Князев, Н.А. Щелевые импульсные состояния и дисперсионный анализ механического поведения вязкоупругих сред / Н.А. Князев, А.С. Никитюк, О.Б. Наймарк. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.05 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 2. – С. 57–69.

Perm Polytech Style: Knyazev N.A., Nikitiuk A.S., Naimark O.B. Gapped Momentum States and Dispersion Analysis of Mechanical Behavior of Viscoelastic Media. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 2, pp. 57-69. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.05
УДК 539.3

ЩЕЛЕВЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Н.А. Князев[1], А.С. Никитюк[1,2], О.Б. Наймарк[1,2]

[1]Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Пермь, Российская Федерация
[2]Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 07 февраля 2025 г.
Одобрена: 05 апреля 2025 г.
Принята к публикации: 30 мая 2025 г.

Ключевые слова:

«щелевые состояния», вязкоупругие модели, дисперсионные соотношения, дробные реологические модели, сдвиговая упругость жидкостей.

АННОТАЦИЯ

Появление «щелевых состояний» на различных масштабах, представляющих собой интервалы волновых чисел с нулевыми значениями частот при построении дисперсионных кривых, определяет качественные изменения механизма переноса импульса при взаимодействии коллективных мод в неравновесных «критических» системах. Описание формирования «щелей» или разрывов дисперсионных кривых требует записи дисперсионных соотношений специального вида. Исследование дисперсионных соотношений с разрывом в пространстве импульсов может способствовать установлению универсальных вязкоупругих свойств конденсированных сред при определенных условиях, когда жидкости демонстрируют сдвиговую упругость, а твёрдые тела проявляют способность течь. Основное внимание статьи сосредоточено на обнаружении «щелевых состояний» при анализе дисперсионных соотношений, полученных с использованием вязкоупругих моделей Кельвина – Фойгта, Максвелла, стандартного линейного тела, модели Кельвина – Фойгта с дробной производной. Для получения волновых уравнений, соответствующих представленным моделям, была проведена модификация уравнения упругой поперечной волны в твёрдых телах для учёта вязкости и диссипации. С использованием гипотезы плоской волны определён общий вид дисперсионных уравнений для каждой модели и аналитические (численное) решения для них. Сформулированы критерии качественного изменения вида дисперсионных уравнений, сопровождающегося появлением разрыва в пространстве импульсов (*k*-пространстве). При рассмотрении классических вязкоупругих моделей построены графики зависимости частоты от волнового числа при различных значениях времён релаксации и ретардации. Подчёркнута феноменологическая значимость дробных моделей для описания механического поведения полимерных, композитных и биологических систем, характеризующихся широким спектром релаксационных механизмов. Для модели Кельвина – Фойгта с дробной производной построено численное решение при различных значениях порядка дробной производной. Показано, что дисперсионные уравнения модели Кельвина – Фойгта с дробной производной и модели стандартного линейного тела при определённых условиях преобразуются в дисперсионные соотношения моделей Кельвина – Фойгта и Максвелла соответственно, что указывает на адекватность полученных соотношений.

© **Князев Никита Андреевич** – аспирант, инженер лаборатории физических основ прочности, e-mail: knyazev.n@icmm.ru.
Никитюк Александр Сергеевич – к. ф.-м. н., н. с. лаборатории физических основ прочности, e-mail: nas@icmm.ru.
Наймарк Олег Борисович – профессор, д. ф.-м. н., зав. лабораторией физических основ прочности, e-mail: naimark@icmm.ru.

Nikita A. Knyazev – Postgraduate Student, Engineer, Laboratory of Physical Foundations of Strength, e-mail: knyazev.n@icmm.ru.
Aleksandr S. Nikitiuk – PhD in Physics and Mathematics, Senior Research Scientist, Laboratory of Physical Foundations of Strength, e-mail: nas@icmm.ru.
Oleg B. Naimark – Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory, Physical Foundations of Strength, e-mail: naimark@icmm.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

GAPPED MOMENTUM STATES AND DISPERSION ANALYSIS OF MECHANICAL BEHAVIOR OF VISCOELASTIC MEDIA

N.A. Knyazev, A.S. Nikitiuk, O.B. Naimark

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 February 2025
Approved: 05 April 2025
Accepted for publication:
30 May 2025

Keywords:

gapped momentum states, viscoelastic models, dispersion relations, fractional rheological models, shear elasticity of liquids.

ABSTRACT

The occurrence of gapped momentum states at different scales, characterized by wavenumber intervals with zero frequency values in the dispersion relation, determines qualitative changes in the momentum transfer mechanism during the interaction of collective modes in nonequilibrium critical systems. To describe the formation of gaps in dispersion curves one needs specialized forms of the dispersion relation. The investigation of dispersion relations with the gap in momentum space can facilitate the establishment of universal viscoelastic properties in condensed matter under specific conditions, where fluids exhibit shear elasticity and solids demonstrate flow behavior. The paper focuses on identification of gapped momentum states in the analysis of dispersion relations obtained using viscoelastic models, specifically the Kelvin – Voigt, Maxwell, standard linear solid, and fractional derivative Kelvin – Voigt models. To derive wave equations corresponding to the presented models, a modification of the wave equation for nondecayed transverse waves in solids was performed to account for viscosity and dissipation. Using the plane wave hypothesis, the general form of the dispersion equations was determined for each model, and analytical (numerical) solutions were obtained. Criteria for a qualitative change in the form of the dispersion relations accompanied by the appearance of a gap in momentum space (*k*-space) have been formulated. Frequency-wavenumber dispersion curves were constructed for various relaxation and retardation times, considering classical viscoelastic models. The phenomenological significance of fractional models for describing the mechanical behavior of polymeric, composite, and biological systems with a broad spectrum of relaxation mechanisms is highlighted. A numerical solution for the fractional derivative Kelvin-Voigt model was obtained for various values of the fractional derivative order. It is shown that the dispersion equations of the fractional derivative Kelvin – Voigt model and the standard linear solid model transform into the dispersion relations of the Kelvin – Voigt and Maxwell models, respectively, under specific conditions, which indicate the adequacy of the derived relations.

