Калоеров, С.А. Решение задачи о поперечном изгибе электромагнитоупругой полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.02 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 1. – С. 20–33.

Perm Polytech Style: Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V. Solving the Problem of a Transverse Bending of an Electro-Magneto-Elastic Half-Plane with Holes and Cracks. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 1, pp. 20-33. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.02
УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов

Донецкий государственный университет, Донецк, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 июля 2024 г.
Одобрена: 18 марта 2025 г.
Принята к публикации:
28 марта 2025 г.

Ключевые слова:

тонкая пьезоплита, полуплоскость, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов, концентрация изгибающих моментов, коэффициенты интенсивности моментов.

АННОТАЦИЯ

С использованием комплексных потенциалов теории электромагнитоупругого изгиба тонких плит решена задача об изгибе пьезоплиты в виде полуплоскости с отверстиями и трещинами. При этом функции, голоморфные вне контуров отверстий и трещин, разлагаются в ряды Лорана, а функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, методом интегралов типа Коши выражаются через функции, сопряженные к указанным функциям. При таком подходе полученные суммарные функции точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе полуплоскости, а для определения неизвестных коэффициентов рядов Лорана используются граничные условия на контурах отверстий и трещин, которые в работе удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов, приводящим задачу к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований электромагнитоупругого состояния полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, с круговым отверстием и внутренней трещиной в перемычке, с круговым отверстием, имеющим краевую трещину в перемычке. Установлены закономерности изменения электромагнитоупругого состояния плиты в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения. Установлено, что с приближением отверстия или трещины к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах. Большая концентрация моментов наблюдается и в точках прямолинейной границы вблизи перемычки. Значения этих моментов особенно велики в задаче для полуплоскости с круговым отверстием, имеющим краевую трещину в перемычке. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому в этих случаях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электромагнитоупругости.

© **Калоеров Стефан Алексеевич** – д. ф.-м. н., проф., проф. кафедры теории упругости и вычислительной математики, e-mail: kaloerov@mail.ru, iD: 0000-0003-1339-6035.
Сероштанов Александр Владимирович – асп. кафедры теории упругости и вычислительной математики, e-mail: aleks.serosht@gmail.com, iD: 0000-0003-3545-3635.

Stefan A. Kaloerov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Theory of Elasticity and Computational Mathematics, e-mail: kaloerov@mail.ru, iD: 0000-0003-1339-6035.
Aleksandr V. Seroshtanov – postgraduate student, Department of Theory of Elasticity and Computational Mathematics, e-mail: aleks.serosht@gmail.com, iD: 0000-0003-3545-3635.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

SOLVING THE PROBLEM OF A TRANSVERSE BENDING OF AN ELECTRO-MAGNETO-ELASTIC HALF-PLANE WITH HOLES AND CRACKS

S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov

Donetsk State University, Donetsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 July 2024
Approved: 18 March 2025
Accepted for publication:
28 March 2025

Keywords:

thin piezo plate, half-plane, holes, cracks, complex potentials, Cauchy type integrals, generalized least squares method, concentration of bending moments, moment intensity factors.

ABSTRACT

The paper solves the problem of bending a piezo plate in the form of a half-plane with holes and cracks by using the complex potentials of the theory of electro-magneto-elastic bending of thin plates. In this case, functions that are holomorphic outside the contours of the holes and cracks are decomposed into Laurent series, and functions that are holomorphic in the lower half-planes are expressed using Cauchy-type integrals in terms of functions conjugate to these functions. With this approach, the resulting total functions precisely satisfy the boundary conditions on the rectilinear boundary of the half-plane. To determine the unknown coefficients of the Laurent series we use boundary conditions on the contours of the holes and cracks, which are affected by the generalized least squares method, leading the problem to an overridden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The numerical results of the electro-magneto-elastic state of a half-plane with a circular hole or crack, with a circular hole and an internal crack in the jumper, with a circular hole having an edge crack in the jumper are described. We establish regularities of changes in the electro-magneto-elastic state of the plate depending on its material and geometric characteristics of holes and cracks, their mutual location. It has been found that as the hole or crack approaches the rectilinear boundary, the values of the moments at the points of the bridge increase sharply and change insignificantly in other zones. A large concentration of moments is also observed at the points of the rectilinear boundary near the jumper. The values of these moments are especially high in the problem for a half-plane with a circular hole having an edge crack in the jumper. The values of bending moments are significantly affected by taking into account the piezo properties of the material, especially in areas of high concentrations of the bending moments, therefore in these cases it is forbidden to limit ourselves to solving the problem of elasticity theory of plate bending, and it is necessary to solve the problem of electro-magneto-elasticity.

Введение

Тонкие пластинки с отверстиями и трещинами из пьезоматериалов получили широкое применение в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники [1–7]. Такие элементы часто находятся в условиях поперечного изгиба тонких плит и под действием различных механических и электромагнитных воздействий около отверстий и трещин возникают высокие концентрации изгибающих моментов (напряжений), что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Различные подходы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пьезоплит простой геометрической формы из материалов простейшей микроструктуры были предложены в работах [8–15]. Но эти методы для определения ЭМУС пьезоплит с отверстиями и трещинами при произвольных их расположениях непригодны или неэффективны. Наиболее достоверные же результаты при определении ЭМУС многосвязных плит получаются при использовании для решения задач комплексных потенциалов теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит [16; 17]. К настоящему времени с использованием этих функций авторами данной статьи решены различные задачи для конечных и бесконечных плит с отверстиями и трещинами.

Для случая же изгиба полуплоскости, вблизи прямолинейной границы которой располагаются концентраторы моментов, такая задача вообще не рассматривалась, хотя из исследований для плоской задачи теории упругости анизотропного тела известно, что именно в этом случае около отверстий и трещин возникает особенно высокая концентрация напряжений. При этом известно, что в случае многосвязной полуплоскости наиболее достоверные результаты получаются при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши. Этот подход для решения задач теории упругости в случае анизотропной полуплоскости был предложен в работе [18], а затем с его использованием были решены разнообразные задачи, включая сложные задачи о действии в многосвязной полуплоскости сосредоточенных сил. В работе [19] сфера действия метода интегралов типа Коши была расширена за счет его использования при определении общего вида комплексных потенциалов в задаче для многосвязной анизотропной полосы с отверстиями и трещинами, когда для определения неизвестных коэффициентов рядов Лорана использовался обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [20].

