Степанова, Л.В. Эффекты слагаемых высшего порядка малости в обобщенных рядах для представления полей, ассоциированных с вершиной трещины в анизотропных средах. Часть 2. Оценки точности асимптотических решений / Л.В. Степанова, К.А. Мушанкова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.04 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 2. – С. 39–56.

Perm Polytech Style: Stepanova L.V., Mushankova K.A. Effects of Terms of High Order in Synthesized Polynomial Series Approximation for Fields Associated with the Crack Tip in Anisotropic Media. Part 2. Accuracy Estimates of Asymptotic Solutions. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 2, pp. 39-56. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.04
УДК 539.3

ЭФФЕКТЫ СЛАГАЕМЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ В ОБОБЩЕННЫХ РЯДАХ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЕЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ВЕРШИНОЙ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ. ЧАСТЬ 2. ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Л.В. Степанова, К.А. Мушанкова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 07 октября 2024 г.
Одобрена: 26 февраля 2025 г.
Принята к публикации: 30 мая 2025 г.

Ключевые слова:

трещина, анизотропные среды, теория упругости анизотропного тела, ортотропные материалы, кубическая сингония, решение в рядах, влияние высших приближений, поля абсолютных погрешностей.

АННОТАЦИЯ

Во второй части статьи обсуждается точность обобщенных асимптотических рядов, аппроксимирующих поля напряжений и перемещений, ассоциированных с острием трещины в ортотропных материалах в плоской постановке задачи анизотропной упругости. Приведено сопоставление точного аналитического решения задачи о растяжении бесконечной анизотропной плоскости с наклонным центральным разрезом, полученного на основе методов теории функции комплексного переменного, и приближенного решения, найденного с использованием метода разложения в степенные ряды. Впервые получены поля абсолютной погрешности, допускаемой при усечении асимптотических рядов на различном количестве слагаемых для сред с кубической сингонией их упругих свойств. Анализ полей десятичного логарифма от абсолютных погрешностей показал, что вблизи вершины трещины для всех типов комбинированного (смешанного) деформирования существуют геометрические места точек – локусы точности, в которых приближенное решение практически совпадает с точным решением, что может быть использовано при интерпретации экспериментальных и вычислительных данных, получаемых с целью определения коэффициентов асимптотических рядов, аппроксимирующих напряжения и перемещения вблизи кончика трещины, надреза или углового выреза.

В целях количественной оценки погрешностей, допускаемых при усечении асимптотического ряда на N-м слагаемом, относительно точного аналитического решения, полученного на основании теории функции комплексного переменного, введена в рассмотрение L_2-норма, что дало возможность указать количество слагаемых ряда, необходимое для достижения требуемой точности при представлении решения многокоэффициентным асимптотическим рядом, для широкого спектра значений угла наклона трещины к вертикальной оси (оси действия приложенной растягивающей нагрузки) и угла, задающего расположение осей анизотропии упругих свойств материала.

© **Степанова Лариса Валентиновна** – д. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой математического моделирования в механике, e-mail: stepanova.lv@ssau.ru.
Мушанкова Карина Артемовна – аспирант кафедры математического моделирования в механике, e-mail: mushankova.ka@ssau.ru.

Larisa V. Stepanova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department, Mathematical Modeling in Mechanics, e-mail: stepanova.lv@ssau.ru.
Karina A. Mushankova – Postgraduate student, Department of Mathematical Modeling in Mechanics, e-mail: mushankova.ka@ssau.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

EFFECTS OF TERMS OF HIGH ORDER IN SYNTHESIZED POLYNOMIAL SERIES APPROXIMATION FOR FIELDS ASSOCIATED WITH THE CRACK TIP IN ANISOTROPIC MEDIA. PART 2. ACCURACY ESTIMATES OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS

L.V. Stepanova, K.A. Mushankova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 07 October 2024
Approved: 26 February 2025
Accepted for publication:
30 May 2025

Keywords:

crack, anisotropic media, elasticity theory for anisotropic media, orthotropic media, cubic syngony, asymptotic solution, effect of higher order terms, absolute error fields.

ABSTRACT

The second part of the article discusses the accuracy of generalized asymptotic series representing the stress and displacement fields associated with the tip of an acute crack in orthotropic materials in the formulation of the plane problem of the theory of anisotropic elasticity. We compare the exact analytical solution to the problem of stretching an infinite anisotropic plane with an inclined central crack obtained using methods of the complex variable theory and an approximate solution found using the power series expansion method. For the first time, the fields of absolute error allowed for the truncation of the asymptotic series on a different number of terms for materials with a cubic symmetry of elastic properties are obtained. The analysis of the fields of the decadic logarithm of absolute errors showed that near the crack tip of all types of combined (mixed) deformation there are geometric points – loci of accuracy, in which the approximate solution almost coincides with the exact solution, which can be used in the interpretation of experimental and computational data obtained in order to determine the coefficients of asymptotic series for stresses and displacements near the tip of a crack or notch. To quantify the errors allowed when truncating the asymptotic series on the N th term, a relatively accurate analytical solution obtained on the basis of the theory of the function of a complex variable the L_2-norm is introduced into scrutiny, which gives an opportunity to choose and specify the number of terms of the series necessary to achieve the required accuracy when presenting the asymptotic ansatz with a multi-coefficient asymptotic series, for a wide range of slope angle values of the crack to the vertical axis (the axis of action of the applied tensile load) and the angle, setting the location of the anisotropy axes of the elastic properties of the material.

Введение

В механике хрупкого разрушения для аппроксимирования перемещений, деформаций и напряжений в близлежащей окрестности вершины надреза, трещины или острого углового выреза распространен метод разложения по собственным функциям, приводящий к асимптотическим представлениям (в виде асимптотических рядов по степеням $r^{1/2}$ расстояния от кончика трещины r) механических полей у вершины дефекта, к формальным бесконечным рядам [1–5]. Долгое время при решении краевых задач механики трещин сохраняли первые слагаемые рядов, соответствующих нормальному отрыву и поперечному сдвигу, которые содержат коэффициенты интенсивности напряжений, и T-напряжения – коэффициенты доминирующих слагаемых в близлежащей окрестности вершины были основными рассматриваемыми величинами (параметрами разрушения) [6–12], в то время как последующими слагаемыми более высокого порядка малости при малых r пренебрегали. В последнее время удержание регулярных слагаемых в асимптотических рядах, аппроксимирующих поля у вершины трещины, особенно при обработке данных экспериментов, проводимых поляризационно-оптическими методами, конечно-элементными расчетами и иными численными методами (методом фазового поля), стало обычной рутиной [13–18]. Во многих исследованиях полей, ассоциированных с вершиной трещины, в настоящее время сохраняют 5–9 слагаемых или более [13–18]. Однако, несмотря на большое количество исследований, реконструирующих асимптотический ряд М. Уильямса или его распространение на случай анизотропных сред [19–32], общих закономерностей, устанавливающих связь между рассматриваемыми расстояниями от кончика трещины, типом комбинированного нагружения (или углом наклона трещины), избранным материалом и расположением осей симметрии анизотропии, пока не предложено. Для анизотропных материалов, по всей видимости, таких оценок еще не получено. Поэтому количественная оценка погрешностей, допускаемая при усечении асимптотических рядов, представляющих поля перемещений, деформаций и напряжений вблизи вершины трещины, представляет самостоятельный интерес.

В настоящей работе оценка точности приближенного решения в форме обобщающего подход М. Уильямса ряда по степеням расстояния от кончика трещины в анизотропной среде производится с помощью двух подходов. Первый основан на вычислении полей абсолютной погрешности, даваемой приближенным асимптотическим рядом при его усечении на разном количестве слагаемых. Поля абсолютной погрешности

построены для двух случаев: для усеченных 11- и 19-членных асимптотических рядов. Обнаруживается, что в окрестности вершины трещины существуют геометрические места точек, в которых абсолютная разность точного и приближенного решений имеет порядок $10^{-12}-10^{-14}$, то есть приближенное решение практически полностью воспроизводит точное, что может быть использовано при обработке экспериментальных данных, полученных из опытов, проводимых интерференционно-оптическими методами, и подходами, опирающимися на конечно-элементный анализ полей у вершины трещины в анизотропной среде. Второй подход основан на вычислении относительной погрешности в соответствии с введенной L_2-нормой. Данный подход позволяет для достижения желаемой точности выбрать необходимое количество слагаемых ряда в приближенном решении.