Введение

Определение вида дисперсионных соотношений является актуальной задачей для понимания и прогнозирования поведения и свойств неравновесных систем. Преобразование исходного волнового уравнения в дисперсионное соотношение является эффективной процедурой получения простой эквивалентной записи волнового уравнения. При таком преобразовании сохраняются фундаментальные свойства и связь характеристик волны, распространяющейся в нелинейной среде [1].

Анализ дисперсионных соотношений, как правило, даёт более ясное представление о поведении и физических свойствах систем с помощью таких характеристик, как групповая и фазовая скорость, энергетический спектр волны. Теория дисперсионных соотношений как инструмент исследования волновых процессов применяется в различных областях физики, таких как физика твердого тела [2–4], гидродинамика [5–8], электродинамика и оптика [9–11], квантовая механика [12; 13]. Наиболее простая форма зависимости частоты (энергии) от волнового числа (импульса) может быть получена с помощью линейных безразрывных дисперсионных соотношений. Дисперсионные соотношения данного класса описывают, например, распространение фотонов и фононов в кристаллических твердых телах, пренебрегая взаимодействием между частицами и дефектами кристаллической структуры. Для описания поведения реальных систем, как правило, используются нелинейные дисперсионные соотношения. В теории нелинейных волн появление нелинейных дисперсионных соотношений обусловлено влиянием таких факторов, как нелинейность свойств среды, диссипация энергии в системе, дисперсия групповых скоростей [14]. Физическая причина появления этих факторов определяется как нелинейным характером взаимодействия частиц среды с внешними полями, так и особенностями структуры среды (наличие дефектов и неоднородностей).

Особого внимания заслуживают нелинейные дисперсионные соотношения с разрывом по энергии (the energy gap) и разрывом в пространстве импульсов (the gap in momentum space). Резкое изменение скорости распространения частиц вблизи разрыва свидетельствует о качественном переходе механизма переноса импульса и распределения энергии в системе. Этот факт указывает на возможное появление принципиально новых свойств и эффектов в системе [3].

Феномен энергетической щели встречается в современных работах в рамках исследования структуры и физических свойств новых материалов, таких как

наноматериалы, биоразлагаемые полимеры [15–18]. Работы включают исследования, посвященные как созданию математических моделей для объяснения этого явления, так и экспериментальные исследования, направленные на обнаружение энергетической щели в различных материалах. Понимание физических причин появления энергетической щели является важным фактором для управления этим феноменом при разработке материалов с уникальными свойствами.

Ко второму типу относятся дисперсионные соотношения с разрывом в пространстве импульсов [19–27]. «Щелевые состояния», обнаруживающиеся в процессе построения дисперсионных кривых данного класса, представляют собой интервалы волновых чисел с нулевыми значениями частот. Формирование «щелей» или разрывов дисперсионных соотношений имеет решающее значение для объяснения динамики коллективных мод различных систем, выделения характерных масштабов рассматриваемых процессов. Понимание природы и механизмов разрыва в пространстве импульсов позволит установить особые динамические и термодинамические свойства различных неравновесных систем [28].

В жидкостях эти механизмы связаны с коллективными сдвиговыми модами (возбуждениями) [19; 29–33]. Как известно, движение частиц в жидкости реализуется по двум сценариям: колебания в квазиравновесных положениях и диффузные скачки в соседние положения. Экспериментально установлено, что динамика колебаний частиц в жидкости при распространении продольных волн качественно идентична динамике, наблюдаемой в твёрдых телах [34]. Динамика поперечных (сдвиговых) колебаний жидкости проявляется в течение ограниченного времени и на ограниченных масштабах [30]. Отсутствие сдвиговой упругости на больших масштабах приводит к преобладанию механизма сдвиговой диффузии над механизмом распространения сдвиговых волн. В режиме сдвиговой диффузии происходит постепенное перераспределение частиц в жидкости, что препятствует существованию и устойчивому распространению поперечных волн. Однако на малых пространственных и временных масштабах жидкости демонстрируют сдвиговую упругость, характерную для твёрдых тел [35].

Для описания сдвиговой упругости в жидкостях уравнения классической гидродинамики необходимо модифицировать с использованием вязкоупругих моделей. В работах [19; 36] на основе моделей вязкоупругости Максвелла и Кельвина – Фойгта были получены волновые уравнения, характеризующие динамику сдвиговых мод в жидкостях. Анализ дисперсионных соотношений при использовании представленных моделей выявил разрыв в пространстве импульсов.

