–146. DOI: 10.1007/s11029-023-10086-x.

References

1. Khokhlov A.V. Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading. *Vestnik Samarskogo gos. tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, no 3, pp. 524-543 (in Russ.) doi: 10.14498/vsgtu1512

2. Khokhlov A.V. Nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model: General properties of stress relaxation curves and restrictions on the material functions, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 31–55 (In Russian). doi: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55

3. Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: Simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 160–179 (in Russ.). doi: 10.14498/vsgtu1524

4. Khokhlov A.V. Nelinejnaya model' vyazkouprugoplasticnosti tipa Maksvella: svojstva semejstva krivykh relaksatsii i ogranicheniya na material'nye funktsii [The nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model: general properties of stress relaxation curves and restrictions on the material functions]. *Vestnik MGTU im. N.Eh. Baumana. Seriya Estestvennye nauki*, 2017, No.6, Pp.31-55. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55

5. Khokhlov A.V. Identification of nonlinear model of Maxwell-type viscoelastoplasticity using stress-strain curves at constant stress rates. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2018, no. 4, pp. 2–10 (in Russ.) DOI: 10.31044/1814-4632-2018-4-2-10

6. Khokhlov A.V. Applicability Indicators and Identification Techniques for a Nonlinear Maxwell-Type Elasto-Viscoplastic Model using Multi-Step Creep Curves. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 6, pp. 92–112. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112

7. Khokhlov A.V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell–type elastoviscoplastic model using loading–unloading curves. *Mechanics of Composite Materials*, 2019, Vol.55, no.2. pp.195-210. DOI:10.1007/s11029-019-09809-w

8. Khokhlov A.V. Possibility to Describe the Alternating and Non-monotonic Time Dependence of Poisson's Ratio during Creep Using a Nonlinear Maxwell-Type Viscoelastoplasticity Model. *Russian Metallurgy (Metally)*, Vol. 2019, No.10, pp. 956–963. DOI: 10.1134/S0036029519100136

9. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstruktsiy [Creep Problems in Structural Members]. Moscow, Nauka, 1966. 752 p. (in Russ.)

10. Bugakov I.I. Polzuchest' polymernikh materialov [Creep of polimer materials]. M., Nauka, 1973. 287 p. (in Russ.).

11. Malinin N.N. Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruktsiy. [Creep design of engineering structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 221 p. (in Russ.)

12. Gokhfel'd D. A., Sadakov O. S. Plastichnost' i polzuchest' elementov konstruktsii pri povtornykh nagruzheniiakh [Plasticity and creep in structural elements under repeated loading]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 256 pp. (In Russian).

13. Nikitenko A.F. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskikh materialov [Creep and long-term strength of metallic materials]. Novosibirsk, NGASU, 1997. 278 p. (in Russ.)

14. Betten J. Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.

15. Lakes R.S. Viscoelastic Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.

16. Radchenko V.P., Kichaev P.Ye. Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov. [Energy concept of creep and vibrocreep]. Samara, Samarskiy gos. tekhnicheskiy universitet, 2011. 157 p. (in Russ.).

17. Bergstrom J.S. Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling. Elsevier, William Andrew: 2015. 520 p.

18. Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-term strength of metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 504 p.

19. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials. *Int.J. Fatigue*. 1998. Vol.20, No.1, pp. 9-34

20. Launay A., Maitournam M.H., Marco Y., Raoult I., Szmytka F. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations. *Int. J. Plasticity*. 2011. Vol. 27, pp. 1267–1293.

21. Darabi M.K, Al-Rub R.K.A., Masad E.A., Huang C.-W., Little D.N. A modified viscoplastic model to predict the permanent

deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures. *Int. J. Plasticity*. 2012. Vol. 35, pp. 100–134.

22. D.L. Bykov, A.V. Kazakov, D.N. Konovalov et al. Law of damage accumulation and fracture criteria in highly filled polymer materials. *Mechanics of Solids.* 2014. Vol. 49, no 5, pp 543–560. doi: 10.3103/S0025654414050069

23. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the Constitutive Equation for Uniaxial Creep of a Power-Law Material through Instrumented Microindentation Testing and Modeling. *Materials Transactions*. 2014. Vol. 55, no 2, pp. 275-284.

24. Petukhov D.S., Keller I.E. Dual plane problems for creeping flows of power-low incompressible medium. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2016. V.20, no 3, pp.496-507.

25. Kaibishev O.A. Sverkhplastichnost' promishlennikh splavov. [Superplasticity of industrial alloys]. Moscow, Metallurgiya, 1984. 264 p. (in Russ.)

26. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in metals and ceramics. Cambridge Univ. Press, 1997. 287 p.

27. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 363 p.

28. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation. N.Y., Nova Science Pub.Inc., 2010. 542 p

29. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mech. Time-Depend. Mater.* 2007. Vol. 11, pp.159–172.

30. Megahed M, Ponter A.R.S., Morrison C.J. An experimental and theoretical investigation into the creep properties of a simple structure of 316 stainless steel. *Int. J. Mech. Sci.* 1984. Vol. 26, no. 3, pp. 149-164.