Поля абсолютных погрешностей

Известный формализм теории функций комплексного переменного (ТФКП) позволяет получить поля напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в анизотропной пластине с наклонной в общем случае трещиной в форме [4; 5]

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\left(\mu_1\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{\mu_2^2 z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\left(\mu_2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{\mu_1^2 z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}\right]\right\}+\\
&+\sigma^{\infty}\left[\cos^2\alpha+\mathrm{Re}\left(\mu_1\mu_2\right)\sin^2\alpha+\mathrm{Re}\left(\mu_1+\mu_2\right)\sin\alpha\cos\alpha\right],\\
\sigma_{22} &= \sigma^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\left(\mu_1\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\left(\mu_2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}\right]\right\},\\
\sigma_{12} &= \sigma^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{-1}{\mu_1-\mu_2}\left[\left(\mu_1\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{\mu_2 z_2}{\sqrt{z_2^2-a^2}}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\left(\mu_2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{\mu_1 z_1}{\sqrt{z_1^2-a^2}}\right]\right\},
\end{aligned} \tag{1}$$

где приняты обозначения: $z_j = x_1+\mu_j x_2$ – комплексные переменные, μ_j – корни характеристического уравнения, a – половина длины трещины, σ^{∞} – приложенная нагрузка, α – угол между трещиной и вертикальной осью. Разложение напряжений (1) в ряд по степеням расстояния от кончика дефекта в полярных координатах с полюсом в вершине трещины приводит к асимптотическим рядам

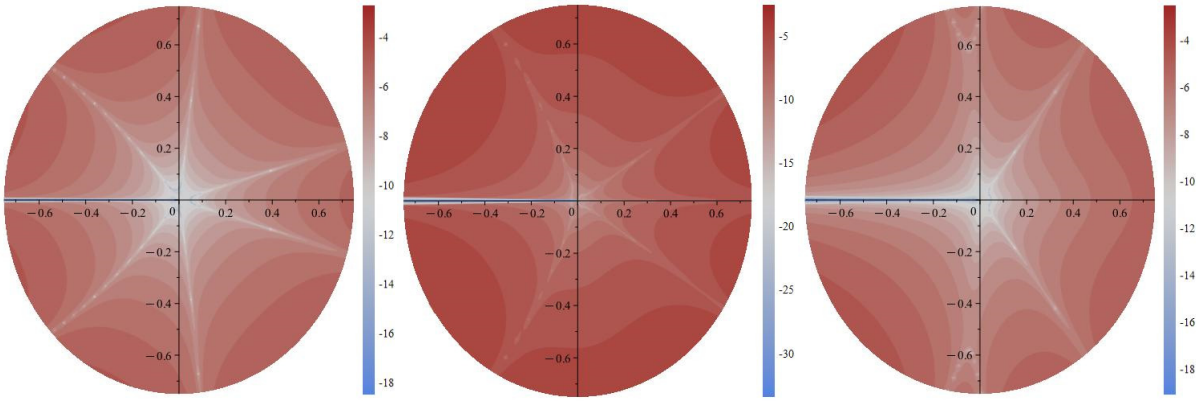
$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix} = 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{i^{(k+1)^2}}{\mu_1-\mu_2}r^{\frac{k}{2}-1}\begin{bmatrix}\mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}-\mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}\\ \mu_1^{\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}-\mu_2^{\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}\\ -\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}+\mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}\end{bmatrix}\right\}+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{i^{(k+1)^2}}{\mu_1-\mu_2}r^{\frac{k}{2}-1}\begin{bmatrix}\mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{k}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}-\mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{k}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}\\ \mu_1^{\frac{(-1)^{k}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}-\mu_2^{\frac{(-1)^{k}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}\\ -\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{k}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}+\mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{k}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{k}{2}-1}\end{bmatrix}\right\}. \tag{2}$$

В выражениях (2) A_k, B_k – коэффициенты ряда, отражающие влияние приложенных усилий и форму образца с трещиной или вырезом. Для простых конфигураций образцов коэффициенты могут быть найдены с помощью теоретического решения. К такому типу конфигураций относится бесконечная пластина с центральным математическим разрезом. Формулы для коэффициентов A_k, B_k получены в [4; 5] и обсуждались в первой части настоящей работы. Для более сложных форм образцов с более сложными системами нагружений требуется привлечение экспериментальных и вычислительных процедур для восстановления ряда (2) и его коэффициентов, при этом возникают вопросы, связанные с числом сохраняемых слагаемых ряда (2): сколько слагаемых ряда следует удерживать для достижения требуемой точности и чем это число обусловливается. Ответить на данные вопросы позволяет сопоставление точного решения (1) и приближенного решения (2) для краевых задач, допускающих точное теоретическое решение. Поэтому ниже рассматривается сравнение решений (1) и (2) для бесконечной анизотропной пластины, ослабленной наклонной центральной трещиной.

Для практических целей формальные асимптотические разложения (2) усекают, оставляя конечное число слагаемых. Для оценки ошибки, допускаемой усеченным рядом, можно рассмотреть абсолютную разность между точным аналитическим решением (1) и приближенным аналитическим решением в рядах (2). Для удобства ниже построены десятичные логарифмы от абсолютной погрешности для 11- и 19-членных рядов (2) для каждой компоненты. Выражения для коэффициентов ряда A_k, B_k приведены в первой части статьи. На рис. 1–8 проиллюстрированы распределения десятичного логарифма полей абсолютных погрешностей, допускаемых при усечении на 11 и 19 слагаемом асимптотических рядов, представляющих поля напряжений для нормального отрыва ($\alpha=\pi/2$) и нескольких значений углов, отвечающих смешанному нагружению ($\alpha=3\pi/8$, $\alpha=\pi/4$ и $\alpha=\pi/8$, $\beta=0$). На рис. 1–8 видны геометрические места точек, для которых абсолютная погрешность имеет порядок 10^{-10} для компоненты σ_{11} (см. рис. 1, слева), 10^{-16} для компоненты σ_{12} (см. рис. 1, в центре) и 10^{-12} (для компоненты σ_{22} (см. рис. 1, слева)) для асимптотических рядов, содержащих 11 слагаемых (7 ненулевых

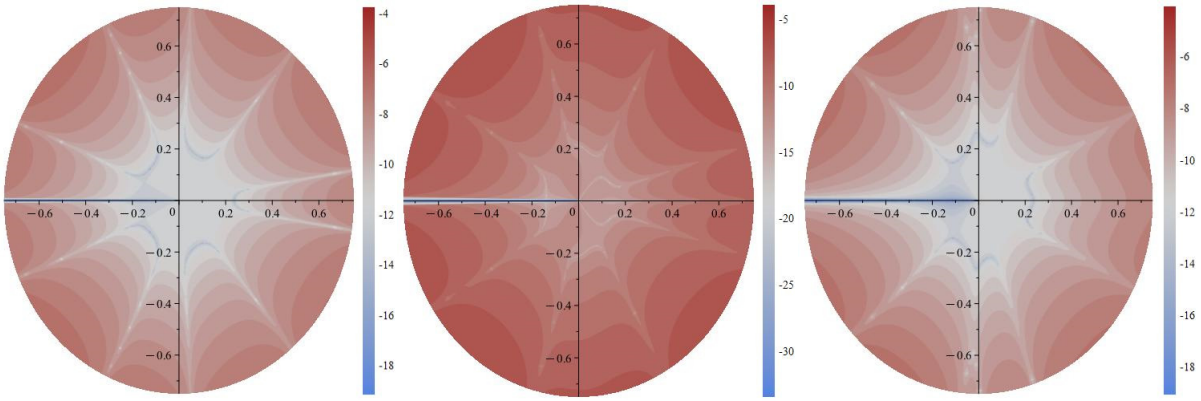
для σ_{11} и 6 отличных от нуля для σ_{12} и σ_{22}). Эти геометрические места можно интерпретировать как точки точности асимптотического решения, в которых асимптотическое представление воспроизводит решение (1), построенное на основе методов ТФКП, с высокой точностью. На рис. 2 представлены десятичные логарифмы полей абсолютной погрешности для рядов с 19 слагаемыми для $\alpha = \pi / 2$. Видно, что число кривых с увеличением количества удерживаемых слагаемых растет. С ростом числа удерживаемых приближений допускаемая погрешность снижается и имеет порядок 10^{-14} для компоненты σ_{11} (см. рис. 2, слева), 10^{-20} для компоненты σ_{12} (см. рис. 2, в центре) и 10^{-16} (для компоненты σ_{22} (см. рис. 2, справа)). Для асимптотических рядов, содержащих 19 слагаемых, имеется 11 ненулевых для σ_{11} и 10 отличных от нуля для σ_{12} и σ_{22}. Ниже данные геометрические места точек с низкой абсолютной погрешностью называются локусами точности. На рис. 3 и 4 показаны точки точности решения (локусы точности) для смешанного нагружения пластины с наклонной трещиной при $\alpha = 3\pi / 8$ для двух случаев: 11 и 19 слагаемых ряда.



