Бабешко, В.А. Асимптотический метод решения контактных задач о действии полуполосового штампа на анизотропный композит / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.01 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 2. – С. 5–13.

Perm Polytech Style: Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. An Asymptotic Method for Solving Contact Problems on the Effect of a Half-Strip Stamp on an Anisotropic Composite. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 2, pp. 5-13. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.01

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.01
УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ ПОЛУПОЛОСОВОГО ШТАМПА НА АНИЗОТРОПНЫЙ КОМПОЗИТ

В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов

Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 15 июля 2024 г.
Одобрена: 04 мая 2025 г.
Принята к публикации: 30 мая 2025 г.

Ключевые слова:

контактная задача, полуполоса, анизотропия, композит, асимптотический метод, интегральные уравнения.

АННОТАЦИЯ

Впервые строится асимптотическим методом решение контактной задачи о действии с трением жесткого штампа в форме полуполосы на анизотропный многослойный композитный материал. В качестве параметра, который определяет асимптотическое разложение, принята ширина полуполосы. Метод основан на обобщении подхода построения асимптотических решений для более простых контактных задач. Ранее был развит асимптотический метод для решения контактной задачи в случае полосового в плане штампа большой относительной ширины.

Метод оказался эффективным, поскольку обеспечил удовлетворительное сопряжение с решением, построенным встречным асимптотическим разложением для штампов в форме полосы малой ширины. В настоящей работе он применен в значительно более сложной и не решенной ранее контактной задаче для штампа в форме полубесконечной полосы. Сложность этой задачи состоит в том, что для применения асимптотического подхода необходимо было разработать метод решения двумерных уравнений Винера – Хопфа, что было выполнено авторами и применяется в настоящей работе.

Рассматриваемые задачи возникают в инженерной практике и строительстве при создании различных объектов, при разработке элементной базы электроники, в сейсмологии, при оценке состояния сейсмичности в зоне перехода горной гряды в равнину. Существующими численными методами удается описывать концентрацию контактных напряжений на границе штампа и, особенно, в угловых точках границы, где имеются наиболее уязвимые части конструкции. Однако построить полное решение о распределении контактных напряжений под полуполосовым штампом вместе с особенностями на границе не удается в связи с неограниченностью области. Построено решение, правильно отражающее реальное распределение контактных напряжений под штампом и стремящееся к точному решению при возрастании параметра ширины полосы.

© **Бабешко Владимир Андреевич** – д. ф.-м. н., проф., академик, зав. кафедрой математического моделирования, e-mail: babeshko41@mail.ru.
Евдокимова Ольга Владимировна – д. ф.-м. н., г. н. с., e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.
Бабешко Ольга Мефодиевна – д. ф.-м. н., г. н. с., e-mail: babeshko49@mail.ru.
Евдокимов Владимир Сергеевич – аспирант, e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Vladimir A. Babeshko – Doctor of Physics, Academician, Head of Department, e-mail: babeshko41@mail.ru.
Olga Vl. Evdokimova – Doctor of Physics, Senior Researcher, e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.
Olga M. Babeshko – Doctor of Physics, Senior Researcher, e-mail: babeshko49@mail.ru.
Vladimir S. Evdokimov – Graduate student, e-mail: evdok_vova@mail.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

AN ASYMPTOTIC METHOD FOR SOLVING CONTACT PROBLEMS ON THE EFFECT OF A HALF-STRIP STAMP ON AN ANISOTROPIC COMPOSITE

V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko, V.S. Evdokimov

Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 15 July 2024
Approved: 04 March 2025
Accepted for publication:
30 May 2025

Keywords:

contact problem, half-strip, anisotropy, composite, asymptotic method, integral equations.

ABSTRACT

For the first time, an asymptotic solution has been constructed for the contact problem of friction of a rigid half-strip stamp of an anisotropic multilayer composite material. The relative width of the half-strip is assumed to be a large parameter that determines the asymptotic expansion. The method is based on generalizing the approach to constructing asymptotic solutions for simpler contact problems. Previously, the asymptotic method has been developed to solve the contact problem in case of a strip-stamp with a large relative width. The method proved to be effective because it provided a satisfactory agreement with the solution constructed by the counter asymptotic expansion for the stamps in the form of a strip of a small relative width. In this paper, it is applied in a much more complex and previously unsolved contact problem for a stamp in the form of a semi-infinite strip. The complexity of this problem lies in the fact that in order to apply the asymptotic approach, it is necessary to develop a method for solving two-dimensional Wiener-Hopf equations, which has already been done by the authors and it is already used in this work. Similar problems occur in engineering practice and construction when creating various objects, when developing an electronic element base, in seismology, when assessing the state of seismicity in the transition zone of a mountain range into a plain. By using the existing numerical methods, it is possible to describe the behavior of the concentration of contact stresses at the stamp boundary, and especially at the corner points of the boundary, where the most vulnerable parts of the structure are located. However, it is not possible to construct a complete solution of the distribution of contact stresses under the half-strip stamp together with the features at the boundary, due to the area infiniteness. In this paper, a solution is constructed that correctly reflects the real distribution of the contact stresses under the stamp and aims at an accurate solution with an increasing strip width parameter.

Введение

Контактные и смешанные задачи о действии полуполосовых штампов на анизотропные композиты актуальны во многих областях. Это проблемы инженерной практики при конструировании сложного оборудования и узлов с контактами на основе конструкционных композитов [1–14], в строительстве – фундаментостроение, фрикционное взаимодействие, при конструировании ленточных фундаментов [15; 16], в электронике – в преобразователях на поверхностных акустических волнах и в полосковых линиях передач [17]. Эти проблемы возникли в науках о Земле, в сейсмологии, для исследования сейсмичности зон перехода горной гряды в равнину [18]. Разработан ряд аналитических и численных приближенных методов решения этой задачи, в основном базирующихся на решении задач для бесконечной полосы, с последующим делением носителя решения на две половины [19]. Для численного решения методом граничного элемента задача является сложной в связи с наличием на всей границе штампа концентрации контактных напряжений. Заметим, что в работах [20–26] применялись в основном численные методы для решения различных граничных задач для анизотропных композитов.

