Бондарь, В.С. Модифицированная теория неупругости / В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, В.И. Шарова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.08 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 1. – С. 104–116.

Perm Polytech Style: Bondar V.S., Abashev D.R., Sharova V.I. Modified Theory of Inelasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 1, pp. 104-116. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.08

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.08
УДК 539.374

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ НЕУПРУГОСТИ

В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, В.И. Шарова

Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 14 августа 2024 г.
Одобрена: 02 апреля 2025 г.
Принята к публикации:
07 апреля 2025 г.

Ключевые слова:

неупругость, комбинированное упрочнение, посадка и вышагивание, повреждение, охрупчивание и залечивание, материальные функции, базовый эксперимент, идентификация, верификация.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются основные положения и уравнения модифицированной теории неупругости, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Модифицированная теория неупругости является простейшим вариантом теории неупругости, который интегрирован в конечно-элементный комплекс для практических расчетов выработанного и остаточного ресурса материала конструкций в условиях повторности и длительности воздействия термомеханических нагрузок. Тензор деформации представляется в виде суммы тензоров упругой и неупругой деформаций, т.е. здесь нет условного разделения необратимой (неупругой) деформации на деформации пластичности и ползучести. Упругая деформация следует закону Гука, обобщенному на неизотермическое нагружение. В пространстве составляющих тензора напряжений вводится поверхность нагружения, которая изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Для радиуса поверхности нагружения (изотропное упрочнение) формулируется эволюционное уравнение, обобщенное на неизотермическое нагружение и процессы возврата механических свойств при отжиге. Смещение поверхности нагружения (анизотропное упрочнение) описывается на основе эволюционного уравнения с трехчленной структурой, обобщенного на неизотермическое нагружение и процессы снятия микронапряжений (смещения) при отжиге. Для разделения процессов монотонного и циклического деформирования в пространстве тензора неупругой деформации вводится поверхность памяти, ограничивающая область циклического деформирования. Для описания процессов посадки и вышагивания (ratcheting) петли неупругого деформирования при несимметричных циклических нагружениях вводится модификация теории неупругости. Модификация теории неупругости сводится к тому, что при формулировке эволюционного уравнения для микронапряжений определяющий (материальный) параметр уравнения для микронапряжений первого типа принимается зависящим от накопленной неупругой деформации на основе разных соотношений как при циклическом деформировании, так и монотонном. Для определения тензора скоростей неупругой деформации используется ассоциированный (градиентальный) закон течения. Сформулированы условия упругого и неупругого состояний. Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на работе микронапряжений второго типа на поле неупругих деформаций. Кинетическое уравнение обобщено на неизотермическое нагружение и процессы охрупчивания и залечивания. Выделяются материальные параметры и функции, замыкающие теорию, формулируется базовый эксперимент и метод их определения. Приводятся материальные параметры и функции бронзового сплава БрХ08-Ш при температурах 20, 400, 500, 600 °С. Проводится верификация теории при циклическом изотермическом деформировании и разрушении (малоцикловая прочность) в условиях высоких температур. Рассматривается также ползучесть и длительная прочность при изотермических и неизотермических нагружениях. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментов.

© **Бондарь Валентин Степанович** – д. ф.-м. н., проф., проф. кафедры технической механики и компьютерного моделирования, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Абашев Дмитрий Рустамович – к. ф.-м. н., доц., доц. кафедры технической механики и компьютерного моделирования, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Шарова Валентина Игоревна – асп. кафедры технической механики и компьютерного моделирования, e-mail: tm@mospolytech.ru.

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Technical Mechanics and Computer Modeling, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Dmitry R. Abashev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Technical Mechanics and Computer Modeling, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Valentina I. Sharova – Postgraduate student, Department of Technical Mechanics and Computer Modeling, e-mail: tm@mospolytech.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MODIFIED THEORY OF INELASTICITY

V.S. Bondar, D.R. Abashev, V.I. Sharova

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 14 August 2024
Approved: 02 April 2025
Accepted for publication:
07 April 2025

Keywords:

inelasticity, combined hardening, cyclic loop placing and ratcheting, damage, embrittlement and healing, material functions, basic experiment, identification, verification.

ABSTRACT

The main provisions and equations of the modified theory of inelasticity, which belongs to the class of theories of flow during combined hardening, are considered. The modified theory of inelasticity is the simplest version of the theory of inelasticity, which is integrated into a finite element complex for calculations of the exhausted and residual life of structural materials under conditions of repetition and duration of the thermomechanical loads. The strain tensor is represented as the sum of elastic and inelastic strain tensors, i.e. there is no conventional division of irreversible (inelastic) deformation into plasticity and creep deformation. Elastic deformation follows Hooke's law which is generalized to non-isothermal loading. In the space of stress tensor components, a loading surface is introduced, which expands or contracts isotropically and shifts during loading. For the radius of the loading surface (isotropic hardening), an evolutionary equation is formulated, generalized to non-isothermal loading and recovery of mechanical properties during annealing. The displacement of the loading surface (anisotropic hardening) is described on the basis of an evolutionary equation with a three-term structure, generalized to non-isothermal loading and microstress relief (displacement) during annealing. To separate the monotonic and cyclic deformation in the space of the inelastic deformation tensor, a memory surface is introduced that limits the region of cyclic deformation. To describe placing and ratcheting of an inelastic deformation loop under asymmetrical cyclic loading, a modification of the theory of inelasticity is introduced. The modification of the theory of inelasticity comes down to the fact that when formulating the evolutionary equation for microstresses, the constitutive (material) parameter of the equation for microstresses of the first type is taken to depend on the accumulated inelastic deformation based on different relations for both cyclic and monotonic deformation. To determine the inelastic deformation rate tensor, the associated (gradient) flow law is used. Conditions for elastic and inelastic states are formulated. To describe nonlinear processes of damage accumulation, a kinetic equation of damage accumulation is introduced, based on the work of microstresses of the second type on the field of inelastic deformations. The kinetic equation is generalized to non-isothermal loading and embrittlement and healing processes. The material parameters and functions that close the theory are identified; the basic experiment and the method for their determination are formulated. The material parameters and functions of the bronze alloy BrKh08-Sh at temperatures of 20, 400, 500, 600 °C are given. The theory is verified under cyclic isothermal deformation and fracture (low-cycle strength) under high temperature conditions. Creep and long-term strength under isothermal and non-isothermal loads are also considered. The calculation results are compared with the experimental results.

Введение

Вопросам построения математических моделей при термовязкопластическом деформировании конструкционных сталей и сплавов посвящено большое количество работ. Основные направления построения теорий и обширную библиографию по этому вопросу можно найти в работах А.А. Ильюшина [1; 2], В.В. Новожилова [3], Ю.Н. Работнова [4], И.А. Биргера [5], В.С. Бондаря [6–9], Ю.И. Кадашевича [3], Л.М. Качанова [10], Ю.Г. Коротких [11; 13], И.А. Волкова [11–14], Л.А. Игумнова [12–14], Н.Н. Малинина [15], Кремпла [16; 17], Криега [18–20], Миллера [21–23], Оно [24–27], Шабоша [28–32] и др.

Наибольшее распространение в практических расчетах нашли варианты теории течения при комбинированном упрочнении, применяемые в конечно-элементных программных комплексах на основе моделей Шабоша [28–32], Коротких [11; 13] и Бондаря [6–9]. Эти модели являются наиболее экспериментально обоснованными и широко применяемыми в расчетах ресурса материалов конструкций при термовязкопластическом деформировании в условиях повторности и длительности воздействия термомеханических нагрузок. Следует отметить, что в вариантах моделей Шабоша и Коротких деформация разделяется на упругую, пластическую и ползучести, а в варианте модели Бондаря – на упругую и неупругую. Поэтому первые варианты относятся к теории термовязкопластичности, а последний – к теории неупругости. Следует отметить, что разделение необратимой деформации на деформации пластичности и ползучести весьма условно. При быстрых процессах деформации ползучести малы, и деформирование считается пластическим, при медленных процессах необратимая деформация едина, и разделение ее на пластическую и ползучесть весьма условно. Поэтому целесообразно говорить о разделении деформации на упругую (обратимую) и неупругую (необратимую).

