Белянкова, Т.И. Особенности распространения SH-волн в биморфной пьезоэлектрической/пьезомагнитной пластине из функционально градиентных материалов / Т.И. Белянкова, Е.И. Ворович, В.В. Калинчук. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.02 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 2. – С. 14–29.

Perm Polytech Style: Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. Features of SH-Wave Propagation in a Bimorphic Piezoelectric/Piezomagnetic Plate Made of Functionally Graded Materials. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 2, pp. 14-29. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.02
УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ SH-ВОЛН В БИМОРФНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ/ПЬЕЗОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Т.И. Белянкова[1], Е.И. Ворович[2], В.В. Калинчук[1]

[1]Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 14 октября 2024 г.
Одобрена: 21 апреля 2025 г.
Принята к публикации:
30 мая 2025 г.

Ключевые слова:

функционально градиентный пьезоэлектрический материал, функционально градиентный пьезомагнитный материал, магнитоэлектроупругий материал, включение, локализация неоднородности, распространение волн, поверхностные акустические волны (ПАВ), сдвиговые горизонтально поляризованные поверхностные акустические волны (SH-ПАВ).

АННОТАЦИЯ

В квазистатическом приближении исследуются особенности распространения сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных акустических волн (SH-ПАВ) в составной магнитоэлектроупругой пластине из неоднородных пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев. При моделировании неоднородности слоев использована двухкомпонентная модель функционально градиентных материалов с изменением свойств по толщине от параметров основного материала до параметров материала включения. В качестве основных материалов пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев пластины использованы PZT-5H и $CoFe_2O_4$. Включения пьезоэлектрического слоя представляют собой керамику на основе PZT с различными упругими, пьезоэлектрическими и диэлектрическими свойствами. Неоднородность пьезомагнитного слоя моделирует твердый раствор материалов слоев в узкой переходной области у границы раздела. Распространение SH-ПАВ в пластине инициировано действием удаленного источника гармонических колебаний, режим которых полагается установившимся. На границе раздела неоднородных слоев выполнены условия сцепления. На внешних поверхностях, свободно контактирующих с вакуумом, в отсутствие механических напряжений рассмотрены четыре типа электрических и магнитных условий, в зависимости от которых анализируются четыре задачи. Решение строится в пространстве образов Фурье путем сведения к системе начально-краевых задач Коши. Получены удобные для численной реализации матричные представления дисперсионных уравнений задач. На примере задачи с электрически закороченными и магнитно- открытыми поверхностными условиями исследовано влияние характера неоднородности пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев пластины на особенности поведения скоростей SH-ПАВ в широком диапазоне частот. Определены особенности влияния локализации различных типов включений пьезоэлектрического слоя на их поведение. Установлены особенности поведения скоростей SH-ПАВ в магнитоэлектроупругой пластине при различных характеристиках неоднородности у границы раздела. Полученные результаты приведены в безразмерных параметрах и могут представлять особый интерес при разработке, проектировании и оптимизации новых материалов для современных микро- и наноразмерных приборов и устройств на SH ПАВ.

© **Белянкова Татьяна Ивановна** – к. ф.-м. н., доцент, в. н. с. ЮНЦ РАН, e-mail: tbelen415@mail.ru.
Ворович Елена Иосифовна – к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики ДГТУ.
Калинчук Валерий Владимирович – д.р ф.-м. н., член-корреспондент РАН, г. н. с. ЮНЦ РАН, e-mail: kalin@ssc-ras.ru.

Tatyana I. Belyankova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, SSC RAS, e-mail: tbelen415@mail.ru.
Elena I. Vorovich – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics of DSTU.
Valery V. Kalinchuk – Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department, SSC RAS, e-mail: kalin@ssc-ras.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

FEATURES OF SH-WAVE PROPAGATION IN A BIMORPHIC PIEZOELECTRIC/PIEZOMAGNETIC PLATE MADE OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS

T.I. Belyankova[1], E.I. Vorovich[2], V.V. Kalinchuk[1]

[1]Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 14 October 2024
Approved: 21 April 2025
Accepted for publication: 30 May 2025

Keywords:

functionally graded piezoelectric material, functionally graded piezomagnetic material, magnetoelectroelastic material, inclusion, localization of inhomogeneity, wave propagation, surface acoustic waves (SAW), shear horizontally polarized surface acoustic waves (SH-SAW).

ABSTRACT

Propagation of shear horizontally polarized surface acoustic waves (SH-SAW) in a composite magnetoelectroelastic plate of inhomogeneous piezoelectric and piezomagnetic layers are studied in a quasi-static approximation. To simulate inhomogeneity of the layers, a two-component model of functionally gradient materials with properties depending on thickness is used (ranging from parameters of the base material to the parameters of the inclusion material). PZT-5H and $CoFe_2O_4$ materials are used as a base of the piezoelectric and piezomagnetic layers of the plate. The inclusions of the piezoelectric layer are PZT-based ceramics with different elastic, piezoelectric, and dielectric properties. The inhomogeneity of the piezomagnetic layer models a solid solution of the layer materials in a narrow transition region at the interface. The propagation of SH-SAW in the plate is initiated by the action of a remote source of harmonic oscillations, the mode of which is assumed to be steady. The adhesion conditions are met at the interface of the inhomogeneous layers. On external surfaces freely contacting with vacuum, in the absence of mechanical stresses, four types of electrical and magnetic conditions are considered, depending on which four problems are studied. The solution is constructed in the space of Fourier images by reducing to a system of initial-boundary value Cauchy problems. Matrix representations of the dispersion equations of the problems convenient for the numerical implementation are obtained. By using an example of the problem with electrically short-circuited and magnetically open surface conditions, we investigated how inhomogeneity of the piezoelectric and piezomagnetic layers of the plate influences the behavior of SH-SAW velocities in a wide frequency range. We determined the influence of localization of various types of inclusions of the piezoelectric layer on their behavior. Features of the behavior of SH-SAW velocities in a magnetoelectroelastic plate are described for different characteristics of inhomogeneity at the interface. The obtained results are given in dimensionless parameters and can be of particular interest in the development, design and optimization of new materials for modern micro- and nanosized devices and devices using SH SAW.

Введение

Исследование физических явлений при взаимодействии акустических поверхностных и объемных волн с электрическими и магнитными полями в пьезоэлектрических, диэлектрических, полупроводниковых и магнитострикционных материалах [1–6] заложило основу их использования в различных приложениях методов неразрушающего контроля, количественной ультразвуковой и лазерной ультразвуковой диагностики, акустической микроскопии. Обзор современных магнитоэлектроупругих (МЭУ) материалов и устройств на их основе приведен в [7; 8]. В последние годы, благодаря развитию технологии получения и использованию высококачественных МЭУ материалов и пьезоэлектрических (ПЭ)/пьезомагнитных (ПМ) структур, все большее внимание уделяется изучению внешних и внутренних факторов, влияющих на изменение их свойств и особенности распространения акустических поверхностных и объемных волн. Для адекватной оценки пьезоэлектрического и магнитоэлектрического эффектов необходимо привлечение точных аналитических или численно-аналитических решений задач магнитоэлектроупругости. В [9; 10] получены аналитические решения задач магнитоэлектроупругости для трехмерных анизотропных однородных и многослойных прямоугольных пластин [9] и бесконечно протяженных многослойных пластин [10], испытывающих действие как поверхностных, так и внутренних нагрузок. В [11] определены типы электромагнитных условий на поверхности полупространства с гексагональной (6 mm) симметрией материала, допускающих распространение сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных акустических волн (SH-ПАВ). В [12] на примере составной пластины из пьезоэлектрических и упругих материалов аналитически исследуется процесс распространения SH-ПАВ. Численно-аналитический метод ортогональных полиномиальных разложений для изучения динамических характеристик слоистых МЭУ-структур предложен в [13; 14]. Подход к получению новой формы фундаментального решения трехмерных задач динамической магнитоэлектроупругости представлен в [15]. В [16–19] получены и исследованы особенности SH-ПАВ в композитных МЭУ-структурах с учетом магнитоэлектрического эффекта в

зависимости от параметров структуры и характера граничных условий. Проведено сравнение дисперсионных свойств трехслойных гетероструктур, выполненных из однородных ПЭ, ПМ и композитных слоев [16] в различном сочетании. В [17–19] исследованы особенности поведения SH-волн в композитных пластинах при различных электромагнитных условиях на свободных поверхностях. В [20–23] изучено поведение SH-волн в составных ПЭ/ПМ-пластинах при идеальных [20; 23] и неидеальных [21; 22] условиях на границе раздела. Показано влияние физических и геометрических параметров слоев на фазовые и групповые скорости первых мод скоростей SH-ПАВ, установлена возможность увеличения коэффициента магнитоэлектромеханической связи (КМЭМС) за счет изменения соотношения толщин слоев [23].

Появление и широкое использование новых высокотехнологичных функционально-ориентированных материалов с переменными свойствами привело к необходимости прогнозирования изменения их физических, технологических и прочностных качеств в зависимости от условий эксплуатации и характера внешних воздействий. Сложность возникающих при этом динамических задач состоит в невозможности построения аналитических решений для полуограниченных сред с изменяющимися в пространстве свойствами. Предположение о том, что все свойства материала изменяются по одной пространственной переменной с равной интенсивностью и одному закону приводит к существенному упрощению задачи, что исключает возможность качественной оценки результатов более сложного численного или численно-аналитического моделирования. В [24; 25] разработана теория распространения упругих волн в слоистой пластине с непрерывным и кусочно-непрерывным изменением свойств. Краевые задачи для пластины с различными условиями на внешних поверхностях приведены в терминах матриц переноса и импеданса, полученные дисперсионные уравнения анализируются как в обобщенном виде, так и в длинноволновом и коротковолновом приближениях. Сформулированы теоремы о поведении ветвей дисперсионных кривых для различных краевых задач слоисто-неоднородной пластины, высказано предположение о возникающем из-за анизотропии отталкивании ветвей дисперсионных кривых, приводящее к формированию террасирующих узоров в спектрах SH-волн неоднородных пластин. В [26] предложена математическая модель для исследования поведения волн Лява и SH-волн, распространяющихся в стратифицированных средах с моноклинной симметрией. Представлены аналитические и численные решения, полученные с применением метода модифицированной матрицы переноса и специального формализма. Для пластин из функционально градиентного пьезоэлектрического материала (ФГПЭМ) в [27] использован гибридный численный метод, основанный на сочетании метода быстрого преобразования Фурье и модального анализа. Исследовано влияние коэффициентов градиентности модулей при квадратичном изменении свойств материала по толщине. В [28] при решении краевых задач с электрически открытыми и закороченными условиями использованы функции Эри. В [29–34] предложен численно аналитический подход, в основе которого лежит сведение краевой задачи к системе начально-краевых задач Коши относительно компонент тензора напряжений и смещений в сочетании с использованием высокоточных численных схем восстановления их решения. Такой подход позволил исследовать особенности распространения волн в неоднородных упругих и электроупругих средах с монотонным, немонотонным и кусочно-непрерывным изменением свойств [29; 30]. В рамках предложенного подхода в [31; 32] реализованы двух- и трехкомпонентные модели функционально градиентных материалов (ФГМ), в которых значения параметров основного материала изменяются до значений параметров материалов включений. Показано влияние характера и локализации неоднородностей на особенности поведения SH-ПАВ. В [33; 34] в рамках двухкомпонентной модели для составной пластины из неоднородных ПЭ и диэлектрического (ДЭ) материалов исследовано влияние характера неоднородности слоев, градиентности включений и их локализации на дисперсионные свойства пластины и скорости SH-ПАВ. Для биморфных ПЭ/ПМ-пластин в [35] рассмотрено влияние свойств ПЭ-слоя на поведение скоростей SH-ПАВ и КМЭМС при различных электрических и магнитных условиях на внешних поверхностях. Показано влияние упругих, ПЭ и ДЭ характеристик слоя на изменение дисперсионных свойств составных пластин, особенности поведения различных мод SH-ПАВ и КМЭМС.