Особое место в контактных задачах с негладкой границей у штампов занимают угловые точки границы с повышенной концентрацией контактных напряжений, где только в последнее время достигнут значительный прогресс [27]. Аналитическое построение точного или высокоточного приближенного решения этой задачи сдерживалось в связи с отсутствием аналогов формул Сохоцкого – Племеля для функций нескольких комплексных переменных, что пока не удалось построить. Однако определенное продвижение в этих задачах наметилось в связи с разработкой метода блочного элемента, позволившего точно решать контактные задачи в четверти плоскости [28].

Именно построение решений этих контактных задач, как показано в настоящем исследовании, позволило построить асимптотическое решение контактной задачи для полуполосы, приближающееся к точному при увеличении ширины полосы.

Далее показано, насколько значительно отличие решения для полуполосы, получаемое простым делением носителя решения для полосы на две части, от асимптотически верного решения.

Постановка задачи

Интегральные уравнения о действии в статическом режиме полосового и полуполосового штампов на анизотропную среду (рис. 1) имеют соответственно вид [19, 29–31]:

$$\mathbf{K}q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-c_1}^{c_1} k(x-\xi, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta = $$
$$= f(x,y), \quad -\infty \le x \le \infty, \quad -c_1 \le y \le c_1; \qquad (1)$$
$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta;$$

$$\mathbf{K}q = \int_{0}^{\infty}\int_{-c}^{c} k(x-\xi, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y),$$
$$0 \le x \le \infty, \quad -c \le y \le c; \qquad (2)$$
$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta.$$

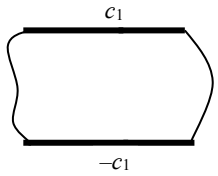


Рис. 1 Полосовой штамп имеет протяженность до бесконечности в обе стороны

Fig. 1. The half-strip stamp has an infinite extension in both directions

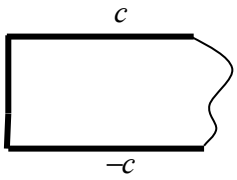


Рис. 2. Полуполосовой штамп имеет протяженность до бесконечности только справа

Fig. 2. The half-strip stamp has an infinite extension only on the right

В общем случае функция $K(\alpha,\beta)$ является комплекснозначной двух комплексных переменных, может иметь особенности в виде полюсов и точек ветвления, не лежащих на контурах интегрирования. Она порождается решением анизотропной граничной задачи в многослойной среде. Способ построения интегрального уравнения для многослойной изотропной и анизотропной сред детально описан в работах [19; 29–31]. Он сводится к построению функции Грина применением преобразования Фурье по горизонтальным координатам граничной задачи в слое с последующим решением одномерных задач, которые решаются рекуррентными формулами в случае постоянных физико-механических параметров среды [30], либо решением одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в случаях переменных физико-механических параметров [31].

В контактных задачах для многослойной среды внешнее воздействие определяется путем решения соответствующего интегрального уравнения [19; 29–31]. Если отказываться от решения интегрального уравнения и принимать контактные напряжения исходя из «здравого смысла», то проблема решается, но как сильно она отличается от точного – неизвестно. Решения контактных задач характеризуются наличием особенностей по границам штампа, даже если они закруглены в угловых точках. Однако инженерная практика показала необходимость их учета [27; 31], так как не все технологически допустимо закруглять. Ряд примеров интегральных уравнений для анизотропных композитов приводится в работах [29; 30].

Функция $K(\alpha,\beta)$ является непрерывной, суммируемой на осях по обоим аргументам, с поведением на бесконечности вида

$$K(\alpha,\beta) = O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const};$$
$$K(\alpha,\beta) = O(\beta^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \quad |\alpha|, |\beta| \to \infty. \qquad (3)$$

Контактная задача для полосового штампа

Решению задачи для уравнения (2) предшествует построение решения контактной задачи для полосового штампа, уравнение (1), которая была рассмотрена в [19].

Его асимптотическое решение для $c_1 >> 1$ было построено путем суперпозиции решений трех интегральных уравнений, в которые вырождается исходное интегральное уравнение в предположении роста относительной ширины $2c_1$ полосы. Эти уравнения получались путем попеременного устремления верхней и нижней границ полосы к бесконечности, а третьим оказалось уравнение свертки во всей плоскости. Построенные интегральные уравнения, допускающие обращение, позволили сконструировать асимптотическое решение. Оно оказалось эффективным, поскольку с высокой точностью привело к сопряжению со встречным асимптотическим решением, полученным другим методом для $c_1 << 1$ [19].

В связи с важностью этого подхода для решения интегрального уравнения (2) ниже дается более детальное рассмотрение способа асимптотического решения уравнения (1) для $c_1 >> 1$. Описанный выше подход привел к решению двух интегральных уравнений Винера – Хопфа и уравнения свертки, имеющих вид

$$\mathbf{K}q_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-c_1}^{\infty} k(x-\xi, y-\eta)q_{11}(\xi,\eta)d\xi d\eta = f_1(x,y),$$
$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & -\infty \le x \le \infty, \quad -c_1 \le y \le \infty \\ 0 & -\infty \le x \le \infty, \quad -\infty \le y \le -c_1, \quad c_1 \le y \le \infty, \end{cases}$$
$$\mathbf{K}q_{21} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{c_1} k(x-\xi, y-\eta)q_{21}(\xi,\eta)d\xi d\eta = f_2(x,y), \qquad (4)$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & -\infty \le x \le \infty, \quad -\infty \le y \le c_1 \\ 0 & -\infty \le x \le \infty, \quad -\infty \le y \le -c_1, \quad c_1 \le y \le \infty, \end{cases}$$
$$\mathbf{K}q_{31} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi, y-\eta)q_{31}(\xi,\eta)d\xi d\eta = f_3(x,y),$$
$$f_3(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & -\infty \le x \le \infty, \quad |y| \le c_1 \\ 0 & -\infty \le x \le \infty, \quad |y| \ge c_1. \end{cases}$$