Актуальной задачей является применение других вязкоупругих моделей для исследования «щелевых состояний». Основная проблема существующих исследований [37–39] посвященных выводу дисперсионных соотношений на основе этих моделей, заключается в отсутствии исчерпывающего анализа полученных уравнений в контексте обнаружения разрыва в пространстве импульсов.

Настоящая работа сфокусирована на выводе и анализе дисперсионных соотношений, полученных с использованием вязкоупругих моделей Кельвина – Фойгта, Максвелла, стандартного линейного тела, модели Кельвина – Фойгта с дробной производной. Исследование разрыва в пространстве импульсов с учетом сдвиговой упругости в жидкостях позволит установить универсальные вязкоупругие свойства конденсированных сред. Поскольку интересующие эффекты, связанные с качественной сменой механизма переноса импульса, в жидкостях наблюдаются при взаимодействии сдвиговых мод, то в работе были рассмотрены уравнения только для поперечных (сдвиговых) волн. Алгоритм получения дисперсионных соотношений был основан на применении уравнения упругой поперечной волны в твёрдых телах и его модификаций для учета вязкости и диссипации. Таким образом, для каждой модели получены аналитические выражения дисперсионных уравнений и решения для них. Сформулированы критерии качественного изменения вида дисперсионных уравнений для обнаружения «щелевых состояний».

1. Модель Кельвина – Фойгта

Рассмотрим особенности дисперсионных соотношений на примере моделей Максвелла и Кельвина – Фойгта, определяющих характерные случаи вязкоупругого поведения. Определяющее соотношение модели Кельвина – Фойгта имеет вид (рис. 1):

$$\sigma = G\left(\varepsilon + \tau_\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}\right), \tag{1.1}$$

где σ – сдвиговое напряжение, ε – величина сдвига, $\tau_\sigma = \frac{\eta}{G}$ – время ретардации, G, η – модуль сдвига и коэффициент вязкости соответствующих элементов.

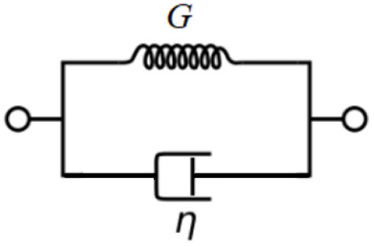


Рис. 1. Схема модели Кельвина – Фойгта

Fig. 1. Schematic representation of the Kelvin – Voigt model

Вывод дисперсионных соотношений связан с подстановкой оператора (1.1) в уравнение распространения упругих поперечных волн в твёрдых телах:

$$G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где v – смещение частиц среды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (оси x). Модификация выражения (1.2) предполагает замену линейной зависимости $\sigma = G\varepsilon$ на зависимость

$$\sigma = M\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$M = G\left(1+\tau_\sigma \frac{d}{dt}\right), \tag{1.4}$$

которая приводит к уравнению

$$G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G\tau_\sigma \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{1.5}$$

Представление решения $v = v_0 \exp(i(kx-\omega t))$ в виде плоской волны позволяет перейти от волнового уравнения (1.5) к дисперсионному соотношению вида:

$$\omega^2 + \tau_\sigma c^2 k^2 i\,\omega - c^2 k^2 = 0, \tag{1.6}$$

где $c = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения упругой поперечной волны. Появление дисперсии в среде приводит к частотной (длинноволновой) зависимости скорости распространения волны c, что отражается на различии в значениях фазовой и групповой скорости (скорости волнового пакета) волны. Выражение (1.6) представляет собой квадратное уравнение относительно частоты ω. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\omega = -\frac{\tau_\sigma c^2 k^2}{2} i \pm c\,k\sqrt{1-\frac{\tau_\sigma^2 c^2 k^2}{4}}. \tag{1.7}$$

Из (1.7) можно определить критическое значение волнового числа k_g, при котором образуется «щель» в k-пространстве:

$$k_g = \frac{2}{c\,\tau_\sigma}. \tag{1.8}$$

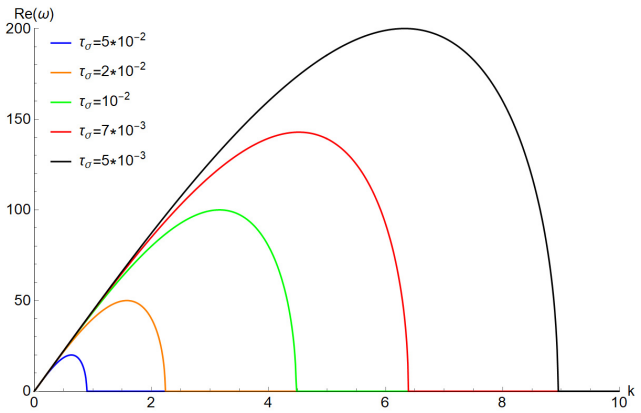


Рис. 2. График зависимости частоты от волнового числа при различных значениях времен ретардации для модели Кельвина – Фойгта

Fig. 2. Frequency-wavenumber dispersion curves for the Kelvin – Voigt model at various retardation times

На рис. 2 представлены решения (1.7) при параметрах $G = 2\cdot 10^6$ Па, $\rho = 1000$ кг/м^3 и различных значениях времен ретардации. Малые времена ретардации свидетельствуют о преобладании механизмов упругости над механизмами вязкости. Поэтому при малых временах ретардации отклонение графиков от прямой, характеризующей линейную зависимость частоты от волнового числа в идеально-упругих телах, происходит значительно позже.