В последнее время большое внимание уделяется несимметричным мягким циклическим процессам нагружения, так как при таких процессах нагружения происходит смещение петли циклического гистерезиса, т.е. одностороннее накопление деформации. Данное

явление получило название ratcheting, или вышагивание, и оно приводит [33; 34] к существенному снижению ресурса материала по сравнению с жестким нагружением с таким же размахом циклических деформаций. При несимметричном жестком циклическом нагружении происходит посадка петли циклического гистерезиса, но это явление практически не сказывается на ресурсе материала, поскольку размах деформации не изменяется и смещения петли нет.

Попытки описания явления вышагивания (ratcheting) имеют место в моделях Шабоша [31; 32; 35–40], Коротких [11; 41; 42] и Бондаря [7; 9; 43–46]. В вариантах модели Шабоша вводятся [31; 32; 35–40] дополнительные уравнения для микронапряжений и увеличивается число подгоночных параметров. В вариантах модели Коротких вводятся [11; 41; 42] разные поверхности памяти и дополнительные микронапряжения. В вариантах модели Бондаря также вводится [45–46] поверхность памяти и эволюционные уравнения для материальных параметров. Сравнительный анализ этих подходов для пластического деформирования проводится в работах [47; 48]. В рамках модели Бондаря в работах [7; 44; 47; 48] рассматривается простейший подход к описанию явления вышагивания (ratcheting) и посадки петли при упругопластическом циклическом деформировании. Модификация модели неупругости сводится к тому, что определяющая (материальная) функция уравнения для микронапряжения первого типа не является константой, а зависит от накопленной пластической деформации. В настоящей работе приведен вариант модели неупругости, основанный на теории Бондаря, разделяющий процессы монотонного и циклического деформирования. Предложенный вариант позволяет описывать процессы неупругого деформирования, возникающие при переходе от монотонного нагружения к циклическому и наоборот.

В данном исследовании рассматриваются основные положения и уравнения модифицированной теории неупругости. Приводятся соотношения, связывающие определяющие функции с материальными. Дается перечень материальных параметров и функций, подлежащих экспериментальному определению. Формулируется базовый эксперимент и метод определения материальных параметров и функций. Приводятся материальные параметры и функции бронзового сплава БрХ08-Ш при температурах 20, 400, 500, 600 °С. Проводится верификация теории при циклическом изотермическом деформировании вплоть до разрушения (малоцикловая прочность) в условиях высоких температур. Рассматривается также ползучесть и длительная прочность при изотермических и неизотермических нагружениях. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментов.

Основные положения и уравнения

Рассматриваются малые деформации и повороты однородных и начально изотропных поликристаллических конструкционных сталей и сплавов при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими эффектами можно пренебречь. Тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$ и неупругой $\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}$ деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{in}_{ij}. \tag{1}$$

Упругие деформации описываются обобщенным на неизотермическое нагружение законом Гука:

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu\left(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\right)\right] + \alpha^{\varepsilon T}_{ij}\dot{T}, \tag{2}$$

$$\alpha^{\varepsilon T}_{ij} = \alpha_T\delta_{ij} - \frac{1}{E^2}\left[\sigma_{ij} - \nu\left(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{dE}{dT} - \frac{1}{E}\left(3\sigma_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}\right)\frac{d\nu}{dT},$$

где $E(T), \nu(T), \alpha_T(T)$ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; T – температура; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение.

Для разделения упругого и неупругого деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность нагружения, которая изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{3}{2}s_{ij}^{*}s_{ij}^{*} - C^2 = 0. \tag{3}$$

$$s_{ij}^{*} = s_{ij} - a_{ij}.$$

Здесь s_{ij}, s_{ij}^{*}, a_{ij} – девиаторы напряжений, активных напряжений [3], микронапряжений [3]. Скаляр C отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение (разупрочнение), а девиатор микронапряжений a_{ij} характеризует смещение поверхности нагружения, т.е. направленное (анизотропное) упрочнение. Тензор смещения a_{ij} и радиус C являются функционалами процесса нагружения.

Для радиуса поверхности нагружения принимается следующее эволюционное уравнение:

$$\dot{C} = q_{\varepsilon}\dot{\varepsilon}^{in}_{u*} + q_T\dot{T} - q_R, \tag{4}$$

$$\dot{\varepsilon}^{in}_{u*} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь ε^{in}_{u*} – длина дуги траектории неупругой деформации (накопленная неупругая деформация); $\dot{\varepsilon}^{in}_{u*}$ – скорость накопленной неупругой деформации; $q_{\varepsilon}, q_T, q_R$ – определяющие функции, которые далее бу-

дут выражены через материальные функции, подлежащие экспериментальному определению. Функция q_ε отвечает механическому упрочнению (разупрочнению), q_T обеспечивает неизотермический переход, а q_R – возврат механических свойств при отдыхе, отжиге.

Смещение поверхности нагружения определяется следующим эволюционным уравнением:

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3}\mathrm{g}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} + \left(\frac{2}{3}\mathrm{g}_\varepsilon \varepsilon^{in}_{ij} + \mathrm{g}_a a_{ij}\right)\dot{\varepsilon}^{in}_{u*} + \\ + \left(\frac{2}{3}\mathrm{g}^T_\varepsilon \varepsilon^{in}_{ij} + \mathrm{g}^T_a a_{ij}\right)\dot{T} - \left(\frac{2}{3}\mathrm{g}^R_\varepsilon \varepsilon^{in}_{ij} + \mathrm{g}^R_a a_{ij}\right). \quad (5)$$

Здесь g, g_ε, g_a, g^T_ε, g^T_a, g^R_ε, g^R_a – определяющие функции, которые далее будут выражены через материальные функции, подлежащие экспериментальному определению. Первые три слагаемых в уравнении (5) описывают процессы образования и снятия микронапряжений при неупругом деформировании. Далее будут приведены модифицированные определяющие функции этих слагаемых для описания процессов посадки и вышагивания (ratcheting) при циклических нагружениях. Два следующих слагаемых обеспечивают неизотермический переход, а два последних – снятие микронапряжений при отдыхе, отжиге.

Эволюционное уравнение (5) соответствует представлению [7; 9; 44] микронапряжений в виде суммы микронапряжений 1-го и 2-го типов, для которых имеют место уравнения:

$$a_{ij} = a^{(1)}_{ij} + a^{(2)}_{ij}, \quad (6)$$

$$a^{(1)}_{ij} = \frac{2}{3}\mathrm{g}^{(1)}\varepsilon^{in}_{ij}, \quad (7)$$

$$\dot{a}^{(2)}_{ij} = \frac{2}{3}\mathrm{g}^{(2)}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} + \mathrm{g}^{(2)}_a a^{(2)}_{ij}\dot{\varepsilon}^{in}_{u*} + \mathrm{g}^{T(2)}_a a^{(2)}_{ij}\dot{T} - \mathrm{g}^{R(2)}_a a^{(2)}_{ij}. \quad (8)$$

Смещение центра поверхности нагружения согласно принципу суммирования микронапряжений Новожилова – Шабоша [3; 32] определяется уравнением (6). Микронапряжения 1-го типа согласно модели Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова [3; 49–52] определяются уравнением (7). В уравнении (7) для описания процессов посадки и вышагивания (ratcheting) определяющая функция $\mathrm{g}^{(1)}$ принимается [7; 44] при циклическом и монотонном деформировании зависящей не только от температуры, но и от накопленной неупругой деформации. Эта модификация позволяет существенно расширить возможности теории неупругости. Для определения микронапряжений 2-го типа используется модель Армстронга – Фредерика – Кадашевича [53; 54], обобщенная [6; 7; 9] на неизотермические процессы и процессы, развивающиеся во времени.