В данной работе с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит впервые построены решения задач об изгибе полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. При удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе использован метод интегралов типа Коши, позволивший построить общий вид комплексных

потенциалов, точно удовлетворяющих граничным условиям на прямолинейной границе. Для удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий и трещин используется ОМНК. Описаны результаты численных исследований ЭМУС по изгибу полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, с круговым отверстием и трещиной в перемычке, в том числе выходящей из контура отверстия. Исследованиями изучены закономерности изменения ЭМУС рассматриваемых плит в зависимости от их материалов и геометрических характеристик отверстий и трещин.

Постановка и решение задачи

Пусть пьезоплита занимает многосвязную нижнюю полуплоскость S^- с прямолинейной границей L^+ и эллиптическими отверстиями с контурами L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ (рис. 1). Выберем систему координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы L^+ и осью Ox, параллельной этой границе.

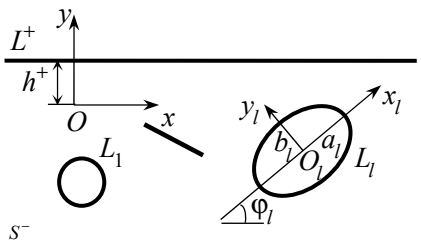


Рис. 1. Схема расчетной области

Fig. 1. Scheme of the computational domain

Обозначим полуоси эллипса L_l через a_l, b_l, угол между полуосью a_l и осью Ox, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, – через φ_l. При этом некоторые из эллипсов могут быть прямолинейными разрезами; при наличии отверстий с криволинейными контурами последние можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов и берегов разрезов. Выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l, отсчитываемых от положительного направления Ox против часовой стрелки. Тогда в системе Oxy уравнения L_l записываются в виде

$$x = x_{0l} + x_l\cos\varphi_l - y_l\sin\varphi_l,$$

$$y = y_{0l} + x_l\sin\varphi_l + y_l\cos\varphi_l, \qquad (1)$$

где

$$x_l = a_l\cos\theta,\ y_l = b_l\sin\theta;$$

x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π. Прямолинейная граница L^+ не загружена и не подкреплена. На контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ действуют механические изгибающие моменты $m_l(t)$, поперечные силы $p_l(t)$, моменты электрической индукции $m_{dl}(t)$ и магнитной индукции $m_{bl}(t)$ или они жестко подкреплены. На бесконечности полуплоскость не загружена или действуют механические моменты M_x^∞ и моменты индукций M_{dx}^∞, M_{bx}^∞, остальные моменты равны нулю, т. е. $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{by}^\infty = 0$.

Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [16; 17], то она сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $W_k'(z_k)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \qquad (2)$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения 8-го порядка, из граничных условий на контурах L_l

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikl}W_k'(t_k) = f_{il}(t), \qquad (3)$$

в котором

$$\left(g_{1kl}, g_{2kl}, g_{3kl}, g_{4kl}\right) = \left(p_k/\mu_k, q_k, d_{yk}, b_{yk}\right),$$

$$\left(f_{1l}(t),\ f_{2l}(t),\ f_{3l}(t),\ f_{4l}(t)\right) = \left(\int_0^s \left(m_l dy + f_l dx\right) - c_l x + c_{1l},\right.$$

$$\left.\int_0^s \left(m_l dx - f_l dy\right) + c_l y + c_{2l},\ -\int_0^s m_{dl}ds + c_{3l},\ -\int_0^s m_{bl}ds + c_{4l}\right);$$

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s)ds,$$

если на контуре L_l заданы механические изгибающие моменты $M_n = m_l(s)$ и поперечные усилия $N_n = p_l(s)$, изгибающие индукционные моменты $M_{dn} = m_{dl}(s)$, $M_{bn} = m_{bl}(s)$, и

$$\left(g_{1kl},\ g_{2kl}, g_{3kl}, g_{4kl}\right) = \left(1,\ \mu_k, d_{yk}, b_{yk}\right),$$

$$\left(f_{1l}(t),\ f_{2l}(t),\ f_{3l}(t),\ f_{4l}(t)\right) =$$

$$= \left(c_{3l},\ c_{4l},\ -\int_0^s m_{dl}ds + c_{5l},\ -\int_0^s m_{bl}ds + c_{6l}\right),$$

когда контур L_l плиты жестко подкреплен; p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} – известные постоянные [16, 17], c_l – вещественные, c_{il} – комплексные постоянные.

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы имеют вид

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + W_{k0}'(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W_{kl}'(z_k), \qquad (4)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}, \frac{1}{\mu_k}\right)\Gamma_k = \left(-M_x^{\infty}, 0, 0, -M_{dx}^{\infty}, 0, -M_{bx}^{\infty}, 0, 0\right); \qquad (5)$$

r_k, d_{xk}, b_{xk} – известные постоянные [16, 17]; $W_{k0}'(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях S_k^-, получаемых из заданной области S^- аффинными преобразованиями (2); $W_{kl}'(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k^-, соответствующих эллипсам L_l области S^- при аффинных преобразованиях (2) и после конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}\left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right), \qquad (6)$$

в которых

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k\, y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l\left(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l\right) + ib_l\left(\sin\varphi_l - \mu_k\cos\varphi_l\right)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l\left(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l\right) - ib_l\left(\sin\varphi_l - \mu_k\cos\varphi_l\right)}{2R_{kl}},$$

x_{0l}, y_{0l} – координаты центра эллипса L_l в основной системе координат Oxy, эти функции можно разложить в ряды Лорана вида

$$W_{kl}'(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln}\varphi_{kln}(z_k); \qquad (7)$$

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad \left(l = \overline{1,\mathcal{L}}\right);$$

a_{kln} – неизвестные коэффициенты.