Руководствуясь требованием перехода асимптотического решения к вырожденной составляющей, при стремлении обеих границ полосы к бесконечности асимптотическое решение уравнения (1) на основании решений уравнений (4) приняло вид

$$q(x,y)=q_{11}(x,y)+q_{21}(x,y)-q_{31}(x,y). \tag{5}$$

Позже, когда методом блочного элемента была выведена точная система интегральных уравнений для полосы, эквивалентная уравнению (1) [19], ее первое приближение при решении для $c_1 >> 1$ совпало с (5). Таким образом, установлено, что асимптотическое решение интегральных уравнений, получаемых расширением границ полосы, действительно приводит к построению асимптотического решения.

Решение интегральных уравнений (4) получается применением метода Винера – Хопфа, при этом используются следующие операторы преобразования, что детально описано в [29; 31]. Они применимы для анизотропных композитов и имеют вид

$$\{G(\alpha,\beta)\}_{+\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^+,$$

$$\{G(\alpha,\beta)\}_{-\alpha}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^-,$$

$$\{G(\alpha,\beta)\}_{+\beta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^+,$$

$$\{G(\alpha,\beta)\}_{-\beta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^-,$$

$$\begin{gathered}K_{+\alpha}(\alpha,\beta)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\quad \alpha\in\Pi_\alpha^+,\\ K_{-\alpha}(\alpha,\beta)=\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi\right),\quad \alpha\in\Pi_\alpha^-,\\ K_{+\beta}(\alpha,\beta)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\quad \beta\in\Pi_\beta^+,\\ K_{-\beta}(\alpha,\beta)=\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{lnK(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta\right),\quad \beta\in\Pi_\beta^-.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь Π_α^+, Π_α^- – комплексные области выше, плюс, и ниже, минус, вещественной оси $o\alpha$, комплексной плоскости α, а Π_β^+, Π_β^- – области верхняя, плюс, и нижняя, минус, вещественной оси $o\beta$ комплексной плоскости β.

При помощи этих операторов удается компактно записать решения уравнений (3) с учетом геометрического расположения вспомогательных уравнений (4) в координатной системе на плоскости. Чтобы записать решения интегральных уравнений (4) в исходной системе координат xoy, надо воспользоваться решением $q_n(x,y)$ эталонного уравнения Винера – Хопфа, имеющего вид

$$\begin{gathered}\mathbf{K}q_n=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}k(x_n-\xi_n,y_n-\eta_n)q_n(\xi_n,\eta_n)d\xi_n d\eta_n=\\ =f_n(x_n,y_n),\ -\infty\le x_n\le\infty,\quad 0\le y_n\le\infty,\\ q_n(x_n,y_n)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x_n+\beta y_n)}d\alpha d\beta,\\ k(x_n,y_n)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x_n+\beta y_n)}d\alpha d\beta,\\ F_n(\alpha,\beta)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f_n(\xi_n,\eta_n)e^{i(\alpha x_n+\beta y_n)}d\xi_n d\eta_n,\quad n=1,2.\end{gathered} \tag{7}$$

Его решение в преобразованиях Фурье, строящееся традиционным методом Винера – Хопфа, представимо в форме

$$\begin{gathered}Q_n(\alpha,\beta)=K_{n+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{n-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)F_n(\alpha,\beta)\right\}_{+\beta}\equiv\\ \equiv K_n(\alpha,\beta)F_n(\alpha,\beta)-\\ -K_{n+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{n-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)F_n(\alpha,\beta)\right\}_{-\beta},\quad n=1,2.\end{gathered} \tag{8}$$

Чтобы воспользоваться этим решением для обращения интегральных уравнений (4), достаточно выполнить некоторые преобразования координат. Так, для получения решения $q_{11}(x,y)$ первого уравнения в (4) необходимо воспользоваться формулами (7), (8), внеся следующие замены

$$\begin{gathered}f_1(\alpha,y_1)\to f_1(\alpha,-c_1+y_1),\\ K_1(\alpha,\beta)\to K(\alpha,\beta),\quad q_{11}(x,y)\to q_1(x,y+c_1).\end{gathered} \tag{9}$$

Чтобы получить решение $q_{21}(x,y)$ второго уравнения, необходимо в формулах (7), (8) принять

$$\begin{gathered}f_2(\alpha,y_2)\to f_2(\alpha,c_1-y_2),\quad K_2(\alpha,\beta)\to K(\alpha,-\beta),\\ q_{21}(x,y)\to q_2(x,c_1-y)).\end{gathered} \tag{10}$$

Третье уравнение свертки решается применением преобразования Фурье по обеим координатам, и решение имеет вид

$$q_{31}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K^{-1}(\alpha,\beta)F_3(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta.$$

В результате после сокращений асимптотическое решение для полосового штампа при $c >> 1$ можно выписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}q(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ [\ Q_1(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}-\\ -Q_2(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta(y+c_1))}-\\ -Q_3(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta(c_1-y))}\ ]d\alpha d\beta+O(c_1^{-1})\\ Q_1(\alpha,\beta)=K^{-1}(\alpha,\beta)F(\alpha,\beta),\quad Q_2(\alpha,\beta)=\\ =K_{+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)F_1(\alpha,\beta)\right\}_{-\beta},\\ Q_3(\alpha,\beta)=K_{+\beta}^{-1}(\alpha,-\beta)\left\{K_{-\beta}^{-1}(\alpha,-\beta)F_2(\alpha,\beta)\right\}_{-\beta}.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь первый справа член представляет вырожденную составляющую решения, соответствующую случаю, когда у полосы удалены обе границы. Второй и третий члены описывают поведение контактных напряжений при приближении к границам $y=-c_1$ и $y=c_1$ соответственно. Концентрации контактных напряжений в области $|y|\le c_1$ описываются функциями $\left(\sqrt{y+c_1}\right)^{-1}$ и $\left(\sqrt{c_1-y}\right)^{-1}$ соответственно [19].