Влияние неоднородности в МЭУ-пластине на скорости SH-ПАВ исследовано в [36]. Представление механического перемещения, электрического и магнитного потенциалов получены путем решения уравнений связанного поля в случае экспоненциального изменения свойств материала по толщине. Рассмотрено влияние неоднородности материальных констант на фазовую скорость в узком диапазоне низких частот. В [37] получено решение задачи о распространении гармонических волн в МЭУ-пластинах из функционально градиентных пьезоэлектрического и магнитострикционного материалов с изменением свойств по степенному закону. Использован метод разложения в ортогональные ряды полиномов Лежандра, исследовано влияние учета ПЭ- и ПМ-эффекта на скорости распространения волн. В [38] приведены результаты исследований влияния функционально градиентного промежуточного слоя на скорости SH-ПАВ в слоистых ПЭ/ПМ-цилиндрах. Рассмотрены семь видов функциональных зависимостей изменения свойств промежуточного слоя и четыре вида электромагнитных поверхностных условий. Установлено, что высшие моды ПАВ более чувствительны к градиентности изменения свойств, низшие моды – к электрическим и магнитным поверхностным условиям.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния неоднородности ПЭ- и ПМ-слоев на распространение SH-ПАВ в составной МЭУ-пластине. Полагается, что

ПЭ-слой выполнен из различных видов керамики на основе PZT. Неоднородность ПМ слоя моделирует взаимопроникновение материалов слоев в узкой переходной области у границы раздела. На примере задачи с электрически закороченными и открытыми магнитными поверхностными условиями исследовано влияние характера неоднородности ПЭ- и ПМ-слоев пластины на скорости SH-ПАВ. Показано, что важную роль в их поведении играет не только характер, но и расположение неоднородности ПЭ слоя. Установлены особенности поведения скоростей в зависимости от характера неоднородности у границы раздела слоев.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о распространении в направлении x_1 SH-ПАВ в МЭУ-пластине, представляющей собой неоднородный ПЭ ($0 < x_2 < H_1, |x_1|, |x_3| \le \infty$) и неоднородный ПМ ($H_2 < x_2 < 0, |x_1|, |x_3| \le \infty$) слои, жестко сцепленные между собой, внешние поверхности свободно контактируют с вакуумом (рис.1).

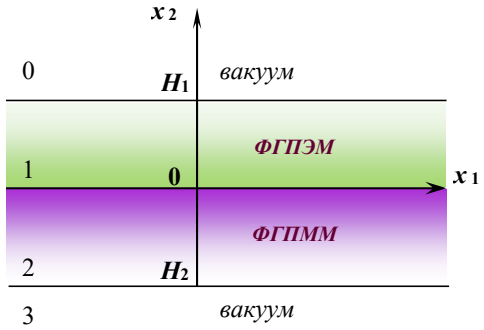


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Полагается, что неоднородные ПЭ- и ПМ-слои выполнены из ФГПЭМ и ФГПММ. Изменение свойств слоев по толщине определены выражениями ($n = 1,2$):

$$\begin{gathered}\rho^{(n)} = \rho_0^{(n)} F_\rho^{(n)}(x_2),\ c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{0(n)} F_c^{(n)}(x_2),\\ e_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{0(n)} F_e^{(n)}(x_2),\ \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{0(n)} F_\varepsilon^{(n)}(x_2),\\ f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{0(n)} F_f^{(n)}(x_2),\ \mu_{ij}^{(n)} = \mu_{ij}^{0(n)} F_\mu^{(n)}(x_2),\\ e_{ij}^{(2)} = 0,\ f_{ij}^{(1)} = 0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\rho_0^{(n)}$ – плотность, $c_{ij}^{0(n)}, e_{ij}^{0(n)}, f_{ij}^{0(n)}$ – компоненты тензоров упругих, ПЭ и ПМ констант, $\varepsilon_{ij}^{0(n)}, \mu_{ij}^{0(n)}$ – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости основных ПЭ (n = 1) и ПМ (n = 2) материалов пластины. Полагаем, что материалы слоев пластины имеют симметрию класса 6 mm, оси симметрии и поляризации направлены вдоль оси x_3. Распространение волн вызвано действием удаленного источника гармонических колебаний. С учетом характера движения среды, зависимость от времени для всех параметров задачи представляется в виде (ω – угловая частота):

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}.$$

Перемещения $u_k^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$, электрический $\varphi^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ и магнитный $\psi^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ потенциалы удовлетворяют условиям ($n = 1,2$)

$$\begin{gathered}u_1^{(n)} = 0,\ u_2^{(n)} = 0,\quad \partial(\cdot)/\partial x_3 = 0,\\ u_3^{(n)} = u_3^{(n)}(x_1, x_2) e^{-i\omega t},\ \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_1, x_2) e^{-i\omega t},\\ \psi^{(n)} = \psi^{(n)}(x_1, x_2) e^{-i\omega t}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Поскольку рассматривается установившийся режим гармонических колебаний, экспоненциальный множитель далее опущен.

В квазистатическом приближении движение составной МЭУ среды описывается уравнениями [3–5]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2},\ \nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0, \tag{1.3}$$

Компоненты тензора напряжений ($\tau_{lk}^{(n)}$) векторов электрической ($d_l^{(n)}$) и магнитной ($b_l^{(n)}$) индукции определены соотношениями ($k, l, s, p = 1,2,3;\ n = 1,2$):

$$\begin{aligned}\tau_{lk}^{(n)} &= c_{lksp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} + f_{lkp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)},\\ d_l^{(n)} &= e_{lsp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} - g_{lp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)},\\ b_l^{(n)} &= f_{lsp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} - g_{lp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} - \mu_{lp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Для вакуума справедливо ($m = 0,3$):

$$\Delta\varphi^{(m)} = 0,\ \Delta\psi^{(m)} = 0. \tag{1.5}$$

В выражениях (1.3)–(1.5) ∇ – оператор Гамильтона; $\mathbf{T}^{(n)}$, $\mathbf{D}^{(n)}$ и $\mathbf{B}^{(n)}$ – тензор напряжений, векторы индукции электрического и магнитного полей n-й составляющей структуры; $\mathbf{u}^{(n)}$ – вектор механических перемещений; $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ – электрический и магнитный потенциалы, определяющие векторы напряженности магнитного $\mathbf{H}^{(n)} = -\nabla\psi^{(n)}$ и электрического $\mathbf{E}^{(n)} = -\nabla\varphi^{(n)}$ полей; $\rho^{(n)}$ – плотность, $c_{lksp}^{(n)}, e_{lkp}^{(n)}, f_{lkp}^{(n)}$ – компоненты тензоров упругих ПЭ- и ПМ-констант, $\varepsilon_{lp}^{(n)}, \mu_{lp}^{(n)}$ – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости, $g_{lp}^{(n)}$ – компоненты тензора магнитоэлектрических констант материала n-й составляющей структуры. Участвующий в (1.5) оператор Лапласа с учетом (1.2) имеет вид $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$. Константы ПЭ- и ПМ-материалов симметрии 6mm в нотации Фойгта удовлетворяют условиям [3; 4]:

$$c_{1111}^{(n)}=c_{2222}^{(n)}=c_{11}^{(n)},\ c_{3333}^{(n)}=c_{33}^{(n)},\ c_{1122}^{(n)}=c_{2211}^{(n)}=c_{12}^{(n)},$$
$$c_{1133}^{(n)}=c_{3311}^{(n)}=c_{2233}^{(n)}=c_{3322}^{(n)}=c_{13}^{(n)},$$
$$c_{2323}^{(n)}=c_{2332}^{(n)}=c_{3223}^{(n)}=c_{3232}^{(n)}=c_{3113}^{(n)}=c_{3131}^{(n)}=c_{1313}^{(n)}=c_{1331}^{(n)}=c_{44}^{(n)},$$
$$c_{1212}^{(n)}=c_{1221}^{(n)}=c_{2112}^{(n)}=c_{2121}^{(n)}=0,5\left(c_{11}^{(n)}-c_{22}^{(n)}\right),$$
$$e_{131}^{(1)}=e_{311}^{(1)}=e_{113}^{(1)}=e_{15}^{(1)},\ e_{232}^{(1)}=e_{322}^{(1)}=e_{223}^{(1)}=e_{15}^{(1)},$$
$$e_{113}^{(1)}=e_{223}^{(1)}=e_{311}^{(1)}=e_{322}^{(1)}=e_{31}^{(1)},$$
$$e_{333}^{(1)}=e_{33}^{(1)},\ \varepsilon_{11}^{(1)}=\varepsilon_{22}^{(1)},\ \mu_{11}^{(1)}=\mu_{22}^{(1)},$$
$$f_{131}^{(2)}=f_{311}^{(2)}=f_{113}^{(2)}=f_{15}^{(2)},\ f_{232}^{(2)}=f_{322}^{(2)}=f_{223}^{(2)}=f_{15}^{(2)},$$
$$f_{113}^{(2)}=f_{223}^{(2)}=f_{311}^{(2)}=f_{322}^{(2)}=f_{31}^{(2)},$$
$$f_{333}^{(2)}=f_{33}^{(2)},\ \mu_{11}^{(2)}=\mu_{22}^{(2)},\ \varepsilon_{11}^{(2)}=\varepsilon_{22}^{(2)},\ g_{11}^{(n)}=g_{22}^{(n)}=g_{33}^{(n)}=g_{1}^{(n)}.$$

Следуя [18], полагаем, что магнитоэлектрические константы материалов $g_1^{(n)}=0$.

Замыкает постановку краевых задач о движении составной МЭУ среды задание граничных условий [4, 5]:

на границе раздела ФГПЭМ и ФГПММ слоев выполняются условия сцепления:

$$x_2=0:\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{T}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}^{(2)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(2)},\ \mathbf{B}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(2)},\ \mathbf{u}^{(1)}=\mathbf{u}^{(2)},\ \varphi^{(1)}=\varphi^{(2)},\ \psi^{(1)}=\psi^{(2)},\quad(1.6)$$

внешние поверхности структуры свободны от механических нагрузок:

$$x_2=H_1:\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{T}^{(1)}=0;\quad x_2=H_2:\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{T}^{(2)}=0.\quad(1.7)$$

В зависимости от типа электрических и магнитных условий на внешних поверхностях [5] рассмотрим следующие задачи:

I – электрически закрытая, магнитно-открытая задача (**so**):

$$x_2=H_1:\ \varphi^{(1)}=0,\ \psi^{(1)}=0;\quad x_2=H_2:\ \varphi^{(2)}=0,\ \psi^{(2)}=0.\quad(1.8)$$

II – электрически открытая, магнитно-закрытая задача (**os**):

$$x_2=H_1:\ \varphi^{(1)}=\varphi^{(0)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(0)},\ \psi^{(1)}=\psi^{(0)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(0)};\quad x_2=H_2:\ \varphi^{(2)}=\varphi^{(3)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(2)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(3)},\ \psi^{(2)}=\psi^{(3)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(2)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(3)}.\quad(1.9)$$

III – электрически и магнитно- открытая задача (**oo**):

$$x_2=H_1:\ \varphi^{(1)}=\varphi^{(0)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(0)},\ \psi^{(1)}=0;\quad x_2=H_2:\ \varphi^{(2)}=\varphi^{(3)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(2)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}^{(3)},\ \psi^{(2)}=0.\quad(1.10)$$

IV – электрически и магнитно-закрытая задача (**ss**):

$$x_2=H_1:\ \varphi^{(1)}=0,\ \psi^{(1)}=\psi^{(0)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(1)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(0)};\quad x_2=H_2:\ \varphi^{(2)}=0,\ \psi^{(2)}=\psi^{(3)},\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(2)}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}^{(3)}.\quad(1.11)$$

Здесь **N** – вектор нормали к поверхностям и границе раздела. Для удобства дальнейшего изложения введем расширенный вектор перемещений $\mathbf{u}^{em(n)}=\left\{u_3^{(n)},u_4^{(n)}=\varphi^{(n)},u_5^{(n)}=\psi^{(n)}\right\}$ n-й составляющей пластины. С учетом (1.2) и свойств материалов структуры отличные от нуля компоненты тензора напряжений и векторов электрической и магнитной индукции (1.4) принимают вид ($k=1,2;\ m=0,3$):

для РЕ

$$\tau_{k3}^{(1)}=c_{44}^{(1)}u_{3,k}^{(1)}+e_{15}^{(1)}u_{4,k}^{(1)},\quad d_k^{(1)}=e_{15}^{(1)}u_{3,k}^{(1)}-\varepsilon_{11}^{(1)}u_{4,k}^{(1)},\ b_k^{(1)}=-\mu_{11}^{(1)}u_{5,k}^{(1)};\quad(1.12)$$

для РМ

$$\tau_{k3}^{(2)}=c_{44}^{(2)}u_{3,k}^{(2)}+f_{15}^{(2)}u_{5,k}^{(2)},\ d_k^{(2)}=-\varepsilon_{11}^{(2)}u_{4,k}^{(2)},\quad b_k^{(2)}=f_{15}^{(2)}u_{3,k}^{(2)}-\mu_{11}^{(2)}u_{5,k}^{(2)};\quad(1.13)$$

для вакуума

$$d_2^{(m)}=-\varepsilon_0 u_{4,2}^{(m)},\ b_2^{(m)}=-\mu_0 u_{5,2}^{(m)}.\quad(1.14)$$

Здесь ε_0,μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Далее используются безразмерные параметры [35]:

$$l'=l/H,\ \rho'^{(n)}=\rho^{(n)}/\rho_0^{(2)},\ c_{ij}'^{(n)}=c_{ij}^{(n)}/c_{44}^{0(2)},$$
$$e_{ij}'^{(n)}=e_{ij}^{(n)}\xi_e/c_{44}^{0(2)},\ \varepsilon_{ij}'^{(n)}=\varepsilon_{ij}^{(n)}\xi_e^2/c_{44}^{0(2)},$$
$$f_{ij}'^{(n)}=f_{ij}^{(n)}\xi_m/c_{44}^{0(2)},\ \mu_{ij}'^{(n)}=\mu_{ij}^{(n)}\xi_m^2/c_{44}^{0(2)},$$
$$\varphi'^{(n)}=\varphi^{(n)}/\left(\xi_e H\right),\ \psi'^{(n)}=\psi^{(n)}/\left(\xi_m H\right),$$

где H – характерный линейный размер, $\xi_e=10^{10}$ [В/м], $\xi_m=10^7$ [А/м] – метрические множители, $\kappa_2=\omega H/V_S^{(2)}$ – безразмерная частота, $V_S^{(2)}=\sqrt{c_{44}^{0(2)}/\rho_0^{(2)}}$ – скорость объемной сдвиговой волны основного ПМ материала. Далее штрихи опущены.