Для прямолинейной границы L^+ в граничных условиях имеем (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами обозначим индексом нуль вверху)

$$g_{1kl} = g_{1k}^0 = \frac{p_k}{\mu_k},\ g_{2kl} = g_{2k}^0 = q_k,\ g_{3kl} = g_{3k}^0 = d_{yk},$$

$$g_{4kl} = g_{4k}^0 = b_{yk},$$

$$\left(f_1^+(t),\ f_2^+(t),\ f_3^+(t),\ f_4^+(t)\right) = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0\right).$$

Тогда граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде системы

$$\begin{aligned}
&g_{1k}^0 W_k'(t_k) + g_{1k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) + \\
&+ g_{1k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{1k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})},\\
&g_{2k}^0 W_k'(t_k) + g_{2k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) + \\
&+ g_{2k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{2k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})},\\
&g_{3k}^0 W_k'(t_k) + g_{3k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) + \\
&+ g_{3k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{3k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})},\\
&g_{4k}^0 W_k'(t_k) + g_{4k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{4k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) + \\
&+ g_{4k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{4k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})}
\end{aligned} \qquad (8)$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ g_{4k}^0 & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{4} g_{ik}^0 M_{ik},$$

в котором M_{ik} – алгебраические дополнения элементов первого столбца g_{ik}^0. При этом k – индекс, принимающий значения $1-4$, причем значения индекса $k+q-1$, большие 4, формально полагаются равными $k+q-5$.

Решая систему (8), найдем

$$W_k'(t_k) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{1k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{2k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{3k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ -\sum_{q=1}^{4} \overline{g_{4k+q-1}^0}\ \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})} & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix}$$

или

$$W_k'(t_k) = -\frac{M_{ik}}{\Delta_k}\sum_{i=1}^{4}\sum_{q=1}^{4}\overline{g^0_{ik+q-1}}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})}\,.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$W_k'(t_k) = -\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})}\quad \left(k=\overline{1,4}\right), \tag{9}$$

где

$$\overline{r_{kk+q-1}} = \sum_{i=1}^{4}\frac{\overline{g^0_{ik+q-1}}}{\Delta_k}M_{ik}\,.$$

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$x=t\,,\ y=h^+\,,\ z=x+iy=t+ih^+\,,\ =t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+$$

$$z_k = t_k = x+\mu_k y = t+\mu_k h^+\,,$$

$$\overline{t_k} = t+\overline{\mu_k}h^+ = t+\mu_k h^+ + (\overline{\mu_k}-\mu_k)h^+ = t_k+(\overline{\mu_k}-\mu_k)h^+\,,$$

$$\overline{t_{k+q-1}} = t+\overline{\mu_{k+q-1}}h^+ = t+\mu_k h^+ + (\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+ = \\ = t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+,\ \left(q=\overline{1,4}\right). \tag{10}$$

Подставив функции (4) в граничные условия (9) на прямолинейной границе L^+, получим

$$W'_{k0}\left(t_k\right)+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}W'_{kl}\left(z_k\right) = \\ = -\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\left[W'_{k+q-1,0}\left(t_{k+q-1}\right)+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\overline{W'_{k+q-1l}}\left(\overline{t_{k+q-1}}\right)\right]. \tag{11}$$

Здесь учтено, что на основе системы уравнений (5)

$$\Gamma_k t_k - \sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{\Gamma_{k+q-1}}\,\overline{t_{k+q-1}} = 0\,.$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\overline{W'_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} = \overline{W'_{k+q-1,0}}(\overline{t}_{k+q-1}) = \overline{W'_{k+q-1,0}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\right)$$

$$\overline{W'_{k+q-1l}\left(t_{k+q-1}\right)} = \overline{W'_{k+q-1l}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\right) = \\ = W'^{+}_{k+q-1l}\left(t_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left[\zeta^+_{k+q-1l}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\right)\right]^n}\,.$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (6) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (10) для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+q-1}} = t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+ = \\ = \overline{z_{k+q-1l}}+\overline{R_{k+q-1l}}\left(\zeta^+_{k+q-1l}+\frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta^+_{k+q-1l}}\right),\ \left(q=\overline{1,4}\right).$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения t_k переменными z_k областей S_k, приходим к конформным отображениям

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+ + \overline{z_{k+q-1l}} + \\ + \overline{R_{k+q-1l}}\left(\zeta^+_{k+q-1l}+\frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta^+_{k+q-1l}}\right),\ \left(q=\overline{1,4}\right), \tag{12}$$

где переменная $\overline{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^+, что подчеркивает ее происхождение от условий на границе L^+.

Равенства (12) представляют собой конформные отображения внешностей единичных кругов $\left|\zeta^+_{k+q-1l}\right|\ge 1$ на внешности контуров L^+_{k+q-1l} верхней (относительно границы L_k^+) полуплоскости S_k^+ переменной z_k. Следовательно, функции $W'^{+}_{k+q-1l}\left(z_k\right)$ являются функциями, голоморфными вне контуров L^+_{k+q-1l} верхних полуплоскостей S_k^+ (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях S_k^-), и для них имеют место разложения в ряды Лорана вида

$$W'^{+}_{k+q-1l}\left(z_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_{k+q-1ln}}\,\varphi^+_{k+q-1ln}\left(z_k\right), \tag{13}$$

где

$$\varphi^+_{k+q-1ln}\left(z_k\right) = \frac{1}{\left(\zeta^+_{k+q-1l}\right)^n},$$

ζ^+_{k+q-1l} – переменные, определяемые из конформных отображений (12).

Исходя из указанных свойств, входящих в условия (11) функций, умножив обе части этих условий на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-z_k}$ и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой L^+, получим

$$W'_{k0}\left(z_k\right) = -\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{W'_{k+q-1l}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\right).$$

Подставив эти функции $W'_{k0}\left(z_k\right)$ в (4), для комплексных потенциалов получим

$$W'_k\left(z_k\right) = \Gamma_k z_k + \\ + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\left[W'_{kl}\left(z_k\right)-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{W'_{k+q-1l}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\right)\right],$$

а затем на основе разложений (7) и (13) будем иметь выражение

$$W'_k\left(z_k\right) = \Gamma_k z_k + \\ + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{kln}\varphi_{kln}(z_k)-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{a_{k+q-1ln}}\,\varphi^+_{k+q-1ln}(z_k)\right], \tag{14}$$

в котором

$$\varphi_{kln}(z_k)=\frac{1}{\zeta_{kl}^{n}},\ \varphi^{+}_{k+q-1ln}(z_k)=\frac{1}{\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}\right)^{n}}.$$

Функции (14) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^{+}. Но они содержат неизвестные коэффициенты рядов a_{kln} $\left(k=\overline{1,4};\ l=\overline{1,\mathcal{L}},\ n=1,2,...\right)$. Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (3) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части постоянные. Имеем

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ikl}\delta_{k,s}W_k''(t_k)=\frac{df_{il}(t)}{ds},\qquad(15)$$