2. Модель Максвелла

В отличие от модели Кельвина – Фойгта, в структурной схеме модели Максвелла упругий и вязкий элемент расположены последовательно (рис. 3). Определяющее соотношение модели имеет вид:

$$\sigma + \tau_\varepsilon \frac{d\sigma}{dt} = G\tau_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{2.1}$$

где σ – сдвиговое напряжение, ε – величина сдвига, $\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{G}$ – время релаксации, G, η – модуль сдвига и коэффициент вязкости соответствующих элементов.

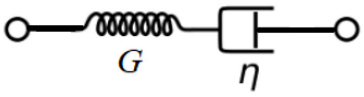


Рис. 3. Схема модели Максвелла

Fig. 3. Schematic representation of the Maxwell model

Для получения дисперсионного соотношения и его дальнейшего анализа для модели Максвелла выполним действия, аналогичные преобразованиям для модели Кельвина – Фойгта. За основу принимается волновое уравнение распространения упругих поперечных волн в твёрдых телах (1.2). Для получения прямой зависимости (1.3) из уравнения (2.1) вводится вспомогательный оператор $B = 1+\tau_\varepsilon \frac{d}{dt}$, откуда $\frac{d}{dt} = \frac{B-1}{\tau_\varepsilon}$ и выражение (2.1) принимает вид:

$$B\sigma = G(B-1)\varepsilon, \tag{2.2}$$

откуда

$$M = G\left(1-B^{-1}\right). \tag{2.3}$$

Выполним подстановку выражения (2.3) в уравнение (1.2), заменив модуль сдвига G на оператор M:

$$G\left(1-B^{-1}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2.4}$$

Умножая обе части уравнения на оператор B, получим:

$$G(B-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\rho B\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.5}$$

$$G\tau_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\rho\left(1+\tau_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.6}$$

$$c^2\tau_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\tau_\varepsilon\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}, \tag{2.7}$$

$$c^2\tau_\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\tau_\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2.8}$$

Принимая гипотезу плоской волны, определим вид волновой функции из уравнения (2.8) как $v=v_0\exp(i(kx-\omega t))$ и получим дисперсионное соотношение вида [19]:

$$\omega^2+\frac{i}{\tau_\varepsilon}\omega-c^2k^2=0. \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.9) имеет вид:

$$\omega=-\frac{i}{2\tau_\varepsilon}\pm\sqrt{c^2k^2-\frac{1}{4\tau_\varepsilon^2}}. \tag{2.10}$$

Действительные значения частоты принимают ненулевые значения только при волновых числах, больших критического значения k_g:

$$k_g=\frac{1}{2c\tau_\varepsilon}. \tag{2.11}$$

Диапазон волновых чисел от 0 до k_g характеризует разрыв в пространстве импульсов.

На рис. 4 проиллюстрированы решения (2.10) при параметрах $G=2\cdot10^6$ Па, $\rho=1000$ кг/м^3 и различных значениях времен релаксации. Ширина «щели» по оси k растёт по мере уменьшения времени релаксации.

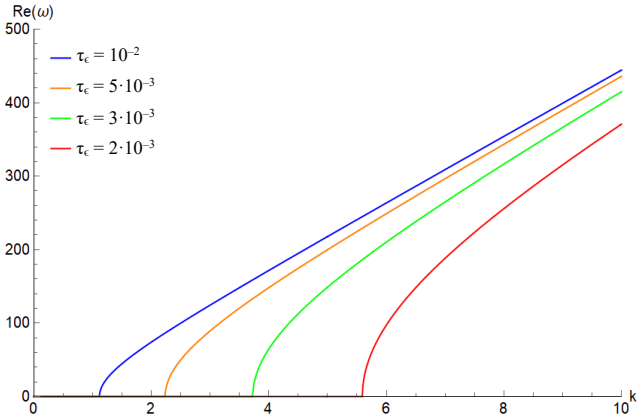


Рис. 4. График зависимости частоты от волнового числа при различных значениях времен релаксации для модели Максвелла

Fig. 4. Frequency-wavenumber dispersion curves for the Maxwell model at various relaxation times

3. Модель стандартного линейного тела

Для модели стандартного линейного тела определяющее соотношение имеет вид:

$$\sigma+\tau_\varepsilon\frac{d\sigma}{dt}=G_0\left(\varepsilon+\tau_\sigma\frac{d\varepsilon}{dt}\right), \tag{3.1}$$

где σ – сдвиговое напряжение, ε – величина сдвига, $\tau_\varepsilon=\frac{\eta}{G_1}$ – время релаксации, $\tau_\sigma=\frac{(G_1+G_0)}{G_1G_0}\eta$ – время ретардации, G_1, G_0 – модули сдвига упругих элементов, η – коэффициент вязкости соответствующего элемента. Схема для модели стандартного линейного тела приведена на рис. 5.