При деформировании материалов могут иметь место как монотонные, так и циклические режимы нагружения, каждый из которых имеет свои особенности [9; 45; 46]. Для разделения процессов монотонного и циклического деформирования в пространстве тензора неупругих деформаций ε^{in}_{ij} вводится поверхность памяти, ограничивающая область циклического деформирования. Поверхность определяется положением ее центра ξ_{ij} и ее радиусом (размером) C_ε. Уравнение поверхности памяти принимается в следующем виде:

$$F\left(\varepsilon^{in}_{ij}\right) = \frac{2}{3}\left(\varepsilon^{in}_{ij} - \xi_{ij}\right)\left(\varepsilon^{in}_{ij} - \xi_{ij}\right) - C_\varepsilon = 0. \quad (9)$$

Для вычисления положения центра и размера поверхности памяти вводятся два тензора неупругой деформации, $\varepsilon^{in(1)}_{ij}$ и $\varepsilon^{in(2)}_{ij}$, определяющие границы поверхности. В начале деформирования эти переменные равны нулю. Определение смещения и размера поверхности памяти происходит в момент смены направления неупругого деформирования. В качестве критерия смены направления принимается следующее условие:

$$\dot{\varepsilon}^{in}_{ij(t-0)}\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} < 0, \quad (10)$$

где $\dot{\varepsilon}^{in}_{ij}$ – тензор скоростей неупругой деформации в текущий момент времени t; $\dot{\varepsilon}^{in}_{ij(t-0)}$ – тензор скоростей неупругой деформации в предшествующий $(t-0)$ момент времени t.

В момент времени t координаты центра и размер поверхности памяти вычисляются на основании следующих соотношений:

$$\varepsilon^{in(2)}_{ij} = \varepsilon^{in(1)}_{ij}, \varepsilon^{in(1)}_{ij} = \varepsilon^{in}_{ij}, \xi_{ij} = \frac{\varepsilon^{in(1)}_{ij} + \varepsilon^{in(2)}_{ij}}{2},$$

$$C_\varepsilon = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon^{in(1)}_{ij} - \varepsilon^{in(2)}_{ij}}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon^{in(1)}_{ij} - \varepsilon^{in(2)}_{ij}}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Тогда условием циклического деформирования является деформирование в пределах поверхности памяти $F\left(\varepsilon^{in}_{ij}\right) \le 0$, а условием монотонного деформирования – $F\left(\varepsilon^{in}_{ij}\right) > 0$.

Для определения скоростей неупругой деформации используется ассоциированный с (3) градиентальный закон течения:

$$\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} = \frac{df}{d\sigma_{ij}}\dot{\lambda} = \frac{3}{2}\frac{s^*_{ij}}{\sigma^*_u}\dot{\varepsilon}^{in}_{u*}, \sigma^*_u = \left(\frac{3}{2}s^*_{ij}s^*_{ij}\right)^{1/2}. \quad (12)$$

Здесь σ^*_u – интенсивность активных напряжений.

Используя уравнения (1)–(5) и (12), можно получить уравнения для скорости накопленной неупругой деформации при мягком (заданы напряжения) и жестком (заданы деформации) нагружениях:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^{in} = \frac{1}{E_*}\left(\frac{3}{2}\frac{s_{ij}^*\dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^T\dot{T} + B^R\right), \quad (13)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^{in} = \frac{1}{E_* + 3G}\left[3G\frac{s_{ij}^*\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha_{ij}^{\varepsilon T}\dot{T}\right)}{\sigma_u^*} - B^T\dot{T} + B^R\right], \quad (14)$$

$$E_* = q_\varepsilon + \mathrm{g} + \mathrm{g}_\varepsilon\varepsilon_u^{in^*} + \mathrm{g}_a a_u^*,$$

$$B^T = q_T + \mathrm{g}_\varepsilon^T\varepsilon_u^{in^*} + \mathrm{g}_a^T a_u^*,$$

$$B^R = q_R + \mathrm{g}_\varepsilon^R\varepsilon_u^{in^*} + \mathrm{g}_a^R a_u^*,$$

$$\varepsilon_u^{in^*} = \frac{s_{ij}^*\varepsilon_{ij}^{in}}{\sigma_u^*},\ a_u^* = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^* a_{ij}}{\sigma_u^*},\ G = \frac{E}{2(1+\nu)}, x = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Скорость накопленной неупругой деформации всегда равна нулю (упругое состояние), если изображающая точка процесса нагружения находится внутри поверхности нагружения, т.е.

$$\sigma_u^* < C \ \text{– упругость.} \quad (15)$$

При нахождении изображающей точки процесса нагружения на поверхности нагружения (3) состояние возможно как упругое, так и неупругое, и это состояние определяется знаком вычисляемой скорости накопленной неупругой деформации: скорость отрицательная – состояние упругое, скорость положительная – состояние неупругое.

Для описания процесса накопления повреждений принимается [6–9; 43; 44] кинетическое уравнение, основанное на работе микронапряжений 2-го типа на поле неупругих деформаций и обобщенное на неизотермическое нагружение и процессы залечивания и охрупчивания:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \alpha\boldsymbol{\omega}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\cdot\frac{a_{ij}^{(2)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}}{W} - \mathrm{g}_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}, \quad (16)$$

$$\dot{W} = \mathrm{g}_W^T\dot{T} - \mathrm{g}_W W, \quad (17)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{2}{3}\mathrm{g}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{in},\ \mathrm{g}^{(1)} = E_a.$$

Здесь W – энергия разрушения; $\alpha, \mathrm{g}_{\boldsymbol{\omega}}, \mathrm{g}_W^T, \mathrm{g}_W$ – определяющие функции, которые далее будут выражены через материальные функции, подлежащие экспериментальному определению.

Связь определяющих функций с материальными

Определяющие функции выражаются через материальные следующим образом:

$$q_\varepsilon = \frac{\partial C_p}{\partial\varepsilon_{u^*}^{in}},\ q_T = \frac{C}{C_p}\frac{\partial C_p}{\partial T},\ q_R = q_\varepsilon P_C,$$

$$\mathrm{g} = E_a + \sigma_a\beta,\ \mathrm{g}_\varepsilon = \frac{\partial E_a}{\partial\varepsilon_{u^*}^{in}} + \beta E_a,\ \mathrm{g}_a = -\beta,$$

$$\mathrm{g}_\varepsilon^T = \frac{\partial E_a}{\partial T} - \frac{E_a}{\sigma_a}\frac{d\sigma_a}{dT},\ \mathrm{g}_a^T = \frac{1}{\sigma_a}\frac{d\sigma_a}{dT},$$

$$\mathrm{g}_\varepsilon^R = \mathrm{g}_\varepsilon P_a,\ \mathrm{g}_a^R = \left(\mathrm{g} + \mathrm{g}_a a_u\right)\frac{P_a}{a_u},$$

$$\mathrm{g}_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\lambda},\ \mathrm{g}_W = \rho,\ \mathrm{g}_W^T = \frac{W}{W_0}\frac{dW_0}{dT},$$

$$\alpha = \left(\frac{\sigma_a}{a_u^{(2)}}\right)^{n_\alpha},\ a_u^{(2)} = \left(\frac{3}{2}a_{ij}^{(2)}a_{ij}^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_a = \frac{E_{a0}}{1 + K_E(\varepsilon_{u^*}^{in} - \varepsilon_{u^*(mc)}^{in})^{n_E+1}} \ \text{при } F\left(\varepsilon_{ij}^{in}\right) \le 0,$$

$$E_a = E_{a(cm)} + \left(E_{a0} - E_{a(cm)}\right)\Gamma\left(\frac{(\varepsilon_{u^*}^{in} - \varepsilon_{u^*(cm)}^{in})}{\boldsymbol{\lambda}_{(cm)}}\right) \text{при } F\left(\varepsilon_{ij}^{in}\right) > 0,$$

$$\Gamma(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1, \end{cases}$$

$$P_C = \exp(b_C)\left|C - C_{P0}\right|^{n_C}(1-\boldsymbol{\omega})^{-m_\omega},$$

$$P_a = \exp(b_a)(a_u)^{n_a}(1-\boldsymbol{\omega})^{-m_\omega},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma_{ii} \ge 0, \\ \exp(b_\lambda)\left|\sigma_{ii}\right|^{n_\lambda}, \text{ если } \sigma_{ii} < 0, \end{cases}$$

$$\rho = \exp(b_\rho)(\sigma_u)^{n_\rho},$$

$$a_u = \left(\frac{3}{2}a_{ij}a_{ij}\right)^{1/2},\ \sigma_u = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2},\ C_{p0} = C_p(T,0) = \sigma_{-1}.$$