Контактная задача для полуполосового штампа

Используем описанный выше подход к построению асимптотического решения интегрального уравнения (3) для полуполосового штампа большой относительной ширины, $c>>1$. Введем в рассмотрение следующие три интегральных уравнения Винера – Хопфа:

$$\begin{gathered}
\mathbf{K}q_1=\int_0^{\infty}\int_{-c}^{\infty}k(x-\xi,y-\eta)q_1(\xi,\eta)d\xi d\eta=f_1(x,y),\\
f_1(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & 0\le x\le\infty, \quad |y|\le c\\ 0 & -\infty\le x\le 0,\ -\infty\le y\le -c,\ c\le y\le\infty,\end{cases}\\
\mathbf{K}q_2=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{c}k(x-\xi,y-\eta)q_2(\xi,\eta)d\xi d\eta=f_2(x,y),\ 0\le x\le\infty,\\
f_2(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & 0\le x\le\infty, \quad |y|\le c\\ 0 & -\infty\le x\le 0, \quad -\infty\le y\le -c, \quad c\le y\le\infty,\end{cases}\\
\mathbf{K}q_3=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(x-\xi,y-\eta)q_3(\xi,\eta)d\xi d\eta=f_3(x,y),\\
f_3(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & 0\le x\le\infty, \quad |y|\le c\\ 0, & 0\le x\le\infty, \quad |y|\ge c\\ 0, & -\infty\le x\le 0, \quad -\infty\le y\le\infty.\end{cases}
\end{gathered}\tag{12}$$

По аналогии с изложенным выше подходом асимптотическое решение рассматриваемой контактной задачи для полуполосы берется в виде

$$q(x,y)=q_{12}(x,y)+q_{22}(x,y)-q_{32}(x,y).\tag{13}$$

Для построения асимптотического решения о действии полуполосового штампа ширины $2c$ при $c>>1$ на анизотропную композитную слоистую среду, как и в случае полосового штампа, введем эталонное двумерное интегральное уравнение Винера – Хопфа, имеющее вид [28]

$$\begin{gathered}
\mathbf{K}q_n=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k(x_n-\xi_n,y_n-\eta_n)q_n(\xi_n,\eta_n)d\xi_n d\eta_n=f_n(x_n,y_n),\\
0\le x_n\le\infty, \quad 0\le y_n\le\infty,\\
q_n(x_n,y_n)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x_n+\beta y_n)}d\alpha d\beta,\\
k(x_n,y_n)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x_n+\beta y_n)}d\alpha d\beta,\\
F_n(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f_n(\xi_n,\eta_n)e^{i(\alpha x_n+\beta y_n)}d\xi_n d\eta_n, \quad n=1,2,
\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}
Q_n(\alpha,\beta)=K_n^{-1}F_n-\frac{1}{2}\big[\ K_{n+\alpha}^{-1}\big\{\ K_{n-\alpha}^{-1}F_n\ \big\}_{-\alpha}+\\
+K_{n+\beta}^{-1}\big\{\ K_{n-\beta}^{-1}F_n\ \big\}_{-\beta}+\\
+K_{n+\alpha+\beta}^{-1}\big\{\ K_{n+\alpha-\beta}^{-1}\big\{\ K_{n-\alpha}^{-1}F_n\ \big\}_{+\alpha}\ \big\}_{-\beta}+\\
+K_{n+\beta+\alpha}^{-1}\big\{\ K_{n+\beta-\alpha}^{-1}\big\{\ K_{n-\beta}^{-1}F\ \big\}_{+\beta}\ \big\}_{-\alpha}\ \big].
\end{gathered}$$

По аналогии с (9), (10) для случая полуполосы имеют место следующие соотношения для первого уравнения (12):

$$\begin{gathered}
f_1(x_1,y_1)=f(x_1,-c+y_1), \quad K_1(\alpha,\beta)=K(\alpha,\beta),\\
q_{12}(x,y)=q_1(x,y+c).
\end{gathered}$$

Для второго уравнения (12)

$$\begin{gathered}
f_2(x_2,y_2)=f(x_2,c-y_2), \quad K_2(\alpha,\beta)=K(\alpha,-\beta),\\
q_{22}(x,y)=q_2(x,c-y).
\end{gathered}$$

Для третьего интегрального уравнения в (12) решение строится непосредственным обращением уравнения методом Винера – Хопфа и имеет в преобразованиях Фурье вид

$$\begin{gathered}
q_{32}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta\\
Q(\alpha,\beta)=K_{+\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)F(\alpha,\beta)\right\}_{+\alpha}\equiv\\
\equiv K^{-1}(\alpha,\beta)F(\alpha,\beta)-\\
-K_{+\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)F(\alpha,\beta)\right\}_{-\alpha},\\
F(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f_3(\xi,\eta)e^{i(\alpha x+\beta y)}d\xi d\eta.
\end{gathered}$$

