Глаголев, В.В. К нахождению *J*-интеграла для трещиноподобного дефекта твердого тела в виде физического разреза в конечно-элементном представлении / В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.И. Лутхов. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.03 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 2. – С. 30–38.

Perm Polytech Style: Glagolev V.V., Glagolev L.V., Lutkhov A.I. Finding the *J*-integral for a Crack-Like Defect of a Solid in the Form of a Physical Section in Finite Element Representation. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 2, pp. 30-38. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.03
УДК 539.375

К НАХОЖДЕНИЮ *J*-ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО ДЕФЕКТА ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВИДЕ ФИЗИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.И. Лутхов

Тульский государственный университет, Тула, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 25 марта 2025 г.
Одобрена: 20 апреля 2025 г.
Принята к публикации:
30 мая 2025 г.

Ключевые слова:

J-интеграл, математический разрез, трещиноподобный дефект, физический разрез, линейный параметр, метод конечных элементов, ANSYS, коэффициент интенсивности напряжений, условие свободной поверхности.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается трещиноподобный дефект в виде физического разреза с характерной толщиной в линейно упругой среде. Толщина физического разреза рассматривается в качестве линейного параметра. Для внешней нагрузки методом конечных элементов определено напряженно-деформированное состояние окрестности физического разреза, допускающее отличные от нуля векторы напряжений на свободной поверхности. На основе термомеханического соотношения определена энергетическая характеристика типа *J*-интеграла, включающая векторы напряжений на свободной поверхности окрестности трещиноподобного дефекта в виде трех аддитивных интегральных слагаемых. Выделена часть энергетической характеристики на торцевой поверхности физического разреза и слагаемые на сопрягаемых к торцу берегах. На основе решения в конечно-элементном комплексе ANSYS для физического разреза и модели представления среды на продолжении физического разреза в виде слоя с однородным по толщине распределением напряженно-деформированного состояния решены задачи нагружения физического разреза нормальным разрывом и поперечным сдвигом. Проведено сравнение энергетической характеристики при стремлении линейного параметра к нулевому значению к значениям *J*-интеграла для представления трещины в виде математического разреза. Получено соответствие значения *J*-интеграла для математического разреза рассмотренной энергетической характеристики при относительно малом значении линейного параметра. При этом ее часть на торцевой поверхности, в зависимости от рассматриваемой модели, составляет более 60 %. Для физического разреза с использованием модели слоя показана близость исследуемой характеристики к значению *J*-интеграла для математического разреза при существенно меньшем значении модуля упругости материала слоя по отношению к основной среде. При этом влияние не торцевых слагаемых энергетической характеристики уменьшается.

© **Глаголев Вадим Вадимович** – д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой «Вычислительная механика и математика», e-mail: vadim@tsu.tula.ru.
Глаголев Леонид Вадимович – к. ф.-м. н., с. н. с. управления научно-исследовательских работ, e-mail: len4ic92@gmail.com.
Лутхов Андрей Игоревич – аспирант кафедры «Вычислительная механика и математика», e-mail: tip460@mail.ru.

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computational Mechanics and Mathematics, e-mail: vadim@tsu.tula.ru.
Leonid V. Glagolev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Department of Research Works, e-mail: len4ic92@gmail.com.
Andrey I. Lutkhov – Postgraduate Student, Department of Computational Mechanics and Mathematics, e-mail: tip460@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

FINDING THE *J*-INTEGRAL FOR A CRACK-LIKE DEFECT OF A SOLID IN THE FORM OF A PHYSICAL SECTION IN FINITE ELEMENT REPRESENTATION

V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.I. Lutkhov

Tula State University, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 March 2025
Approved: 20 April 2025
Accepted for publication:
30 May 2025

Keywords:

J-integral, mathematical section, crack-like defect, physical section, linear parameter, finite element method, ANSYS, stress intensity factor, free surface condition.

ABSTRACT

A crack-like defect in the form of a physical section with a characteristic thickness in a linearly elastic medium is studied. The thickness of the physical section is considered as a linear parameter. For an external load, the stress-strain state of the neighborhood of the physical section is determined by the finite element method, allowing stress vectors on the free surface to be different from zero. On the basis of the thermomechanical relation, the energy characteristic of the *J*-integral type, including stress vectors on the free surface in the vicinity of the crack-like defect, is determined in the form of three additive integral summands. The part of the energy characteristic on the end surface of the physical section and the summands on the shores contiguous to the end are isolated. We solved the loading problems of applying normal rupture and transverse shear to the physical section based on the solution in the finite element complex ANSYS for the physical section and the model of representation of the medium on the continuation of the physical section as a layer, which is homogeneous in the thickness distribution of the stress-strain state. We compared the energy response, when the linear parameter tends to zero value, and the values of the *J*-integral for the crack representation in the form of a mathematical section. The correspondence of the *J*-integral value for the mathematical section to the considered energy characteristic at a relatively small value of the linear parameter is obtained. At the same time, its part on the end surface, depending on the model under consideration, is more than sixty per cent. For the physical section using the layer model, the closeness of the investigated characteristic to the value of the *J*-integral for the mathematical section is shown at a significantly lower value of the elastic modulus of the layer material with respect to the basic medium. At the same time, the influence of non-face summands of the energy characteristic is found to decrease.