Здесь $\varepsilon_{u^*(mc)}^{in}$, $\varepsilon_{u^*(cm)}^{in}$ – значения накопленной неупругой деформации в момент смены монотонного деформирования на циклическое и наоборот циклического на монотонное; $E_{a(cm)}$ – значение параметра E_a в момент смены циклического деформирования на монотонное; $\boldsymbol{\lambda}_{(cm)}$ – величина накопленной неупругой деформации, при которой параметр E_a достигает значения E_{a0} $(\boldsymbol{\lambda}_{(cm)} = 0{,}005 \div 0{,}01)$; σ_{-1} – предел длительной прочности (предел ползучести), n_α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений, который практически для всех конструкционных сталей и сплавов равен 1,5.

Таким образом, модифицированную теорию неупругости замыкают следующие материальные функции:

$E(T)$, $\nu(T)$, $\alpha_T(T)$ – упругие параметры;

$C_p\left(T, \varepsilon_{u^*}^{in}\right)$ – функция изотропного упрочнения;

$E_{a0}(T), \sigma_a(T), \beta(T)$ – модули анизотропного упрочнения;

$K_E(T), n_E(T)$ – параметры посадки и вышагивания;

$W_0(T)$ – начальная энергия разрушения;

$b_C(T), n_C(T)$ – параметры изотропной ползучести;

$b_a(T), n_a(T)$ – параметры анизотропной ползучести;

$m_\omega(T)$ – параметр разупрочнения при ползучести;

$b_\lambda(T), n_\lambda(T)$ –параметры залечивания;

$b_\rho(T), n_\rho(T)$ – параметры охрупчивания.

Базовый эксперимент и метод определения материальных параметров и функций

Вначале определяются материальные параметры и функции (первые 10 параметров и функций) при упругопластическом деформировании в условиях одноосного напряженного состояния при различных температурах. Скорость деформирования должна находиться в интервале $10^{-2} \div 10^{-3}$ c^{-1}, т.е. деформирование должно проходить без влияния реологических и динамических эффектов.

Для определения материальных параметров и функций термопластичности необходимы следующие результаты экспериментальных исследований:

– упругие параметры, которые определяются традиционными методами (справочные данные);

– диаграмма монотонного деформирования до деформации $0{,}03 \div 0{,}05$ после жесткого предварительного циклического деформирования с размахом $0{,}01 \div 0{,}02$ ($5 \div 10$ циклов до стабилизации);

– размахи напряжения при жестком циклическом деформировании до монотонного и после монотонного нагружения;

– число циклов до разрушения при жестком циклическом деформировании;

– процесс посадки петли упругопластического гистерезиса при жестком циклическом нагружении после монотонного деформирования.

Все эти результаты могут быть получены при проведении следующего базового эксперимента, состоящего из трех этапов:

– жесткое циклическое нагружение при среднем значении деформации $\varepsilon_m^{(1)} = 0$, размахе деформации $\Delta\varepsilon^{(1)} = 0{,}01 \div 0{,}02$ и числе циклов $N^{(1)} = 5 \div 10$ до практической стабилизации размаха напряжения;

– монотонное растяжение до $\varepsilon^{(2)} = 0{,}03 \div 0{,}05$;

– жесткое циклическое нагружение при $\varepsilon_m^{(3)} = \varepsilon^{(2)}$ и $\Delta\varepsilon = 0{,}01 \div 0{,}02$ до разрушения.

Метод определения материальных параметров и функций термопластичности по результатам этого базового эксперимента изложен в работах [6–9].

Для определения остальных 9 материальных параметров термоползучести необходимы следующие экспериментальные результаты при ползучести в условиях одноосного напряженного состояния при различных уровнях напряжения и температуры:

ε_p^{in} – деформация разрушения только за счет ползучести;

$\dot{\varepsilon}_0^{in}$ – начальная скорость ползучести;

t_p^+ – время разрушения при растяжении;

t_p^- – время разрушения при сжатии.

Все эти результаты могут быть получены при проведении следующего базового эксперимента:

– ползучесть при постоянном напряжении растяжения (3–5-го уровней) в условиях кратковременной ползучести;

– ползучесть при постоянном напряжении растяжения (3–5-го уровней) при установившейся ползучести;

– ползучесть при постоянном напряжении сжатия (1–2-го уровня) в условиях кратковременной или установившейся ползучести.

Далее рассматривается метод определения материальных параметров термоползучести по результатам базового эксперимента. Параметр разупрочнения m_ω определяется [6–9] на основе следующего соотношения, используя результаты при кратковременной ползучести:

$$m_\omega = \frac{\varepsilon_p^{in}}{\dot{\varepsilon}_0^{in} t_p^+} - 1. \tag{18}$$

Для определения функций изотропной P_C и анизотропной P_a ползучести и соответствующих материальных параметров b_C, n_C, b_a, n_a необходимы значения начальной скорости ползучести при различных уровнях напряжения растяжения. Вначале, зная материальные параметры термопластичности, вычисляются значения радиуса C и микронапряжения a для различных уровней напряжения σ, т.е. устанавливается соответствие между начальной скоростью ползучести $\dot{\varepsilon}_0^{in}$ и радиусом C, а также между $\dot{\varepsilon}_0^{in}$ и микронапряжением a.

$$P_C = \dot{\varepsilon}_0^{in}, \;\; \exp\left(b_C\right)\left|C - C_{P0}\right|^{n_c} = \dot{\varepsilon}_0^{in},$$

$$b_C + n_c \; ln\left|C - C_{P0}\right| = \ln\left(\dot{\varepsilon}_0^{in}\right), \tag{19}$$

$$P_a = \dot{\varepsilon}_0^{in}, \;\; \exp\left(b_a\right)\left(a\right)^{n_a} = \dot{\varepsilon}_0^{in},$$

$$b_a + n_a \; \ln\left(a\right) = \ln\left(\dot{\varepsilon}_0^{in}\right). \tag{20}$$

Из линейных зависимостей (19) и (20), построенных на основе метода наименьших квадратов, можно получить материальные параметры изотропной и анизотропной ползучести.

Для определения материальных параметров охрупчивания необходимы экспериментальные данные по деформации разрушения только за счет ползучести и времени разрушения при различных уровнях напряжения растяжения. Тогда модуль охрупчивания ρ вычисляется [6–9] по следующей формуле:

$$\rho = \frac{1}{t_p^+} ln \frac{W_0}{a\varepsilon_p^{in}}, \quad (21)$$

а материальные параметры охрупчивания определяются из линейной зависимости

$$b_\rho + n_\rho \ln(\sigma) = \ln(\rho), \quad (22)$$

построенной на основе метода наименьших квадратов.