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 1. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 11-м слагаемом для $\alpha = \pi / 2$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

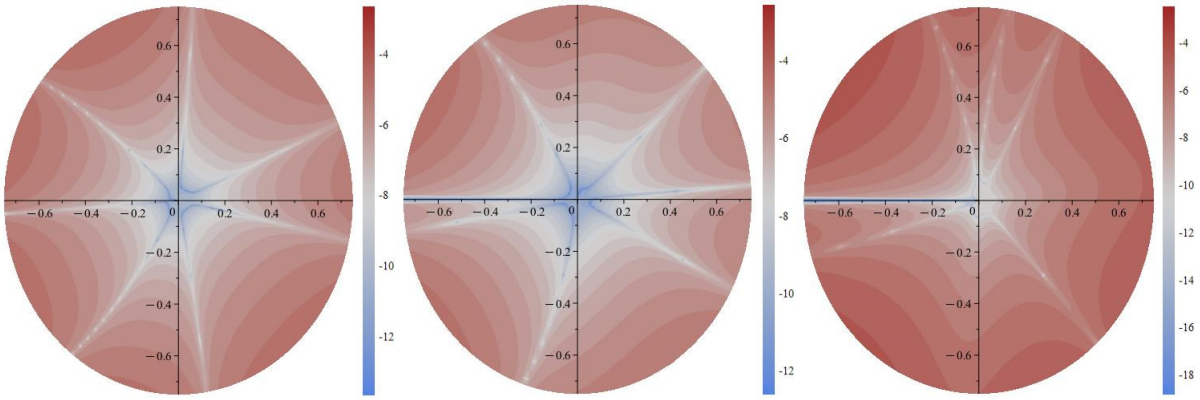
Fig. 1. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 11th term for $\alpha = \pi / 2$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 2. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 19-м слагаемом для $\alpha = \pi / 2$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (1) и приближенного решения (2), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

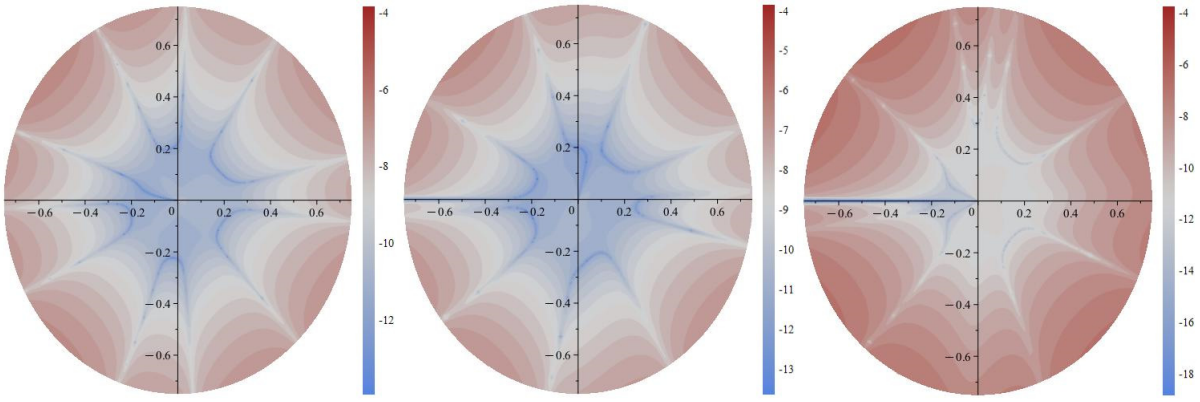
Fig. 2. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 19th term for $\alpha = \pi / 2$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 3. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 11-м слагаемом для $\alpha = 3\pi/8$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

Fig. 3. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 11th term for $\alpha = 3\pi/8$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}

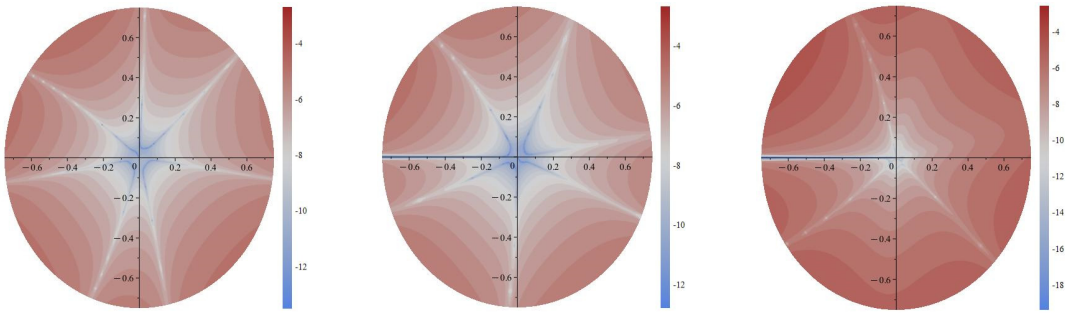


σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 4. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 19-м слагаемом для $\alpha = 3\pi/8$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

Fig. 4. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 19th term for $\alpha = 3\pi/8$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}

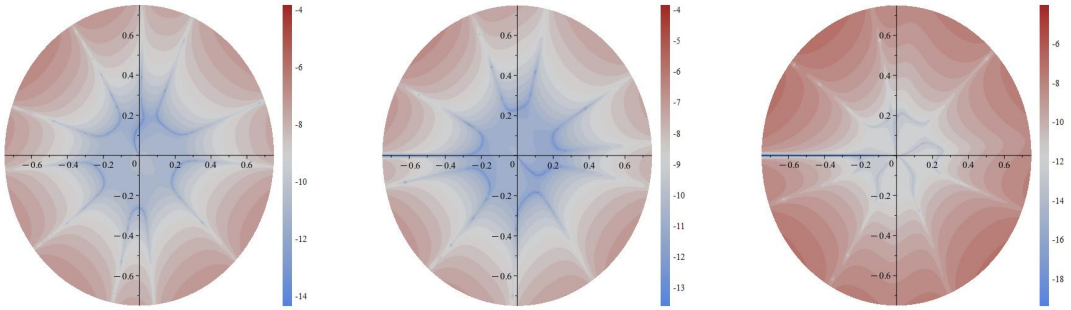
Для $\alpha = 3\pi/8$ абсолютная погрешность имеет примерно порядок 10^{-12} для всех компонент напряжений, представляемых 11 слагаемыми ряда, и порядок 10^{-13} для всех компонент напряжений, представляемых 19 слагаемыми ряда. Из рис. 1–8 можно выявить общие тенденции: 1) для каждой компоненты тензора напряжений имеются линии, где приближенное асимптотическое решение практически совпадает с точным решением, количество линий определяется числом членов асимптотического ряда, видом смешанного нагружения и рассматриваемым материалом (ибо Т-напряжения в общем случае зависят от корней характеристического уравнения и, следовательно, от материальных свойств); 2) компонента тензора напряжения σ_{22} всегда проявляет меньшую погрешность (для всех типов комбинированного деформирования); 3) абсолютная погрешность для компонент σ_{11} и σ_{12} при уменьшении угла α также уменьшается, тогда как компонента σ_{22} оказывается менее чувствительной к виду смешанного нагружения, и значения абсолютной погрешности не меняются.



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 5. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 11-м слагаемом для $\alpha = \pi / 4$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

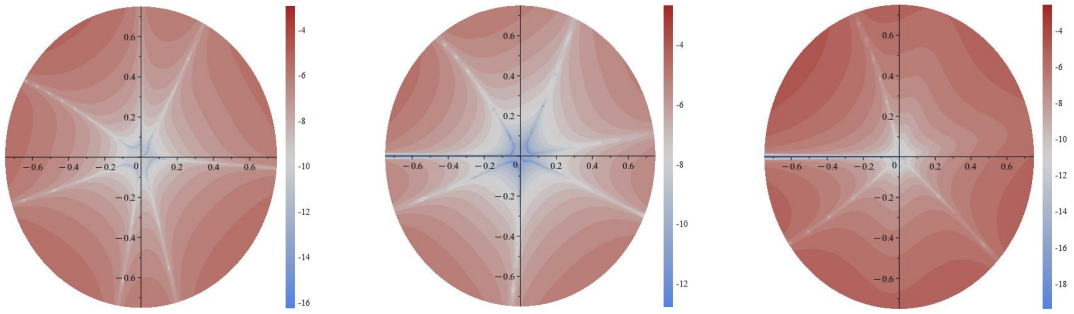
Fig. 5. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 11th term for $\alpha = \pi / 4$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 6. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 19-м слагаемом для $\alpha = \pi / 4$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

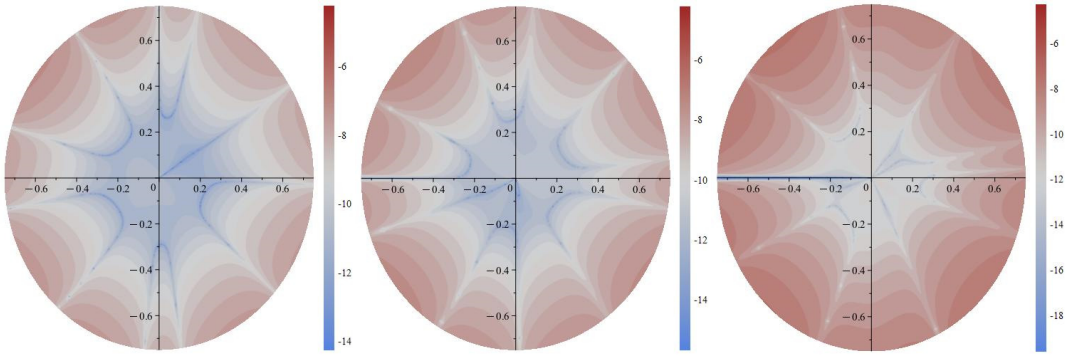
Fig. 6. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 19th term for $\alpha = \pi / 4$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 7. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 11-м слагаемом для $\alpha = \pi / 8$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