Введение

Исследование прочностных характеристик твердых тел связано с соответствующей моделью разрушения и анализом напряженно-деформированного состояния (НДС). Как правило, процесс разрушения связан с зарождением и ростом трещиноподобных дефектов. В этом случае одним из основным модельных представлений рассматриваемых дефектов является математический разрез. Математический разрез в упругом теле связан с сингулярностью поля напряжений в вершине трещины и в случае линейно упругой среды приводит к асимптотическим решениям [1; 2], связанными с коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) [3; 4]. Предельные значения КИН формируют силовой критерий разрушения [5] и энергетический критерий [6; 7], который может быть ассоциирован с инвариантным контурным интегралом (*J*-интегралом) [8–10], связывающим берега математического разреза, свободные от внешней нагрузки. Нахождение предельных характеристик трещиностойкости, связанных с соответствующим модельным представлением, для однородных [11–13] и композиционных материалов [14–17] определяют подходы экспериментальной механики разрушения [18]. Для нахождения КИН применяют аналитические и численные методы расчета [19–22].

Одним из подходов к нахождению НДС в настоящее время является метод конечных элементов (МКЭ) [23; 24]. В этом случае процессу разрушения может быть сопоставлено последовательное удаление конечных элементов [25; 26], формирующее трещиноподобный дефект, который может быть рассмотрен в качестве физического разреза с характерной толщиной δ_0. В силу того что МКЭ основан на вариационной и, следуя терминологии [27], «ослабленной» постановке задачи, соответствующее решение может приводить к появлению векторов напряжений на свободных поверхностях. Данное обстоятельство имеет место в окрестностях концентраторов напряжений, к которым можно отнести и угловые точки физического разреза.

Формирование энергетической характеристики

Рассматривается нагружение упругого тела с дефектом в виде физического разреза толщиной δ_0 внешней нагрузкой $\mathbf{q}$, приводящей к равновесию тела. Для определения НДС предполагается использование МКЭ. Отметим, что, несмотря на наличие сингулярных точек в тупиковой области физического разреза, конечно-элементное решение задачи для фиксированного разбиения будет приводить к регулярному распределению НДС в окрестности физического разреза. На рис. 1 показана окрестность физического разреза, где точки *B* и *B*’ являются концентраторами напряжений.

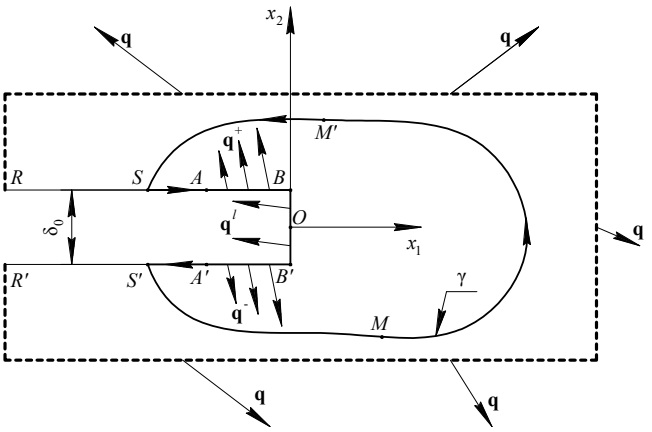


Рис. 1. Физический разрез в упругом теле

Fig. 1. Physical section in an elastic body

Условие свободной поверхности для узловых точек физического разреза и его торцевой части в рамках конечно-элементной постановки задачи задастся равенством нулю узловых сил, что приводит к наличию векторов напряжений, получаемых в рамках конечно-элементного решения в окрестности физического разреза. Обозначим векторы напряжений, получаемых на частях границ физического разреза в результате решения: $\mathbf{q}^+ = -\sigma_{12}\mathbf{e}_1 - \sigma_{22}\mathbf{e}_2$ (на AB), $\mathbf{q}^- = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2$ (на $A'B'$), где σ_{ij} – компонента тензора напряжений; $i, j = 1, 2$; $\mathbf{e}_i$ – вектор ортонормированного базиса. На торце физического разреза вектор напряжений будет равен: $\mathbf{q}^l = -\sigma_{11}\mathbf{e}_1 - \sigma_{12}\mathbf{e}_2$. Полагаем, что на границах RA и $R'A'$ векторы напряжений нулевые и соответствуют условиям свободной поверхности.

Запишем термомеханическое соотношение [8]:

$$\oint_{\gamma}\left(n_1\psi - \mathbf{q}^{\gamma}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\right)d\gamma = 0, \qquad (1)$$

где ψ – удельная (к единице объема) свободная энергия; n_1 – проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси x_1; γ – замкнутый контур $B'A'S'MM'SABB'$, показанный на рис. 1, проходящий по свободной поверхности SA и $A'S'$; $\mathbf{q}^{\gamma}$ – распределенная по контуру нагрузка; $\mathbf{u}$ – поле перемещений на контуре.

Представим (1) в виде суммы двух контурных интегралов:

$$J + J_1 = 0, \qquad (2)$$

где $J = \int_{\gamma_1}\left(n_1\psi - \mathbf{q}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\right)d\gamma_1$; $J_1 = \int_{\gamma_2}\left(n_1\psi - \mathbf{q}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\right)d\gamma_2$; γ_1 – контур $S'MM'S$; γ_2 – контур $SABB'A'S'$.

Рассмотрим нахождение первого слагаемого в (2) посредством определения интеграла J_1 в рамках модели линейно упругой среды:

$$J_1 = \int_{\gamma_2}\left(n_1\psi - \mathbf{q}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\right)d\gamma_2 =$$
$$= 0,5\int_{x_A}^{x_B}\left(\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_2=\delta_0/2}dx_1 +$$
$$+ 0,5\int_{x_{B'}}^{x_{A'}}\left(\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_2=-\delta_0/2}dx_1 -$$
$$- \delta_0\overline{\psi} + 0,5\int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\left(\sigma_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_1=0}dx_2,$$

где $\overline{\psi} = \frac{1}{\delta_0}\int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\psi\big|_{x_1=0}dx_2$ – средняя по торцу удельная свободная энергия.