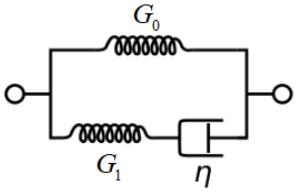


Рис. 5. Схема модели стандартного линейного тела

Fig. 5. Schematic representation of the standard linear solid model

Введем вспомогательный оператор $B=1+\tau_\varepsilon\frac{d}{dt}$, откуда $\frac{d}{dt}=\frac{B-1}{\tau_\varepsilon}$. Выражение (3.1) в таком случае примет вид:

$$B\sigma=G_0\left(1+\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}(B-1)\right)\varepsilon, \tag{3.2}$$

откуда

$$M=\frac{G_0\left(1+\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}(B-1)\right)}{B}. \tag{3.3}$$

Выполним подстановку выражения (3.3) в волновое уравнение (1.2):

$$G_0\left(1+\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}(B-1)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\rho B\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{3.4}$$

$$G_0\left(1+\tau_\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\rho\left(1+\tau_\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

$$G_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+G_0\tau_\sigma\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho\tau_\varepsilon\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}. \tag{3.6}$$

Получили достаточно сложный вид волнового уравнения (3.6). Принимая гипотезу плоской волны, перейдём к дисперсионному соотношению вида:

$$k^2 = \frac{\rho}{G_0}\frac{\tau_\sigma\tau_\varepsilon\omega^4 + \omega^2 + i\omega^3\left(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon\right)}{\tau_\sigma^2\omega^2 + 1}, \qquad (3.7)$$

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho\left(\tau_\sigma\tau_\varepsilon\omega^2 + 1 + i\,\omega\left(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon\right)\right)}{G_0\left(\tau_\sigma^2\omega^2 + 1\right)}}. \qquad (3.8)$$

Заметим, что при $\tau_\sigma = \tau_\varepsilon$, что можно допустить при $G_1 << G_0$ и $\eta << G_0$, дисперсионное соотношение (3.8) преобразуется к виду:

$$k = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G_0}}, \qquad (3.9)$$

что в точности соответствует дисперсионному соотношению в идеально-упругих твердых телах [4].

Из дисперсионного соотношения (3.8) можно определить зависимость частоты и волнового числа, соответствующей структурно-механической модели Максвелла (рис. 2.1). Для этого примем значение модуля сдвига G_0 равным нулю. Предел выражения $\frac{1}{G_0}\frac{\tau_\sigma\tau_\varepsilon\omega^2 + 1 + i\omega\left(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon\right)}{\tau_\sigma^2\omega^2 + 1}$ из (3.8) при условии $G_0 \to 0$ даст $\frac{\tau_\varepsilon\omega + i}{\tau_\varepsilon\omega G_1}$. В результате дисперсионное соотношение (3.7) принимает вид:

$$\omega^2 + \omega\frac{i}{\tau_\varepsilon} - c^2k^2 = 0, \qquad (3.10)$$

что в точности совпадает с уравнением (2.9).

Для вычисления аналитического решения уравнения (3.7) выполним преобразование этого уравнения:

$$\omega^3 + \frac{i}{\tau_\varepsilon}\omega^2 - \frac{k^2G_0}{\rho}\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\omega - \frac{k^2G_0 i}{\rho\,\tau_\varepsilon} = 0. \qquad (3.11)$$

Полученное кубическое уравнение (3.11) содержит мнимые коэффициенты. Приведём его к другому виду с помощью замены $\omega = i\,z$:

$$z^3 + \frac{1}{\tau_\varepsilon}z^2 + \frac{k^2G_0}{\rho}\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}z + \frac{k^2G_0}{\rho\,\tau_\varepsilon} = 0. \qquad (3.12)$$

Для решения кубического уравнения (3.12) с действительными коэффициентами воспользуемся тригонометрическими формулами Виета. Использование этих формул позволяет получить аналитическое решение с помощью тригонометрических функций в компактном виде. Для нахождения решения (3.12) выпишем действительные коэффициенты $a = \frac{1}{\tau_\varepsilon}, b = \frac{k^2G_0}{\rho}\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}, c = \frac{k^2G_0}{\rho\,\tau_\varepsilon}$, затем вычислим значения параметров:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^2 - 3b}{9} = \frac{\rho - 3G_0k^2\tau_\sigma\tau_\varepsilon}{9\rho\,\tau_\varepsilon^2}, \\ R &= \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} = \frac{2\rho + 9G_0k^2\tau_\varepsilon\left(3\tau_\varepsilon - \tau_\sigma\right)}{54\rho\,\tau_\varepsilon^3}, \\ S &= Q^3 - R^2 = \frac{G_0k^2\left(-4\rho^2 - 4G_0^2k^4\tau_\sigma^3\tau_\varepsilon + G_0k^2\rho\left(\tau_\sigma^2 + 18\tau_\sigma\tau_\varepsilon - 27\tau_\varepsilon^2\right)\right)}{108\rho^3\tau_\varepsilon^4}. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Вид решения для z зависит от знаков параметров Q и S:

- при $S>0$ получим три действительных корня

$$\begin{cases} z_1 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\varphi\right) - \frac{a}{3}, \\ z_{2,3} = -2\sqrt{Q}\cos\left(\varphi \pm \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}, \\ \varphi = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right), \end{cases}$$

- при $S < 0$ и $Q > 0$ уравнение имеет два комплексных и один действительный корень

$$\begin{cases} z_1 = -2\,\mathrm{sgn}\left(R\right)\sqrt{Q}\cosh\left(\varphi\right) - \frac{a}{3}, \\ z_{2,3} = \mathrm{sgn}\left(R\right)\sqrt{Q}\cosh\left(\varphi\right) - \frac{a}{3} \pm i\sqrt{3}\sqrt{Q}\sinh\left(\varphi\right), \\ \varphi = \frac{1}{3}\mathrm{Arccosh}\left(\frac{|R|}{\sqrt{Q^3}}\right), \end{cases}$$