где $\delta_{k,s}=\dfrac{dt_k}{ds}=\dfrac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$; x', y' – производные переменных (1) по параметру θ параметрического задания эллипсов; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки;

$$W_k''(z_k)=\Gamma_k+$$
$$+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi'_{kln}(z_k)a_{kln}-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\varphi'^{+}_{k+q-1ln}(z_k)\,\overline{a_{k+q-1ln}}\right],\qquad(16)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k)=-\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}\left(\zeta_{kl}^{2}-m_{kl}\right)},$$

$$\varphi'^{+}_{k+q-1ln}(z_k)=-\frac{n}{\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}\right)^{n-1}\overline{R_{k+q-1l}}\left(\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}\right)^{2}-\overline{m_{k+q-1l}}\right)},$$
$$\left(q=\overline{1,4}\right).$$

Граничным условиям (15) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [20–22]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p области S^{-} систему точек $M_{pm}\left(x_{pm},\,y_{pm}\right)$ $\left(p=\overline{1,\mathcal{L}},\ m=\overline{1,M_p}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (16). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ikp}\delta_{k,s}\left[\varphi'_{kln}\left(t_{kpm}\right)a_{kln}-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\varphi'^{+}_{k+q-1ln}\left(t_{kpm}\right)\overline{a_{k+q-1ln}}\right]=$$
$$=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ikp}\delta_{k,s}\Gamma_k\ \left(i=\overline{1,4};\ p=\overline{1,\mathcal{L}};\ m=\overline{1,M_p}\right).\qquad(17)$$

Кроме уравнений (17), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}ia_{kp1}=0\ \left(p=\overline{1,\mathcal{L}}\right),\qquad(18)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_p.

Систему (17), дополненную уравнениями (18), будем решать с использованием сингулярных разложений [23; 24]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln}, а следовательно, и функции $W_k'(z_k)$, будут известными. После определения этих функций из граничных условий на контурах пластинки комплексные потенциалы будут известными, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) имеют место формулы

$$\left(M_x,\,M_y,H_{xy}\right)=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,\,q_k,\,r_k\right)W_k''(z_k);$$

$$\left(M_{dx},\,M_{dy},\,M_{bx},\,M_{by}\right)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(d_{xk},d_{yk},b_{xk},b_{yk}\right)W_k''(z_k).$$

Зная основные характеристики, можно найти также моменты на произвольных площадках с нормалью *n* и касательной *s*, используя формулы

$$M_n=M_x\cos^2 nx+M_y\cos^2 ny+2H_{xy}\cos nx\cos ny,$$

$$M_s=M_x\cos^2 ny+M_y\cos^2 nx-2H_{xy}\cos nx\cos ny,$$

$$H_{ns}=\left(M_y-M_x\right)\cos nx\cos ny+H_{xy}\left(\cos^2 nx-\cos^2 ny\right).$$

$$M_{dn}=M_{dx}\cos nx+M_{dy}\cos ny,$$

$$M_{bn}=M_{bx}\cos nx+M_{by}\cos ny.$$

При этом если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе известных формул

$$k_{1M}^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[p_k\sin^2\varphi_l+q_k\cos^2\varphi_l-2r_k\sin\varphi_l\cos\varphi_l\right]M_k,$$

$$k_{2M}^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[\left(q_k-p_k\right)\cos\varphi_l\sin\varphi_l+r_k\left(\cos^2\varphi_l-\sin^2\varphi_l\right)\right]M_k,$$

в которых

$$M_k=\mp\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}}\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n n\,a_{kln}.$$

Как частные случаи, из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из

приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно p_{ij}, ν_{ij} (в задаче ЭУ), g_{ij}, ν_{ij} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij},\ p'_{ij} = \lambda_p p_{ij},\ \nu'_{ij} = \lambda_{gp}\nu_{ij},$$

где λ_g, λ_p, λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала, g_{ij}, p_{ij}, ν_{ij} – соответствующие постоянные в уравнениях электромагнитоупругого состояния материала плиты. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$ для задач ТУ.

Описание результатов численных исследований

Были проведены исследования для плит из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$ (материал М1) [25; 26]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (материал М2) [27]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT\text{-}4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (материал М3) [27].

При проведении исследований количество членов в бесконечных рядах (16) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (17), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 150 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 500 «коллокационных точек».

В табл. 1 для задач ЭМУ и ТУ изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из различных материалов с круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/a_1, где c – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом характерными были точки $A(0,-a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$ $D(0, a_1 + c/2)$, $O(0, a_1 + c)$, $L(a_1, a_1 + c)$. Здесь и далее для полуплоскости из М1, близкого по упругим свойствам к изотропному материалу, значения величин в задачах ЭМУ и ТУ в указанных точках совпадают, отличаясь друг от друга лишь в точке *B* менее чем на 2 %, данные приведены лишь для задачи ЭМУ. На рис. 3 для полуплоскости из наиболее пьезоактивного материала М2 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения M_s/m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ. На рис. 4 представлены графики распределения M_x/m_x вдоль границы полуплоскости из материалов М2 и М3.

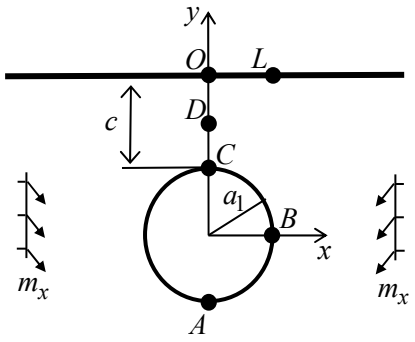


Рис. 2. Схема полуплоскости с круговым отверстием

Fig. 2. Scheme of a half-plane with a circular hole

Как следует из табл. 1, рис. 3 и рис. 4, с приближением отверстия к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных точках. Концентрация моментов наблюдается и вблизи точки перемычки на прямолинейной границе, причем при удалении от этой точки значения моментов резко уменьшаются, а затем растут до значения, соответствующего случаю полуплоскости без отверстия $(M_x/m_x = 1)$. Эта закономерность отличает изгиб полуплоскости от растяжения (плоская задача) [18; 19], когда при уменьшении длины перемычки значения напряжений в точке перемычки на прямолинейной границе уменьшаются, затем при удалении от этой точки наблюдается их увеличение, и лишь затем их снижение до значений в сплошной полуплоскости. На значения изгибающих моментов интенсивно влияет учет пьезосвойств материала (ср. значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ), особенно в зоне перемычки между отверстием и прямолинейной границей. В точках высокой концентрации напряжений значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ отличаются друг от друга около 15 %. Поэтому при исследованиях концентрации напряжений (следовательно, и моментов) в элементах конструкций из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