С учетом последнего выражения из (2) приходим к представлению:

$$J = \delta_0\overline{\psi} - 0,5\int_{x_A}^{x_B}\left(\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_2=\delta_0/2}dx_1 -$$
$$- 0,5\int_{x_{B'}}^{x_{A'}}\left(\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_2=-\delta_0/2}dx_1 -$$
$$- 0,5\int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\left(\sigma_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_1=0}dx_2. \qquad (3)$$

Отметим, что если граничные напряжения на торце и границах удовлетворяют условию свободной поверхности, то из (3) приходим к выражению $J = \delta_0\overline{\psi}$, полученному в [28].

Используя связь: $\psi = 0,5\left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)$, из представления (3) приходим к выражению:

$$J = 0,5\int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\left(\sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{x_1=0}dx_2 -$$
$$- 0,5\int_{x_A}^{x_B}\left(\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}\varepsilon_{11}\right)\Bigg|_{x_2=\delta_0/2}dx_1 -$$
$$- 0,5\int_{x_{B'}}^{x_{A'}}\left(\sigma_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}\varepsilon_{11}\right)\Bigg|_{x_2=-\delta_0/2}dx_1. \qquad (4)$$

При стремлении $\delta_0 \to 0$ физический разрез переходит в математический. При этом трещиноподобный дефект может быть рассмотрен в виде трещины Гриффитса [6]. В этом случае при отсутствии нагрузки на берегах разреза значение J в (2) является J-интегралом Черепанова – Райса [8; 9], значение которого может быть вычислено посредством КИН. Рассмотрим вычисление (4) в рамках МКЭ в программном комплексе ANSYS [29] и модели с тонким слоем на продолжении физического разреза [30] при нагружении трещиноподобного дефекта по моде I и II.

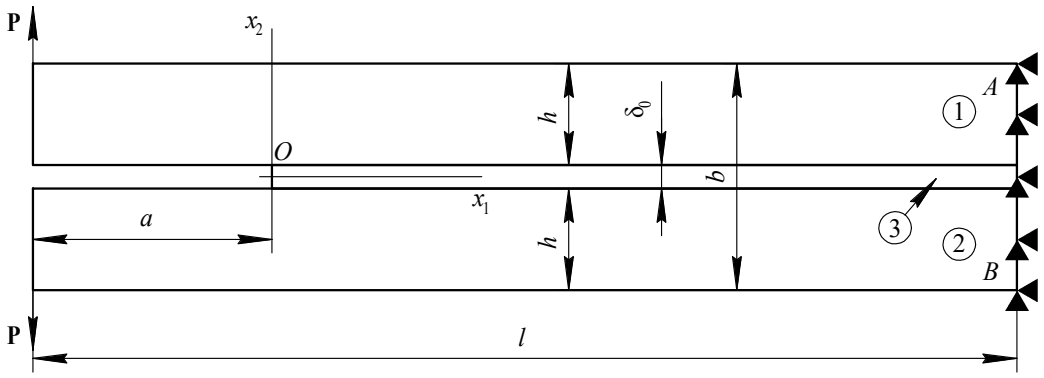


Рис. 2. Модель ДКБ-образца

Fig. 2. Model of the specimens of the double hammer beam

При этом исследуем влияние второго и третьего слагаемого в правой части (4) для различных длин участков интегрирования.

Постановка задач нагружения трещиноподобного дефекта

Рассматриваются задачи в линейно упругой постановке в состоянии плоской деформации. На рис. 2 представлена схема нагружения трещины нормальным разрывом в виде двойной консольной балки (ДКБ) со следующими геометрическими характеристиками: длина образца l = 0,2 м, длина трещины a = 0,05 м, ширина ДКБ-образца b = 0,1 м, ширина консоли $h = (b - \delta_0)/2$, где δ_0 – варьируемая толщина физического разреза. Тела 1 и 2 соединены адгезионным слоем 3 и имеют следующие механические характеристики: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. При решении задачи рассматривались два случая: случай № 1 – адгезионный слой 3 имеет аналогичные телам 1 и 2 механические свойства (однородное тело с вырезом в виде физического разреза); случай № 2 – адгезионный слой 3 имеет следующие характеристики: модуль упругости $E_{adh} = 2 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_{adh} = 0,3$ (слоистый композит). На консоли ДКБ-образца действуют внешние распределенные нагрузки **P** = 10^3 Па, торец *AB* жестко закреплен от перемещений, верхние и нижние границы слоя имеют равные перемещения с сопрягаемыми границами тел 1 и 2 (жесткое сцепление).

На рис. 3 представлена схема нагружения трещины поперечным сдвигом в виде образца с двойной выемкой, со следующими геометрическими характеристиками: длина образца l = 0,1 м, длина трещины a = 0,038 м, длина связки $2t$ = 0,024 м, ширина образца b = 0,13 м, ширина консоли $h = (b - \delta_0)/2$, где δ_0 – варьируемая толщина физического разреза. Тела 1 и 2 жестко сцеплены адгезионным слоем 3 и имеют следующие механические характеристики: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Аналогично ДКБ-образцу, см. рис. 2, рассматриваются два варианта задания механических свойств адгезионному слою 3: № 1 – адгезионный слой 3 имеет аналогичные телам 1 и 2 механические свойства (однородное тело); № 2 – для адгезионного слоя 3 были выбраны следующие механические свойства: модуль упругости $E_{adh} = 2 \cdot 10^9$, коэффициент Пуассона $\nu_{adh} = 0,3$ (слоистый композит). На консоли образца с двойной выемкой действуют внешние распределенные нагрузки **P** = 10^3 Па, торец образца *AB* жестко закреплен от перемещений.