- при $S < 0$ и $Q < 0$ решение аналогичное

$$\begin{cases} z_1 = -2\,\mathrm{sgn}\left(R\right)\sqrt{|Q|}\sinh\left(\varphi\right) - \frac{a}{3}, \\ z_{2,3} = \mathrm{sgn}\left(R\right)\sqrt{|Q|}\sinh\left(\varphi\right) - \frac{a}{3} \pm i\sqrt{3}\sqrt{|Q|}\cosh\left(\varphi\right), \\ \varphi = \frac{1}{3}\mathrm{Arcsinh}\left(\frac{|R|}{\sqrt{|Q|^3}}\right), \end{cases}$$

- при $S < 0$ и $Q = 0$ корни выглядят следующим образом

$$\begin{cases} z_1 = -\sqrt[3]{c - \frac{a^3}{27}} - \frac{a}{3}, \\ z_{2,3} = -\frac{a + z_1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\left|\left(a - 3z_1\right)\left(a + z_1\right) - 4b\right|}, \end{cases}$$

- при $S = 0$ получим два действительных корня, один из которых является корнем кратности 2

$$\begin{cases} z_1 = -2\sqrt[3]{R} - \frac{a}{3}, \\ z_{2,3} = \sqrt[3]{R} - \frac{a}{3}. \end{cases}$$

Возвращаясь обратно к решению уравнения (3.11) с неизвестной $\omega = iz$, заметим, что для получения действительных частот необходимо рассматривать мнимые корни относительно переменной z. В результате получим:

$$\begin{cases} \omega_1 = \pm\sqrt{3}\sqrt{Q}\sinh(\varphi),\ \varphi = \frac{1}{3}\operatorname{Arccosh}\left(\frac{|R|}{\sqrt{Q^3}}\right),\ (S<0)\cap(Q>0), \\ \omega_2 = \pm\sqrt{3}\sqrt{|Q|}\cosh(\varphi),\ \varphi = \frac{1}{3}\operatorname{Arcsinh}\left(\frac{|R|}{\sqrt{|Q|^3}}\right),\ (S<0)\cap(Q<0), \\ \omega_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{|(a-3p)(a+p)-4b|},\ p = -\sqrt[3]{c-\frac{a^3}{27}}-\frac{a}{3},\ (S<0)\cap(Q=0), \\ \omega_4 = 0,\ S \geq 0. \end{cases}$$

Подставляя готовые выражения вместо коэффициентов a, b, c, выпишем решения в окончательном виде:

$$\begin{cases} \omega_1 = \pm\sqrt{3}\sqrt{Q}\sinh(\varphi),\ \varphi = \frac{1}{3}\operatorname{Arccosh}\left(\frac{|R|}{\sqrt{Q^3}}\right),\ (S<0)\cap(Q>0), \\ \omega_2 = \pm\sqrt{3}\sqrt{|Q|}\cosh(\varphi),\ \varphi = \frac{1}{3}\operatorname{Arcsinh}\left(\frac{|R|}{\sqrt{|Q|^3}}\right),\ (S<0)\cap(Q<0), \\ \omega_3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left|4Q-\left(2R-\frac{1}{\tau_\varepsilon}Q\right)^{\frac{2}{3}}\right|},\ (S<0)\cap(Q=0), \\ \omega_4 = 0,\ S \geq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

На рис. 6 представлены решения $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ из (3.14) при параметрах $G_0 = 2\cdot10^6$ Па, ρ = 1000 кг/м^3, $\tau_\sigma = 5\cdot10^{-3}$ с, $\tau_\varepsilon = 10^{-4}$ с. Общее решение уравнения (3.11) представляет собой кусочно-заданную непрерывную функцию, состоящую из отдельных решений $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ в (3.14). Из рис. 6 можно сделать несколько выводов.

Во-первых, последовательный переход от решения ω_1 к решениям ω_2 и ω_3 определяется условием $Q \leq 0$ или $\rho - 3G_0 k^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon \leq 0$. Очевидно, что при увеличении k значение параметра Q уменьшается и увеличивается вероятность этого перехода.

Во-вторых, появления решения ω_4 зависит от условия $S \geq 0$ или

$$-4\rho^2 - 4G_0^2 k^4 \tau_\sigma^3 \tau_\varepsilon + G_0 k^2 \rho\left(\tau_\sigma^2 + 18\tau_\sigma\tau_\varepsilon - 27\tau_\varepsilon^2\right) \geq 0. \quad (3.15)$$

Решение ω_4 также определяет существование области с нулевыми значениями частоты (разрыв в k-пространстве). Условие (3.15) является критерием появления разрыва.

На рис. 7 и 8 представлены графики зависимости частоты от волнового числа при изменении времен релаксации τ_ε и ретардации τ_σ. Анализ графиков показывает, что по мере сближения значений времен τ_ε и τ_σ ($\tau_\varepsilon < \tau_\sigma$) область нулевых значений частот (размер «щели») сначала уменьшается, а затем и вовсе исчезает (первый график на рис. 7, четвертый график на рис. 8).