Таблица 1

Значения изгибающих моментов в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Table 1

The values of bending moments at some points of the half-plane with a circular hole, depending on c/a_1

Материал	Точка	Момент	Задача	c/a_1					
				∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	*A*	M_x	ЭМУ	1,813	1,854	1,894	1,946	2,061	2,152
	B	M_y	ЭМУ	0,231	0,228	0,224	0,216	0,193	0,175
			ТУ	0,227	0,224	0,219	0,211	0,189	0,172
	C	M_x	ЭМУ	1,813	1,898	2,059	2,408	4,388	12,83
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,335	1,662	2,150	4,287	12,80
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,230	1,536	2,044	4,240	12,79
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,154	1,218	1,180	0,777	0,326
М2	*A*	M_x	ЭМУ	1,811	1,847	1,886	1,938	2,054	2,144
			ТУ	1,713	1,753	1,791	1,838	1,939	2,016
	B	M_y	ЭМУ	0,609	0,600	0,589	0,567	0,506	0,458
			ТУ	0,220	0,217	0,212	0,205	0,184	0,169
	C	M_x	ЭМУ	1,811	1,876	2,023	2,378	4,356	12,66
			ТУ	1,713	1,800	1,964	2,310	4,180	12,01
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,328	1,657	2,151	4,266	12,63
			ТУ	1,000	1,341	1,654	2,113	4,105	11,99
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,322	1,625	2,105	4,244	12,62
			ТУ	1,000	1,246	1,553	2,036	4,073	11,98
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,133	1,160	1,097	0,682	0,249
			ТУ	1,000	1,147	1,184	1,122	0,714	0,299
М3	*A*	M_x	ЭМУ	1,464	1,503	1,533	1,566	1,628	1,672
			ТУ	1,421	1,458	1,487	1,518	1,575	1,614
	B	M_y	ЭМУ	0,125	0,122	0,121	0,121	0,120	0,119
			ТУ	-0,070	-0,069	-0,068	-0,067	-0,064	-0,062
	C	M_x	ЭМУ	1,464	1,576	1,749	2,062	3,587	9,809
			ТУ	1,421	1,526	1,699	2,012	3,490	9,473
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,331	1,585	1,961	3,552	9,800
			ТУ	1,000	1,343	1,592	1,948	3,468	9,467
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,344	1,612	1,977	3,555	9,800
			ТУ	1,000	1,290	1,556	1,925	3,459	9,465
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,088	1,035	0,907	0,498	0,173
			ТУ	1,000	1,094	1,053	0,932	0,541	0,234

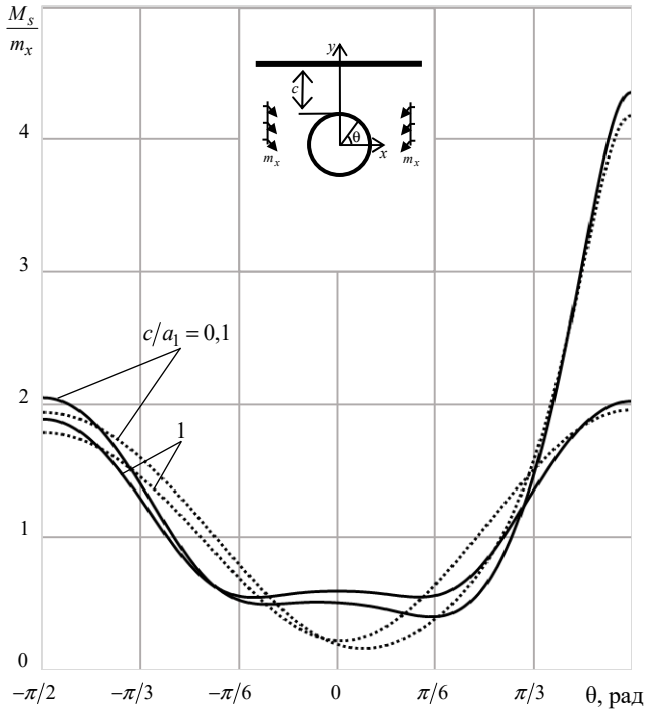


Рис. 3. Графики распределения моментов M_s / m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости из М2. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ

Fig. 3. Graphs of the distribution of moments M_s / m_x near the contour of a circular hole in a half-plane of material M2. Solid lines refer to the elctro-magneto-elasticity problem, dotted lines refer to the theory of elasticity problem

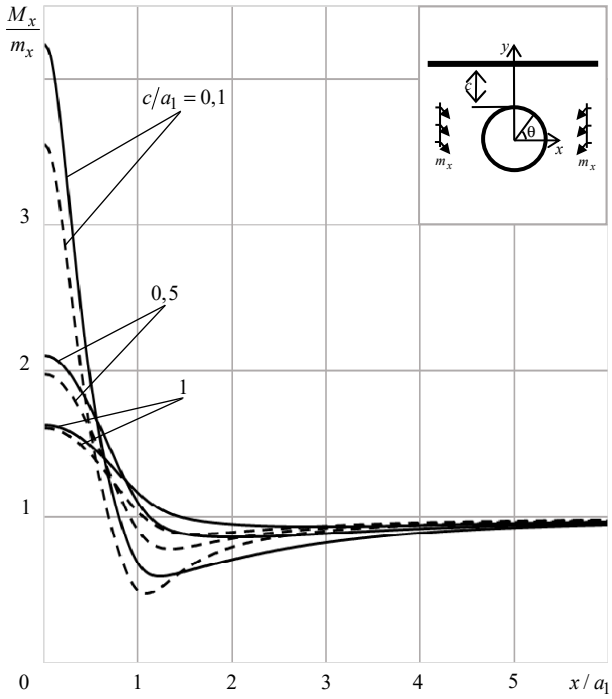


Рис. 4. Графики распределения M_x / m_x по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений c / a_1. Сплошные линии относятся к полуплоскости из материала М2, штриховые – к полуплоскости из материала М3

Fig. 4. Graphs of the distribution of M_x / m_x along a straight-line boundary segment in a half-plane with a circular hole for some values of c / a_1. Solid lines refer to a half-plane made of M2 material, the dashed lines refer to a half-plane made of M3 material