Внося в соотношение (13) выражения для решений уравнений (12) и произведя сокращения, в результате получим асимптотическое решение контактной задачи для полуполосы в виде

$$\begin{gathered}
q(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ \big[\ K^{-1}Fe^{-i(\alpha x+\beta y)}-\\
-\frac{1}{2}K_{1+\beta}^{-1}\big\{\ K_{1-\beta}^{-1}F_1\ \big\}_{-\beta}e^{-i(\alpha x+\beta(y+c))}+\\
-\frac{1}{2}K_{2+\beta}^{-1}\big\{\ K_{2-\beta}^{-1}F_2\ \big\}_{-\beta}e^{-i(\alpha x+\beta(c-y))}-\\
-K_{+\alpha}^{-1}\left\{K_{-\alpha}^{-1}F\right\}_{-\alpha}e^{-i(\alpha x+\beta y)}+\frac{1}{2}K_{1+\alpha}^{-1}\big\{\ K_{1-\alpha}^{-1}F_1\ \big\}_{-\alpha}e^{-i(\alpha x+\beta(y+c))}+\\
+\frac{1}{2}K_{2+\alpha}^{-1}\big\{\ K_{2-\alpha}^{-1}F_2\ \big\}_{-\alpha}e^{-i(\alpha x+\beta(c-y))}+\\
+\frac{1}{2}\big\langle\ K_{1+\alpha+\beta}^{-1}\big\{\ K_{1+\alpha-\beta}^{-1}\big\{\ K_{1-\alpha}^{-1}F_1\ \big\}_{+\alpha}\ \big\}_{-\beta}+\\
+K_{1+\beta+\alpha}^{-1}\big\{\ K_{1+\beta-\alpha}^{-1}\big\{\ K_{1-\beta}^{-1}F\ \big\}_{+\beta}\ \big\}_{-\alpha}\ \big\rangle e^{-i(\alpha x+\beta(y+c))}+\\
+\frac{1}{2}\big\langle\ K_{2+\alpha+\beta}^{-1}\big\{\ K_{2+\alpha-\beta}^{-1}\big\{\ K_{2-\alpha}^{-1}F_2\ \big\}_{+\alpha}\ \big\}_{-\beta}+\\
+K_{2+\beta+\alpha}^{-1}\big\{\ K_{2+\beta-\alpha}^{-1}\big\{\ K_{2-\beta}^{-1}F\ \big\}_{+\beta}\ \big\}_{-\alpha}\ \big\rangle e^{-i(\alpha x+\beta(c-y))}\ \big]d\alpha d\beta+O(c^{-1}).
\end{gathered}\tag{15}$$

Исследование решения контактной задачи для полуполосового штампа

Изучим роль каждого члена в представлении решения (15). Первый член в правой части решения (15), как и в (11), является вырожденной составляющей решения, к которой оно стремится при удалении от границ. Вторые члены функций под интегралом дают известную концентрацию контактных напряжений под прямолинейными боковыми границами штампа, как и в (11), описываемую функциями $\left(\sqrt{y+c}\right)^{-1}$, $\left(\sqrt{c-y}\right)^{-1}$ соответственно. Новыми, по сравнению с (11), являются четвертый, пятый и шестой члены, описывающие концентрацию контактных напряжений $q(x,y)$ функцией $\left(\sqrt{x}\right)^{-1}$ под прямолинейной торцевой границей полуполосового штампа. Показатели концентрации напряжений на прямолинейных участках одинаковые. Особый интерес представляют члены седьмой и восьмой, описывающие концентрацию контактных напряжений в нижней угловой точке границы штампа, а также девятый и десятый, дающие ее в верхней угловой точке. Ранее, в публикации [31], приближенным методом исследовалась концентрация контактных напряжений под клиновидным штампом при наличии его движения с кулоновским коэффициентом трения $p \ll 1$. Этот случай при отсутствии трения отвечает варианту изотропного основания, а при наличии трения –анизотропному. Результат расчета концентрации контактных напряжений под клиновидным штампом на дается рис. 3, где $\varepsilon = (1-2\nu)(2-2\nu)^{-1} p$, ν – коэффициент Пуассона.

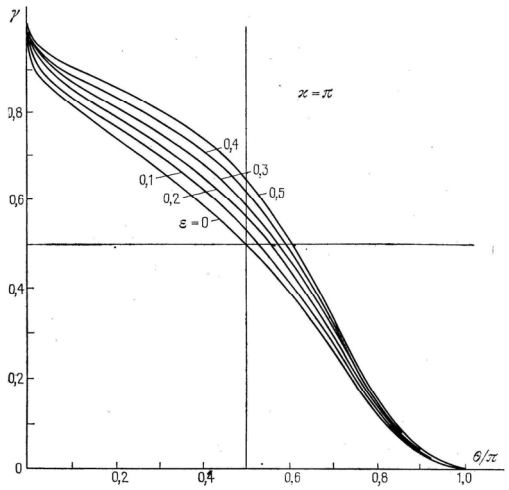


Рис. 3. Поведение параметра особенности γ в угловой точке штампа для разных коэффициентов ε, зависящих от коэффициента трения. Для сравнения с результатом статьи необходимо брать соответствующие значения ε при $\theta/\pi = 0,25$

Fig. 3. Behavior of feature parameter γ at the stamp corner point for different coefficients, depending on the friction coefficient. For comparison with the paper result, it is necessary to take the corresponding values of ε when $\theta/\pi = 0,25$

На рис. 3 приводятся графики особенностей в вершине клина для разных его растворов 2θ, $0 < \theta < \pi$, приближенно вычисленных в [31]. Чтобы сравнивать с прямым углом клина настоящей статьи, необходимо рассматривать случай $\theta/\pi = 0,25$. При $\varepsilon = 0$ трение штампа с основанием отсутствует и задача становится изотропной. Для этого, более простого случая, ниже детально демонстрируется выявление особенности в угловой точке штампа. Оно потребовало выполнения впервые возникший в контактных задачах двойной факторизации функции двух переменных. Именно двойная факторизация функций позволяет выявлять концентрацию контактных напряжений в угловых точках штампа. В качестве примера для случая $\varepsilon = 0$ покажем правило формирования седьмого члена подынтегральной функции для $q(x,y)$, когда функция $K(\alpha,\beta)$ обладает свойством (2) и имеет при больших α,β вид

$$K(\alpha,\beta) = (\alpha^2 + \beta^2 + A^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad A > 0.$$

Более сложные случаи функций $K(\alpha,\beta)$ факторизуются с помощью операторов (6).