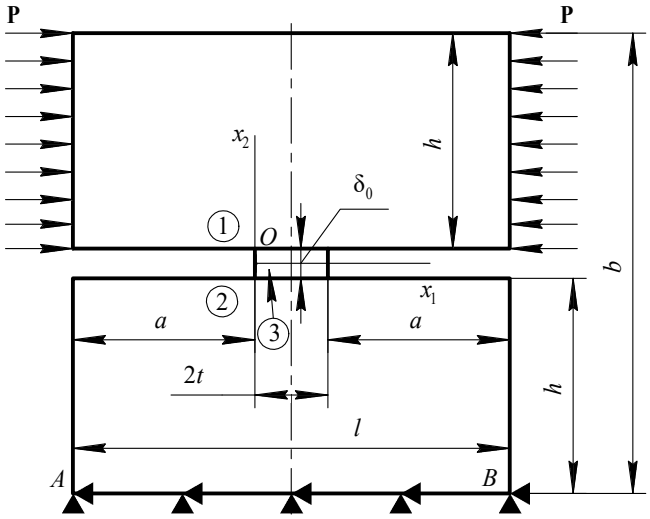


Рис. 3. Модель образца с двойной выемкой

Fig. 3. Model of the double edge notched compression specimens

Результаты расчетов

Рассматривая трещиноподобный дефект в виде математического разреза, с помощью комплекса ANSYS вычислены значения КИН моды нагружения I и II. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

J-интеграл для плоской задачи связан с КИН следующим соотношением [11; 13]:

$$J_k = \alpha K_k^2 / E, \qquad (5)$$

где $\alpha = 1$ для плоского напряженного состояния; $\alpha = 1 - \nu^2$ для плоского деформированного состояния; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $k = \mathrm{I}, \mathrm{II}$.

Таблица 1

Результаты расчета КИН в ANSYS

Table 1

Results of calculations of stress intensity factors in ANSYS

Искомая величина	Значение (Н/м$^{3/2}$)
K_{I}	1295,7
K_{II}	46,7

При дальнейшем изложении, без ограничения общности, ограничимся случаем плоской деформации. Из (5) находим эталонное численное значение J-интеграла для математического разреза. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Пусть в линейно упругом конечно-элементном решении окончание трещины формирует грань прямоугольного конечного элемента $\delta_0 \times \delta_1$ с квадратичными функциями формы. На рис. 4 показано окончание физического разреза.

Таблица 2

Результаты расчета J-интеграла

Table 2

Calculation results of J-integral

Искомая величина	Значение (Н/м)
J_{I}	$7{,}639 \cdot 10^{-6}$
J_{II}	$9{,}923 \cdot 10^{-9}$

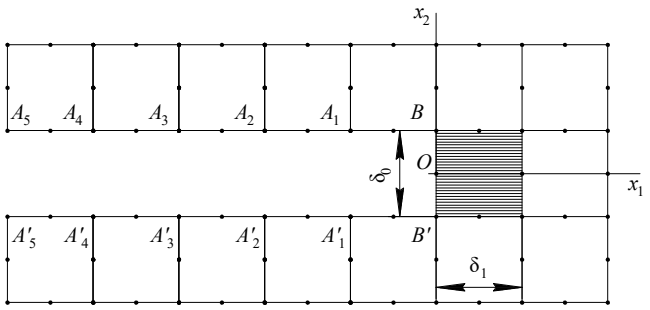


Рис. 4. Конечный элемент на окончании физического разреза

Fig. 4. Finite element at the end of the physical section

При конечно-элементной аппроксимации геометрии будем требовать выполнения следующего условия: $\delta_1 = \delta_0$. Исходными данными для вычисления (4) будут найденные в ANSYS и на основе модели слоя взаимодействия [30] поля перемещений при их локальной квадратичной аппроксимации на рассматриваемых конечных элементах.

В случае модели слоя взаимодействия равновесие связанных тонким слоем двух тел рассматривается в рамках системы вариационных уравнений [30] для тела 1:

$$\int_{S_1} \sigma \cdot\cdot \delta\varepsilon ds + \int_l \overline{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_l \overline{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + \\ + 0{,}5\delta_0 \left(\int_l \overline{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \overline{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathrm{P} \cdot \delta \mathrm{u} dl,$$

и для тела 2:

$$\int_{S_2} \sigma \cdot\cdot \delta\varepsilon ds - \int_l \overline{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_l \overline{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ + 0{,}5\delta_0 \left(\int_l \overline{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \overline{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathrm{P} \cdot \delta \mathrm{u} dl,$$

где S_i – площади тел; L_i – контуры приложения внешней нагрузки **P** в телах; σ, ε – тензоры напряжений и деформаций в телах; u – вектор перемещений; $\cdot$ – скалярное умножение; $\cdot\cdot$ – двойное скалярное умножение; $\overline{\sigma}_{11}, \overline{\sigma}_{22}, \overline{\sigma}_{12}, \overline{\varepsilon}_{11}, \overline{\varepsilon}_{22}, \overline{\varepsilon}_{12}$ – компоненты тензоров средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\overline{\sigma}_{21} = \overline{\sigma}_{12} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0{,}5\delta_0}^{0{,}5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0{,}5\delta_0}^{0{,}5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0{,}5\delta_0}^{0{,}5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\overline{\varepsilon}_{22} = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right),$$

$$\overline{\varepsilon}_{11} = 0{,}5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right),$$

$$\overline{\varepsilon}_{21} = \overline{\varepsilon}_{12} = 0{,}5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0{,}5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right),$$

где u_i^+, u_i^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя. Определяющие соотношения в слое рассматриваются относительно средних характеристик НДС.