Fig. 7. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 11th term for $\alpha = \pi / 8$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}



σ_{11} σ_{12} σ_{22}

Рис. 8. Поля абсолютных погрешностей, допускаемых усечением ряда на 19-м слагаемом для $\alpha = \pi/8$ и σ_{11} (слева), σ_{12} (в центре), σ_{22} (справа): десятичный логарифм от абсолютной разности точного решения (*1*) и приближенного решения (*2*), отнесенных к приложенной нагрузке σ^{∞}

Fig. 8. The fields of absolute errors allowed by the truncation of the series on the 19th term for $\alpha = \pi/8$ and σ_{11} (left), σ_{12} (center), σ_{22} (right): Brigg's logarithm (decadic logarithm) of the absolute difference between the exact solution (*1*) and the approximate solution (*2*) related to the applied load σ^{∞}

Полученные поля абсолютных погрешностей дают возможность выбрать точки при их извлечении из опытных результатов измерений, осуществляемых, например, современными интерференционно-оптическими техниками (методами корреляции изображений, цифровой фотоупругости, спекл-интерферометрии) специальным образом. Из всего доступного экспериментального поля измеряемой величины следует выбирать те точки, в которых допускаемая абсолютная погрешность минимальна (т.е. точки, принадлежащие локусам точности), что позволит при последующей обработке и интерпретации результатов с более высокой точностью найти коэффициенты ряда (*2*) для напряжений и перемещений в опытных образцах с дефектами. Коэффициенты A_k, B_k многопараметрических рядов определяются в большинстве случаев путем переопределенного метода [10; 33; 34], который относится к техникам, требующим точных исходных данных, поэтому использование в качестве исходных точек, принадлежащих к локусам точности, приведет к уточненным оценкам коэффициентов рядов (*2*).

Оценка погрешностей, допускаемых усечением ряда

Для количественной оценки погрешностей, допускаемых при усечении асимптотического ряда (2) на *N*-м слагаемом, относительно точного аналитического решения (1), полученного на основании ТФКП, введем в рассмотрение L_2-норму:

$$\left\| X \right\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M} \left(X_i^{exact} - X_i^{N\,asymp} \right)^2}{\sum_{i=1}^{M} \left(X_i^{exact} \right)^2}}, \qquad (3)$$

где $X_i^{N\,asymp}$ – физическая величина, оцениваемая с помощью асимптотического ряда, усеченного на *N*-м слагаемом, X_i^{exact} – значение величины, вычисленное посредством точного решения, базирующегося на ТФКП, M – количество точек, участвующих в разбиении отрезка $[-\pi, \pi]$.

Результаты вычислений относительной погрешности $\varepsilon = \left\| X \right\|_2 \cdot 100\,\%$, проведенных согласно (3), для трех компонент тензора напряжений рассматриваемой плоской задачи на различном удалении от кончика трещины с учетом различного количества удерживаемых слагаемых в усеченном асимптотическом представлении приведены в табл. 1–15.

Из табл. 1–15 следует, что наибольшая погрешность наблюдается для нормальной компоненты напряжений σ_{11}, очевидно, вследствие влияния *T*-напряжений (табл. 1, 4, 7, 10, 13). В дополнение видно, что чем больше точка удалена от кончика трещины (чем больше зона, окружающая вершины трещины, требуется для изучения и анализа), тем больше слагаемых асимптотического ряда необходимо сохранять. Действительно, для значений углов $\alpha = \pi/2, \beta = 0$ для расстояния $\hat{r} = 0{,}1$ для достижения точности $\varepsilon = 10^{-5}\%$ необходимо сохранить 11 слагаемых асимптотического ряда (первая строка табл. 1). Дополнительно, на основании проведенных расчетов, можно отметить, что для достижения погрешности, не превышающей $\varepsilon = 10^{-5}\%$, на расстоянии $\hat{r} = 0{,}6$ для компоненты σ_{11} необходимо рассмотреть 29 слагаемых асимптотического ряда. Для достижения погрешности, не превышающей 1 %, как это следует из данных табл. 1, на данном расстоянии, нужно сохранить семь слагаемых. Для достижения погрешности, не превышающей

$\varepsilon = 10^{-5}\%$, на расстоянии $\hat{r} = 0,6$ для касательной компоненты σ_{12} необходимо рассмотреть 31 слагаемое асимптотического ряда. Для достижения относительной погрешности, не превышающей 1 % на расстоянии $\hat{r} = 0,6$, для компоненты σ_{12} требуется девять слагаемых (последняя строка таблицы 2). Для достижения относительной погрешности, не превышающей 1 % на расстоянии $\hat{r} = 0,6$, для касательной компоненты σ_{22} требуется девять слагаемых (последняя строка табл. 3).

Из табл. 4, в которой приводится вычисленная относительная погрешность, допускаемая при различном количестве слагаемых ряда для $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/12$, следует, что даже для небольших расстояний от вершины трещины $\hat{r} = 0,2$, для достижения относительной погрешности менее 1 % для компоненты тензора напряжений σ_{11} необходимо удерживать пять слагаемых, тогда как для расстояния $\hat{r} = 0,6$ уже нужно сохранять девять слагаемых. В случае, когда требуется достичь погрешность, не превышающую $\varepsilon = 10^{-5}\%$, для этой же компоненты нужно располагать 37-членным асимптотическим разложением на расстоянии $\hat{r} = 0,6$. При $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/12$ для компоненты тензора напряжений σ_{12} на расстоянии $\hat{r} = 0,6$ девятичленное асимптотическое разложение приводит к погрешности, не превышающей 1 %, однако если необходима более высокая точность, например, $\varepsilon = 10^{-5}\%$, то следует сохранить 37 слагаемых. Для $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/12$ компонента тензора напряжений σ_{22} на расстоянии $\hat{r} = 0,6$ определяется семичленным асимптотическим разложением с погрешностью, не превышающей 1 % (табл. 6, последняя строка), однако, если необходима более высокая точность, например, $\varepsilon = 10^{-5}\%$, то следует сохранить 33 слагаемых.

Таблица 1

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{11} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 1

Relative error for stress tensor component σ_{11} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$
$\hat{r} = 0,1$	122,90	19,004	0,4343	0,0149	0,00068	0,000037	$0,20 \cdot 10^{-5}$	$0,11 \cdot 10^{-6}$
$\hat{r} = 0,2$	175,91	41,223	1,9039	0,1318	0,01194	0,00129	0,00014	0,00001
$\hat{r} = 0,3$	192,37	58,629	4,1121	0,4307	0,05772	0,00927	0,00152	0,00025
$\hat{r} = 0,4$	194,00	72,280	6,8553	0,9662	0,17060	0,03612	0,00792	0,00181
$\hat{r} = 0,5$	191,31	84,324	10,1548	1,8071	0,39459	0,10337	0,10337	0,00824
$\hat{r} = 0,6$	187,77	96,042	14,1176	3,0459	0,79067	0,24648	0,08181	0,02882

Таблица 2

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{12} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 2

Relative error for stress tensor component σ_{12} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = 0$	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$
$\hat{r} = 0,1$	6,330	0,349	0,0157	0,00070	0,00003	$0,24 \cdot 10^{-5}$	$0,12 \cdot 10^{-6}$
$\hat{r} = 0,2$	11,59	1,370	0,1250	0,01141	0,00119	0,00013	0,00001
$\hat{r} = 0,3$	15,92	3,051	0,4238	0,05865	0,00910	0,00152	0,00025
$\hat{r} = 0,4$	19,44	5,420	1,0191	0,19012	0,03904	0,00858	0,00190
$\hat{r} = 0,5$	22,26	8,560	2,0427	0,48140	0,12268	0,03331	0,00918
$\hat{r} = 0,6$	24,51	12,626	3,6697	1,01784	0,31824	0,10257	0,03379

Таблица 3

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{22} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 3

Relative error for stress tensor component σ_{22} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = 0$	$N=1$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	4,49	0,092	0,0050	0,00025	0,00001	$0,71\cdot10^{-6}$	$0,41\cdot10^{-7}$
$\hat{r}=0,2$	8,47	0,338	0,0380	0,00394	0,00040	0,00004	$0,51\cdot10^{-5}$
$\hat{r}=0,3$	12,03	0,698	0,1227	0,01955	0,00306	0,00051	0,00087
$\hat{r}=0,4$	15,24	1,142	0,2809	0,06102	0,01297	0,00289	0,00065
$\hat{r}=0,5$	18,17	1,651	0,5347	0,14856	0,04007	0,01111	0,00315
$\hat{r}=0,6$	20,85	2,211	0,9092	0,31012	0,10175	0,03402	0,01144

Таблица 4

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{11} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 4

Relative error for stress tensor component σ_{11} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/12$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	126,09	21,819	0,5605	0,0214	0,00127	0,00009	$0,20\cdot10^{-5}$	$0,11\cdot10^{-6}$
$\hat{r}=0,2$	178,78	47,411	2,4454	0,1844	0,02159	0,03146	0,00043	0,00005
$\hat{r}=0,3$	195,62	68,174	5,3034	0,5924	0,10304	0,02304	0,00481	0,00096
$\hat{r}=0,4$	198,17	85,260	8,9022	1,3128	0,30268	0,09238	0,02603	0,00689
$\hat{r}=0,5$	196,35	100,855	13,2557	2,4258	0,69992	0,27248	0,09670	0,03169
$\hat{r}=0,6$	193,45	116,231	18,4553	4,0341	1,40746	0,66909	0,28558	0,11103