При осуществлении факторизации по одному из параметров остальные находятся на вещественной оси. Факторизовав функцию $K(\alpha,\beta)$ по параметру α на верхнюю полуплоскость, получаем

$$K_{+\alpha}(\alpha,\beta) = \left[\ \alpha + i(\beta^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}\ \right]^{-\frac{1}{2}} = O(\alpha^{-\frac{1}{2}}), \quad A > 0.$$

Факторизацию функции $K_{+\alpha}(\alpha,\beta)$ по параметру β на верхнюю комплексную полуплоскость можно выполнить точно, в интегральном виде, нормализовав $K_{+\alpha}(\alpha,\beta)$ по β на бесконечности. Для этого рассмотрим функцию, стремящуюся к единице при $|\beta| \to \infty$. Имеем

$$G(\alpha,\beta) = \sqrt{i}(\beta^2 + c^2)^{\frac{1}{4}} K_{+\alpha}(\alpha,\beta) \to 1, \quad |\beta| \to \infty, \quad c = \text{const},$$

отсюда

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha,\beta) = (\beta + ic)^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln G(\alpha,\eta)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_\beta^+.$$

Тогда получаем оценку

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha,\beta) \to C(\beta + ic)^{-\frac{1}{4}} = O(\beta^{-\frac{1}{4}}), \quad |\beta| \to \infty.$$

Внося эти оценки в (15), асимптотически оценив интеграл, получим в результате несложного анализа для этого члена поведение вида

$$q_0(x,y) = O(r^{-\frac{3}{4}}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Показатель степени близок к значению на рис. 3 при $\theta/\pi = 0,25$ и $\varepsilon = 0$.

В анизотропном случае, $\varepsilon > 0$, функция $K(\alpha,\beta)$ имеет вид

$$K(\alpha,\beta) = (\alpha^2 + \beta^2 + A^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1 \pm \varepsilon \operatorname{sign}\alpha\right].$$

Двойная факторизация более сложная [29]. Она приводит к результату для разных $\varepsilon > 0$ вида

$$q_0(x,y) = O(r^{-\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}\theta}), \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = \pi^{-1}\operatorname{arctg}\varepsilon.$$

Показатель близок к значениям на рис. 3 при $\theta/\pi = 0,25$.

Таким образом, численный расчет подтверждает высокую точность асимптотического решения. В некоторых отраслях, где наличие угловой точки не принципиально, можно принимать штамп с закруглением. На закругленной границе по-прежнему будет оставаться концентрация контактных напряжений вида $\left(\sqrt{x}\right)^{-1}$. Однако имеются отрасли, особенно связанные с созданием элементной базы электроники, при использовании сверхминиатюрных полосковых линии передач и в других областях, где пренебрегать угловыми точками нельзя, их необходимо исследовать [27; 31].

Несмотря на кажущуюся близость по формулировке интегральных уравнений (1) и (2), их решения качественно и количественно отличаются. Более того, они описываются разными формулами. Отсюда следует, что решением, полученным разделением пополам носителя решения для полосы, можно пользоваться для полуполосы только в дальней от торца зоне.

Заключение

Впервые полученное в статье асимптотическое решение контактной задачи для полуполосового штампа на анизотропном композите доступно для численного анализа, как один из подходов вычислительной механики. Для этого достаточно вычислять только интегралы (15), применяя стандартные пакеты программ вычисления интегралов, не прибегая к необходимости обращения систем уравнений. Вычисление контактных напряжений может быть выполнено для перечисленных во введении областей, в том числе при оценке сейсмичности в зоне перехода горной гряды в равнину.

Для исследования был обобщен асимптотический метод, развитый ранее для аналогичной контактной задачи для полосового в плане штампа большой относительной ширины. В работе впервые получено в аналитическом виде асимптотическое представление контактных напряжений под штампом, имеющим форму полуполосы. Впервые установлено важное свойство аддитивного присутствия в решении членов, описывающих концентрации контактных напряжений в разных зонах границы штампа. Это открывает возможность управления типами концентраций контактных напряжений в разных частях границы штампа, варьируя воздействиями на штамп. Оно позволило произвести сопоставление решений, полученных для полосового и полуполосового штампов. В результате показана ошибочность замены решения для полуполосового штампа частью решения для полосового штампа, получаемого делением носителя полосового штампа.

Библиографический список

1. Ашкенази, Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов / Е.К. Ашкенази. – Л.: Машиностроение, 1969. – 362 с.

2. Горячева, И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.

3. Баженов, В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

4. Калинчук, В.В. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел / В.В. Калинчук, Т.И. Белянкова. –М.: Физматлит, 2002. – 240 с.

5. Колесников, В.И. Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов / В.И. Колесников, О.А. Беляк. – М.: Физматлит, 2021. – 265 с.

6. Liu, M. Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement / M. Liu, H. Huang // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 165. – P. 34–49.

7. Finite element homogenization of piezocomposites with isolated inclusions using improved 3-0 algorithm for generating representative volumes in Acelan-Compos package / A.B. Kudimova, D.K. Nadolin, A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, P.A. Oganesyan, A.N. Soloviev // Materials Physics and Mechanics. – 2020. – Vol. 44, № 3. – P. 392–403.

8. Zhou S. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity / S. Zhou, X.L. Gao // Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik. – 2013. – Vol. 64. – P. 145–166.

9. Constructing a Microcapacitor Network of Carbon Nanotubes in Polymer Blends via Crystallization-Induced Phase Separation Toward High Dielectric Constant and Low Loss / H.-J. Mao, D.-F. Liu, N. Zhang, T. Huang, I. Khnert, J.-H. Yang, Y. Wang // ACS Applied Materials & Interfaces. Article. – 2020. – Vol. 12, № 23. – P. 26444–26454.

10. A fractional differential scheme for the effective transport properties of multiscale reactive porous media: Applications to clayey geomaterials / Ph. Cosenza, R. Giot, A. Giraud, S. Hedan // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2021. – Vol. 45(14). – P. 2130–2154.

11. Беляк, О.А. Колебания штампа на поверхности гетерогенного слоя при учете трения в области контакта / О.А. Беляк, Т.В. Суворова // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, № 3. – С. 321–331.