В случае рассмотрения модели слоя взаимодействия первое слагаемое в (4) преобразуется к виду $0{,}5 \left(\overline{\sigma}_{22} \overline{\varepsilon}_{22} + \frac{\overline{\sigma}_{12} \left(u_1^+ - u_1^- \right)}{\delta_0} \right) \delta_0$. Для нагружения слоя по моде I имеет место: $\overline{\sigma}_{12} = 0$, а для нагружения по моде II: $\overline{\sigma}_{22} = 0$. Для решения в комплексе ANSYS первое слагаемое в (4) интегрируется по найденному на торце элементу слоя НДС. Второе и третье слагаемые в рассматриваемых подходах определяются интегрированием по найденному НДС на границах физического разреза.

Для нагружения ДКБ-образца с математическим разрезом по моде I рассмотрим выражение для КИН K_{I}^{a} [31; 32]:

$$K_{\mathrm{I}}^{a}=\sqrt{12(Ph)^{2}\big/h(a/h)^{2}\left[1+0,673(h/a)\right]^{2}}. \qquad (6)$$

Согласно работе [33] линейно упругое аналитическое решение для образца с двойной выемкой, геометрические параметры которого конечны и удовлетворяют условию $t<h/\pi$, остается справедливым, и соотношение для КИН K_{II}^{a} принимает следующий вид:

$$K_{\mathrm{II}}^{a}=P/4\sqrt{\pi t}\,. \qquad (7)$$

Результаты вычисления (6), (7) и их погрешность относительно решения ANSYS приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты расчета КИН

Table 3

Calculation results of stress intensity factors

Искомая величина	Значение (Н/м$^{3/2}$)	Погрешность, %
K_{I}^{a}	1295,9	0,02
K_{II}^{a}	48,5	3,85

На рис. 5 приведены зависимости относительной величины $\overline{J}_k=J/J_k$ по представлению (4), для варианта задания механических свойств №1, от десятичного логарифма относительной величины физического разреза $\overline{\delta}_0=\delta_0/h$ при приложении нагрузки **P**. Графики *1* и *2* соответствуют определению НДС при решении в ANSYS для нагружений по моде I и II соответственно, графики *3* и *4* – МКЭ-решению на основе модели слоя взаимодействия [30] для нагружений по моде I и II соответственно.

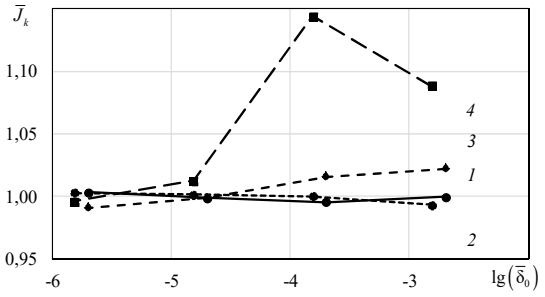


Рис. 5. Зависимости относительных значений *J*-интегралов от относительной величины физического разреза

Fig. 5. Dependences of the relative *J*-integrals on the relative magnitude of the physical section

Из рис. 5 следует, что при относительно небольшой толщине физического разреза наблюдается хорошая сходимость *J*-интеграла, полученного по представлению (4) для решения ANSYS и МКЭ-решения на основе модели [30] к значениям *J*-интеграла для математического разреза при решении ANSYS.

На рис. 6 показаны относительные значения компонент $\overline{J}_{\mathrm{I}}$ представления (4) для варианта задания механических свойств №1 при решении в ANSYS (гистограммы с непрерывным контуром) и МКЭ-решении на основе модели [30] (гистограммы с пунктирным контуром) к решению ANSYS для трещины в виде математического разреза, см. табл. 2, от относительной величины физического разреза $\overline{\delta}_0$ для нагружения по моде I.

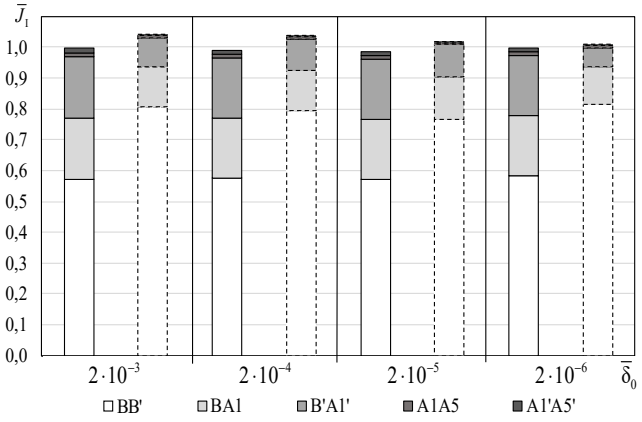


Рис. 6. Зависимости относительных значений составляющих *J*-интегралов, полученных по представлению (4), от относительной величины физического разреза

Fig. 6. Dependences of the relative values of the components of the *J*-integrals obtained according to representation (4) on the relative magnitude of the physical section

На рис. 7 показаны относительные значения компонент $\overline{J}_{\mathrm{II}}$ представления (4) для варианта задания механических свойств №1 при решении в ANSYS (гистограммы с непрерывным контуром) и МКЭ-решении на основе модели [30] (гистограммы с пунктирным контуром) к решению ANSYS для трещины в виде математического разреза, см. табл. 2, от относительной величины физического разреза $\overline{\delta}_0$ для нагружения по моде II.