С учетом новых обозначений, условий (1.1) и представлений (1.12)–(1.14) уравнения движения (1.3), (1.5) в безразмерных переменных принимают вид:

для неоднородного ПЭ-слоя:

$$\sum_{k=1}^{2}\left[c_{44}^{(1)}u_{3,kk}^{(1)}+e_{15}^{(1)}u_{4,kk}^{(1)}\right]+c_{44,2}^{(1)}u_{3,2}^{(1)}+e_{15,2}^{(1)}u_{4,2}^{(1)}=-\rho^{(1)}\kappa_2^2u_3^{(1)},$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[e_{15}^{(1)}u_{3,kk}^{(1)}-\varepsilon_{11}^{(1)}u_{4,kk}^{(1)}\right]+e_{15,2}^{(1)}u_{3,2}^{(1)}-\varepsilon_{11,2}^{(1)}u_{4,2}^{(1)}=0,\quad(1.15)$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[-\mu_{11}^{(1)}u_{5,kk}^{(1)}\right]-\mu_{11,2}^{(1)}u_{5,2}^{(1)}=0;$$

для неоднородного ПМ-слоя:

$$\sum_{k=1}^{2}\left[c_{44}^{(2)}u_{3,kk}^{(2)}+f_{15}^{(2)}u_{5,kk}^{(2)}\right]+c_{44,2}^{(2)}u_{3,2}^{(2)}+f_{15,2}^{(2)}u_{5,2}^{(2)}=-\rho^{(2)}\kappa_2^2u_3^{(2)},$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[-\varepsilon_{11}^{(2)}u_{4,kk}^{(2)}\right]-\varepsilon_{11,2}^{(2)}u_{4,2}^{(2)}=0,\quad(1.16)$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[f_{15}^{(2)}u_{3,kk}^{(2)}-\mu_{11}^{(2)}u_{5,kk}^{(2)}\right]+f_{15,2}^{(2)}u_{3,2}^{(2)}-\mu_{11,2}^{(2)}u_{5,2}^{(2)}=0;$$

для вакуума ($m = 0,3$):

$$\sum_{k=1}^{2} u_{4,kk}^{(m)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2} u_{5,kk}^{(m)} = 0. \tag{1.17}$$

Граничные условия (1.6)–(1.11) записываются в виде: механические условия на внешних поверхностях:

$$x_2 = H_1 : \ \tau_{23}^{(1)} = 0; \quad x_2 = H_2 : \ \tau_{23}^{(2)} = 0 ; \tag{1.18}$$

на границе раздела:

$$\begin{gathered} x_2 = 0 : \ \tau_{23}^{(1)} = \tau_{23}^{(2)}, \ d_2^{(1)} = d_2^{(2)}, \ b_2^{(1)} = b_2^{(2)}, \\ u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \ u_4^{(1)} = u_4^{(2)}, \ u_5^{(1)} = u_5^{(2)}. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Электрические и магнитные условия на внешних поверхностях:

I – электрически закрытая, магнитно-открытая задача (**so**):

$$\begin{gathered} x_2 = H_1 : \ u_4^{(1)} = 0, \ u_5^{(1)} = 0; \\ x_2 = H_2 : \ u_4^{(2)} = 0, \ u_5^{(2)} = 0. \end{gathered} \tag{1.20}$$

II – электрически открытая, магнитно-закрытая задача (**os**):

$$\begin{gathered} x_2 = H_1 : \ u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \ d_2^{(1)} = d_2^{(0)}, \ u_5^{(1)} = u_5^{(0)}, \ b_2^{(1)} = b_2^{(0)}; \\ x_2 = H_2 : \ u_4^{(2)} = u_4^{(3)}, \ d_2^{(2)} = d_2^{(3)}, \ u_5^{(2)} = u_5^{(3)}, \ b_2^{(2)} = b_2^{(3)}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

III – электрически и магнитно- открытая задача (**oo**):

$$\begin{gathered} x_2 = H_1 : \ u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \ \ d_2^{(1)} = d_2^{(0)}, \ u_5^{(1)} = 0; \\ x_2 = H_2 : \ u_4^{(2)} = u_4^{(3)}, \ \ d_2^{(2)} = d_2^{(3)}, \ u_5^{(2)} = 0. \end{gathered} \tag{1.22}$$

IV – электрически и магнитно- закрытая задача (**ss**):

$$\begin{gathered} x_2 = H_1 : \ u_4^{(1)} = 0, \ u_5^{(1)} = u_5^{(0)}, \ \ b_2^{(1)} = b_2^{(0)}; \\ x_2 = H_2 : \ u_4^{(2)} = 0, \ u_5^{(2)} = u_5^{(3)}, \ \ b_2^{(2)} = b_2^{(3)}. \end{gathered} \tag{1.23}$$

2. Решение задачи

Решение задач I – (1.15), (1.16), (1.18) – (1.20), II – (1.15) – (1.17), (1.18), (1.19), (1.21), III– (1.15) – (1.17), (1.18), (1.19), (1.22) и IV – (1.15) – (1.17), (1.18), (1.19), (1.23) строится в пространстве образов Фурье (α – параметр преобразования по координате x_1). Смещение, электрический и магнитный потенциалы для составляющих пластины и вакуума будем искать в виде ($p = 3,4,5$; $g = 4,5,6$; $s = 4,5$; $n = 1,2$):

$$\begin{gathered} U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{6} c_k^{(n)} y_{gk}^{(n)}(\alpha, x_2), \\ U_s^{(0)}(\alpha, x_2) = C_s^{(0)} e^{-\alpha x_2}, \ \ U_s^{(3)}(\alpha, x_2) = C_s^{(3)} e^{\alpha x_2}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Функции $y_{pk}^{(n)}(\alpha, x_2)$ в представлении (2.1) являются линейно независимыми решениями задач Коши с начальными краевыми условиями $y_{pk}^{(n)}(\alpha, 0) = \delta_{pk}$ для уравнений

$$\mathbf{Y}^{(n)'} = \mathbf{R}^{(n)}(\alpha, x_2)\mathbf{Y}^{(n)}, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\mathbf{\Sigma}}^{n} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^{n} \end{pmatrix}, \ \mathbf{Y}_{\mathbf{\Sigma}}^{n} = \left\{ \Theta_{23}^{F(n)}, D_2^{F(n)}, B_2^{F(n)} \right\}^T, \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^{n} = \left\{ U_3^{(n)}, U_4^{(n)}, U_5^{(n)} \right\}^T. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\Theta_{23}^{F(n)}$, $D_2^{F(n)}$, $B_2^{F(n)}$, $U_p^{(n)}$ – трансформанты Фурье компонент тензора напряжений, векторов электрической и магнитной индукции (1.12)–(1.14) и расширенного вектора смещений; δ_{pk} – символ Кронекера. Матрицы $\mathbf{R}^{(n)}(\alpha, x_2)$ имеют вид:

$$\mathbf{R}^{(1)}(\alpha, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(1)}\alpha^2 - \rho^{(1)}\kappa_2^2 & e_{15}^{(1)}\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(1)}\alpha^2 & -\varepsilon_{11}^{(1)}\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{11}^{(1)}\alpha^2 \\ \varepsilon_{11}^{(1)}/r_0^e & e_{15}^{(1)}/r_0^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{15}^{(1)}/r_0^e & -c_{44}^{(1)}/r_0^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\mu_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{R}^{(2)}(\alpha, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(2)}\alpha^2 - \rho^{(2)}\kappa_2^2 & 0 & f_{15}^{(2)}\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{11}^{(2)}\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{15}^{(2)}\alpha^2 & 0 & -\mu_{11}^{(2)}\alpha^2 \\ \mu_{11}^{(2)}/r_0^m & 0 & f_{15}^{(2)}/r_0^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\varepsilon_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{15}^{(2)}/r_0^m & 0 & -c_{44}^{(2)}/r_0^m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$r_0^e = c_{44}^{(1)}\varepsilon_{11}^{(1)} + \left(e_{15}^{(1)}\right)^2, \ \ r_0^m = c_{44}^{(2)}\mu_{11}^{(2)} + \left(f_{15}^{(2)}\right)^2.$$

Следует отметить, что уравнения (2.2) с обозначениями (2.3)–(2.5) представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го рода 6-го порядка с переменными коэффициентами. Линейно независимые решения таких систем строятся на основе численного решения набора задач Коши с начальными условиями при фиксированных значениях параметра α. Для их решения могут быть использованы различные численные методы. В настоящей работе, как и в работах [29–34], при решении (2.2) использован метод Рунге – Кутты – Мерсона 5-го порядка, с помощью которого восстанавливаются значения $y_{gk}^{(1)}(\alpha, x_2)$ на отрезке $x_2 \in [0, H_1]$ для ПЭ и $y_{gk}^{(2)}(\alpha, x_2)$ на отрезке $x_2 \in [0, H_2]$ для ПМ слоев. Далее, подставляя решения (2.1) в граничные условия задач I, II, III и IV, для вычисления неизвестных коэффициентов $c_k^{(n)}$ и $C_s^{(m)}$ получаем однородные системы линейных алгебраических уравнений. В зависимости от типа рассматриваемых задач условие нетривиальности решения приводит к дисперсионному уравнению задачи. Далее, после определения всех неизвестных и применяя к (2.1) обратное преобразование Фурье, получаем решение рассматриваемых задач.

3. Дисперсионные уравнения

Представим дисперсионные уравнения задач I, II, III и IV для составной МЭУ пластины в виде [33; 35]:

$$\det \mathbf{A}^{\mathbf{r}}\left(\alpha,\kappa_2\right)=0,\quad r=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}\,. \tag{3.1}$$

Структура и размерность матриц $\mathbf{A}^{\mathbf{r}}\left(\alpha,x_2\right)$ определяются граничными условиями рассматриваемых задач (1.18)–(1.23):

$$\mathbf{A}^{\mathbf{I}}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{I}}\left(H_1\right) & 0\\ \mathbf{P}_{\mathbf{e}}\left(0\right) & -\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\left(0\right)\\ 0 & \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{I}}\left(H_2\right)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{II}}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{II}}\left(H_1\right) & 0 & \mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_1\right) & 0\\ \mathbf{P}_{\mathbf{e}}\left(0\right) & -\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\left(0\right) & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{II}}\left(H_2\right) & 0 & \mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_2\right)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{III}}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{III}}\left(H_1\right) & 0 & \mathbf{G}_{\mathbf{e}}\left(H_1\right) & 0\\ \mathbf{P}_{\mathbf{e}}\left(0\right) & -\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\left(0\right) & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{III}}\left(H_2\right) & 0 & \mathbf{G}_{\mathbf{e}}\left(H_2\right)\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{IV}}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{IV}}\left(H_1\right) & 0 & \mathbf{G}_{\mathbf{m}}\left(H_1\right) & 0\\ \mathbf{P}_{\mathbf{e}}\left(0\right) & -\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\left(0\right) & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{IV}}\left(H_2\right) & 0 & \mathbf{G}_{\mathbf{m}}\left(H_2\right)\end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{A}^{\mathbf{III}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{IV}}$ имеют размерность 14×14, $\mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{II}}$ – соответственно 12×12 и 16×16. Матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{e}}\left(0\right)$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\left(0\right)$, в силу условий сцепления на границе раздела (1.19) и принятых начальных условий задачи Коши для уравнения (2.2), являются единичными матрицами размерности 6×6: $\mathbf{P}_{\mathbf{e}}\left(0\right)=\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\left(0\right)=\mathbf{I}$. С учетом (2.1) матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{II}}\left(H_1\right)$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{II}}\left(H_2\right)$ размерности 5×6 имеют вид:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{II}}\left(H_n\right)=\begin{pmatrix}y_{11}^{(n)} & y_{12}^{(n)} & y_{13}^{(n)} & y_{14}^{(n)} & y_{15}^{(n)} & y_{16}^{(n)}\\ y_{21}^{(n)} & y_{22}^{(n)} & y_{23}^{(n)} & y_{24}^{(n)} & y_{25}^{(n)} & y_{26}^{(n)}\\ y_{51}^{(n)} & y_{52}^{(n)} & y_{53}^{(n)} & y_{54}^{(n)} & y_{55}^{(n)} & y_{56}^{(n)}\\ y_{31}^{(n)} & y_{32}^{(n)} & y_{33}^{(n)} & y_{34}^{(n)} & y_{35}^{(n)} & y_{36}^{(n)}\\ y_{61}^{(n)} & y_{62}^{(n)} & y_{63}^{(n)} & y_{64}^{(n)} & y_{65}^{(n)} & y_{66}^{(n)}\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

В обозначениях матриц $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}}\left(H_n\right),\left(r=I,II,III,IV\right)$ нижнему индексу $s=e$ отвечает индекс $n=1$, нижнему индексу $s=m$ – индекс $n=2$.

Матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{I}}$ размерности 3×6, $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{III}}$ размерности 4×6 и $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{IV}}$ размерности 4×6 получаются из матриц $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{II}}$ следующим образом: $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{I}}$ – за счет вычеркивания 2-й и 4-й строк, $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{III}}$ – только 4-й строки, $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{IV}}$ – только 2-й строки.

Матрицы $\mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_1\right)$ и $\mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_2\right)$ в (3.2) размерности 5×2 с учетом представлений (1.14), (2.1) и граничных условий (1.21) имеют вид:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_1\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\varepsilon_0\alpha\gamma^{(1)} & 0\\ -\gamma^{(1)} & 0\\ 0 & -\mu_0\alpha\gamma^{(1)}\\ 0 & -\gamma^{(1)}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_2\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varepsilon_0\alpha\gamma^{(2)} & 0\\ -\gamma^{(2)} & 0\\ 0 & \mu_0\alpha\gamma^{(2)}\\ 0 & -\gamma^{(2)}\end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $\gamma^{(1)}=e^{-\alpha H_1}$, $\gamma^{(2)}=e^{\alpha H_2}$. Векторы $\mathbf{G_e}(H_1)$, $\mathbf{G_e}(H_2)$ получаются из матриц $\mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_1\right)$ и $\mathbf{G}_{\mathbf{em}}^{\mathbf{II}}\left(H_2\right)$ путем вычеркивания 2-го столбца и 4-й строки, $\mathbf{G_m}(H_1)$, $\mathbf{G_m}(H_2)$ – путем вычеркивания 1-го столбца и 2-й строки.

4. Численный анализ

Для исследования особенностей распространения SH-ПАВ в биморфной пластине из ФГПЭМ/ФГПММ рассмотрена двухкомпонентная модель ФГМ [31; 32]. В рамках модели свойства изменяются по толщине от параметров основного материала до параметров материала включения. В качестве основных материалов ПЭ- и ПМ-слоев использованы пьезокерамика PZT-5H (m_1) [3] и высокоскоростной пьезомагнитный материал $CoFe_2O_4$ (m_4) [10; 23]. При выборе материалов включений ПЭ-слоя – m_2 (PZT DL-61HD [39]) и m_3 (гипотетический материал) учитывалось незначительное различие упругих модулей при существенном разбросе пьезоэлектрических и диэлектрических констант. Скоростные характеристики включений определялись условиями $\left|V_S^{m_1}-V_S^{m_2}\right|\approx\left|V_S^{m_1}-V_S^{m_3}\right|$ и $\left|V_{Se}^{m_1}-V_{Se}^{m_2}\right|\approx\left|V_{Se}^{m_1}-V_{Se}^{m_3}\right|$. Неоднородность ПМ-слоя моделировала проникновение ПЭ-материала в узкой области у границы раздела. В рамках этого подхода упругие параметры материалов включений ПМ-слоя m_{41}, m_{42} и m_{43} выбирались равными упругим параметрам m_1, m_2 и m_3 и сохранялось соотношение скоростных характеристик включений слоев, в частности $V_S^{m_1}/V_S^{m_2}\approx V_S^{m_{41}}/V_S^{m_{42}}$, $V_S^{m_1}/V_S^{m_3}\approx V_S^{m_{41}}/V_S^{m_{43}}$. Параметры материалов и скорости сдвиговых волн без учета и с учетом ПЭ и ПМ свойств приведены в таблице.

В таблице: $V_S=\sqrt{c_{44}/\rho}$, $V_{Se}=\sqrt{\left(c_{44}+\left(e_{15}\right)^2/\varepsilon_{11}\right)/\rho}$, $V_{Sm}=\sqrt{\left(c_{44}+\left(f_{15}\right)^2/\mu_{11}\right)/\rho}$.

Следуя [31–34], участвующие в (1.1) функции $F_s^{(n)}$, $s=\rho,c,e,\varepsilon,f,\mu$ представим в виде:

$$F_s^{(n)}=g_s^1+g_s^2F\left(x_2\right). \tag{4.1}$$

Параметры g_s^1, g_s^2 – определены значениями модулей основного материала и материалов включений; $F(x_2)$ – функциональная зависимость изменения параметров по толщине слоя, которая определяет локализацию включения и размер зоны перехода одного материала в другой.

В рамках двухкомпонентных моделей исследованы:

– пластины ФГПЭМ/ПМ с различной локализацией включений по толщине ПЭ-слоя:

m_1-m_2/m_4 – неоднородный ПЭ-слой m_1 с высокоскоростным включением m_2 и однородный ПМ-слой m_4;

m_1-m_3/m_4 – неоднородный ПЭ-слой m_1 с низкоскоростным включением m_3 и однородный ПМ слой m_4.

– пластины ФГПЭМ/ФГПММ (включения ПМ- и ПЭ-слоев расположены в окрестности границы раздела.):

m_1/m_{41}-m_4 – однородный ПЭ-слой m_1 и неоднородный ПМ-слой m_4 с включением m_{41};

m_1-m_2/m_{42}-m_4 – неоднородный ПЭ-слой m_1 с включением m_2 и неоднородный ПМ-слой m_4 с включением m_{42};

m_1-m_3/m_{43}-m_4 – неоднородный ПЭ-слой m_1 с включением m_3 и неоднородный ПМ-слой m_4 с включением m_{43}.

Функциональные зависимости изменения свойств по толщине рассматриваемых пластин приведены на рис. 2.

Параметры материалов

Material parameters

Параметр	m_1	m_2	m_3	m_4	m_{41}	m_{42}	m_{43}
ρ [кг/м^3]	7500	8200	7560	5300	6150	7900	6160
$c_{44} \times 10^{10}$ [Н/м^2]	2.3	3.9	1.32	4.53	2.3	3.9	1.32
e_{15} [Кл/м^2]	17	33.1	6.46	0	0	0	0
$\varepsilon_{11} \times 10^{-10}$ [Кл^2/(Н·м^2)]	151	249	80.6	0.8	24	45	16
f_{15} [Н/(А·м)]	0	0	0	550	300	450	200
$\mu_{11} \times 10^{-6}$, [Н·с^2/Кл^2]	5	5	5	-590	-150	-470	-80
V_S [м/с]	1751	2181	1321	2924	1934	2222	1464
V_{Se}, [м/с]	2370	3182	1559				
V_{Sm}, [м/с]				2907	1908	2210	1436

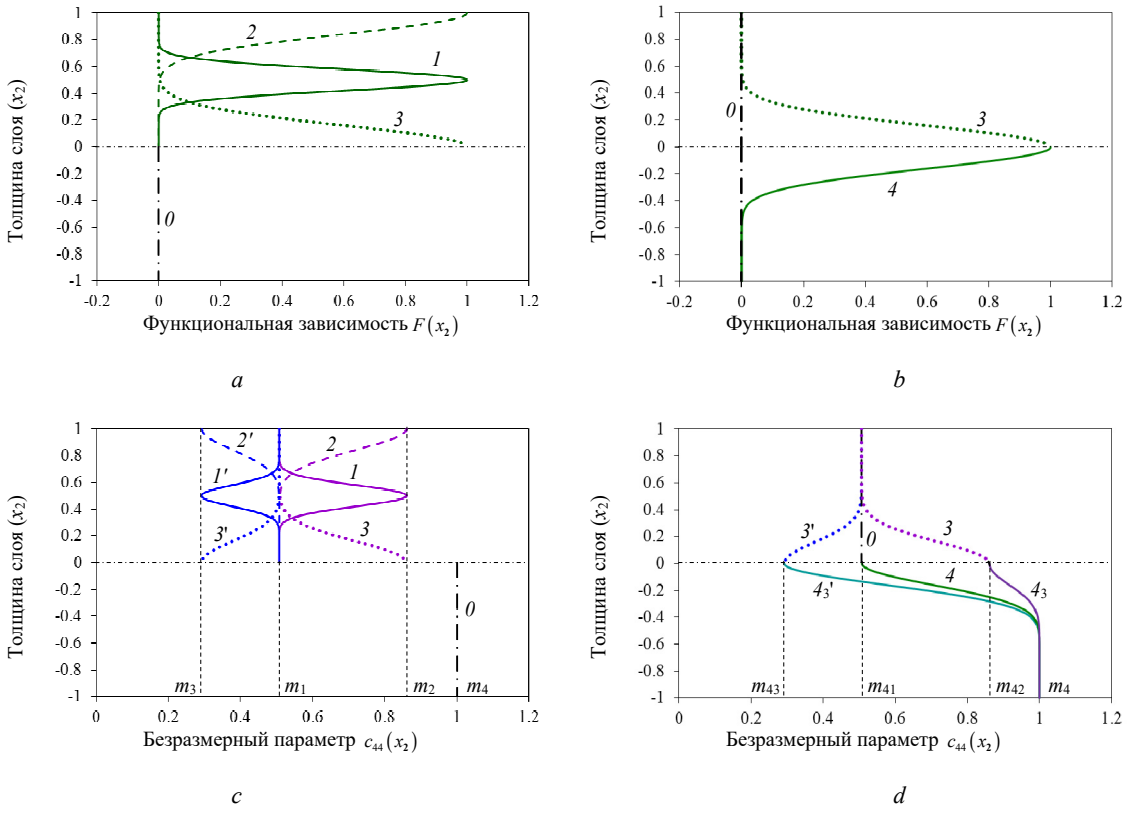


Рис. 2. Графики функциональных зависимостей изменения свойств в пластине: *a* – изменение свойств в ПЭ-слое; *b* – изменение свойств в ПЭ- и ПМ-слоях; *c, d* – изменение $c_{44}(x_2)$ по толщине пластины

Fig. 2. Graphs of functional dependencies of changes in properties in the plate: *a* – changes in properties in the PE layer; *b* – changes in properties in the PE and PM layers; *c, d* – changes in $c_{44}(x_2)$ across the plate thickness

На рис. 2, *a*, *b*, представлены функциональные зависимости изменения свойств ПЭ-слоя с однородным (см. рис. 2, *a*) и неоднородным (см. рис. 2, *b*) ПМ-слоем пластины. Цифрами *1*, *2*, *3* на рисунках отмечены кривые с локализацией неоднородности ПЭ-слоя в середине (сплошная линия *1*), у внешней поверхности (штриховая линия *2*) и у границы раздела (пунктирная линия *3*). Кривая *4* (сплошная линия, см. рис. 2, *b*) отвечает изменению свойств ПМ слоя с локализацией неоднородности у границы раздела. Цифрой *0* (штрихпунктирные линии) на рисунках отмечены кривые для однородных материалов. На рис. 2, *c*, *d*, показано изменение безразмерного параметра $c_{44}(x_2)$ по толщине пластины в случае ФГПЭМ/ПМ (см. рис. 2, *c*) и ФГПЭМ/ФГППММ (см. рис. 2, *d*). На рис. 2, *c*, локализация включений m_2 (кривые *1*, *2*, *3*) и m_3 (кривые 1', 2', 3') отмечена сплошными, штриховыми и пунктирными линиями в соответствии с рис. 2, *a*. На рис. 2, *d*, изменение $c_{44}(x_2)$ в случае пластины m_1/m_{41}–m_4 отмечено штрихпунктирной линией *2* и сплошной линией *4*, в случае m_1–m_2/m_{42}–m_4 – пунктирной линией *3* и сплошной линией 4_3, в случае m_1–m_3/m_{43}–m_4 – пунктирной линией 3' и сплошной линией $4_{3'}$.