В табл. 2 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости с вертикальной трещиной полудлины l_1 (рис. 5) с точностью до множителя m_x приведены значения КИМ k_1 (КИМ $k_2 = 0$) для концов $E(0, -l_1)$, $F(0, l_1)$ трещины и изгибающих моментов M_x в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c / l_1, где c – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При этом характерными точками были $D(0, l_1 + c/2)$, $O(0, l_1 + c)$, $L(l_1, l_1 + c)$. Как следует из данных этой таблицы, при приближении трещины к границе полуплоскости значения изгибающих моментов в точках перемычки резко растут; вдоль прямолинейной границы уже при небольшом удалении от перемычки влияние трещины на значения моментов мало, и при $x / l_1 \geq 1$ этого влияния почти нет; значение КИМ для ближайшей к границе полуплоскости вершины *F* резко растет, тогда как для дальней вершины *E* оно изменяется незначительно. Как и в предыдущем случае, на значения моментов существенно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в точке перемычки вблизи прямолинейной границы, где для близких расстояний между трещиной и границей полуплоскости значения изгибающих моментов в задаче ЭМУ на 20 % больше, чем в соответствующей задаче ТУ; в отличие от изгибающих моментов, на значения КИМ учет пьезосвойств влияет незначительно.

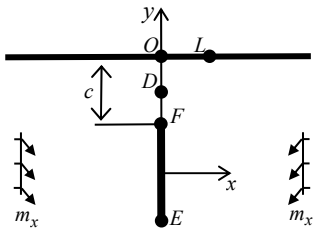


Рис. 5. Схема полуплоскости с трещиной

Fig. 5. Scheme of a half-plane with a crack

Таблица 2

Значения КИМ k_1 и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости с вертикальной трещиной в зависимости от c / l_1

Table 2

The values of stress intensity factor k_1 and moments M_x / m_x at some points of the half-plane with a vertical crack, depending on c / l_1

Материал	Точка	Величина	Задача	c / l_1					
				∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	*E*	k_1^-	ЭМУ	1,000	1,013	1,029	1,054	1,126	1,211
	F	k_1^+	ЭМУ	1,000	1,018	1,050	1,117	1,502	3,027
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,191	1,451	1,964	5,476	34,60
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,117	1,306	1,708	4,607	28,97
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,071	1,076	1,006	0,837	0,726
М2	*E*	k_1^-	ЭМУ	1,000	1,010	1,023	1,043	1,106	1,185
			ТУ	1,000	1,013	1,029	1,053	1,124	1,209
	F	k_1^+	ЭМУ	1,000	1,014	1,040	1,095	1,444	2,906
			ТУ	1,000	1,018	1,049	1,115	1,498	3,020
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,187	1,443	1,953	5,497	35,11
			ТУ	1,000	1,191	1,451	1,964	5,479	34,64
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,154	1,400	1,916	5,550	35,66
			ТУ	1,000	1,119	1,311	1,719	4,657	29,33
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,045	1,053	1,009	0,869	0,775
			ТУ	1,000	1,060	1,046	0,975	0,834	0,744
М3	*E*	k_1^-	ЭМУ	1,000	1,010	1,024	1,044	1,108	1,188
			ТУ	1,000	1,012	1,028	1,052	1,122	1,206
	F	k_1^+	ЭМУ	1,000	1,015	1,041	1,098	1,451	2,921
			ТУ	1,000	1,017	1,048	1,112	1,492	3,006
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,188	1,444	1,955	5,497	35,07
			ТУ	1,000	1,190	1,450	1,963	5,484	34,72
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,149	1,387	1,889	5,428	34,81
			ТУ	1,000	1,123	1,320	1,740	4,749	29,99
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,004	0,972	0,940	0,889	0,853
			ТУ	1,000	1,013	0,974	0,934	0,881	0,845

Таблица 3

Значения КИМ k_1 и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости из М2 с круговым отверстием и центральной трещиной длины $2l_2$ в перемычке в зависимости от $2l_2 / a_1$

Table 3

The values of stress intensity factor k_1 and moments M_x / m_x at some points of the half-plane made of M2 material with a circular hole and a central crack of length $2l_2$ in the jumper, depending on $2l_2 / a_1$

Точка	Величина	Задача	$2l_2 / a_1$				
			0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
E	k_1^-	ЭМУ	0,372	0,668	0,919	1,231	1,963
		ТУ	0,372	0,670	0,927	1,255	2,036
F	k_1^+	ЭМУ	0,369	0,648	0,877	1,160	1,863
		ТУ	0,368	0,648	0,881	1,178	1,916
B	M_y	ЭМУ	0,588	0,587	0,585	0,580	0,569
		ТУ	0,212	0,212	0,211	0,210	0,206
C	M_x	ЭМУ	2,047	2,251	2,784	4,172	10,93
		ТУ	1,982	2,142	2,562	3,666	9,129
D	M_x	ЭМУ	1,837	2,115	2,703	4,100	10,69
		ТУ	1,825	2,101	2,688	4,082	10,63
I	M_x	ЭМУ	1,644	1,879	2,415	3,721	10,05
		ТУ	1,613	1,847	2,382	3,684	9,893
O	M_x	ЭМУ	1,648	1,845	2,358	3,683	10,15
		ТУ	1,571	1,726	2,132	3,188	8,401

В табл. 3 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 с центром на расстоянии диаметра от границы ($h^+ = 2a_1$) и вертикальной центральной трещиной переменной длины $2l_2$ (с центром в точке $(0, a_1 + a_1/2)$) (рис. 6) с точностью до множителя m_x приведены значения КИМ для вершин трещины (в точках $E\,(0, a_1 + c)$, $F\,(0, a_1 + c + 2l_2)$) и изгибающих моментов M_x / m_x в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения $2l_2 / a_1$. При этом длины перемычек между трещиной и другими границами $c = (a_1 - 2l_2)/2$, а характерными точками были $B\,(a_1, 0)$, $C\,(0, a_1)$ $D\,(0, a_1 + c/2)$, $I\,(0, 2a_1 - c/2)$, $O\,(0, 2a_1)$. Как следует из данных табл. 3, в случае трещины в перемычке полуплоскости с круговым отверстием с увеличением длины трещины значения изгибающих моментов около контура отверстия, в точках перемычки и прямолинейной границы вблизи перемычки резко возрастают. Как и в предыдущем случае, сильное влияние на значения изгибающих моментов оказывает учет пьезосвойств материала плиты, особенно в точке перемычки на прямолинейной границе. С увеличением длины трещины также растут значения КИМ для обоих её концов.