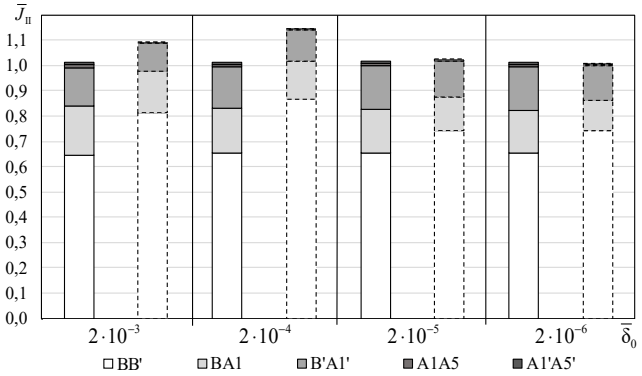


Рис. 7. Зависимости относительных значений составляющих *J*-интегралов, полученных по представлению (4), от относительной величины физического разреза

Fig. 7. Dependences of the relative values of the components of the *J*-integrals obtained according to representation (4) on the relative magnitude of the physical section

Из рис. 6, 7 видно, что для физического разреза в материале с однородными механическими характеристиками аддитивные слагаемые имеют одинаковый порядок величины при большем значении на торцевой части. Погрешность вычисления первого слагаемого представления (4) для изотропного тела при $\overline{\delta}_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ между решениями по ANSYS и МКЭ на основе модели [30] составляет: 28 % при нагружении по моде I; 12 % по моде II.

Результаты вычисления относительного значения компонент *J*-интеграла представления (4) для слоистого композита при решении в ANSYS к решению ANSYS для трещины в виде математического разреза, см. табл. 2, от относительной толщины адгезионного слоя $\overline{\delta}_0$ при нагружении по моде I приведены в табл. 4, при нагружении по моде II – в табл. 5.

Таблица 4

Относительные значения составляющих *J*-интеграла моды I

Table 4

Relative values of the components of the *J*-integral of mode I

$\overline{\delta}_0$	BB'	BA_1	$B'A_1'$	A_1A_5	$A_1'A_5'$
$2 \cdot 10^{-3}$	1,0476	0,0117	0,0117	0,0008	0,0008
$2 \cdot 10^{-4}$	1,0022	0,0105	0,0105	0,0007	0,0007
$2 \cdot 10^{-5}$	0,9940	0,0103	0,0103	0,0007	0,0007
$2 \cdot 10^{-6}$	0,999	0,0102	0,0102	0,0006	0,0006

Таблица 5

Относительные значения составляющих *J*-интеграла моды II

Table 5

Relative values of the components of the *J*-integral of mode II

$\overline{\delta}_0$	BB'	BA_1	$B'A_1'$	A_1A_5	$A_1'A_5'$
$2 \cdot 10^{-3}$	0,5257	0,0059	0,0028	0,0040	0,0012
$2 \cdot 10^{-4}$	0,8949	0,0071	0,0059	0,0042	0,0031
$2 \cdot 10^{-5}$	0,9716	0,0071	0,0068	0,0041	0,0037
$2 \cdot 10^{-6}$	0,9838	0,0071	0,0071	0,0040	0,0039

Результаты вычисления относительного значения компонент *J*-интеграла представления (4) для слоистого композита при КЭ-решении на основе модели [30] к решению ANSYS для трещины в виде математического разреза, см. табл. 2, от относительной толщины адгезионного слоя $\overline{\delta}_0$ при нагружении по моде I приведены в табл. 6, при нагружении по моде II – в табл. 7.

Из табл. 6, 7 видно, что в модели с адгезионным слоем, модуль упругости которого значительно меньше модуля упругости материала консолей $E/E_{adh} = 100$, основной вклад (более 98 %) в представление (4) вносит его первый член. Погрешность вычисления первого слагаемого представления (4) для слоистого композита при $\overline{\delta}_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ между решениями по ANSYS и МКЭ на основе модели [30] составляет: 0,41 % при нагружении по моде I; 0,44 % – по моде II.

Таблица 6

Относительные значения составляющих *J*-интеграла моды I

Table 6

Relative values of the components of the *J*-integral of mode I

$\overline{\delta}_0$	BB'	BA_1	$B'A_1'$	A_1A_5	$A_1'A_5'$
$2 \cdot 10^{-3}$	1,0525	0,0054	0,0042	0,0010	0,0003
$2 \cdot 10^{-4}$	1,0041	0,0050	0,0039	0,0009	0,0003
$2 \cdot 10^{-5}$	0,9962	0,0052	0,0041	0,0010	0,0004
$2 \cdot 10^{-6}$	0,9949	0,0078	0,0078	0,0016	0,0006

Таблица 7

Относительные значения составляющих *J*-интеграла моды II

Table 7

Relative values of the components of the *J*-integral of mode II

$\overline{\delta}_0$	BB'	BA_1	$B'A_1'$	A_1A_5	$A_1'A_5'$
$2 \cdot 10^{-3}$	0,5311	0,0052	0,0027	0,0001	0,0001
$2 \cdot 10^{-4}$	0,8959	0,0060	0,0059	0,0001	0,0004
$2 \cdot 10^{-5}$	0,9745	0,0060	0,0063	0,0001	0,0005
$2 \cdot 10^{-6}$	0,9795	0,0059	0,0062	0,0001	0,0005

Заключение

Для модельного представления трещиноподобного дефекта в виде физического разреза с толщиной, рассматриваемой в качестве линейного параметра, определена энергетическая характеристика типа *J*-интеграла, включающая векторы напряжений на свободной поверхности окрестности трещиноподобного дефекта, связанных с решением задачи, в виде интегральных слагаемых на торцевой части и двух поверхностях физического разреза. Для МКЭ-решения показана близость величины энергетической характеристики при стремлении линейного параметра к нулю к известным значениям *J*-интеграла для представления трещины в виде математического разреза при модах нагружения I и II. Для физического разреза в материале с однородными механическими характеристиками аддитивные слагаемые имеют одинаковый порядок величины при большем значении на торцевой части. Если материальный слой, лежащий на продолжении физического разреза, имеет существенно меньший модуль упругости по отношению к сопрягаемому слою материалу, то аддитивное слагаемое торцевой части фактически определяет энергетическую характеристику. В случае рассмотрения сопряжения тел тонкими адгезионными слоями, чьи модули упругости, как правило, значительно уступают характеристикам несущих материалов, рассмотренную энергетическую характеристику в торцевой части дефекта адгезионного слоя для МКЭ-решения можно отождествлять со значением *J*-интеграла слоя нулевой толщины.