Для определения материальных параметров залечивания необходимы экспериментальные данные по длительной прочности при растяжении и хотя бы одно значение времени до разрушения при сжатии. Степенные законы длительной прочности при растяжении и сжатии имеют следующий вид:

$$t_p^+ = D^+ \left(|\sigma|\right)^{-m}, \quad (23)$$

$$t_p^- = D^- \left(|\sigma|\right)^{-m}. \quad (24)$$

Модуль залечивания λ определяется по следующей формуле:

$$\lambda = \frac{1}{t_p^+} - \frac{1}{t_p^-} = \left(\frac{1}{D^+} - \frac{1}{D^-}\right)\left(|\sigma|\right)^m. \quad (25)$$

Тогда материальные параметры залечивания будут вычисляться по формулам:

$$b_\lambda = ln\left(\frac{1}{D^+} - \frac{1}{D^-}\right), n_\lambda = m, \quad (26)$$

В табл. 1 и 2 приведены полученные по результатам базового эксперимента материальные параметры и функции бронзового сплава БрХ08-Ш при четырех уровнях температуры 20, 400, 500, 600 °С.

Таблица 1

Материальные функции сплава БрХ08-Ш

Table 1

Material functions of BrKh08-Sh alloy

T, °С	E, МПа	ν	α_T, 1/град	E_{a0}, МПа	σ_a, МПа	β	W_0, Дж/см^3
20	133 000	0.3	1,7·10-5	500	142	460	112
400	110 000	0.31	2.16E-05	1400	82	800	1700
500	90 000	0.31	2.16E-05	1500	45,7	810	1300
600	90 000	0.31	2.16E-05	1200	27,4	1030	200

Таблица 1

Продолжение

Table 1

Extention

K_E	n_E	b_C	n_C	b_a	n_a	b_λ	n_λ	b_ρ	n_ρ	m_ω
40	-0,3	-100 000	1	-100 000	1	-100 000	1	-100 000	1	1
40	-0,3	-22,2	4,98	-45,9	9,19	-56,2	10,1	-29,3	5,5	3
40	-0,3	-22,3	3,47	-24,5	4,72	-32,4	5,3	-24,8	5	3
40	-0,3	-11,8	1,17	-12,8	1,63	-9	1,07	-9,89	2	3

Таблица 2

Функция изотропного упрочнения сплава БрХ08-Ш $C_p\left(\varepsilon_{u*}^{in}, T\right)$, МПа

Table 2

Function of isotropic hardening of the BrKh08-Sh alloy $C_p\left(\varepsilon_{u*}^{in}, T\right)$, MPa

T, °С/ ε_{u*}^{in}	0	0,0005	0,0015	0,003	0,01	0,019	0,043	0,092
20	78	185	185	185	185	185	185	195
400	70	101	101	102	105	123	125	130
500	40	112	112	112	112	112	112	112
600	30	52	69	70	72	75	74	74

Таблица 2

Продолжение

Table 2

Extention

0,14	0,26	0,39	0,5	0,8	1	1,7	2,3
205	217	222	221	218	217	212	205
135	131	131	132	131	130	127	127
111	110	110	109	107	106	104	102
74	74	73	73	72	72	70	69

Циклическое деформирование и малоцикловая прочность в условиях высоких температур

Для тестирования модифицированной теории неупругости при циклическом деформировании вплоть до разрушения в условиях малоцикловой усталости проведены испытания гладких цилиндрических образцов из бронзового сплава БрХ08-Ш. Испытания проводились при температурах 400, 500 и 600 °С. Нагрев образцов осуществлялся в муфельной печи с контролем температуры образца. На рис. 1 изображен чертеж образца.

Испытания образцов проведены в соответствии с ГОСТ 25.502 при симметричном жестком (с контролируемой деформацией) циклическом растяжении – сжатии. Скорость нагружения при испытаниях составляла 5 циклов в минуту. Испытания проведены до разрушения с регистрацией количества циклов до разрушения, диаграмм циклического деформирования и зависимостей размаха напряжения от номера цикла. Число циклов до разрушения определяется фиксацией трещины или моментом катастрофического падения размаха напряжений.

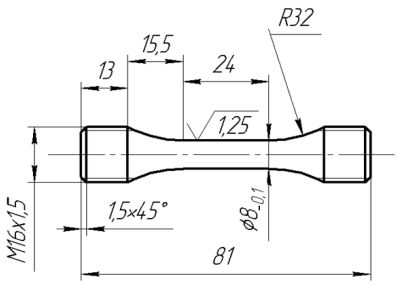


Рис. 1. Чертеж образца из сплава БрХ08-Ш для испытаний на циклическое деформирование

Fig. 1. Drawing of a sample made of BrKh08-Sh alloy for testing for cyclic deformation

На рис. 2 экспериментальные данные по циклическому деформированию образцов при 400 °С на 40-м цикле обозначены синими ромбами, а расчетные – синей линией; при 500 °С на 40-м цикле – оранжевыми квадратами и оранжевой линией, при 600 °С на 60-м цикле – зелеными кружками и зеленой линией. Размах деформаций при 400 °С составляет 0,016; при 500 и 600 °С – 0,01, а скорость деформации соответственно – $2{,}7\cdot10^{-3}$ и $1{,}7\cdot10^{-3}$ $с^{-1}$. Расчетное число циклов до разрушения при 400 °С равно 68 циклов, а экспериментальное – 82 цикла; при 500 °С – 76 и 74 цикла; при 600 °С – 95 и 124 цикла.

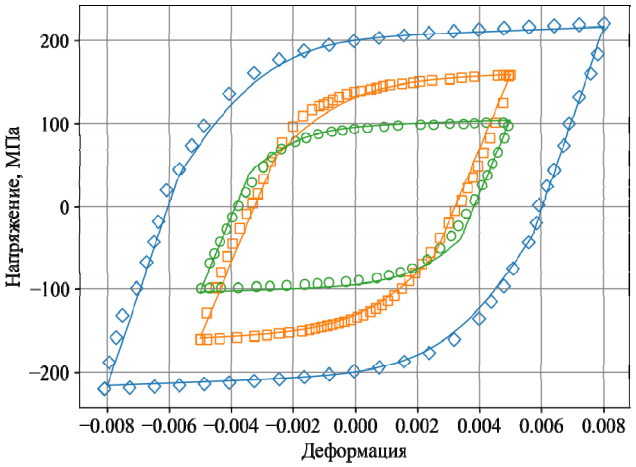


Рис. 2. Экспериментальные и расчетные диаграммы циклического деформирования образцов из сплава БрХ08-Ш при 400, 500 и 600 °С

Fig. 2. Experimental and calculated diagrams of cyclic deformation of samples from the BrKh08-Sh alloy at 400, 500 and 600 °C

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов показывает, что отличие циклических диаграмм не превышает 10–15 %, а число циклов до разрушения – 30 %.

Ползучесть и длительная прочность при изотермических и неизотермических нагружениях

Для тестирования модифицированной теории неупругости в условиях ползучести вплоть до разрушения проведены эксперименты по длительному нагружению образцов сплава БрХ08-Ш. Чертеж образца представлен на рис. 3.

Испытания проводились в соответствии с ГОСТ 3248-81. При постоянной нагрузке и постоянной температуре измерялось относительное удлинение образца с помощью навесного экстензометра с базой 25 мм. Испытания проведены при температурах 400, 500 и 600° С и трех уровнях напряжения для каждой температуры. По

результатам испытаний фиксировалась зависимость деформации от времени вплоть до разрушения.

На рис. 4 приведены расчетные и экспериментальные диаграммы ползучести вплоть до разрушения при температуре 400° С и трех уровнях напряжения. Для каждого уровня напряжения испытаны по два образца.

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 4, при напряжении 133 МПа обозначены оранжевыми кружками и квадратами, а расчет – оранжевой линией, при напряжении 151 МПа – зелеными кружками, квадратами и зеленой линией, при напряжении 158 МПа – красными кружками, квадратами и красной линией.