Таблица 5

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{12} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 5

Relative error for stress tensor component σ_{12} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/12$	$N=1$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	7,237	0,465	0,0230	0,00112	0,00007	$0,52\cdot10^{-5}$	$0,36\cdot10^{-6}$
$\hat{r}=0,2$	13,17	1,839	0,1834	0,01773	0,00223	0,00003	0,00004
$\hat{r}=0,3$	18,00	4,129	0,6213	0,08936	0,01656	0,00368	0,00079
$\hat{r}=0,4$	21,93	7,405	1,4940	0,28474	0,06932	0,02082	0,00608
$\hat{r}=0,5$	25,19	11,821	2,9949	0,70985	0,21388	0,08135	0,30039
$\hat{r}=0,6$	28,06	17,637	5,3770	1,52288	0,54835	0,25354	0,11303

Таблица 6

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{22} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 6

Relative error for stress tensor component σ_{22} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/12$	$N=1$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	4,70	0,104	0,0073	0,00042	0,00002	$0,15\cdot10^{-5}$	$0,11\cdot10^{-6}$
$\hat{r}=0,2$	8,84	0,378	0,0568	0,00664	0,00072	0,00009	0,00001
$\hat{r}=0,3$	12,53	0,771	0,1867	0,03326	0,00547	0,00104	0,00022
$\hat{r}=0,4$	15,86	1,249	0,4342	0,10471	0,02298	0,00576	0,00165
$\hat{r}=0,5$	18,98	1,793	0,8392	0,25617	0,07030	0,02177	0,00792
$\hat{r}=0,6$	21,70	2,407	1,4461	0,53469	0,17593	0,06488	0,02850

Таблица 7

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{11} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table7

Relative error for stress tensor component σ_{11} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/6$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	58,39	15,618	0,48999	0,0320	0,00254	0,00020	0,00002	$0,17\cdot10^{-5}$
$\hat{r}=0,2$	88,10	35,277	2,12298	0,2928	0,04667	0,00714	0,00135	0,00025
$\hat{r}=0,3$	113,76	58,061	5,03417	1,1029	0,26257	0,05755	0,01703	0,00484
$\hat{r}=0,4$	137,50	83,367	9,28667	2,8743	0,90013	0,25293	0,10417	0,03934
$\hat{r}=0,5$	159,63	110,269	14,8708	6,0791	2,32583	0,79285	0,42592	0,19875
$\hat{r}=0,6$	179,72	137,406	21,6901	11,1655	4,96854	1,99522	1,33748	0,73460

Таблицы 7–9 показывают относительные погрешности для компонент тензора напряжений при $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/6$. Из данных табл. 7 следует, что относительная погрешность для компоненты σ_{11} становится меньше, чем 1 %, на расстоянии $\hat{r}=0,1$, если удерживать три слагаемых; на расстоянии $\hat{r}=0,3$ для получения погрешности, меньшей 1 %, следует удерживать семь слагаемых, однако уже на расстоянии $\hat{r}=0,6$ необходимо прибегать к тринадцатичленному разложению. Если необходимо достичь большей точности, например, $\varepsilon = 10^{-5}\%$, то следует сохранить 57 слагаемых ряда для составляющей σ_{11}. Вычисляемая относительная погрешность для компоненты σ_{12} становится менее 1 % на расстоянии $\hat{r}=0,1$, если удерживать также три слагаемых, однако уже на расстоянии $\hat{r}=0,6$ необходимо прибегать к одиннадцатичленному разложению. Для представления касательного напряжения на расстоянии $\hat{r}=0,1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}\%$ необходимы тринадцать слагаемых. На том же расстоянии для нормальной компоненты σ_{22} необходимы одиннадцать слагаемых. Одночленное разложение для компоненты σ_{22} приводит к погрешности, равной 4 %, для касательной компоненты σ_{12} одночленное разложение приводит к относительной погрешности более 6 %, а для σ_{11} погрешность составляет более 58 %, добавление Т-напряжений снижает погрешность до 15,62 %, тогда как добавление третьего слагаемого позволяет снизить погрешность на расстоянии $\hat{r}=0,1$ до 0,48 %.

Таблица 8

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{12} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 8

Relative error for stress tensor component σ_{12} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/6$	$N=1$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	6,495	0,399	0,0233	0,00177	0,00015	0,00001	$0,12\cdot10^{-5}$
$\hat{r}=0,2$	13,11	1,618	0,1801	0,02879	0,00508	0,00082	0,00015
$\hat{r}=0,3$	19,89	3,669	0,5868	0,14786	0,03931	0,00919	0,00270
$\hat{r}=0,4$	26,84	6,530	1,3403	0,47470	0,16727	0,05028	0,02036
$\hat{r}=0,5$	33,92	10,121	2,5181	1,17497	0,50904	0,18575	0,09736
$\hat{r}=0,6$	41,02	14,289	4,1795	2,45462	1,24370	0,53355	0,34743

Таблица 9

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{22} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 9

Relative error for stress tensor component σ_{22} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/6$	$N=1$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	4,08	0,085	0,0055	0,00035	0,00002	$0,24\cdot10^{-5}$	$0,21\cdot10^{-6}$
$\hat{r}=0,2$	7,76	0,321	0,0430	0,00532	0,00085	0,00015	0,00002
$\hat{r}=0,3$	11,11	0,687	0,1407	0,02536	0,00629	0,00176	0,00043
$\hat{r}=0,4$	14,18	1,698	0,3222	0,07541	0,02595	0,00974	0,00309
$\hat{r}=0,5$	17,00	1,759	0,6050	0,17330	0,07774	0,03614	0,01395
$\hat{r}=0,6$	19,62	2,452	0,9994	0,33832	0,18978	0,10388	0,04713

В табл. 10–12 приведены вычисленные относительные погрешности (%), допускаемые при усечении ряда для $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/4$. Из данных табл. 10 видно, что на дистанции $\hat{r}=0,1$ асимптотический ряд с одним доминирующим слагаемым для компоненты σ_{11} приводит к относительной погрешности, равной 76,65 %. Добавление Т-напряжений дает возможность снизить погрешность до 21 %. Если располагать трехчленным асимптотическим разложением, то относительная ошибка не превышает 1 %. С увеличением расстояния количество сохраняемых слагаемых усеченного ряда для достижения требуемой точности необходимо увеличивать. Например, на расстоянии $\hat{r}=0,5$ для компоненты σ_{11} для достижения погрешности меньше 1 %, необходимо оперировать тринадцатичленным разложением. Если требуется определить данную компоненту с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}\%$ на расстоянии $\hat{r}=0,6$, то необходимо оперировать 81-членным разложением. Подобные закономерности имеют место и для остальных компонент тензора напряжений. Например, на расстоянии $\hat{r}=0,4$ для компоненты σ_{12} к погрешности меньше 1 %, приводит семичленное асимптотическое разложение. Если требуется определить касательное напряжение с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}\%$ на расстоянии $\hat{r}=0,6$, то необходимо оперировать 75-членным рядом. Из данных табл. 12 следует, что наименее чувствительной к высшим приближениям является нормальная компонента σ_{22}. Тем не менее для достижения точности, равной $\varepsilon = 10^{-5}\%$ на расстоянии $\hat{r}=0,6$, необходимо прибегать к сохранению 60 слагаемых ряда.

Таблица 10

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{11} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table10

Relative error for stress tensor component σ_{11} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/4$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	76,65	20,554	0,88967	0,06528	0,00595	0,00057	0,00005	$0,61\cdot10^{-5}$
$\hat{r}=0,2$	118,17	47,019	4,10833	0,59431	0,10937	0,02066	0,00432	0,00089
$\hat{r}=0,3$	151,38	76,271	10,0547	2,13816	0,59680	0,16672	0,05281	0,01616
$\hat{r}=0,4$	177,78	106,095	18,6938	5,19499	1,94942	0,71633	0,30485	0,12328
$\hat{r}=0,5$	198,00	134,813	29,6726	10,1079	4,76759	2,16318	1,15733	0,58028
$\hat{r}=0,6$	212,76	161,338	42,4703	17,0389	9,67271	5,20991	3,35804	2,00651

Таблица 11

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{12} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 11

Relative error for stress tensor component σ_{12} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/4$	$N=1$	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$	$N=13$
$\hat{r}=0,1$	6,88	0,488	0,0391	0,00338	0,00033	0,00003	$0,35\cdot10^{-5}$
$\hat{r}=0,2$	13,63	1,914	0,3108	0,05291	0,01048	0,00208	0,00004
$\hat{r}=0,3$	20,22	4,203	1,0351	0,25947	0,07789	0,02296	0,00747
$\hat{r}=0,4$	26,61	7,276	2,4058	0,78978	0,31852	0,12378	0,05404
$\hat{r}=0,5$	32,77	11,053	4,5834	1,84876	0,93681	0,45057	0,24714
$\hat{r}=0,6$	38,69	15,464	7,6940	3,66402	2,23434	1,27857	0,84462