12. Almqvist, A. An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem [Электронный ресурс]. – URL: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216 (дата обращения: 07.01.2025).

13. The flat stamp indentation into poroelastic liquid-saturated materials / A.N. Soloviev, A.S. Vasiliev, E.V. Sadyrin, A.S. Led-

nov // Mathematical Modeling, lnverse Problems and Big Data. – 2021. – P. 27–34.

14. Cocou, M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity / M. Cocou // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2015. – Vol. 22. – P. 508–519.

15. Торская, Е.В. Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями / Е.В. Торская/ – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. – 296 с.

16. Tsudik, E. Analysis of structures in elastic foundations / E. Tsudik. – Ross Publishing, 2013. – 585 p.

17. Айзикович, С.М. Приближенное аналитическое решение задачи о полосовом электроде на поверхности пьезоэлектроупругой полуплоскости с функционально - градиентным пьезоэлектроупругим покрытием / С.М. Айзикович, И.И. Кудиш // Проблемы прочности и пластичности. – 2019. – Т. 81, № 4. – С. 393–401.

18. Бабешко, В.А. О резонансах академика И.И. Воровича в контактных задачах с деформируемым штампом в сейсмологии / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2023. – № 4. – С. 4–12. DOI: 10.18522/1026-2237-2023-4-4-12

19. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М., 1974. – 456 с.

20. Sundar, U. Chennault Investigation of Piezoelectricity and Resistivity of Surface Modified Barium Titanate Nanocompositesm / U. Sundar, Z. Lao, K. Cook // Polymers. – 2019. – Vol. 11, № 12. – P. 2123.

21. Fabrication and characterization of highly porous barium titanate based scaffold coated by Gel/HA nanocomposite with high piezoelectric coefficient for bone tissue engineering applications / A. Ehterami, M. Kazemi, B. Nazari, P. Saraeian, M. Azami // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. – 2018. – Vol. 79. – P. 195–202

22. Saheb, N. Recent Advances and Future Prospects in Spark Plasma Sintered Alumina Hybrid Nanocomposites / N. Saheb, U. Hayat, S.F. Hassan // Nanomaterials. – 2019. – Vol. 9, № 11. – 1607 p.

23. Toozandehjani, M. Effect of milling time on the microstructure, physical and mechanical properties of Al-Al_2O_3 nanocomposite synthesized by ball milling and powder metallurgy / M. Toozandehjani, K.A. Matori, F. Ostovan, S.A. Aziz, S.M. Mamat // Materials. – 2017. – Vol. 10. – 1232 p.

24. Effect of semi-solid forging on microstructure and mechanical properties of in-situ cast Al Cu-TiB2 composites / J. Mathew, A. Mandal, S. Deepak Kumar, S. Bajpai, M. Chakraborty, G.D. West, P. Srirangam // J. Alloys Compd. – 2017. – Vol. 712. – P. 460–467.

25. Mavros, H. Solidification Observations and sliding wear behavior of cast TiC particulate-reinforced AlMgSi matrix composites / H. Mavros, A.E. Karantzalis, A. Lekatou // J. Compos. Mater. – 2013. – Vol. 47. – P. 2149–2162.

26. Size effects of graphene nanoplatelets on the properties of high-density polyethylene nanocomposites: morphological, thermal, electrical, and mechanical characterization / T. Evgin, A. Turgut, G. Hamaoui, Z. Spitalsky, N. Horny, M. Micusik, M. Chirtoc, M. Sarikanat, M. Omastova // Beilstein Journal of Nanotechnology. – 2020. – Vol. 11, №1. – P. 167–179.

27. Матвеенко, В.П. Анализ сингулярности напряжений в особых точках упругих тел из функционально градиентных материалов / В.П. Матвеенко, А.Ю. Федоров, И.Н. Шардаков // Доклады Академии наук. – 2016. Т. 466, № 1. – С. 38–42.

28. Точное решение задачи об акустике в произвольной многослойной среде при контактном взаимодействии с клиновидным штампом / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. – С. 5–11. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.01

29. Бабешко, В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости / В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

30. Ворович, И.И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И.И. Ворович, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхина. – М. Наука, 1999. – 246 с.

31. Бабешко, В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 344 с.

References

1. Ashkenazi E.K. Anizotropia mashinostroitelnih materialov [Anisotropy of machine-building materials]. L:. Mechanical engineering. 1969. 362 p. (In Russian).

2. Goryacheva I.G. Mehanika friksionnogo vzaimodeistvia [Mechanics of frictional interaction] / – M.: Nauka, 2001. – 478 p. (In Russian).

3. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. Metodi granichnih integralnih uravneni I granichnih elementov [Methods of boundary integral equations and boundary elements.] M. Physical education. 2008. 352 p. (In Russian).

4. Kalinchuk V.V., Belyankovat I.Dinamicheskie kontaktnie zadachi v prednapragennih telah [Dynamic contact problems for prestressed bodies]. Fizmatlit, 2002. – 240 p. (In Russian).

5. Kolesnikov V.I., Belyak O.A Matematicheskoe modelirovanie I eksperimentalnie issledovania ocnova konstruirovania gradientno antifriksionnih materialov.[Mathematical models and experimental studies – the basis for the design of heterogeneous antifriction materials] M. Fizmatlit 2021. 265 p. (In Russian).

6. Liu, M. Huang H. Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 165. – P. 34 – 49.

7. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganesyan P.A., Soloviev A.N. Finite element homogenization of piezocomposites with isolated inclusions using improved 3-0 algorithm for generating representative volumes in Acelan-Compos package // Materials Physics and Mechanics. – 2020. – Т. 44, № 3. – С. 392 – 403.