На рис. 5 приведены диаграммы длительной прочности. При температуре 400° С экспериментальные точки обозначены синими ромбами, а расчет – синей линией; при 500 ° С – оранжевыми квадратами и оранжевой линией; при 600 °С – зелеными кружками и зеленой линией.

Из анализа диаграмм ползучести следует, что деформация разрушения заметно уменьшается (практически в четыре раза) за время порядка 100 мин. Это говорит о значительном охрупчивании бронзового сплава при его деформировании в условиях высоких температур.

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов показывает, что отличие диаграмм ползучести и длительной прочности не превышает 30 %.

Для исследования процессов ползучести при неизотермическом нагружении был проведен следующий эксперимент. Ненагруженный образец сплава БрХ08-Ш нагревался до 400 °С. Затем образец растягивался до напряжения 76,6 МПа и выдерживался 15 мин при температуре 400 °С. В следующие 10 мин температура повышалась до 550 °С, а затем в следующие 10 мин – до 600 °С. Время выдержки при 600 °С составляло 15 мин, после чего образец охлаждался и разрушился через 15 мин при температуре 440 °С. В результате были получены зависимости температуры и деформации от времени.

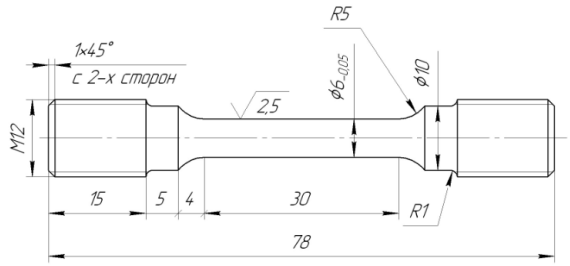


Рис. 3. Чертеж образца из сплава БрХ08-Ш для испытаний на ползучесть

Fig. 3. Drawing of a sample made of BrKh08-Sh alloy for creep testing

На рис. 6 синей линией показано изменение температуры от времени, черной линией – расчетное изменение полной деформации, а черными кружками – экспериментальные значения полной деформации. Расчетное время разрушения составило 54 мин, а экспериментальное – 60 мин.

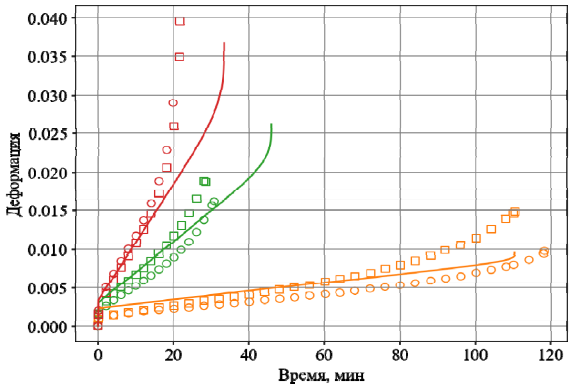


Рис. 4. Диаграммы ползучести образцов из сплава БрХ08-Ш при напряжениях 133, 151 и 158 МПа

Fig. 4. Creep diagrams of samples from BrKh08-Sh alloy at stresses of 133, 151 and 158 MPa

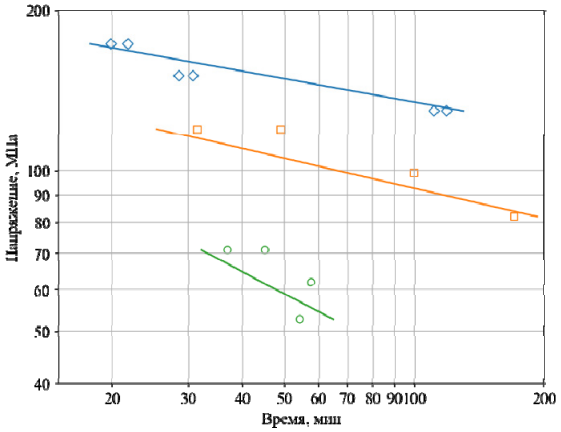


Рис. 5. Диаграммы длительной прочности образцов из сплава БрХ08-Ш при 400, 500 и 600 °С

Fig. 5. Diagrams of long-term strength of alloy samples BrKh08-Sh at 400, 500 and 600 °C

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов показывает, что отличие деформаций ползучести и времени до разрушения не превышает 10–15 %.

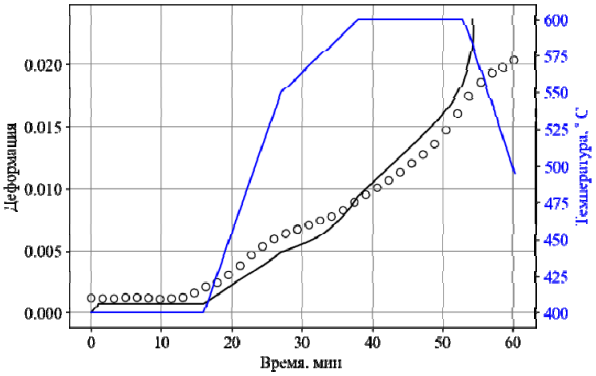


Рис. 6. Зависимость полной деформации от времени для образцов из сплава БрХ08-Ш

Fig. 6. Dependence of total deformation on time for samples made of BrKh08-Sh alloy

Заключение

Изложены основные положения и уравнения модифицированной теории неупругости, которая интегрирована в конечно-элементный комплекс для практических расчетов выработанного и остаточного ресурса материала конструкций в условиях повторности и длительности воздействия термомеханических нагрузок. Для описания процесса несимметричных циклических нагружений и возникающих при этом эффектов посадки и вышагивания (ratcheting) петли циклического гистерезиса проведена модификация эволюционных уравнений для микронапряжений. Сформулирован базовый эксперимент и метод идентификации материальных параметров и функций, замыкающих теорию. Приведены материальные параметры и функции бронзового сплава БрХ08-Ш. Осуществлена верификация модифицированной теории неупругости на результатах экспериментальных исследований бронзового сплава при циклических изотермических нагружениях, малоцикловой прочности, изотермической и неизотермической ползучести, длительной прочности. Отличие расчетных и экспериментальных циклических диаграмм, диаграмм ползучести, значений числа циклов до разрушения, а также времени разрушения не превышает 30 %.

Библиографический список

1. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

2. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

3. Новожилов, В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.

4. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Физматтиз, 1966. – 752 с.

5. Термопрочность деталей машин: справочник / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.

6. Бондарь, В.С. Неупругость. Варианты теории / В.С. Бондарь. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.

7. Bondar, V.S. Inelasticity. Variants of the theory / V.S. Bondar. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

8. Ресурс материалов и конструкций: монография / В.С. Бондарь, И.Г. Горячева, Ю.Г. Матвиенко [и др.]; под науч. ред. В.С. Бондаря. – М.: Московский Политех, 2019. – 192 с.

9. Конструкционная прочность материалов. Ресурс конструкций высоких параметров / В.С. Бондарь, Ю.М. Темис, Ю.Г. Матвиенко [и др.]; под науч. ред. В.С. Бондаря. – Санкт-Петербург: Лань, 2024. – 256 с.

10. Качанов, Л.М. Теория ползучести / Л.М. Качанов. – М.: Физматлит, 1960. – 455 с.

11. Волков, И.А. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И. А. Волков, Ю.Г. Коротких. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

12. Митенков, Ф.М. Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков, И.А. Волков, Л. А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2015. – 282 с.

13. Волков, И.А. Прикладная теория вязкопластичности: монография / И.А. Волков, Л.А. Игумнов, Ю.Г. Коротких. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2015. – 317 с.

14. Волков, И.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды / И.А. Волков, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2017. – 299 с.

15. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

16. Krempl, E. The influence of state of stress on low-cycle fatigue of structural materials: a literature survey and interpretive report / E. Krempl // Amer. Soc. Test. And Mater. Spec. Techn. Publ. – 1974. – № 549. – P. 1–46.

17. Krempl, E. The Hardening and Dependent Behavior of Fully Annealed Al– SI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature / E. Krempl, H. Lu // ASME Journal of Engineering Materials and Technology. – 1984. – Vol. 106. – P. 376–382.

18. Krieg, R.D. A Practical Two Surface plasticity Theory / R.D. Krieg // Journal of Applied Mechanics. – 1975. – Vol. 42. – P. 641–646.

19. Krieg, R.D. A physically based internal variable model for rate-dependent plasticity / R.D. Krieg, J.C. Swearengen, R.W. Rhode // Proc. ASME/CSME PVP Conference. – 1978. – P. 15–27.

20. Krieg, R.D. Accurate of numerical solution methods for the elastic– perfectly plastic model / R.D. Krieg, D.B. Krieg // Trans. ASME. – 1977. – Vol. 199, № 4. – P. 510–515.

21. Miller, A.K. A unified approach to predicting interactions among creep, cyclic plasticity, and recovery / A.K. Miller // Nuclear Eng. and Design. – 1978. – Vol. 51. – P. 35–43.

22. Miller, K.J. Multiaxial fatigue: a brief review / K.J. Miller, M.W. Brown // Adv. Fract. Res. Proc. Int. Conf. New Delhi, 4-10 December. – 1984. – Vol. 1. – P. 31–56.

23. Miller, A.K. NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations under complex histories / A.K. Miller, T.G. Tanaka // Trans. ASME: J. Eng. Mater. And Technol. – 1988. – Vol. 110, № 3. – P. 205–211.

24. Ohno, N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region / N. Ohno // J. Appl. Mech. – 1982. – Vol. 49. – P. 721–727.

25. Ohno, N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity / N. Ohno // Appl. Mech. rev. – 1990. – Vol. 43. – P. 283.

26. Ohno, N. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions / N. Ohno, J.D. Wang // International Journal of Plasticity. – 1991. – Vol. 7. – P. 879–891.

27. Ohno, N. Kinematics hardening rule with critical state of dynamic recovery, Parts I and II / N. Ohno, J.D. Wang // International Journal of Plasticity. – 1993.– Vol. 9. – P. 375–403.

28. Chaboche, J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic visco plasticity / J.L. Chaboche // International Journal of Plasticity. – 1989. –Vol. 5, № 3. – P. 247–302.

29. Chaboche, J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I and II / J.L. Chaboche // ASME J. of Applied Mechanics. – 1993. – Vol. 60. – P. 813–828.

30. Chaboche, J.L. On the plastic and viscoplastic constitutive equations / J.L. Chaboche, G. Rousselier // ASME J. of Pres. Vessel Techn. – 1983. – Vol. 105. – P. 153–164.

31. Chaboche, J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories / J.L. Chaboche // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

32. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон, Ж. Касто, Ж.Л. Шабоши, Т.С. Форест. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.

33. Абашев, Д.Р. Малоцикловая усталость образцов бронзового сплава с кольцевой выточкой при мягком нагружении / Д.Р. Абашев, В.С. Бондарь // Авиационные двигатели. 2023, – №1 (18). – С. 65–78. DOI: 10.54349/26586061_2025_1_65

34. Бондарь, В.С. Упругопластическое поведение и разрушение конструкций с концентраторами напряжений при циклических нагружениях / В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, Д.Ю. Фомин // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. – № 4. – С. 23–33. DOI: 10.15593/perm. mech./2023.4.03

35. Bari, S. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation / S. Bari, T. Hassan // Int. J. of Plasticity. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.

36. Kan, Q. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature / Q. Kan, G. Kang // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 26(3). – P. 441–465. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005

37. Rahman, S.M. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure / S.M. Rahman, T. Hassan, E. Corona // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.

38. Abdel-Karim, M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting / M. Abdel-Karim // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

39. Hassan, T. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models / T. Hassan, L. Taleb, S. Krishna // Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P.1863–1889.

40. Taleb, L. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep / L. Taleb, G. Cailletaud // Int. J. Plasticity. – 2011. – Vol. 27 (12). – P. 1936–1958.

41. Моделирование усталостной долговечности поликристаллических конструкционных сплавов при блочном несимметричном малоцикловом нагружении / И.А. Волков, Л.А. Игумнов, И.С. Тарасов, Д.Н. Шишулин, М.Т. Маркова // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80, No 1. – С. 15–30.

42. Оценка ресурсных характеристик поликристаллических конструкционных сплавов при циклическом термомеханическом нагружении / И.А. Волков, Л.А. Игумнов, Д.Н. Шишулин, А.А. Белов // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 481–504.

43. Бондарь В.С. Математическое моделирование циклического деформирования и мало- многоцикловой усталости / В.С. Бондарь, В.В. Даншин, Д.А. Алхимов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 52–71. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.04

44. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state / S. Bondar Valentin, V. Dansin Vladimir, D. Vu Long, Dinh. Duc Nguyen // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2018. – Vol. 25. № 12. – P. 1009–1017. DOI: 10.1080/15376494.2017.1342882

45. Бондарь, В.С. Построение поверхности памяти для разделения процессов монотонных и циклических нагружений / В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т. 84, № 3. – С. 364–375. DOI: 10.32326/1814– 9146–2022–84–3–364–375

46. Бондарь, В.С. О поверхностях памяти, разделяющих процессы монотонных и циклических нагружений / В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 42–50. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.05

47. Бондарь, В.С. Теории пластичности при циклических нагружениях / В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, Д.Ю. Фомин // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80, № 1. – С. 31–40. DOI: 10.32326/1814– 9146–2018–80–1–31–40

48. Бондарь, В.С. Сравнительный анализ вариантов теорий пластичности при циклических нагружениях / В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, В.К. Петров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 23–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02

49. Ишлинский, А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением / А.Ю. Ишлинский // Укр. матем. журн. – 1954. – Т. 6, вып. 3. – С. 314–324.

50. Prager, W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements / W. Prager // Proc. Inst. Mech. Engrs. – London, 1955. – 169 p.

51. Кадашевич, Ю.И. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 117, вып. 4. – С. 586–588.

52. Кадашевич, Ю.И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 78–89.

53. Кадашевич, Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности / Ю.И. Кадашевич // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.

54. Armstrong, P.J. A mathematical repre-sentation of the multiaxial Bauscinger effect / P.J. Armstrong, C.O. Frederick // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.

References

1. Il'yushin A. A. Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoj teorii [Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory]. Moscow, Izd-vo. AN SSSR, 1963, 271 p.

2. Il'yushin A. A. Mekhanika sploshnoj sredy [Continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo. MGU, 1990, 310 p.

3. Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I. Mikronapryazheniya v konstrukcionnyh materialah [Microstresses in structural materials]. Leningrad, Mashinostroenie, 1990, 224 p.

4. Rabotnov Yu. N. Polzuchest' elementov konstrukcij [Creep of structural elements]. Moscow, Fizmattiz, 1966, 752 p.

5. Termoprochnost' detalej mashin: spravochnik [Thermal strength of machine parts]. Edit. I. A. Birger, B. F. Shorr, Moscow, Mashinostroenie, 1975, 455 p.

6. Bondar' V. S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 144 p.

7. Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194p.

8. Resurs materialov i konstrukcij: monografiya [Resource of materials and structures: monograph]. V.S. Bondar', I.G. Goryacheva, Yu.G. Matvienko ect., edit. V.S. Bondar'. Moscow, Moskovskij Politekh, 2019, 192 p.