Таблица 12

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{22} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 12

Relative error for stress tensor component σ_{22} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/4$	N=1	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11	N=13
$\hat{r}=0,1$	3,91	0,073	0,0037	0,00027	0,00002	$0,24\cdot10^{-5}$	$0,25\cdot10^{-6}$
$\hat{r}=0,2$	7,44	0,273	0,0279	0,00423	0,00073	0,00015	0,00003
$\hat{r}=0,3$	10,67	0,578	0,0889	0,02050	0,00524	0,00161	0,00049
$\hat{r}=0,4$	13,61	0,968	0,1989	0,06170	0,02072	0,00855	0,00344
$\hat{r}=0,5$	16,32	1,429	0,3668	0,14287	0,05911	0,03062	0,01529
$\hat{r}=0,6$	18,82	1,949	0,5995	0,28032	0,137162	0,08530	0,05082

В табл. 13–15 показаны относительные погрешности, допускаемые при усечении рядов, для $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/3$. Для расстояний $\hat{r} = 0{,}1$ одночленное разложение определяет компоненту σ_{11} с относительной погрешностью, равной 126 %. Двучленное разложение приводит к уменьшению погрешности до 24,3 %. Если необходимо определить компоненту σ_{11} с погрешностью менее 1 % на указанном расстоянии, нужно сохранить три слагаемых ряда. На расстоянии $\hat{r} = 0{,}6$ только тринадцатичленное разложение приводит к погрешности меньше 1 % для σ_{11}, одиннадцатичленное – для компоненты σ_{12}, пятичленное – для компоненты σ_{22}.

Таблица 13

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{11} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table13

Relative error for stress tensor component σ_{11} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/3$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$
$\hat{r} = 0{,}1$	126,04	24,362	0,95885	0,05928	0,00466	0,00041	0,00003	$0{,}32 \cdot 10^{-5}$
$\hat{r} = 0{,}2$	185,45	53,847	4,39925	0,51232	0,08180	0,01513	0,00248	0,00045
$\hat{r} = 0{,}3$	205,89	77,110	9,75049	1,60596	0,39366	0,11284	0,02674	0,00729
$\hat{r} = 0{,}4$	208,87	94,957	16,3944	3,39751	1,14916	0,44839	0,13645	0,05025
$\hat{r} = 0{,}5$	206,87	110,420	24,1878	5,91929	2,61937	1,28668	0,47184	0,22186
$\hat{r} = 0{,}6$	203,08	125,272	33,1082	9,20526	5,16164	3,02389	1,28560	0,74694

Таблица 14

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{12} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 14

Relative error for stress tensor component σ_{12} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/3$	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$
$\hat{r} = 0{,}1$	6,41	0,35	0,0321	0,00237	0,00020	0,00002	$0{,}16 \cdot 10^{-5}$
$\hat{r} = 0{,}2$	11,85	1,686	0,2599	0,03647	0,00614	0,00118	0,00002
$\hat{r} = 0{,}3$	16,40	3,716	0,8875	0,17741	0,04515	0,01356	0,00347
$\hat{r} = 0{,}4$	20,14	6,555	2,1287	0,53914	0,18640	0,07648	0,02493
$\hat{r} = 0{,}5$	23,16	10,313	4,2076	1,26677	0,56427	0,29294	0,11575
$\hat{r} = 0{,}6$	25,61	15,170	7,3582	2,53275	1,40932	0,87769	0,40385

Таблица 15

Относительная погрешность, допускаемая для компоненты тензора σ_{22} на различных расстояниях с разным числом сохраняемых слагаемых ряда, %

Table 15

Relative error for stress tensor component σ_{22} at different distances with different numbers of retained terms of the series, %

$\alpha = \pi/2$ $\beta = \pi/3$	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$
$\hat{r} = 0{,}1$	4,04	0,075	0,0035	0,00024	0,00002	$0{,}14 \cdot 10^{-5}$	$0{,}14 \cdot 10^{-6}$
$\hat{r} = 0{,}2$	7,69	0,282	0,0269	0,00372	0,00053	0,00009	0,00002
$\hat{r} = 0{,}3$	10,99	0,590	0,0863	0,01863	0,00392	0,00098	0,00030
$\hat{r} = 0{,}4$	13,99	0,980	0,1960	0,05222	0,01581	0,00532	0,00221
$\hat{r} = 0{,}5$	16,74	1,435	0,3699	0,14004	0,04587	0,01960	0,01034
$\hat{r} = 0{,}6$	19,28	1,943	0,6225	0,28463	0,10783	0,05667	0,03606

В [35] исследуется возможность экспериментального определения независящего от пути *J*-интеграла для полимеров с упругими и упругопластическими свойствами посредством метода корреляции цифровых изображений (digital image correlation, DIC). С целью вычисления инвариантного *J*-интеграла подробно обсуждаются необходимые аналитические концепции и подходы исследования образцов с односторонним надрезом на растяжение, изготовленных из полиметилметакрилата (ПММА) и полиэтилена, синтезируемого при низком давлении (ПНД), подвергаются испытаниям в условиях нагружения в чистом режиме I. С помощью DIC были испытаны три образца каждого материала при различных нагрузках с целью нахождения поля смещения на поверхности каждого образца. Далее с помощью метода наименьших квадратов найденное посредством DIC экспериментально поле смещения используется для определения сингулярных и неособых членов разложения Уильямса высшего порядка. Затем путем объединения этих слагаемых вычисляется *J*-интеграл для каждого образца. Кроме того, *J*-интеграл, полученный с помощью DIC, сравнивается с интегралом, полученным с помощью анализа конечных элементов, и наблюдается отличная корреляция. В статье [35] также обсуждается влияние различных параметров DIC на результаты расчетов. При анализе результатов экспериментов все точки, находящиеся на определенном радиальном расстоянии перед вершиной трещины, были сгруппированы вместе. Так, радиальное расстояние первой группы колеблется от 0 до 2 мм, второй группы – от 1 до 3 мм и так далее. После извлечения данных о перемещении из каждой группы (для перемещений вдоль горизонтальной и вертикальной осей) вычисляется *J*-интеграл. Авторы отмечают, что для ПММА в диапазоне радиальных расстояний от 0 до 2 мм погрешность составляет приблизительно 100 %. Оказывается, что увеличение расстояния от кончика трещины уменьшает ошибки. Для ПНД, как и для ПММА, наблюдается большое расхождение, когда данные выбираются близко к вершине трещины, в то время как при увеличении расстояния погрешность уменьшается. Более того, экспериментальные точки, расположенные на расстояниях, превышающих 2 и 3 мм, приводят к погрешности менее 8 и 5 % при вычислении *J*-интеграла для ПММА и ПНД соответственно.

В табл. 1–15 приведены ошибки вычислений, допускаемые при усечении слагаемых ряда, представляющего напряжения, именно на таких расстояниях, соответствующих экспериментальным измерениям, в рамках интерференционно-оптических методов и метода корреляции цифровых изображений.

Авторы заключают, что для обоих материалов $N_1 = 6$, где N_1 – число удерживаемых слагаемых ряда Уильямса, достаточно, чтобы получить точные результаты для *J*-интеграла. В обоих случаях при выборе $N_1 = 6$ расхождение между результатами конечно-элементного анализа и экспериментом составляет менее 8 % для ПММА и 5 % для ПНД, что свидетельствует о превосходной корреляции между ними. Стоит отметить, что $N_1 = 6$ – это число неособых членов, включая сингулярный член первого порядка ряда Уильямса; таким образом, $N_1 = 6$ соответствует $N{=}11$ членам, учитывая также сингулярные члены более высокого порядка. Это согласуется с результатами [36; 37], в которых сделан вывод, что чем дальше от вершины трещины получены смещения, тем больше слагаемых требуется для точного определения коэффициентов интенсивности напряжений для ПММА.

В [38] была предложена стратегия многопараметрической идентификации (определения коэффициентов многопараметрического разложения Уильямса), основанная на методе виртуальных перемещений, для выполненных тестов, которая позволяет одновременно характеризовать коэффициенты разложения с помощью одного эксперимента. Результаты [38] демонстрируют, что по мере увеличения радиуса рассматриваемой зоны идентифицированные значения масштабных множителей разложения Уильямса постепенно стабилизируются вокруг контрольных значений и относительные погрешности также постепенно уменьшаются и имеют тенденцию к стабилизации. Следует отметить, что в рассматриваемых образцах в рамках проведенного численного (конечно-элементного) моделирования рассматривалась пластина с одной боковой трещиной длиной 2 мм (ширина пластины составляла 6 мм), а исследуемые погрешности вычислялись на отрезке от 0 до 1,5 мм на продолжении линии трещины, т.е. $\hat{r} = 0,75$. Таким образом, расстояния, отраженные в табл. 1–15, в полной мере соответствуют реальным расстояниям от вершины трещины, на которых анализируются механические поля в ходе экспериментального или численного анализа.