Из графиков следует, что свойства биморфной пластины из неоднородных материалов определяются как характером изменения параметров материала, типом, величиной и расположением неоднородности ($F(x_2)$), так и соотношением параметров основного материала и материалов включений (g_s^1, g_s^2 (4.1)).

Влияние характера и локализации неоднородности биморфной пластины на особенности распространения SH-ПАВ демонстрируются на примере задачи I (so) с электрически закрытыми и магнитно-открытыми условиями на внешних поверхностях. На рисунках приведены зависимости относительных фазовых скоростей $V_F^I / V_S^{(2)}$ от частоты κ_2 ($V_F^r = \kappa_2 / \zeta^r$, $r = \text{I, II, III, IV}$, ζ^r – нули дисперсионного уравнения (3.1) с обозначениями (3.2) – (3.4)).

4.1. Влияние области локализации неоднородности ПЭ-слоя

На рис. 3, *a*–*d*, показано влияние локализации включения на фазовые скорости V_F^I SH-ПАВ в случае m_1–m_2/m_4. Расположение неоднородности отмечено сплошными, штриховыми и пунктирными линиями, соответствующими кривым *1*, *2*, *3* на рис. 2, *a*, *c*. Штрихпунктирная линия на рис. 2, *b*–*d*, отвечает пластине m_1/m_4. На рис. 3, *b*–*d*, приведено изменение скоростей 1-х, 2-х и 3-х мод.

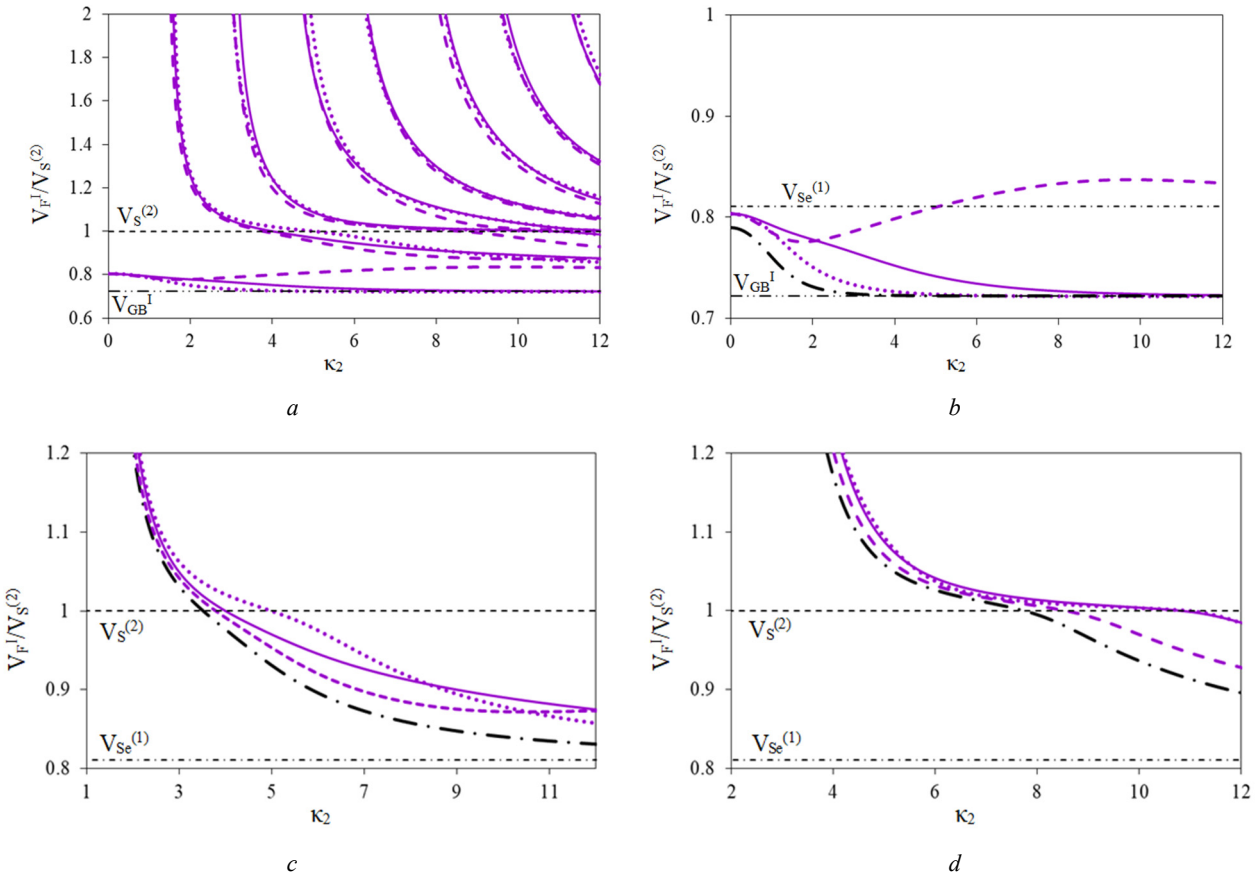


Рис. 3. Влияние локализации высокоскоростного включения на скорости SH-ПАВ: *a*, *b*, *c*, *d* – скорости 1-х, 2-х и 3-х мод

Fig. 3. Effect of high-speed inclusion localization on SH-SAW velocities: *a*, *b*, *c*, *d* are the velocities of 1st, 2nd and 3rd modes

Из анализа рис. 3, *a–d*, следует, что влияние локализации неоднородности носит сложный характер и по-разному сказывается на поведении скоростей в различных диапазонах частот. Для высокоскоростного включения m_2 характерно: в области частот выхода 2-й и 5-й мод влияние локализации невелико, на частоты выхода 3-й и 7-й мод в большей степени влияет срединная, 4-й и 8-й мод – приграничная локализация (см. рис. 3, *a*). По сравнению с пластиной m_1/m_4, в данном случае частоты выхода мод сдвигаются в область более высоких значений. Начиная с 6-й моды, сдвиг становится существенным. Для 1-х мод (см. рис. 3, *b*) – начальное значение V_F^I больше начального значения скорости в пластине с m_1/m_4 (штрихпунктирная линия). С ростом частоты в случаях приграничной и срединной локализации (пунктирная и сплошная линии) скорость V_F^I уменьшается до значения V_{GB}^I (скорость волны Гуляева – Блюштейна в материале m_1 с коротко замкнутой поверхностью [4]). При поверхностной локализации (штриховая линия) после падения V_F^I в низкочастотном диапазоне наблюдается ее рост до максимального значения превышающего $V_{Se}^{(1)}$ и последующее постепенное уменьшение V_F^I на более высоких частотах. Для 2-х мод (см. рис. 3, *c*) при любом расположении m_2 асимптотические значения V_F^I превосходят $V_{Se}^{(1)}$. Влияние локализации сказывается в области средних и высоких частот. Для 3-х мод (см. рис. 3, *d*) в случае приграничной и срединной локализации включения в окрестности $V_S^{(2)}$ наблюдается появление «террасных» участков – диапазонов частот, на которых V_F^I изменяются незначительно $V_F^I \approx V_S^{(2)}$.

На рис. 4, *a–d*, продемонстрировано влияние локализации включения на фазовые скорости SH-ПАВ в случае m_1–m_3/m_4. Сплошными, штриховыми и пунктирными линиями отмечено расположение неоднородности в середине ПЭ-слоя, у поверхности и границы раздела слоев (кривые *1*, *2*, *3* на рис. 2, *a*, и кривые *1'*, *2'*, *3'* на рис. 2, *c*). На рис. 4, *b – d*, представлено поведение скоростей 1-х, 2-х и 3-х мод. Штрихпунктирной линией отмечено поведение скоростей в случае пластины m_1/m_4.

Из анализа рис. 4, *a – d*, следует что наличие низкоскоростного включения m_3 в ПЭ-слое сдвигает частоты выхода мод SH-ПАВ в сторону более низких значений по сравнению с пластиной m_1/m_4. С ростом номера моды, начиная с 5-й, сдвиг частоты выхода становится значительным.

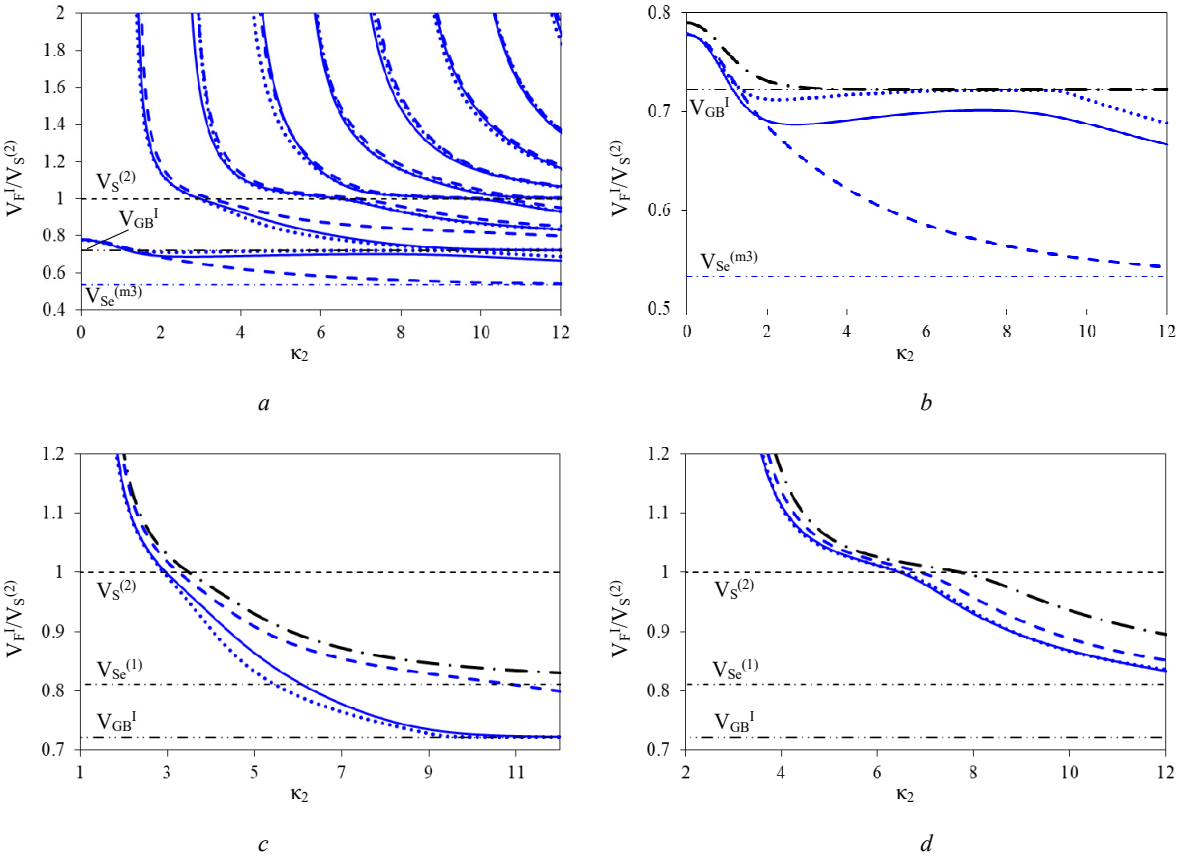


Рис. 4. Влияние локализации низкоскоростного включения на скорости SH-ПАВ: *a*, *b*, *c*, *d* – скорости 1-х, 2-х и 3-х мод

Fig. 4. Effect of low-speed inclusion localization on SH-SAW velocities: *a*, *b*, *c*, *d* are the velocities of 1st, 2nd and 3rd modes

Отметим, что влияние локализации включения на сдвиг частот выхода мод ПАВ носит неравномерный характер, т.е. в зависимости от расположения неоднородности меняется диапазон частот между выходом различных мод ПАВ. Для 1-х мод (см. рис. 4, *b*) – начальное значение V_F^I меньше начального значения скорости в пластине m_1/m_4 (штрихпунктирная линия), определяется параметрами включения и не зависит от его локализации. С ростом частоты в случае поверхностного расположения включения m_3 скорость V_F^I падает, приближаясь к значению $V_{Se}^{(m_3)}$. В случае приграничной локализации после падения скорости в области низких частот наблюдается диапазон частот, в котором $V_F^I \approx V_{GB}^I$, скорости 1-й и 2-й мод принимают близкие значения. Дальнейшее увеличение частоты приводит к выходу 2-й моды на значение скорости V_{GB}^I, скорость 1-й моды становится меньше. При срединной локализации этот эффект менее выражен. Для 3-х мод характерно более быстрое по сравнению с пластиной m_1/m_4 падение скорости до $V_{Se}^{(1)}$, перегиб в окрестности $V_S^{(2)}$ происходит на более низких частотах (см. рис. 4, *d*).