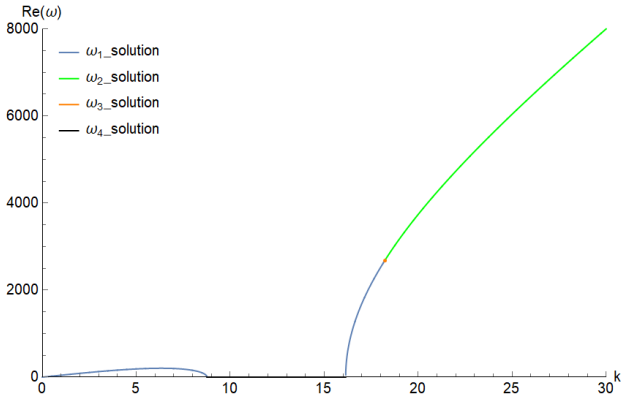


Рис. 6. Вид кусочно-заданной функции, состоящей из решений $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ в (3.14)

Fig. 6. Form of the piecewise function composed of $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ solutions as defined in (3.14)

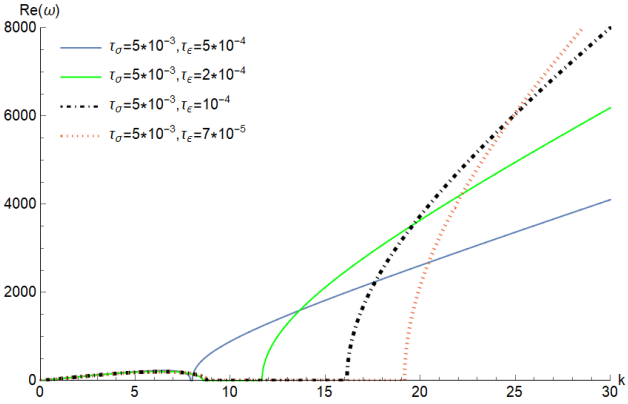


Рис. 7. График зависимости частоты от волнового числа при различных значениях времен релаксации для модели стандартного линейного тела

Fig. 7. Frequency-wavenumber dispersion curves for the standard linear solid model at various relaxation times

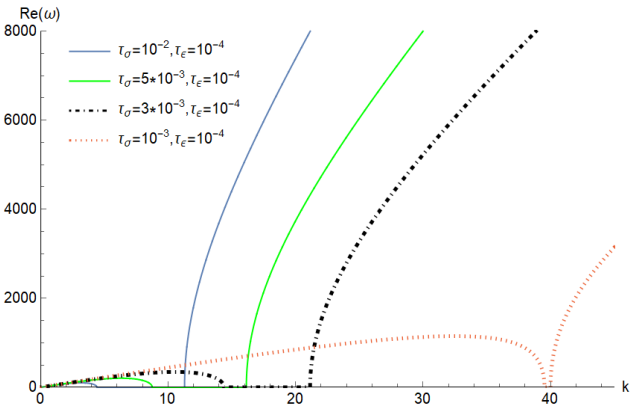


Рис. 8. График зависимости частоты от волнового числа при различных значениях времен ретардации для модели стандартного линейного тела

Fig. 8. Frequency-wavenumber dispersion curves for the standard linear solid model at various retardation times

4. Дробные реологические модели

Дробные модели основаны на существенно новом представлении релаксационных функций (ядер релаксации), имеющих отношение к качественным изменениям реакции среды (жидкостей и твердых тел), термодинамических свойств, например, вида свободной энергии. При этом описание релаксационных свойств с использованием дробных моделей обусловлено нелинейной динамикой внутренних мезоскопических (структурных) переменных, «подчиняющих» релаксационные свойства макроскопических переменных (напряжения, деформации). «Дробная» феноменология на основе релаксационных моделей (моделей Максвелла, Фойгта) позволяет в ряде случаев успешно описать механическое поведение полимерных, композитных, биологических систем, обнаруживающих широкий спектр релаксационных механизмов в условиях «структурной перестройки» системы. При этом моделирование релаксационных механизмов достигается с относительно небольшим количеством параметров, характеризующих дробную пространственно-временную кинетику и связанных с фундаментальными пространственными и временными масштабами, характеризующими эволюцию мезоскопических систем в условиях структурно-скейлинговых переходов [40]. Данные масштабы являются параметрами автомодельных решений, описывающими пространственно-временную динамику коллективных мод структурных мезоскопических переменных. Пространственные и временные масштабы определяют «дробный порядок» соответствующих производных в моделях вязкоупругого поведения сред. С учетом качественных изменений типов автомодельных решений эволюционных уравнений для мезоскопических переменных изменение «дробного порядка» в релаксационных уравнениях может иметь функциональный вид. Термодинамически это связано, как правило, с качественными изменениями неравновесных потенциалов (свободной энергии) и необходимостью введения «эффективных температур», определяющих изменение текущей «восприимчивости» системы в условиях внешних воздействий и обнаруживающих специфическое свойство «памяти» при релаксационной реакции твердых тел, жидкостей, а также эффектов теплопроводности.

Дробные вязкоупругие модели используют функцию памяти $K(s)$ вида

$$K(s)=\frac{k_0}{s^{\alpha}},\alpha\in(0,1),k_0>0. \qquad (4.1)$$

Эксперименты по пластическому деформированию, ползучести для широкого класса материалов с затухающей памятью демонстрируют применимость техники дробных производных для описания изменения спектра времен релаксации при условиях нагружения, близких к квазистатическим [41].