Заключение

В работе приведен анализ напряженного состояния у вершины трещины в анизотропной среде с кубической сингонией упругих свойств. На основании 1) построенных угловых распределений напряжений на различном удалении от вершины трещины; 2) вычисленных полей абсолютных погрешностей между точным и приближенным решениями; 3) относительных погрешностей (3) компонент тензора напряжений разъяснен вклад регулярных слагаемых в общее представление поля напряжений. Рассмотрен общий случай, характеризующийся двумя углами, представляющих собой угол между ориентацией трещины и направлением действия растягивающей нагрузки и угол между направлением трещины и осью симметрии упругих свойств анизотропной среды соответственно. Вычислены десятичные логарифмы полей абсолютных погрешностей – разности точного и приближенного решений краевой задачи о растяжении ортотропной плоскости, ослабленной центральной наклонной трещиной. Продемонстрировано, что поля

абсолютной погрешности обладают интересным свойством: присутствуют линии, вдоль которых наблюдается очень низкая погрешность и эти кривые можно интерпретировать как локусы точности, в которых приближенное решение полностью восстанавливает точное решение. Приведены относительные погрешности, допускаемые при усечении многокомпонентных разложений на *N*-м слагаемом ряда, по сравнению с точным аналитическим решением. Основная черта, свойственная асимптотическим разложениям полей напряжений, ассоциированным с вершиной трещины, состоит в том, что регулярные слагаемые становятся значимыми с увеличением расстояния от кончика трещины и позволяют существенно расширить область, где справедливо асимптотическое решение задачи. Присущей особенностью выполненного анализа угловых распределений напряжений является использование рассчитанных методом молекулярной динамики компонент тензора упругих модулей для монокристаллических гранецентрированных меди и алюминия. Вычисления были выполнены в открытой программе, реализующей метод молекулярной динамики, Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS). Вычисленные постоянные материала дают возможность точного отыскания корней характеристического уравнения, не прибегая к дополнительным упрощениям, и позволяют получить уточненные угловые распределения напряжений. Построенные угловые распределения предоставляют возможность оценить влияние регулярных слагаемых на различных расстояниях от кончика трещины: регулярные слагаемые играют существенную роль в целостном описании полей деформаций, перемещений и напряжений.

Библиографический список

1. Hello, G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions / G. Hello // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 144–145. – P. 265–275. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012

2. Hello, G. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium / G. Hello, M.B. Tahar, J.-M. Roeland // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49. – P. 556–566. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024

3. Hello, G. On the loci of exactness for truncated Williams crack-tip stress expansions / G. Hello // International journal of Fracture. – 2024. DOI: 10.1007/s10704-024-00802-6

4. Nejati, M. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms / M. Nejati, S. Ghouli, M.R. Aytollahi // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 91. – P. 837–862. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.025

5. Ayatollahi, M.R. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes / M.R. Ayatollahi, M. Nejati, S. Ghouli // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – Vol. 231. – 106082. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.106982

6. Матвиенко, Ю.Г. Основы физики и механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Автономная некоммерческая организация «Издательство физико-математической литературы», 2022. – 144 с.

7. Матвиенко, Ю.Г. Двухпараметрический упругопластический критерий разрушения и скорректированная вязкость разрушения / Ю.Г. Матвиенко // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2022. – Т. 88, № 8. – С. 59–69. DOI 10.26896/1028-6861-2022-88-8-59-69.

8. Matvienko, Yu.G. The two-parameter fracture criterion based on the J-A concept / Yu. G. Matvienko // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2023. – Vol. 46, no. 9. – P. 3261–3273. – DOI 10.1111/ffe.14075.

9. Матвиенко, Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2020. – 210 с.

10. Shi, L. Determination of notch stress intensity factors for V-notched specimens under mode I loading using the 3D-Digital image correlation and strain energy approach / L. Shi, S.O. Oyadiji // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 130. – 104307. DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104307

11. Aghabeidi, M. A strain-based criterion for predicting size-dependent fracture resistance of quasi-brittle materials under mixed mode loading / M. Aghabeidi, J. Akbardoost, M.R. Ayatollahi // Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 310. – 110513. DOI: 10/1016/j.engfracmech.2024.110513

12. Determining singular and non-singular Williams' expansion terms from full-field measurements: Consideration of structural effects on fracture behavior / B. Lammens, G. Portemont, J. Berthe, R. Seghir, J. Rethore // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 130. – 104304. DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104304

13. Thube, Y.S. A simple, robust novel Williams series-based FE-analytical hybrid technique for evaluation of SIFs and higher order coefficients / Y.S. Thube, T.P. Gotkhindi // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 127. – 104101. DOI: 10.1016/j.tafm.2023.104101

14. Степанова, Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I / Л.В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 237–249. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.20

15. Степанова, Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II / Л.В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 72–85. DOI 10.15593/perm.mech/2021.1.08

16. Employing Williams' series for the identification of fracture mechanics parameters from phase-field simulations / L. Kolditz, S. Dray, V. Kosin, A. Fau, F. Hild, T. Wick // Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 307. – 110298. DOI: 10/1016/j.engfracmech.2024.110298

17. Vivekanandan, A. Photoelestic analysis of crack terminating at an arbitrary angle to the biomaterial interface under four point bending / A. Vivekanandan, K. Ramesh // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 127. – 104075. DOI:1 0.1016/j.tafm.2023.104075

18. Belova, O.N. Importance of the higher order terms of the Williams series expansions: Experimental Aspects and Finite

Element Simulations / O.N. Belova, L.V. Stepanova // Procedia Structural Integrity. – 2022. – Vol. 39. – P. 770–785. DOI: 10.1016/j.prostr.2022.03.151

19. Stepanova, L.V. Atomistic and continuum ascertainment of the crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media / L.V. Stepanova, K.A. Mushankova // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 133, Part B. – 104613, DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104613

20. Stepanova, L.V. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations / L.V. Stepanova, O.N. Belova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2023. – Vol. 30, iss. 19. – P. 3862–3884. DOI: 10.1080/15376494.2022.2084800

21. On the anisotropy of shear fracture toughness in rocks / M. Nejati, B. Bahrami, M.R. Ayatollahi, T. Driesner // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2021. – Vol. 113. – 102946. DOI: 10.1016/j.tafmec.2021.102946

22. Hu, B. Analysis of 2-D elastic solid with multiple V-notches by a fast multipole BEM with multi-order asymptotic terms / B. Hu, C. Li, Z. Niu // Applied Mathematical Modelling. – 2023. – Vol. 118. – P. 762–779. DOI:10.1016/j.apm.2023. 02.008

23. Determination of singular and higher non-singular stress for angular heterogeneous material notch / W. Pan, C. Cheng, F. Wang, Z. Hu, J. Li // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 292. – 109592. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109592

24. Novel boundary crack front elements with Williams' eigenexpansion properties for 3D crack analysis / Y. Zhong, G. Xie, L. Wang, K. Li, X. Wang, W. He, S. Wang // Archive of Applied Mechanics. – 2023. – Vol.93. – P. 745–760. DOI: 10.1007/s00419-022-02296-x

25. An analytical stress field for bi-material V-notches with end hole: New solution and effects of higher order terms / S.K. Alavi, M.R. Ayatollahi, B. Bahrami, M. Nejati // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 28(2). – P. 464–478. DOI: 10.1177/10812865221084311

26. Melching, D. Advanced crack tip field characterization using conjugate work integrals / D. Melching, E. Breitbarth // International Journal of Fatigue. – 2023. – Vol. – 169. – 107501. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2023.107501

27. Baldi, A. Kinematic estimation of fracture mechanics parameter with automatic crack-tip identification / A. Baldi, P.M. Santucci // Engineering Fracture Mechanics. – 2022. – Vol. 259. – 108082. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.108082

28. Crack Analysis Tool in Python-CrackPy / T. Strohmann, D. Melching, F. Paysan, A. Klein, E. Dietrich, G. Requena, E. Breitbarth. – 2022. DOI: 10.5281/zenodo.7323623.

29. The toughness of mechanical metamaterials / A.J.D. Shaikeea, H. Cui, M. O'Masta, X.R. Zheng, V.S. Deshpande // Nat. Mater. – 2022. – Vol. 21. – P. 297–304. DOI: 10.1038/s41563-021-01182-1

30. U-Net learning for the automatic identification of the sandstone crack tip position to determine mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation method / Y. Li, T. Ni, F. Zhang, Y. Li, J. Zuo, S. Zhao // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 127. – 104028. DOI: 10.1016/j.tafmec.2023.104028

31. Experimental evaluation of J-integral in elastic and elastic-plastic polymers by means of digital image correlation and higher-order eigenfields under Mode-I / A.S. Kojouri, H.K. Rikaee, K.-A. Kalteremidou, D.V. Hemelrijk // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 291. – 109534. DOI: 101016/j.engfracmech.2023.109534

32. Li, Y. Multi-parameter identification of the single edge notched tensile specimen using the virtual fields method / Y. Li, H. Xie // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 289. – 109437. DOI: 101016/j.engfracmech.2023.109437.