Из сравнения рис. 3, *a*, и рис. 4, *a* видно, что наличие как m_2, так и m_3 включений в ПЭ-слое приводит к появлению в окрестности $V_S^{(2)}$ «террасных» участков. На рис. 5, *a*, *b*, приведены фрагменты рис. 3, *a*, и рис. 4, *a*, для скоростей 2-х, 3-х, 4-х и 5-х мод ПАВ в окрестности $V_S^{(2)}$.

Из рисунков видно, что в случае пластины m_1–m_2/m_4 с приграничной или срединной локализацией включения «террасные» участки в окрестности $V_S^{(2)}$ появляются на 3-й моде ПАВ (см. рис. 5, *a*). В случае m_1–m_3/m_4 такие участки появляются на 5-й моде, в случае пластины m_1/m_4 – на 4-й моде ПАВ. Следует отметить, что результаты, полученные для скоростей SH-ПАВ МЭУ пластины ФГПЭМ/ПМ, хорошо согласуются с результатами [34] для пластины с неоднородными ПЭ- и ДЭ-слоями с учетом различий параметров ПМ- и ДЭ-слоев.

4.2. Влияние неоднородности ПЭ и ПМ слоев

На рис. 6 и 7 проиллюстрировано влияние характера неоднородности пластины ФГПЭМ/ФГППММ на скорости SH-ПАВ. Функциональные зависимости изменения свойств по толщине соответствуют зависимостям рис. 2, *b*, и изменению параметров рис. 2, *d*. Сплошными линиями отмечены скорости в пластинах m_1/m_{41}–m_4 (кривые *1* на рис. 6, *a*, *b*), m_1-m_2/m_{42}-m_4 (кривые 2 на рис. 6, *c*, *d*) и m_1–m_3/m_{43}–m_4 (кривые *3* на рис. 6, *e*, *f*). Для сравнения пунктирными линиями отмечены скорости SH-ПАВ пластины m_1–m_2/m_4 (кривые *4*, рис. 6, *c*, *d*) и пластины m_1–m_3/m_4 (кривые *5*, рис. 6, *e*, *f*). Штрихпунктирные линии на рис. 6, *a*, *b*, отвечают скоростям пластины m_1/m_4. На рис. 6, *b*, *d*, *f*, представлены соответственно фрагменты рис. 6, *a*, *b*, *c*, для скоростей 2-х, 3-х, 4-х и 5-х мод ПАВ в окрестности $V_S^{(2)}$.

Из рис. 6, *a*–*f* видно, что наличие неоднородностей ПЭ- и ПМ-слоев, расположенных у границы раздела в биморфной пластине, приводит к сдвигу частот выхода новых мод и частот (κ_{ni}^0) пересечения скоростей ПАВ с $V_S^{(2)}$ в сторону более низких значений. С ростом частоты сдвиг увеличивается. Имеет место падение скоростей SH-ПАВ относительно пластин с однородным ПМ слоем. Из анализа рис. 6, *b*, *d*, *f*, видно, что наличие в окрестности границы раздела включений, для которых $V_S^{m_i} < V_S^{(2)}$ (см. таблицу), приводит к сглаживанию поведения кривых скоростей в окрестности $V_S^{(2)}$: появление «террасных» участков отмечается на модах с более высокими номерами.

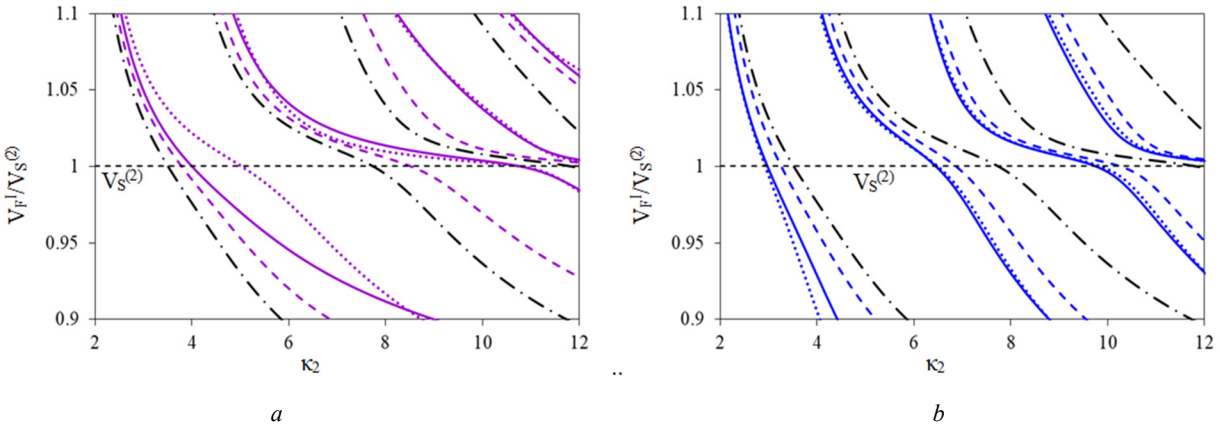


Рис. 5. Влияние локализации включений на скорости SH-ПАВ в окрестности $V_S^{(2)}$:
a – высокоскоростное включение; *b* – низкоскоростное включение

Fig. 5. Effect of localization of inclusions on SH-SAW velocities in the vicinity of $V_S^{(2)}$:
a – high-speed inclusion; *b* – low-speed inclusion

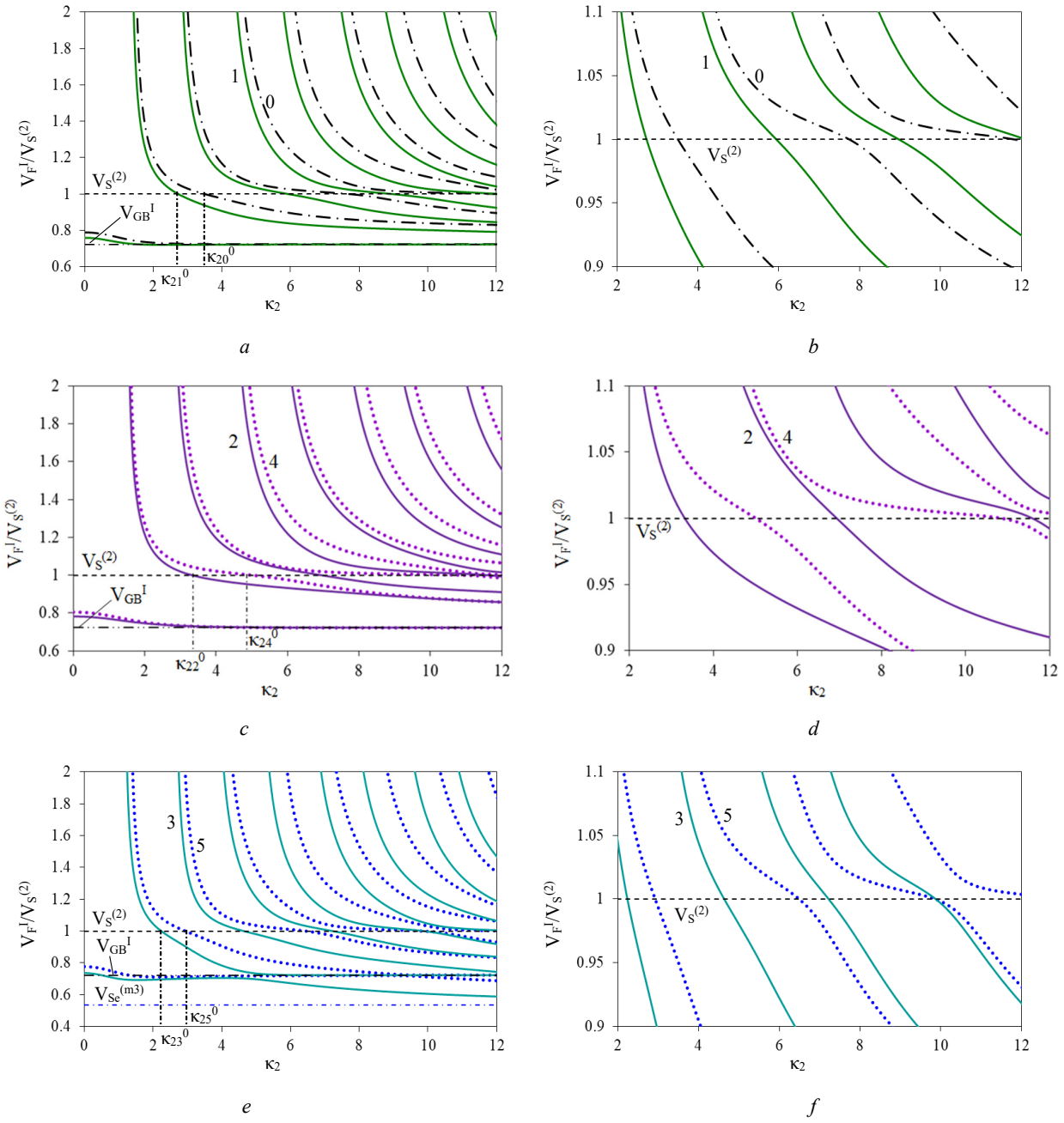


Рис. 6. Влияние неоднородности ПЭ- и ПМ-слоев на скорости SH-ПАВ. Включения расположены в окрестности границы раздела: *a*, *b* – пластины m_1/m_{41}–m_4 и m_1/m_4, *c*, *d* – пластины m_1–m_2/m_{42}–m_4 и m_1–m_2/m_4, *e*, *f* – пластины m_1–m_3/m_{43}–m_4 и m_1–m_3/m_4

Fig. 6. Effect of heterogeneity of PE and PM layers on SH-SAW velocities. Inclusions are located near the interface: *a*, *b* plates m_1/m_{41}–m_4 and m_1/m_4; *c*, *d* plates m_1–m_2/m_{42}–m_4 and m_1–m_2/m_4, *e*, *f*, plates m_1–m_3/m_{43}–m_4 and m_1–m_3/m_4

Отдельно отметим особенности поведения скоростей первых мод SH-ПАВ пластин из ФГМ. На рис. 7, *a*, приведены скорости 1-х мод ПАВ для пластин, представленных на рис. 6, *a*, *c*, *e*. На рис. 7, *b*, в более удобном формате показано поведение скоростей 1-й и 2-й мод ПАВ пластины m_1–m_3/m_4 с приграничным расположением неоднородности (пунктирные линии, кривые 5, фрагмент рис. 6, *e*). На рис. 7, *c*, приведены скорости первых 3-х мод пластины m_1–m_3/m_{43}–m_4 (сплошные линии, кривые *3*, фрагмент рис. 6, *e*). Рис. 7, *d*, представляет собой фрагмент рис. 7, *c*, для скоростей 2-й и 3-й мод в окрестности частоты κ_{23}^*. Для наглядности на рис. 7, *c* и *d* штриховой линией выделена 2-я мода SH-ПАВ.

Из рис. 7, *a*, видно, что при всех рассмотренных неоднородностях в пластинах из ФГМ, как и в пластине m_1/m_4, (кривая *0*) происходит падение скорости от начального значения до V_{GB}^I в случаях m_1/m_{41}–m_4 (кривая *1*), m_1–m_2/m_{42}–m_4 (кривая *2*), m_1–m_2/m_4 (кривая *4*) и до минимального из значений V_{Se} материалов пластины – $V_{Se}^{(m_3)}$ в случаях m_1–m_3/m_{43}–m_4 (кривая *3*) и m_1–m_3/m_4 (кривая *5*).

Максимальное начальное значение скорости 1-й моды наблюдается в случае m_1-m_2/m_4 (кривая *4*).

Отметим особенности в поведении мод SH-ПАВ в пластинах с низкоскоростным включением. В случае m_1/m_{41}–m_4 (кривая *1*, рис. 7, *a*) с включением в ПМ-слое падение скорости 1-й моды происходит до значения $V_F^{\min}$ в низкочастотном диапазоне с последующим увеличением скорости до V_{GB}^I. В случае m_1–m_3/m_4 с локализацией неоднородности в ПЭ-слое у границы раздела (кривые *5*, см. рис. 7, *a*, *b*), после падения скорости 1-й моды в низкочастотной области и дальнейшим ее возрастанием выделяется диапазон частот $\left[\kappa_{15}^0, \kappa_{15}^*\right]$, в котором скорость 1-й моды мало изменяется, находясь в окрестности значений V_{GB}^I. С увеличением частоты $\kappa_2 > \kappa_{15}^*$ скорость 1-й моды падает, выход на асимптотическое значение происходит на более высоких частотах.