В табл. 4 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и вертикальной краевой трещиной из контура отверстия длины $l_2 = a_1$ (рис. 7) с точностью до множителя m_x в зависимости от c / a_1, где c – длина перемычки между вершиной трещины и границей полуплоскости, приведены значения КИМ для вершины $F(0,\ 2a_1)$ трещины и изгибающих моментов M_x / m_x в некоторых характерных точках полуплоскости. При этом характерными точками были $A\,(0, -a_1)$, $B\,(a_1, 0)$, $D\,(0,\ 2a_1 + c/2)$, $O\,(0,\ 2a_1 + c)$.

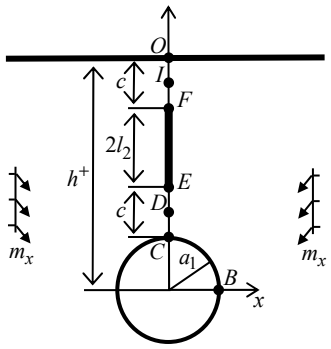


Рис. 6. Схема полуплоскости с круговым отверстием и внутренней трещиной в перемычке

Fig. 6. Scheme of a half-plane with a circular hole and an internal crack in the jumper

На рис. 8 для некоторых значений c / a_1 изображены графики распределения моментов M_s / m_x по контуру отверстия для полуплоскости из материала М2. Как следует из данных табл. 4 и рис. 8, приближение кругового отверстия с краевой трещиной к границе полуплоскости ведет к весьма существенному росту концентрации изгибающих моментов в точках перемычки, около контура отверстия и около прямолинейной границы вблизи перемычки.

Таблица 4

Значения КИМ k_1 для конца трещины и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости из М2 с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от c / a_1

Table 4

The values of the stress intensity factor k_1 for the end of the crack and the moments M_x / m_x at some points of the half-plane made of M2 material with a circular hole and an edge crack, depending on c / a_1

Точка	Величина	Задача	c / a_1				
			0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
F	k_1^+	ЭМУ	1,422	1,474	1,562	1,742	2,354
		ТУ	1,469	1,523	1,614	1,798	2,429
A	M_x	ЭМУ	1,969	1,984	2,005	2,036	2,097
		ТУ	1,864	1,877	1,896	1,924	1,979
B	M_y	ЭМУ	0,611	0,605	0,596	0,583	0,562
		ТУ	0,220	0,218	0,215	0,211	0,204
D	M_x	ЭМУ	1,993	2,283	2,789	3,915	9,004
		ТУ	1,975	2,259	2,754	3,859	8,844
O	M_x	ЭМУ	2,007	2,299	2,809	3,948	9,122
		ТУ	1,736	1,969	2,379	3,301	7,502

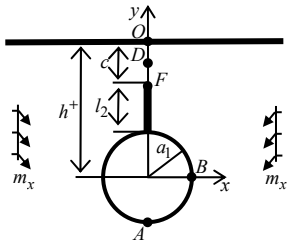


Рис. 7. Схема полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке

Fig. 7. Scheme of a half-plane with a circular hole and an edge crack from it in the jumper

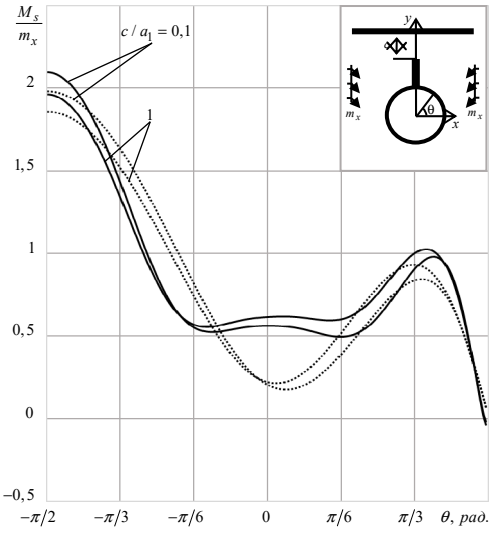


Рис. 8. Графики распределения моментов M_s / m_x около контура кругового отверстия с краевой трещиной в полуплоскости из материала М2 для некоторых значений отношения c / a_1. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ

Fig. 8. Graphs of the distribution of moments M_s / m_x near the contour of a circular hole with an edge crack in a half-plane made of M2 material for some values of the ratio c / a_1. Solid lines refer to the electro-magneto-elasticity problem, dashed lines to the theory of elasticity problem

Заключение

Таким образом, дано решение задачи об изгибе тонкой многосвязной полуплоскости из пьезоматериала с отверстиями и трещинами. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы электромагнитоупругости теории изгиба тонких плит [16], их разложение в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши [18], на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов [20–22]. При таком подходе граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно, на контурах отверстий приближенно, с высокой степенью точности. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, для полуплоскости с круговым отверстием и внутренней трещиной в перемычке, для полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной из него. Изучены закономерности изменения ЭМУС плиты в зависимости от материала плиты и геометрических характеристик отверстий и трещин.

Библиографический список

1. Кэди, У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди – М.: Иностр. лит., 1949. – 717 с.

2. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.

3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин [и др.]. – М.: Академия Естествознания, 2006. – 296 с.

4. Пятаков, А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.

5. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.-W. Nan [et al.] // J. Appl. Phys. – 2008. – Vol. 103, no. 3. – P. 031101. DOI: 10.1063/1.2836410

6. Tian, R. Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2020. – Vol. 33. – P. 368–380. DOI: 10.1007/s10338-019-00126-2

7. Srinivas, S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.014

8. Eringen, A.C. Electrodynamics of Continua I. / A.C. Eringen, G.A. Maugin. New York: Springer,1990. – 436 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1

9. Librescu, L. Ambur DR Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications / L. Librescu, D. Hasanyan // International journal of non-linear mechanics. – 2004. – Vol. 39, No. 5. – P. 723–739. DOI: 10.1016/S0020-7462(03)00023-4

10. A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect / W. Shen [et al.] // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2022. – Vol. 35, no. 2. – P. 185–197. DOI: 10.1007/s10338-021-00271-7

11. Yang, Y. Bending and free vibration of a circular magnetoelectroelastic plate with surface effects / Y. Yang, X.-F. Li // Int. J. Mech. Sci. – 2019. – Vol. 157–158. – P. 858–871. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.05.029.