31. Enikeev F.U. Eksperimental'naya otsenka skorostnoi chuvstvitel'nosti sverkhplastichnogo materiala s sil'no neodnorodnym napryazhonno-deformirovannym sostoyaniem. [Experimental evaluation of speed sensitivity of superplastic material in strongly nonuniform deflected mode]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*. 2007. Vol.73, no 10, pp. 44-50. (in Russ.).

32. Radchenko V.P., Shapievskii D.V. Matematicheskaya model' polzuchesti mikroneodnorodnogo nelineino-uprugogo materiala. [Mathematical creep model for micro-nonhomogeneous non-linear elastic material]. *Prikladnaya mekhanica i tekhnicheskaya fizika*. 2008. T.49, no 3, pp. 157-163. (in Russ.).

33. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep Analysis with a Stress Range Dependent Constitutive Model. Arch. Appl. Mech. 2009. Vol.79, pp. 619-630.

34. Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation. *Engineering Structures*. 2012. Vol. 34, no 1, pp.111–123.

35. Khokhlov A.V. Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. unta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2018, Vol. 22, No.1. Pp. 65-95 (in Russ.). doi: 10.14498/vsgtu1543

36. Krishtal M.M. Neustoichivost' i mezoskopicheskaia neodnorodnost' plasticheskoi deformatsii (analiticheskii obzor). Chast' I. Fenomenologiia zuba tekuchesti i preryvistoi tekuchesti [Instability and mesoscopic inhomogeneity of plastic deformation (analytical review). Part I. Phenomenology of the sharp yield point and discontinuous flow]. *Fizicheskaia mezomekhanika,*2004, vol. 7, no. 5, pp. 5-29.

37. Rudskoi A.M., Rudaev Ya.I. Mechanics of dynamic superplasticity of aluminum alloys. Saint Petersburg: Nauka, 2009. 218 p. (in Russian)

38. Yu D., Chen X., Yu W., Chen G. Thermo-viscoplastic modeling incorporating dynamic strain aging effect on the uniaxial behavior of Z2CND18.12N stainless steel. *Int. J. Plasticity*, 2012. Vol. 37, pp. 119-139

39. Trusov P.V., Chechulina E.A. Serrated yielding: physical mechanisms, experimental dates, macro-phenomenological models. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 3. Pp. 186-232. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.10 (in Russian)

40. Lin Y.C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working. *Materials and Design*. 2011. Vol.32, pp. 1733–1759.

41. McClung A.J.W., Ruggles-Wrenn M.B. The rate (time)-dependent mechanical behavior of the PMR-15 thermoset polymer at elevated temperature. *Polymer Testing*. 2008. vol.27, pp. 908–914.

42. Kastner M., Obst M., Brummund J. et al. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*. 2012. vol.52, pp. 40–57.

43. Yun K.-S., Park J.-B., Jung G.-D., Youn S.-K. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage. *Int. J. of Solids and Structures*. 2016. Vol. 34, pp. 118–127.

44. Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. New York: Springer-Verlag, 1993. 568 p.

45. Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect. *European Polymer Journal*. 2009. Vol. 45, pp. 601-612.

46. Zhu Y., Kang G., Yu C., Poh L.H. Logarithmic rate based elasto-viscoplastic cyclic constitutive model for soft biological tissues. J*ournal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2016. vol.61, pp. 397–409.

47. *Qi H., Boyce M.* Stress-strain behavior of thermoplastic polyurethanes. Mech. Mater. 2005. Vol. 37, No. 8. P. 817-839.

48. *Drozdov A.D., Dusunceli N.* Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers. Mech. Mater. 2014. Vol. 69. P. 116-131.

49. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers. *Int. J. Plasticity*. 2003. vol.19, pp. 1069–1095.

50. Cao W., Kim Y.R. A viscoplastic model for the confined permanent deformation of asphalt concrete in compression. *Mechanics of Materials,* 2016. Vol. 92, pp. 235–247.

51. Khan A.S., Lopez-Pamies O. Time and temperature dependent response and relaxation of a soft polymer. *Int. J. Plasticity*. 2002. Vol.18, pp.1359–1372.

52. Drozdov A.D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal. *Int. J. Solids and Structures.* 2010. Vol. 47, pp. 3221–3233.

53. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. *Int. J. Plasticity*. 2011. Vol. 27, pp. 512–521.

54. A.V. Khokhlov, A.V. Shaporev, and O.N. Stolyarov**.** Loading-unloading-recovery curves for polyester yarns and identification of the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model // *Mechanics of Composite Materials.* 2023, Vol. 59, No. 1. Pp.129-146. DOI 10.1007/s11029-023-10086-x.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-13-20056) и Министерства науки и высшего образования РФ (грант № FSRG-2021-0016).

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора 100 %.

Financing. This work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-13-20056) and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant no. FSRG-2021-0016).

Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.

The contribution of the author 100 %.