Скорость 2-й моды, начиная с частоты ее зарождения, падает, выходя на значение V_{GB}^I при прохождении частоты κ_{15}^*, в окрестности которой значения скоростей 1-й и 2-й мод достаточно близки. В случае m_1–m_3/m_{43}–m_4 с двумя низкоскоростными включениями у границы раздела слоев (кривые *3*, см. рис. 7, *a*, *c*, *d*) кривая скорости 1-й моды претерпевает два изгиба в диапазоне низких и средних частот с последующим падением скорости до значения $V_{Se}^{(m_3)}$.

В поведении скорости 2-й моды в диапазоне частот $\left[\kappa_{23}^0, \kappa_{23}^*\right]$ выделяется «террасный» участок, на котором ее скорость мало отличается от V_{GB}^I. После прохождении частоты κ_{23}^* скорость 2-й моды начинает падать. Поведение скорости 3-й моды повторяет поведение 2-й моды предыдущего случая: происходит падение скорости с выходом на значение V_{GB}^I при прохождении частоты κ_{23}^*, в окрестности которой скорости 2-й и 3-й мод принимают близкие значения (см. рис. 7, *c*, *d*).

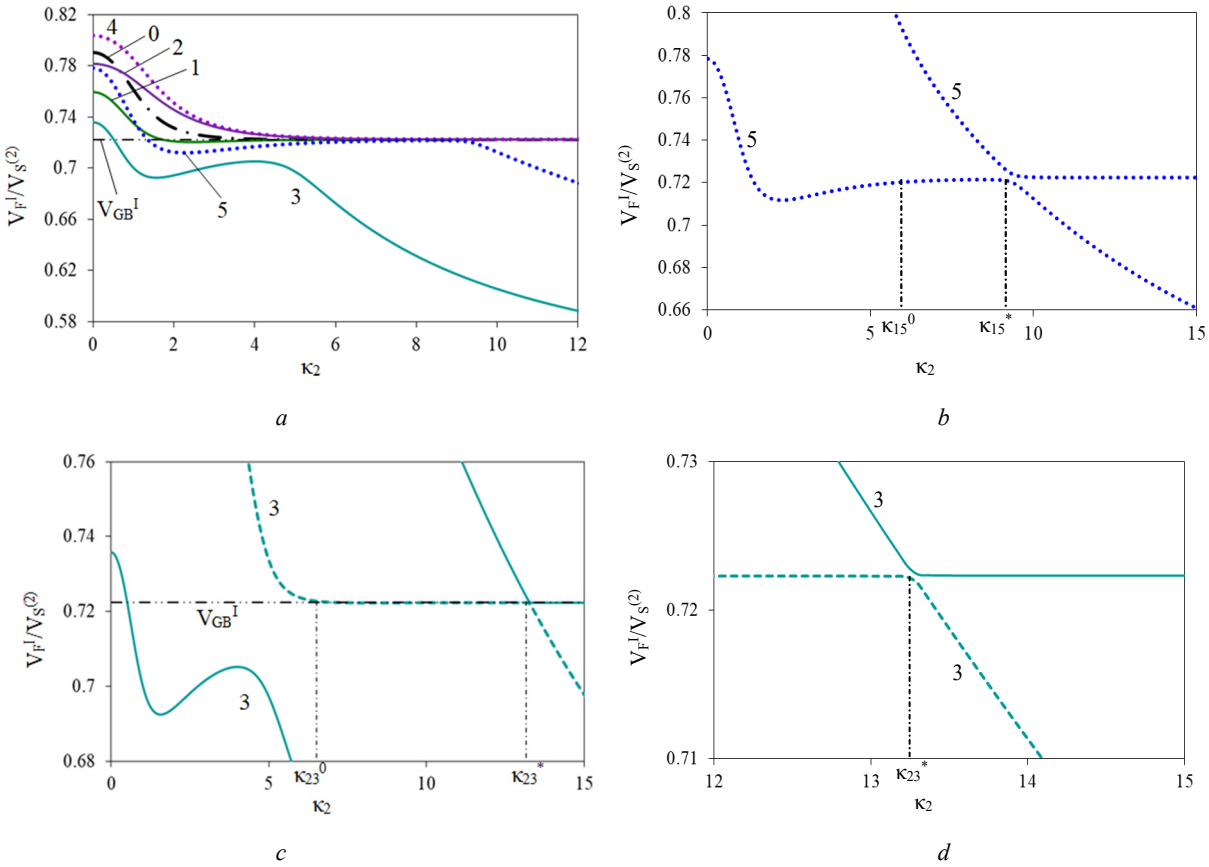


Рис. 7. Поведение скоростей первых мод SH-ПАВ в пластинах из ФГПЭМ/ФГПММ: *a* – поведение 1-х мод для пластин с рассмотренными неоднородностями; *b* – 1-я и 2-я моды, случай m_1–m_3/m_4; *c* – 1-я, 2-я и 3-я моды, случай m_1–m_3/m_{43}–m_4; *d* – фрагмент (*c*)

Fig. 7. Behavior of the velocities of the first SH-SAW modes in FGPEM/FGPMM plates: *a* –behavior of the 1st modes for plates with the considered inhomogeneities; *b* – 1st and 2nd modes, case m_1–m_3/m_4; *c* – 1st, 2nd and 3rd modes, case m_1–m_3/m_{43}–m_4; *d* – fragment (*c*)

Заключение

В работе в квазистатическом приближении исследованы особенности распространения SH-ПАВ в составной МЭУ-пластине из неоднородных ПЭ- и ПМ-слоев. При моделировании неоднородности слоев использована двухкомпонентная модель ФГМ с изменением свойств по толщине от значений параметров основного материала до значений параметров материала включения. В качестве основных материалов ПЭ- и ПМ-слоев пластины использованы PZT-5H (m_1) и $CoFe_2O_4$ (m_4). При выборе материалов включений ПЭ-слоя уделялось внимание материалам с незначительным различием значений упругих модулей при существенном отличии пьезоэлектрических и диэлектрических свойств. В предположении, что неоднородность ПМ-слоя связана с взаимопроникновением материалов слоев в узкой переходной области у границы раздела, параметры материалов включений выбирались близкими параметрам материала ПЭ-слоя и его включений. В рамках модели рассмотрено расположение включений ПЭ-слоя у поверхности пластины, в середине слоя и у границы раздела. Включения ПМ слоя локализованы у границы раздела. Волновой процесс в МЭУ-пластине из ФГПЭМ/ФГПММ инициирован действием удаленного источника гармонических колебаний, режим которых полагался установившимся. На границе раздела слоев выполнены условия сцепления. На внешних контактирующих с вакуумом поверхностях при отсутствии механических напряжений рассмотрены четыре типа электрических и магнитных условий. В зависимости от характера задаваемых электрических и магнитных условий рассмотрены четыре задачи, решение которых строится в пространстве образов Фурье путем сведения к решению систем начально-краевых задач Коши. Получены удобные для численной реализации матричные представления дисперсионных уравнений задач. На основе их решения на примере задачи с электрически закороченными и открытыми магнитными условиями на внешних поверхностях исследовано влияние характера неоднородности ПЭ- и ПМ-слоев пластины на особенности поведения скоростей SH-ПАВ в широком диапазоне частот. Установлены характерные особенности влияния локализации высокоскоростных и низкоскоростных включений ПЭ-слоя при однородном ПМ-слое и влияние неоднородности ПМ-слоя на поведение скоростей ПАВ. Выявлены особенности поведения скоростей SH-ПАВ при различных характеристиках неоднородности у границы раздела в МЭУ-пластине из ФГПЭМ/ФГПММ.

Библиографический список

1. Bleustein, J.L. A new surface wave in piezoelectric materials / J.L. Bleustein // Appl. Phys. Lett. – 1968. – Vol. 13. – P. 412–413.

2. Gulyaev, Y.V. Electroacoustic surface waves in solids / Y.V. Gulyaev // Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. Lett. – 1969. – Vol. 9. – P. 37–38.

3. Фильтры на поверхностных акустических волнах (расчет, технология и применение): пер. с англ. / под ред. Г. Мэттьюза. – М.: Радио и связь, 1981. – 472 с.

4. Maugin, G. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids / G. Maugin. – North Holland, 1988 – 598 p.

5. Al'shits, V.I. On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties / V.I. Al'shits, A.N. Darinskii, J. Lothe // Wave Motion. – 1992. – Vol. 16. – P. 265–283.

6. Gulyaev, Y.V. Review of shear surface acoustic waves in solids / Y.V. Gulyaev // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 1998. – Vol. 45, no. 4. – P. 935–938. DOI:10.1109/58.710563

7. Vinyas, M. Computational Analysis of Smart Magneto-Electro-Elastic Materials and Structures: Review and Classification / M. Vinyas // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2021. – Vol. 28, no. 3. – P. 1205–1248. DOI: 10.1007/s11831-020-09406-4

8. Ultrasonic guided wave defect detection method for tank bottom plate based on SH0 mode multichannel magnetostrictive sensor / H. Wang, B. Wu, X. Gao, Y. Liu, X. Li, X. Liu // Measurement. – 2023. – Vol. 223. – P. 113790. DOI: 10.2139/ssrn.4515168

9. Pan, E. Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic biomaterials / E. Pan // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2002. – Vol. 53, no. 5. – P. 815–838. DOI: 10.1007/s00033-002-8184-1 doi.org/10.10 07/s0 0 033-0 02-8184-1

10. Chen, J.Y. Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates / J.Y. Chen, E. Pan, H. Chen // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44, no. 3–4. – P. 1073–1085. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.003

11. Wei, W.Y. Existence of shear horizontal surface waves in a magneto-electro-elastic material / W.Y. Wei, J.X. Liu, D.N. Fang // Chin. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 26, no. 10. – P. 104301. DOI:10.1088/0256-307x/26/10/104301

12. Son, M.S. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric plates / M.S. Son, Y.J. Kang // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2011. – Vol. 25, no. 3. – P. 613–619. DOI: 10.1007/s12206-011-0114-8

13. Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in layered magneto-electro-elastic media / B.O. Matar, N. Gasmi, H. Zhou, M. Goueygou, A. Talbi // J. Acoust. Soc. Am. – 2013. – Vol. 133, no.3. – P. 1415–1424. DOI: 10.1121/1.4776198

14. Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review / C. Othmani, H. Zhang, C. Lü, Y.Q. Wang, A.R. Kamali // Composite Structures. – 2022. – Vol. 286. – P. 115245. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115245

15. Dziatkiewicz, G. New forms of the fundamental solutions for 3D magnetoelectroelasticity equations / G. Dziatkiewicz // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 91. – P. 563–580. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.052

16. Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures / H. Calas, J.A. Otero, R. Rodriíguez-Ramos, G. Monsivais, C. Stern // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45. – P. 5356–5367. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.017

17. Zakharenko, A.A. Investigation of SH-wave fundamental modes in piezoelectromagnetic plate: electrically closed and magnetically closed boundary conditions / A.A. Zakharenko // Open Journal of Acoustics. – 2014. – Vol. 4, no. 02. – P. 90–97. DOI: 10.4236/oja.2014.42009

18. Kuo, H.-Y. Optimization of magnetoelectricity in multiferroic fibrous composites / H.-Y. Kuo, A.A. Zakharenko // Mechanics of Materials. – 2012. – Vol. 50. – P. 88–99. DOI: 10.1016/j.mechmat.2012.03.005

19. Sládek, J. Effective properties of coated fiber composites with piezoelectric and piezomagnetic phases / J. Sládek, V. Sládek, E. Pan // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2017. – Vol. 28. – no. 1. – P. 97–107. DOI: 10.1177/1045389x16644786

20. Nie, G. SH-guided waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates / G. Nie, Z. An, J. Liu // Progress in Natural Science. – 2009. – Vol. 19, no. 7. – P. 811–816. DOI: 10.1016/j.pnsc.2008.10.007

21. Nie, G. Shear horizontal (SH) waves propagating in piezoelectric–piezomagnetic bilayer system with an imperfect interface / G. Nie, J. Liu, X. Fang, Z. An // Acta Mech. – 2012. – Vol. 223, no. 9. – P. 1999–2009. DOI: 10.1007/s00707-012-0680-6

22. Wei, H.-X. Propagation of SH waves in a piezoelectric/piezomagnetic plate: Effects of interfacial imperfection couplings and the related physical mechanisms / H.-X. Wei, Y.-D. Li, T. Xiong, Y. Guan // Physics Letters A. – 2016. – Vol. 380, no. 38. – P. 3013–3021. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07.