Библиографический список

1. Inglis, C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners / C.E. Inglis // Transactions of the Royal Institute of Naval Architects. – 1913. – Vol. 55. – P. 219–230.
2. Williams, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack / M.L. Williams // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol. 24. – P. 109–114.
3. Мураками, Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1014 с.
4. Caicedo, J. Direct computation of stress intensity factors in finite element method / J. Caicedo, A. Portela // European Journal of Computational Mechanics. – 2017. – Vol. 26, no. 3. – P. 309–335. DOI: 10.1080/17797179.2017.1354578
5. Irvin, G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control / G.R. Irvin // Engn. Fracture Mechanics. – 1968. – Vol. 1. – P. 241–257.
6. Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids / A.A. Griffith // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. – 1921. – Vol. 221. – P. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006
7. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture / K. Huang [et al.] // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 128. – P. 67–72. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018
8. Cherepanov, G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics / G.P. Cherepanov // J. Appl. Math. Mech. – 2012. – Vol. 76, no. 5. – P. 519–536. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014
9. Rice, J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks / J.R. Rice // ASME J. Appl. Mech. – 1968. – Vol. 35. – P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206
10. Hutchinson, J.W. Stability analysis of J-controlled crack growth / J.W. Hutchinson, P.C. Paris // ASTM STP. – 1979. – Vol. 668. – P. 37–64.
11. Пестриков, В.М. Механика разрушения: курс лекций / В.М. Пестриков, Е.М. Морозов. – СПб.: ЦОП «Профессия», 2012. – 552 с.
12. Broberg, K.B. Cracks and fracture / K.B. Broberg. – London: Academic Press, 1999. – 752 p.
13. Brugo, T.M. Investigation by digital image correlation of mixed-mode I and II fracture behavior of polymeric IASCB specimens with additive manufactured crack-like notch / T.M. Brugo, I. Campione, G. Minak // Materials. – 2021. – Vol. 14. – 1084. DOI: 10.3390/ma14051084
14. Черепанов, Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
15. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
16. Santos, M.A.S. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility / M.A.S. Santos, R.D.S.G. Campilho // International Journal of Fracture. – 2017. –Vol. 207, no. 1. – P. 55–71. DOI: 10.1007/s10704-017-0219-x
17. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts / L.F.R. Neves, R.D.S.G. Campilho, I.J. Sanchez-Arce, K. Madani, C. Prakash // Processes. – 2022. – Vol. 10. – 2730. DOI: 10.3390/pr10122730
18. Irwin, G.R. Critical energy rate analysis of fracture strength / G.R. Irwin, J.A. Kies // Welding J. Res. Suppl. – 1954. – Vol. 33. – P. 193–198.
19. Салганик, Р.Л. Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) / Р.Л. Салганик, К.Б. Устинов // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62. DOI: 10.3103/S0025654412040061
20. Chen F.H.K., Shield R.T. Conservation laws in elasticity of the J-integral type // J. appl. Math. Phys. (ZAMP). – 1977. – Vol. 28. – pp. 1-22. doi: 10.1007/BF01590704
21. Sladek, J. Evaluations of the t-stress for interface cracks by the boundary element method / J. Sladek, V. Sladek // Eng. Fract. Mech. – 1997. – Vol. 56, no. 6. – P. 813–825. DOI: 10.1016/S0013-7944(96)00131-2
22. Caicedo, J. Direct computation of stress intensity factors in finite element method / J. Caicedo, A. Portela // European Journal of Computational Mechanics. – 2017. – Vol. 26, no. 3. – P. 309–335. DOI: 10.1080/17797179.2017.1354578
23. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – Москва: Мир, 1976. – 464 с.
24. Zenkevich, O.C. Finite Elements and Approximation / O.C. Zenkevich, K.J. Morgan. – New York: John Wiley & Sons, 1983. – 328 p.
25. Аспекты численного моделирования процессов разрушения упругохрупких тел / В.Э. Вильдеман [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 420–429. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.35
26. Бурцев, А.Ю. Исследование процесса локальной разгрузки элемента в конечно-элементном континууме / А.Ю. Бурцев, В.В. Глаголев, А.А. Маркин // Вестник Томского государственного университета. Механика и математика. – 2021. – № 69. – С. 86–96. DOI: 10.17223/19988621/69/7
27. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
28. Berto, F. Relationship between J_C and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite / F. Berto, V.V. Glagolev, A.A. Markin // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224. – P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0
29. Морозов, Е.М. ANSYS в руках инженера: механика разрушения / Е.М. Морозов. – М.: Ленанд, 2010. – 456 с.
30. Glagolev, V.V. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter / V.V. Glagolev, A.A. Markin // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
31. Li, S. The effects of shear on delamination in layered materials / S. Li, J. Wang, M.D. Thouless // J. Mech. Phys. Solids. – 2004. – Vol. 52, no. 1. – P. 193–214. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X
32. Andrews, M.G. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers / M.G. Andrews, R. Massabo // Engineering Fracture Mechanics. – 2007. – Vol. 74. – P. 2700–2720. DOI: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013

Shear of structural concrete members and pure mode II testing / H.W. Reinhardt, J. Osbolt, X. Shilang, A. Dinku // Advanced Cement Based Materials. – 1997. – Vol. 5. – P. 75–85. DOI: 10.1016/S1065-7355(96)00003-X

References

1. Inglis C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Royal Institute of Naval Architects*, 1913, Vol. 55, pp. 219-230.

2. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, pp. 109-114.

3. Murakami Iu. Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napriazhenii [Handbook of Stress Intensity Factors]. Moscow, Mir, 1990,1014 p.

4. Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method. *European Journal of Computational Mechanics*, 2017, Vol. 26, No. 3, pp. 309-335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578

5. Irvin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engn. Fracture Mechanics*, 1968, Vol. 1, pp. 241-257.

6. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A*, 1921, Vol. 221, pp. 163-189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006

7. Huang K., Shimada T., Ozaki N., Hagiwara Y., Sumigawa T., Guo L., Kitamura T. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, Vol. 128, pp. 67-72. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018

8. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics. *J. Appl. Math. Mech*., 2012, Vol. 76, No. 5, pp. 519-536. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014

9. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *ASME J. Appl. Mech*., 1968, Vol. 35, pp. 379-386. doi: 10.1115/1.3601206

10. Hutchinson J.W., Paris P.C. Stability analysis of J-controlled crack growth. *ASTM STP*, 1979, Vol. 668, pp. 37-64.

11. Pestrikov V.M., Morozov E.M. Mekhanika razrusheniia. Kurs lektsii [Fracture Mechanics. Lecture Course]. Saint Petersburg, TsOP «Professiia», 2012, 552 p.

12. Broberg K.B. Cracks and fracture. London, Academic Press, 1999, 752 p.

13. Brugo T.M., Campione I., Minak G. Investigation by digital image correlation of mixed-mode I and II fracture behavior of polymeric IASCB specimens with additive manufactured crack-like notch. *Materials*, 2021, Vol. 14, 1084. doi: 10.3390/ma14051084

14. Cherepanov G.P. Mekhanika razrusheniya kompozicionnyh materialov [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow, Nauka, 1983, 296 p.

15. Fudzii T., Dzako M. Mekhanika razrusheniya kompozicionnyh materialov [Fracture Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Mir, 1982, 232 p.

16. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility. *International Journal of Fracture*, 2017, Vol. 207, No. 1, pp. 55-71. doi: 10.1007/s10704-017-0219-x

17. Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sanchez-Arce I.J., Madani K., Prakash C. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts. *Processes*, 2022, Vol. 10, 2730. doi: 10.3390/pr10122730

18. Irwin G.R., Kies J.A. Critical energy rate analysis of fracture strength. *Welding J. Res. Suppl*., 1954, Vol. 33, pp. 193-198.

19. Salganik R.L., Ustinov K.B. Zadacha o deformirovanii uprugo zadelannoi plastiny, modeliruiushchei chastichno otsloivsheesia ot podlozhki pokrytie (ploskaia deformatsiia) [Problem of deformation of an elastically embedded plate simulating a coating partially peeled off from the substrate (plane deformation)]. Izv. RAN. MTT, 2012, № 4, pp. 50-62. doi: 10.3103/S0025654412040061

20. Chen F.H.K., Shield R.T. Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *J. appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1977, Vol. 28, pp. 1-22. doi: 10.1007/BF01590704

21. Sladek J, Sladek V. Evaluations of the t-stress for interface cracks by the boundary element method. *Eng. Fract. Mech*., 1997, Vol. 56, No. 6, pp. 813-825. doi: 10.1016/S0013-7944(96)00131-2

22. Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method. *European Journal of Computational Mechanics*, 2017, Vol. 26, No. 3, pp. 309-335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578

23. Oden Dzh. Konechnye elementy v nelineinoi mekhanike sploshnykh sred [Finite Elements in Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir, 1982, 464 p.

24. Zenkevich O.C., Morgan K.J. Finite Elements and Approximation. New York, John Wiley & Sons, 1983, 328 p.

25. Vil'deman V.E., Feklistova E.V., Mugatarov A.I., Mullakhmetov M.N., Kuchukov A.M. Aspekty chislennogo modelirovaniia protsessov razrusheniia uprugo-khrupkikh tel [Aspects of numerical modeling of fracture processes of elastic-brittle bodies]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2023, Vol. 16, No. 4, pp. 420-429. doi: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.35

26. Burtsev A.Iu., Glagolev V.V., Markin A.A. Issledovanie protsessa lokal'noi razgruzki elementa v konechno-elementnom kontinuume [Investigation of local unloading of an element in a finite element continuum]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Mekhanika i matematika*, 2021, № 69, pp.86-96. doi: 10.17223/19988621/69/7

27. Brebbiia K., Telles Zh., Vroubel L. Metody granichnykh elementov [Boundary Element Methods]. Moscow, Mir, 1987, 524 p.

28. Berto F., Glagolev V.V, Markin A.A. Relationship between J_C and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *International Journal of Fracture*, 2020, Vol. 224, pp. 277-284. doi: 10.1007/s10704-020-00464-0

29. Morozov E.M. ANSYS v rukakh inzhenera: mekhanika razrusheniia [ANSYS in the Hands of an Engineer: Fracture Mechanics]. – Moscow, Lenand, 2010, 456 p.

30. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, Vol. 158, pp. 141-149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

31. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, Vol. 52, No. 1, pp. 193-214. doi: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X

32. Andrews M.G., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, Vol. 74, pp. 2700-2720. doi: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013

33. Reinhardt H.W., Osbolt J., Shilang X., Dinku A. Shear of structural concrete members and pure mode II testing. *Advanced Cement Based Materials*, 1997, Vol. 5, pp. 75-85. doi: 10.1016/S1065-7355(96)00003-X

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, https://rscf.ru/project/23-21-00017/ в Тульском государственном университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-21-00017, https://rscf.ru/project/23-21-00017/ at Tula State University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.