8. Zhou S., Gao X.L.: Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik 64:145-166, 2013.

9. Mao H.-J., Liu D.-F., Zhang N., Huang T., Khnert I., Yang J.-H., Wang Y. Constructing a Microcapacitor Network of Carbon Nanotubes in Polymer Blends via Crystallization-Induced Phase Separation Toward High Dielectric Constant and Low Loss // ACS Applied Materials & Interfaces. Article. – 2020. – Vol. 12, № 23. – P. 26444–26454.

10. Cosenza Ph., Giot R., Giraud A., Hedan S. A fractional differential scheme for the effective transport properties of multiscale reactive porous media: Applications to clayey geomaterials // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2021. – Vol. 45(14). – P. 2130–2154.

11. Belyak, O.A. Suvorova T.V. Kolebania stampa yf gjverhnosti geterogennogo sloia pri uchete trenia v oblasti kontakta [Stamp vibrations on the surface of a heterogeneous layer taking

into account friction in the contact area] // Applied Mathematics and mechanics. – 2021. –Vol. 85, No. 3. – pp. 321–331 (In Russian).

12. Almqvist A. An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem.http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216, 2013.

13. Soloviev A.N., Vasiliev A.S. Sadyrin E.V., Lednov A.S. The flat stamp indentation into poroelastic liquid-saturated materials // Mathematical Modeling, lnverse Problems and Big Data. – 2021. – C. 27-34.

14. Cocou M.: A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. // Nonlinear Analysis: Real World Applications 22:508-519, 2015.

15. Torskaya, E.V Modeli friksionnogo vzaimodeistvia tel s pokritiami [Models of frictional interaction of bodies with coatings]. M.-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2020. – 296 (In Russian).

16. Tsudik E. Analysis of structures in elastic foundations // Ross Publishing 2013. 585 p.

17. Aizikovich S.M., Kudish I.I. Pribligennoe analiticheskoe reshenie zadachi o polosovom electrode s funksionalno- gradientnim pezoelektrouprugim pokritiem [Approximate analytical solution of the problem of a plus electrode on the surface of a piezoelectroelastic half-plane with a functionally gradient piezoelectroelastic coating]. *Problems of strength and plasticity*. 2019. Vol. 81. No. 4. pp. 393-401 (In Russian).

18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O resonansah akademika I I Vorovicha v kontaktnih zadachah s deformiruemim shtampom v seismiligii [On resonances of academician I.I. Vorovich in contact problems with a deformable stamp in seismology] // *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Of course. science*. 2023. No. 4. pp. 4-12. doi: 10.18522/1026-2237-2023-4-4-12 (In Russian).

19 Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A. Neklassicheskie smeshannie zadachi teorii uprugosti [Nonclassical mixed problems of elasticity theory]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 456 p. (In Russian).

20. Sundar U., Lao Z., Cook K. Chennault Investigation of Piezoelectricity and Resistivity of Surface Modified Barium Titanate Nanocompositesm // *Polymers*. – 2019. – Vol. 11, № 12. – P. 2123.

21. Ehterami A., Kazemi M., Nazari B., Saraeian P., Azami M. Fabrication and characterization of highly porous barium titanate based scaffold coated by Gel/HA nanocomposite with high piezoelectric coefficient for bone tissue engineering applications. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* – 2018. – Vol. 79. – P. 195–202.

22. Saheb N., Hayat U., Hassan S.F. Recent Advances and Future Prospects in Spark Plasma Sintered Alumina Hybrid Nanocomposites. *Nanomaterials.* – 2019. – Vol. 9, № 11. – 1607p.

23. Toozandehjani M., Matori K.A., Ostovan F., Aziz S.A., Mamat S.M. Effect of milling time on the microstructure, physical and mechanical properties of Al-Al_2O_3 nanocomposite synthesized by ball milling and powder metallurgy. *Materials.* – 2017. – Vol. 10. – 1232 p.

24. Mathew J., Mandal A., Deepak Kumar S., Bajpai S., Chakraborty M., West G.D., Srirangam P. Effect of semi-solid forging on microstructure and mechanical properties of in-situ cast Al Cu-TiB2 composites. *J. Alloys Compd.* – 2017. – Vol. 712. – P. 460–467.

25. Mavros H., Karantzalis A.E., Lekatou A. Solidification Observations and sliding wear behavior of cast TiC particulate-reinforced AlMgSi matrix composites. *J. Compos. Mater.* – 2013. – Vol. 47. – P. 2149–2162.

26. Evgin T., Turgut A., Hamaoui G., Spitalsky Z., Horny N., Micusik M., Chirtoc M., Sarikanat M. and Omastova M. Size effects of graphene nanoplatelets on the properties of high-density polyethylene nanocomposites: morphological, thermal, electrical, and mechanical characterization. *Beilstein Journal of Nanotechnology.* – 2020. – Vol. 11, № 1. – P. 167–179.

27. Matveenko V.P., Fedorov A.Yu., Shardakov I.N. Analiz singularnosti napriajenii v osobih tochkah uprugih tel iz functionally gradient materialov [Analysis of stress singularity at special points of elastic bodies made of functionally gradient materials]. *Reports of the Academy of Sciences*. 2016. Vol. 466. No. 1. 2016. pp. 38-42 (In Russian).

28. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S.Tochnoe reshenie zadachi ob acoustike v proizvolnoi mnogosloinoi srede pri kontaktnom vzaimodeistvii s klinovidnim shtampom [The exact solution of the problem of acoustics in an arbitrary multilayer medium in contact with a wedge-shaped stamp] // *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University*. Mechanics. – 2023. – No. 4. pp. 5-11. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.01 (In Russian).

29. Babeshko V.A. Obobshenniy method faktorizasii v prostranstvennih cmeshannih zadachah teorii uprugosti [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. M.Nauka, 1984. 256 p. (In Russian).

30. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. Dinamika massivnih tel I resonansnie iavlenia v deformiruemih sredah [Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media] / M. Nauka 1999. 246 p. (In Russian).

31. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.Dinamika neodnorodnih lineino-uprugih sred [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. M.: Nauka. 1989. 344 p. (In Russian).

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation, regional project 24-11-20006.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.