23. Ezzin, H. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates / H. Ezzin, M. Ben Amor, M.-H. Ben Ghozlen // Acta Mechanica. – 2017. – Vol. 228, no. 3. – P. 1071–1081. DOI: org/10.1007/s00707-016-1744-9.

24. Alshits, V.I. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate / V.I. Alshits, G.A. Maugin // Wave Motion. – 2005. – Vol. 41, no. 4. – P. 357–394. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2004.09.002

25. Shuvalov, A.L. Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates / A.L. Shuvalov, O. Poncelet, A.P. Kiselev // Wave Motion. – 2008. – Vol. 45, no. 5. – P. 605–615. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.07.008

26. Kuznetsov, S.V. Dispersion of SH and Love Waves / S.V. Kuznetsov // International Journal of Physics. – 2014. – Vol. 2, no. 5. – P. 170–180. DOI: 10.12691/ijp-2-5-7

27. Liu, G.R. Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates / G.R. Liu, J. Tani, // Journal of Vibration and Acoustics. – 1994. – Vol. 116, no. 4. – P. 440–448. DOI: 10.1115/1.2930447

28. Cao, X.S. Theoretical Investigation on Horizontally Shear Waves in a Functionally Gradient Piezoelectric Material Plate / X.S. Cao, F. Jin, Z.K. Wang // Advanced Materials Research. – 2008. – Vol. 33–37. – P. 707–712. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.33-37.707

29. Калинчук, В.В. Динамика поверхности неоднородных сред / В.В. Калинчук, Т.И. Белянкова. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.

30. Belyankova, T.I. Peculiarities of the wave field localization in the functionally graded layer / T.I. Belyankova, V.V. Kalinchuk // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23. – P. 25–30.

31. Belyankova T.I. Shear horizontal waves in piezoelectric structures with a functionally graded coating / T.I. Belyankova, V.V. Kalinchuk // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2021. – Vol. 28, no. 5. – P. 486–494. DOI: 10.1080/15376494.2019.1578006

32. Peculiarities of surface acoustic waves, propagation in structures with functionally graded piezoelectric materials, coating from different ceramics on the basis of PZT / T.I. Belyankova, E.I. Vorovich, V.V. Kalinchuk, O.M. Tukodova // Journal of Advanced Dielectrics. – 2020. – Vol. 10, no. 1-2. – P. 2060017. DOI:10.1142/S2010135X20600176

33. Белянкова, Т.И. Дисперсионные свойства составной пластины из неоднородных пьезо- и диэлектрического слоев / Т.И. Белянкова, Е.И. Ворович, В.В. Калинчук // Наука Юга России. – 2022. – Т. 18. – № 4. – С. 19–28. DOI: 10.7868/S25000640220402

34. Белянкова, Т.И. Особенности распространения SH-волн в двухслойной структуре из неоднородных пьезоэлектрического и диэлектрического слоев / Т.И. Белянкова, Е.И. Ворович, В.В Калинчук // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. –№ 2. – С. 98–109. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.09

35. Белянкова, Т.И. SH-волны на поверхности биморфной магнитоэлектроупругой пластины / Т.И. Белянкова, Е.И. Ворович, А.С. Турчин // Наука юга России. – 2024. – Т. 20. – № 2. – С. 3–15. DOI: 10.7868/S25000640240201

36. Peng, F. Investigation of Shear Horizontal Acoustic Waves in an Inhomogeneous Magnetoelectroelastic Plate / F. Peng, S.Y. Hu // Key Engineering Materials. – 2006. – Vols. 306–308. – P. 1217–1222. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.1217

37. Bin, W. Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic plates / W. Bin, Y. Jiangong, H. Cunfu // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 317, no. 1–2. – P. 250-264. doi:10.1016/j.jsv.2008.03.008

38. Guo, X. Effects of functionally graded interlayers on dispersion relations of shear horizontal waves in layered piezoelectric/piezomagnetic cylinders / X. Guo, P. Wei, L. Li, M. Lan // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol. 55. – P. 569–582. DOI: 10.1016/j.apm.2017.11.029

References

1. Bleustein, J.L. A new surface wave in piezoelectric materials // Appl. Phys. Lett. – 1968. – V. 13. – pp. 412–413.

2. Gulyaev Y.V. Electroacoustic surface waves in solids // Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. Lett. – 1969. – V.9. – pp. 37–38.

3. Фильтры на поверхностных акустических волнах (расчет, технология и применение). Пер. с анг./Под ред. Г. Мэттьюза. – М.: Радио и связь, 1981. – 472 с.

4. Maugin G. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. (North Holland, 1988 – 598 p.; M.:Mir, 1991. – 560 c.).

5. Al'shits, V.I., Darinskii, A.N., Lothe, J. On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties // Wave Motion. – 1992. – V.16. – pp. 265–283.

6. Gulyaev Y. V. Review of shear surface acoustic waves in solids // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 1998. – V. 45. – No. 4. pp. 935–938. doi:10.1109/58.710563

7. Vinyas M. Computational Analysis of Smart Magneto-Electro-Elastic Materials and Structures: Review and Classification // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2021. – V. 28. – No. 3. – pp. 1205-1248. https://doi.org/10.1007/s11831-020-09406-4

8. Wang H., Wu B., Gao X., Liu Y., Li X., Liu X. Ultrasonic guided wave defect detection method for tank bottom plate based on SH0 mode multichannel magnetostrictive sensor //Measurement. – 2023. – V. 223. – pp. 113790. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4515168

9. Pan E. Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic biomaterials // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2002. – V. 53. – No. 5. – pp. 815–838. doi: 10.1007/s00033-002-8184-1 doi.org/10.10 07/s0 0 033-0 02-8184-1

10. Chen J.Y., Pan E., Chen H. Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – V. 44. No. 3–4. – pp. 1073–1085. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.003

11. Wei W.Y., Liu J.X., Fang D.N. Existence of shear horizontal surface waves in a magneto-electro-elastic material // Chin. Phys. Lett. – 2009. – V. 26. – No. 10. – pp. 104301. doi:10.1088/0256-307x/26/10/104301

12. Son, M. S., Kang, Y. J. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric plates.// Journal of Mechanical Science and Technology. – 2011. – Vol. 25, No. 3. – pp. 613–619. doi:10.1007/s12206-011-0114-8

13. Matar B.O., Gasmi N., Zhou H., Goueygou M., Talbi, A. Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in layered magneto-electro-elastic media // J. Acoust. Soc. Am. – 2013. – V. 133.– No.3. – pp. 1415–1424. doi:10.1121/1.4776198

14. Othmani C., Zhang H., Lü C., Wang Y. Q., Kamali A. R. Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review // Composite Structures. – 2022. – Vol. 286. – pp. 115245. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115245

15. Dziatkiewicz G. New forms of the fundamental solutions for 3D magnetoelectroelasticity equations // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – V. 91. – pp. 563-580. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.052

16. Calas H., Otero J.A., Rodriíguez-Ramos R., Monsivais G., Stern, C. Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – V. 45. – pp. 5356–5367. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.017

17. Zakharenko A.A. Investigation of SH-wave fundamental modes in piezoelectromagnetic plate: electrically closed and magnetically closed boundary conditions // Open Journal of Acoustics. – 2014. – V. 4. – No. 02. – pp. 90–97. doi: 10.4236/oja.2014.42009

18. Kuo H.-Y., Wang Y.-L. Optimization of magnetoelectricity in multiferroic fibrous composites // Mechanics of Materials. – 2012. – V. 50. – pp. 88–99. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.03.005

19. J. Sládek, V. Sládek, E. Pan Effective properties of coated fiber composites with piezoelectric and piezomagnetic phases // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2017. – V. 28. – No. 1. – pp. 97–107. doi:10.1177/1045389x16644786

20. Nie, G., An, Z., Liu, J. SH-guided waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates // Progress in Natural Science. – 2009. – V. 19. – No. 7. – pp. 811–816. doi:10.1016/j.pnsc.2008.10.007

21. Nie G., Liu J., Fang X., An Z. Shear horizontal (SH) waves propagating in piezoelectric–piezomagnetic bilayer system with an imperfect interface // Acta Mech. – 2012. – V. 223. – No. 9. – pp. 1999–2009. doi:10.1007/s00707-012-0680-6

22. Wei H.-X., Li Y.-D., Xiong T., Guan Y. Propagation of SH waves in a piezoelectric/piezomagnetic plate: Effects of interfacial imperfection couplings and the related physical mechanisms // Physics Letters A. – 2016. – V. 380. – No. 38. pp. 3013–3021. doi:10.1016/j.physleta.2016.07.

23. Ezzin H., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.-H. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates // Acta Mechanica. – 2017. – V. 228 – No. 3. – pp. 1071–1081. doi: .org/10.1007/s00707-016-1744-9.

24. Alshits, V. I., Maugin, G. A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate// Wave Motion. – 2005. – Vol. 41, No. 4. – pp. 357–394. doi:10.1016/j.wavemoti.2004.09.002

25. Shuvalov, A. L., Poncelet, O., Kiselev, A. P. Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // Wave Motion. – 2008. – Vol. 45, No. 5. – pp. 605–615. doi:10.1016/j.wavemoti.2007.07.008

26. Kuznetsov S. V. Dispersion of SH and Love Waves // International Journal of Physics. – 2014. – Vol. 2, No. 5. – pp. 170-180. DOI: 10.12691/ijp-2-5-7

27. Liu, G. R., Tani, J. Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates //Journal of Vibration and Acoustics. – 1994. – Vol. 116, No. 4. – pp. 440-448. doi:10.1115/1.2930447

28. Cao, X. S., Jin, F., & Wang, Z. K. Theoretical Investigation on Horizontally Shear Waves in a Functionally Gradient Piezoelectric Material Plate // Advanced Materials Research. – 2008. – Vol. 33-37. – pp. 707–712. doi:10.4028/www.scientific.net/amr.33-37.707

29. Kalinchuk V.V., Beliankova T.I. Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred [Dynamics of heterogeneous media surface]. – M. M.: Fizmatlit, 2009. – 312 c.

30. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Peculiarities of the wave field localization in the functionally graded layer // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23. – P. 25-30. (URL: http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_12315/MPM123_ 06_belyankova.pdf).

31. T.I. Belyankova, V.V. Kalinchuk, Shear horizontal waves in piezoelectric structures with a functionally graded coating // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2021. – Vol. 28, No. 5. – pp. 486-494. DOI: 10.1080/15376494.2019.1578006

32. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M., Peculiarities of surface acoustic waves, propagation in structures with functionally graded piezoelectric materials, coating from different ceramics on the basis of PZT// Journal of Advanced Dielectrics. – 2020. – Vol. 10, No. 1-2. – pp. 2060017. DOI:10.1142/S2010135X20600176

33. Beliankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. Dispersionnye svoistva sostavnoi plastiny iz neodnorodnykh p'ezo- i dielektricheskogo sloev [Dispersion properties of a composite plate from inhomogeneous piezo- and dielectric layers] // Science in the South Russia. – 2022. – V. 18. – No. 4. – pp. 19–28. doi: 10.7868/S25000640220402

34. Beliankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. Osobennosti rasprostraneniia SH-voln v dvukhsloinoi strukture iz neodnorodnykh p'ezoelektricheskogo i dielektricheskogo sloev [Peculiarities of SH wave propagation in a two-layer structure of inhomogeneous piezoelectric and dielectric layers]. PNRPU Mechanics Bulletin. – 2023. – No. 2. – pp. 98-109. doi: 10.15593/perm.mech/2023.2.09

35. Beliankova T.I., Vorovich E.I., Turchin A.S. SH-volny na poverkhnosti bimorfnoi magnitoelektrouprugoi plastiny [SH-waves on the surface of a bimorph magneto-electroelastic plate]. Science in the south of Russia. – 2024. – V. 20. No. 2. pp. 3–15. DOI: 10.7868/S25000640240201

36. Peng F., Hu S.Y. Investigation of Shear Horizontal Acoustic Waves in an Inhomogeneous Magnetoelectroelastic Plate // Key Engineering Materials. – 2006. – Vols. 306-308. – pp. 1217-1222. doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.1217

37. Bin W., Jiangong Y., Cunfu H. Wave propagation in nonhomogeneous magneto-electro-elastic plates // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – V. 317. – No. 1–2. – pp. 250-264. doi:10.1016/j.jsv.2008.03.008

38. Guo X., Wei P., Li L., Lan M. Effects of functionally graded interlayers on dispersion relations of shear horizontal waves in layered piezoelectric/piezomagnetic cylinders // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – V. 55. – pp. 569–582. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.11.029

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда грант № 24-29-00773.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, grant No. 24-29-00773.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.