33. Shi, L. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D and finite element over-deterministic methods / L. Shi, O. Oyadiji // Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 296. – 109852. DOI: 10/1016/j.engfracmech.2024.109852

34. An improved photoelasticity method for determining stress intensity factors of rock-like material / J. Xu, W. He, Z. Wang, T. Ding, Y. Liu, B. Wang // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 133. – 104608. DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104608

35. Experimental evaluation of J-integral in elastic and elastic-plastic polymers by means of digital image correlation and higher-order eigenfields under Mode-I / A.S. Kojouri, H.K. Rikaee, K.-A. Kalteremidou, D.V. Hemelrijk // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 291. – 109534. DOI: 101016/j.engfracmech.2023.109534

36. Abshirini, M. On the mode i fracture analysis of cracked Brazilian disc using a digital image correlation method / M. Abshirini, N. Soltani, P. Marashizadeh // Optics Lasers in Engineering. – 2016. – Vol. 78. – P. 99–105. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2015.10.006

37. Torabi, A.R. Experimental determination of the notch stress intensity factor for sharp V-notched specimens by using the digital image correlation method / A.R. Torabi, B. Bahrami, M.R. Ayatollahi // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 103. – 102244. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.102244

38. Li, Y. Multi-parameter identification of the single edge notched tensile specimen using the virtual fields method / Y. Li, H. Xie // Engineering Fracture Mechanics. –2023. – Vol. 289. – 109437. DOI: 101016/j.engfracmech.2023.109437

References

1. Hello, G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 144-145, pp. 265-275. http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012.

2. Hello, G., Tahar, M.B., Roeland, J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol.49, pp. 556-566. http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024

3. Hello G. On the loci of exactness for truncated Williams crack-tip stress expansions. *International journal of Fracture*, 2024. https://doi.org/10.1007/s10704-024-00802-6

4. Nejati M., Ghouli S., Aytollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling,* 2021, vol. 91, pp. 837-862. DOI:10.1016/j.apm.2020.09.025.

5. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics,* 2020, vol. 231, 106082. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.106982

6. Matvienko Yu.G. Basics of physics and mechanics of fracture. M., «Fizmatlit», 2022, 144 p.

7. Matvienko Yu.G. Two-parameter elastic-plastic fracture criterion and corrected fracture toughness. *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*, 2022, vol. 88, no 8, pp. 59-69. DOI 10.26896/1028-6861-2022-88-8-59-69.

8. Matvienko, Yu. G. The two-parameter fracture criterion based on the J-A concept. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures,* 2023, vol. 46, no. 9, pp. 3261-3273. DOI 10.1111/ffe.14075.

9. Matvienko Yu.G. Two-parameter fracture mechanics. M., Publishing company "Physico-mathematical literature", 2020, 210 p.

10. Shi L., Oyadiji S.O. Determination of notch stress intensity factors for V-notched specimens under mode I loading using the 3D-Digital image correlation and strain energy approach. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 130, 104307. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104307

11. Aghabeidi M., Akbardoost J., Ayatollahi M.R. A strain-based criterion for predicting size-dependent fracture resistance of quasi-brittle materials under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 310, 110513. https://doi.org/10/1016/j.engfracmech.2024.110513

12. Lammens B., Portemont G., Berthe J., Seghir R., Rethore J. Determining singular and non-singular Williams' expansion terms from full-field measurements: Consideration of structural effects on fracture behavior. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 130, 104304. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104304

13. Thube Y.S., Gotkhindi T.P. A simple, robust novel Williams series-based FE-analytical hybrid technique for evaluation of SIFs and higher order coefficients. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2023, vol. 127, 104101. Doi:10.1016/j.tafm.2023.104101

14. Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part I. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 4, pp. 237-249. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.20

15. Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 1, pp. 72-85. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.08

16. Kolditz L., Dray S., Kosin V., Fau A., Hild F., Wick T. Employing Williams' series for the identification of fracture mechanics parameters from phase-field simulations. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 307, 110298. https://doi.org/10/1016/j.engfracmech.2024.110298

17. Vivekanandan A., Ramesh K. Photoelestic analysis of crack terminating at an arbitrary angle to the biomaterial interface under four point bending. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023, vol. 127, 104075. Doi:10.1016/j.tafm.2023.104075

18. Belova O.N., Stepanova L.V. Importance of the higher order terms of the Williams series expansions: Experimental Aspects and Finite Element Simulations. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 39, pp. 770-785. DOI:10.1016/j.prostr.2022.03.151

19. Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and continuum ascertainment of the crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2024, vol. 133, part B, 104613, https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613

20. Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures,* 2023, vol. 30, issue 19, pp. 3862-3884. DOI: 10.1080/15376494.2022.2084800

21. Nejati M., Bahrami B., Ayatollahi M.R., Driesner T. On the anisotropy of shear fracture toughness in rocks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2021, vol. 113, 102946. DOI:10.1016/j.tafmec.2021.102946

22. Hu B., Li C., Niu Z. Analysis of 2-D elastic solid with multiple V-notches by a fast multipole BEM with multi-order asymptotic terms. *Applied Mathematical Modelling,* 2023, vol. 118, pp. 762-779. DOI:10.1016/j.apm.2023. 02.008

23. Pan W., Cheng C., Wang F., Hu Z., Li J. Determination of singular and higher non-singular stress for angular heterogeneous material notch. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, vol. 292, 109592. DOI:10.1016/j.engfracmech.2023.109592

24. Zhong Y., Xie G., Wang L., Li K., Wang X., He W., Wang S. Novel boundary crack front elements with Williams' eigenexpansion properties for 3D crack analysis. *Archive of Applied Mechanics*, 2023, vol.93, pp. 745-760. DOI: 10.1007/s00419-022-02296-x

25. Alavi SK, Ayatollahi MR, Bahrami B, Nejati M. An analytical stress field for bi-material V-notches with end hole: New solution and effects of higher order terms. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2023; vol. 28(2), pp. 464-478. DOI: 10.1177/10812865221084311

26. Melching D., Breitbarth E. Advanced crack tip field characterization using conjugate work integrals. *International Journal of Fatigue,* 2023, vol. 169, 107501. DOI:10.1016/j.ijfatigue.2023.107501

27. Baldi A., Santucci P.M. Kinematic estimation of fracture mechanics parameter with automatic crack-tip identification. *Engineering Fracture Mechanics,* 2022, vol. 259, 108082. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.108082

28. Strohmann T., Melching D., Paysan F., Klein A., Dietrich E., Requena G., Breitbarth E. Crack Analysis Tool in Python-CrackPy, 2022. DOI: 10.5281/zenodo.7323623.

29. Shaikeea A.J.D., Cui H., O'Masta, M., Zheng X.R., Deshpande V.S. The toughness of mechanical metamaterials. *Nat. Mater,* 2022, vol. 21, pp. 297–304. https://doi.org/10.1038/s41563-021-01182-1

30. Li Y., Ni T., Zhang F., Li Y., Zuo J., Zhao S. U-Net learning for the automatic identification of the sandstone crack tip position to determine mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2023, vol. 127, 104028. DOI:10.1016/j.tafmec.2023.104028

31. Kojouri A.S., Rikaee H.K., Kalteremidou K.-A., Hemelrijk D.V. Experimental evaluation of J-integral in elastic and elastic-plastic polymers by means of digital image correlation and higher-order eigenfields under Mode-I. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, vol. 291, 109534. DOI: 101016/j.engfracmech.2023.109534

32. Li Y., Xie H. Multi-parameter identification of the single edge notched tensile specimen using the virtual fields method. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, vol. 289,109437. https://doi.org/101016/j.engfracmech.2023.109437.

33. Shi L., Oyadiji O. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D and finite element over-deterministic methods. *Engineering Fracture Mechanics,* 2024, vol. 296, 109852. https://doi.org/10/1016/j.engfracmech.2024.109852

34. Xu J., He W., Wang Z., Ding T., Liu Y., Wang B. An improved photoelasticity method for determining stress intensity

factors of rock-like material. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 133, 104608. DOI:10.1016/j.tafmec.2024.104608

35. Kojouri A.S., Rikaee H.K., Kalteremidou K.-A, Hemelrijk D.V. Experimental evaluation of J-integral in elastic and elastic-plastic polymers by means of digital image correlation and higher-order eigenfields under Mode-I. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, vol. 291, 109534. DOI: 101016/j.engfracmech.2023.109534

36. Abshirini M, Soltani N, Marashizadeh P. On the mode i fracture analysis of cracked Brazilian disc using a digital image correlation method. *Optics and Lasers in Engineering,* 2016, vol. 78, pp. 99–105. DOI:10.1016/j.optlaseng.2015.10.006

37. Torabi A.R., Bahrami B., Ayatollahi M.R. Experimental determination of the notch stress intensity factor for sharp V-notched specimens by using the digital image correlation method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* 2019, vol. 103, 102244. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102244

38. Li Y., Xie H. Multi-parameter identification of the single edge notched tensile specimen using the virtual fields method. *Engineering Fracture Mechanics,* 2023, vol. 289, 109437. https://doi.org/101016/j.engfracmech.2023.109437.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 25-21-00272).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (grant No. 25-21-00272).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.