9. Konstrukcionnaya prochnost' materialov. Resurs konstrukcij vysokih parametrov [Structural strength of materials. Lifetime of high-parameter structures]. V.S. Bondar', Yu.M. Temis, Yu.G. Matvienko ect. Edit. V.S. Bondar'. Sainr-Petersburg, Lan', 2024, 256 p.

10. Kachanov L. M. Teoriya polzuchesti [Theory of creep]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 455 p.

11. Volkov I. A., Korotkih Yu. G. Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskih sred s povrezhdeniyami [Equations of state of viscoelastoplastic media with damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 p.

12. Prikladnaya teoriya plastichnosti [Applied theory of plasticity]. F. M. Mitenkov, I. A. Volkov, L. A. Igumnov. Moscow, Fizmatlit, 2015, 282 p.

13. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkih Yu.G. Prikladnaya teoriya vyazkoplastichnosti: monografiya [Applied theory of viscoplasticity]. N. Novgorod: Izd-vo. Nizhegorodskogo gos. un-ta, 2015, 317 p.

14. Volkov, I. A., Igumnov L.A. Vvedenie v kontinual'nuyu mekhaniku povrezhdennoj sredy [Introduction to the continuum mechanics of a damaged medium]. Moscow, Fizmatlit, 2017, 299 p.

15. Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 p.

16. Krempl E. The influence of state of stress on low-cycle fatigue of structural materials: a literature survey and interpretive report // Amer. Soc. Test. And Mater. Spec. Techn. Publ. – 1974. – Nº 549. – P. 1- 46.

17. Krempl E., Lu H. The Hardening and Dependent Behavior of Fully Annealed Al– SI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature // ASME Journal of Engineering Materials and Technology. – 1984. – Vol. 106. – P. 376-382.

18. Krieg R. D. A Practical Two Surface plasticity Theory // Journal of Applied Mechanics. – 1975. – Vol. 42. – P. 641-646.

19. Krieg R. D., Swearengen J. C., Rhode R. W. A physically based internal variable model for rate- dependent plasticity // Proc. ASME/CSME PVP Conference. – 1978. – P. 15-27.

20. Krieg R. D., Krieg D. B. Accurate of numerical solution methods for the elastic– perfectly plastic model // Trans. ASME. – 1977. – Vol. 199, № 4. – P. 510-515.

21. Miller A. K. A unified approach to predicting interactions among creep, cyclic plasticity, and recovery // Nuclear Eng. and Design. – 1978. – Vol. 51. – P. 35-43.

22. Miller K. J., Brown M. W. Multiaxial fatigue: a brief review// Adv. Fract. Res. Proc. Int. Conf. New Delhi, 4-10 December. – 1984. – Vol. 1. – P. 31-56.

23. Miller A. K., Tanaka T. G. NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations under complex histories // Trans. ASME: J. Eng. Mater. And Technol. – 1988. – Vol. 110, № 3. – P. 205-211.

24. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region // J. Appl. Mech. – 1982. – Vol. 49. – P. 721-727.

25. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity // Appl. Mech. rev. – 1990. – Vol. 43. – P. 283.

26. Ohno N., Wang J. D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // International Journal of Plasticity. – 1991. – Vol. 7. – P. 879-891.

27. Ohno N., Wang J. D. Kinematics hardening rule with critical state of dynamic recovery, Parts I and II // International Journal of Plasticity. – 1993.– Vol.9. P.375-403.

28. Chaboche J. L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic visco plasticity // International Journal of Plasticity. – 1989. –Vol. 5, № 3. – P. 247-302.

29. Chaboche J. L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I and II // ASME J. of Applied Mechanics. – 1993. – Vol. 60. – P. 813-828.

30. Chaboche J. L., Rousselier G. On the plastic and viscoplastic constitutive equations //ASME J. of Pres. Vessel Techn. – 1983. – Vol. 105. – P. 153-164.

31. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642-1692.

32. Nelineinaya mehanika materialov [Nonlear mechanics of materials] Zh. Besson, Zh. Kasto, Zh.L. Shaboshi, T.S. Forest, Saint-Petersburg, Izd-vo. Politechn. un-ta, 2010, 397 p.

33. Abashev D.R., Bondar V.S. Low-cycle fatigue of bronze alloy samples with a ring groove under soft loading // Aviation engines. 2023, no. 1 (18). pp. 65-78. DOI: 10.54349/26586061_2025_1_65.

34. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Ju. Elastic-plastic behavior and fracture of structures with loss concentrators under cyclic loads. PNRPU Mechanics Bulletin, 2023, no. 4, pp. 23-33. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.03.

35. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // Int. J. of Plasticity. – 2002. – Vol. 18. – P. 873-894.

36. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. Int. J. of Plasticity, 2009, vol.26(3), pp. 441-465. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.08.005.

37. Rahman S.M., Hassan T., Corona E., Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. Int. J. of Plasticity, 2008, vol. 24, pp. 1756-1791.

38. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. Int. J. of Plasticity, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.

39. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. Int. J. Plasticity, 2008, vol. 24, pp.1863-1889.

40. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep. Int. J. Plasticity, 2011, vol. 27 (12), pp. 1936-1958.

41. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. Modeling of fatigue durability of polycrystallinestructural alloys under block asymmetric low-cycle loading [Modelirovanie ustalostnoi dolgovechnosti polikristallicheskih konstrukcionnih splavov pri blochnom nesimmetrichnom malociklovom nagrujenii]. Problemi prochnosti i plastichnosti, t.80, № 1, 2018. pp. 15-30.

42. Volkov I.A., Igumnov L.A., Shishulin D.N., Belov A.A. Evaluation of resource characteristics of polycrystalline structural alloys under cyclic thermomechanical loading [Ocenka resursnih harakteristik polikristallicheskih konstrukcionnih splavov pri ciklicheskom termomehanicheskom nagrujenii]. Problemi prochnosti i plastichnosti, t.83, № 4, 2021, pp. 481-504.

43. Bondar V.S., Danshin V.V., Alkhimov D.A. Analysis on cyclic deformation and low-high-cycle fatigue in uniaxial stress state. PNRPU Mechanics Bulletin. 2016. No. 4. Pp. 52-71. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.04.

44. Bondar Valentin S., Dansin Vladimir V., Vu Long D., Duc Nguyen Dinh. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2018, VOL. 25. № 12. pp. 1009 – 1017. DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1342882.

45. Bondar V.S., Abashev D.R. Memory surfaces separating the processes of monotonous and cyclic loads. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no. 3, pp. 42-50. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.05.

46. Bondar V.S., Abashev D.R. Memory surfaces separating the processes of monotonous and cyclic loads. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no. 3, pp. 42-50. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.05.

47. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Ju. Theories of Plasticity under Complex Loading along Flat Trajectories of Deformations. PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, no. 3, pp. 35-47. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04.

48. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. Comparative analysis of variants of plasticity theories under cyclic loading. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017, no. 2, pp. 23-44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02.

49. Ishlinskij A.Ju. Obshchaya teoriya plastichnosti s linejnym uprochneniem [General theory of plasticity with linear hardening]. Ukr. matem. Zhurn, 1954, vol. 6, iss. 3, pp. 314-324.

50. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements // Proc. Inst. Mech. Engrs. – London, 1955. – 169.41.

51. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya effekt Baushingera [The theory of plasticity taking into account the Bauschinger effect]. Dokl. AN SSSR, 1957, vol. 117, iss. 4, pp. 586-588.

52. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya ostatochnye mikronapryazheniya [The theory of plasticity taking into account residual microstresses]. PMM. 1958, vol. 22, iss. 1. pp. 78-89.

53. Kadashevich Ju.I. O razlichnyh tenzorno-linejnyh sootnosheniyah v teorii plastichnosti [On various tensor-linear relations in the theory of plasticity]. Leningrad, Izd-vo LGU, Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti, 1967, iss. 6, pp. 39-45.

54. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauscinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The study was not supported by sponsorship.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.