12. Zheng, Y-F. Nonlinear bending analysis of magnetoelectroelastic rectangular plates using higher order shear deformation theory / Y-F. Zheng, L.-L. Xu, C.-P. Chen // J. Mech. Sci. Technol. – 2021. – Vol. 35, no. 3. – P. 1099–1108. DOI: 10.1007/s12206-021-0223-y

13. Ieşan, D. On the bending of piezoelectric plates with microstructure / D. Ieşan // Acta Mech. – 2008. – Vol. 198, no. 3. – P. 191–208. DOI: 10.1007/s00707-007-0527-8

14. Xu, S.-P. Bending of piezoelectric plates with a circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – Vol. 203. – P. 127–135. DOI: 10.1007/s00707-008-0025-7

15. Galeş, C. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity / C. Galeş, N. Baroiu // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. 94, no. 1–2. – P. 55–71. DOI: 10.1002/zamm.201200219

16. Калоеров, С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.

17. Калоеров, С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния конечной многосвязной тонкой плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 4. – С. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.04

18. Калоеров, С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.

19. Калоеров, С.А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37. DOI: 10.31857/S0572329922600438

20. Калоеров, С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.

21. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

22. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

23. Drmač, Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, no. 4. – P. 1322–1342. DOI: 10.1137/050639193

24. Drmač, Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, no. 4. – P. 1343–1362. DOI: 10.1137/05063920X

25. Tian, W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002

26. Yamamoto, Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.

27. Hou, P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338. DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001

References

1. Cady W.G. Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechancial Phenomena in Crystals. New York, *McGraw-Hill Book Company*, 1946, 806 p.

2. Berlincourt D., Curran D.R., and Jaffe H., Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. Ed. by W.P. Mason, New York, Academic Press, *Physical Acoustics*, 1964, pp. 169-270.

3. Bichurin M.I., Petrov V.M., Filippov D.A., et al., Magnetoelectric Composites. Moscow, *Akad. Estestv*., 2006.

4. Pyatakov A.P. Magnetoelectric Materials and Their Application in Practice. *Bul. Ros. Magnit. Obshchestva*, 2006, Vol. 5, No. 2, pp.1-3.

5. Nan C.-W., Bichurin M.I., Dong Sh., Viehland D., Srinivasan G. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions. *J. Appl. Phys.,* 2008, Vol. 103, No. 3, pp. 031101. doi: 10.1063/1.2836410

6. Tian R., Liu J., Liu X. Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2020, Vol. 33, pp. 368-380. doi: 10.1007/s10338-019-00126-2

7. Srinivas S., Jiang Y.L. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites. *Acta Mater*, 2005, Vol. 53, pp. 4135-4142. doi: 10.1016/j.actamat.2005.05.014

8. Eringen A.C., Maugin G.A. Electrodynamics of Continua I. New York, *Springer*, 1990, 436 p. doi: 10.1007/978-1-4612-3226-1

9. Librescu L.; Hasanyan D.; Ambur DR Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications. *International journal of non-linear mechanics*, 2004, Vol. 39, No. 5, pp. 723-739. doi: 10.1016/S0020-7462(03)00023-4

10. Shen W., Zhang G., Gu Sh., Cong Y. A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2022, Vol. 35, No. 2, pp. 185-197. doi: 10.1007/s10338-021-00271-7

11. Yang Y., Li X.-F. Bending and free vibration of a circular magnetoelectroelastic plate with surface effects. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, Vol. 157-158, pp. 858–871, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.05.029.

12. Zheng Y-F., Xu L.-L., Chen C.-P. Nonlinear bending analysis of magnetoelectroelastic rectangular plates using higher order shear deformation theory. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2021, Vol. 35, No. 3, pp. 1099-1108. doi: 10.1007/s12206-021-0223-y

13. Ieşan D. On the bending of piezoelectric plates with microstructure. *Acta Mech.*, 2008, Vol. 198, No. 3, pp. 191-208. doi: 10.1007/s00707-007-0527-8

14. Xu S.-P., Wang W. Bending of piezoelectric plates with a circular hole. *Acta Mech*., 2009, Vol. 203., pp. 127-135. doi: 10.1007/s00707-008-0025-7

15. Galeş C., Baroiu N. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity. *ZAMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 2014, Vol. 94, No. 1-2, pp. 55-71. doi: 10.1002/zamm.201200219

16. Kaloerov S.A. Osnovnye sootnosheniia prikladnoi teorii izgiba tonkikh elektromagnitouprugikh plit [The main relations of the applied theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2022, No. 1, pp. 20–38.

17. Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V. Investigation of the electro-magneto-elastic state of a finite multiply connected thin plate. PNRPU Machanics Bulletin, 2023, No. 4, pp. 34-44. doi: 10.15593/perm.mech/2023.4.04

18. Kaloerov S.A. Stress state of an anisotropic half-plane with a finite number of elliptic holes. *Soviet Applied Mechanics*, 1966, Vol. 2, pp. 45-49. doi: 10.1007/BF00885613

19. Kaloerov S.A., Glushankov E.S., Mironenko A.B. Solution of problems of elasticity theory for multiply connected half-planes and strips. *Mechanics of Solids*, 2023, Vol. 58, pp. 1063-1075. doi: 10.3103/S0025654422601100

20. Kaloerov S.A., Parshikova O.A., Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates. *International Applied Mechanics*, 2012, Vol. 48, No. 3, pp. 319-331. doi: 10.1007/s10778-012-0523-0

21. Voevodin V.V. Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebry [Computational Basis of Linear Algebra]. Moskov, Nauka, 304 p.

22. Forsythe J. E., Malcolm M. A., and Moler C. B., Computer Methods for Mathematical Computations. *Prentice-Hall*, 1977.

23. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008, vol. 29, no. 4, pp. 1322-1342. doi: 10.1137/050639193

24. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008, vol. 29, no. 4, pp. 1343-1362. doi: 10.1137/05063920X

25. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids. *Europ. J. Mech. Part A*, 2004, Vol. 23, pp. 599-614. doi: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002

26. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures, Amsterdam. *Elsevier Science-North Holland*, 1987, 450 p.

27. Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material. *Mech. Mater*, 2009, Vol. 41., pp. 329-338. doi: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was completed on the topic of a state assignment (state registration number 124012400354-0).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.