Интерес представляет понимание природы степенного закона в механизмах релаксации, который наблюдается для широкого класса нелинейных систем, в том числе при пластическом течении в сплавах, когда проявляются многомасштабные коллективные эффекты локализации пластической деформации с выраженными макроскопическими признаками резкого изменения времен релаксации – флуктуациями напряжения пластического течения (эффект Портевена – Ле Шателье). Коллективное поведение областей локализованного сдвига характеризуется степенными распределениями флуктуаций напряжения пластического течения [42].

Появление многомасштабных коллективных мод сопровождается качественным изменением механизмов переноса импульса и диссипации, характерными для неравновесных «критических» систем. Степенные показатели при этом аналогичны показателям скейлинга в классической теории фазовых переходов. При характерных временах воздействия, близких к временам структурной релаксации (временам Френкеля), обнаруживаются «щелевые состояния – Gapped Momentum States», реализуемые на множестве волновых чисел (спектре масштабов). В зависимости от природы релаксационных механизмов (времена релаксации напряжений в модели Максвелла, времена ретардации деформаций в модели Кельвина или стандартного твердого тела) «щелевые состояния» определяют качественные изменения механизма переноса импульса, например, коллективные моды локализованного сдвига при пластическом течении, формирование вихрей в жидкости, зарождение и распространение коллективных ориентационных мод в полимерах, известные как эффект образования «шеек».

Взаимодействие множественных коллективных мод, локализованных на спектре «щелевых» масштабов, на макроскопических масштабах, например, на масштабе образца, приводит к резкому уменьшению времен релаксации (ретардации), что проявляется в выраженной степенной зависимости последних от параметров нагружения. Появление спектра «щелевых масштабов», соответствующего им спектра «временных масштабов Френкеля» и коллективных мод «структурных переменных» приводит к резкому изменению топологии фазового пространства, реализуемого в ходе множественного «распада» метастабильных состояний [43]. Спектр «щелевых масштабов» определяет пространственные (масштабы локализации коллективных мод) и их временные масштабы (масштабы Френкеля), на которых развивается релаксационная кинетика макроскопической системы. Взаимодействие между мезоскопическими масштабами на характерных макроскопических (пространственных и временных) масштабах может быть описана с использованием техники дробных производных. Ключевая роль пространственно-временных масштабов, определяющих динамику коллективных мод структурных (мезоскопических) переменных проявляется в ограниченности применения степенных законов изменения времен релаксации, определяющих физически нереальные значения модулей упругости в начальный момент времени. Устранение этого несоответствия достигается феноменологически введением временного масштаба t_c,

начиная с которого проявляются степенные закономерности в изменении времен релаксации. В [43] показано, что типичное значение этого временного масштаба t_c соответствует временам Френкеля $t_c \sim t_F \sim 10^{-5}$ с. Широкое распространение степенные реологические модели получили при описании свойств клеток с помощью введения двух параметров – жесткости (модуля) системы и показателя степени, определяющего меру близости к твердотельному или жидкоподобному состоянию. Важным аспектом является также то, что степенная модель была разработана не только на основе дробного исчисления, но и в рамках мезоскопической теории полимерных и биологических систем. Теория предполагает, что вырождение масштабов является естественным следствием метастабильности внутренней структуры материала, которая состоит из множества структурных элементов и соответствующих им энергетических минимумов, переходы между которыми определяются внешним воздействием и «эффективными температурами», изменения которых характеризуют переходы по множественному метастабильному потенциалу. Показатель степени при этом связан с эффективной температурой материала, которая задаёт динамику системы и устанавливает вероятность перехода элементов между энергетическими минимумами.

5. Дисперсионные свойства среды Кельвина – Фойгта с дробной производной

Структурная схема модели Кельвина – Фойгта с дробной производной состоит из упругого и вязкоупругого элемента, параллельно расположенных друг относительно друга (рис. 9). Определяющее соотношение модели имеет вид:

$$\sigma = G_0\left(\varepsilon + \tau_\sigma^\gamma \frac{d^\gamma \varepsilon}{dt^\gamma}\right), \tag{5.1}$$

где σ – сдвиговое напряжение, ε – величина сдвига, $\tau_\sigma = \dfrac{\eta}{G}$ – время ретардации, G_0 – мгновенный модуль сдвига. Выражение $\dfrac{d^\gamma}{dt^\gamma}$ в (5.1) представляет собой дробную производную Римана – Лиувилля

$$\frac{d^\gamma f}{dt^\gamma} = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\Gamma(1-\gamma)(t-\tau)^\gamma} d\tau, \tag{5.2}$$

где γ – порядок дробной производной $(0<\gamma<1)$, $\Gamma(1-\gamma)$ – гамма-функция. При $\gamma = 0$ вязкоупругий элемент в схеме становится идеально-упругим элементом, при $\gamma = 1$ данный элемент принимает вид идеально-вязкого элемента.

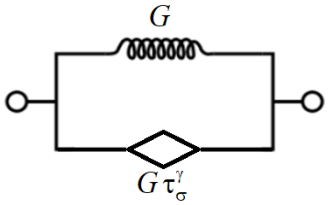


Рис. 9. Схема модели Кельвина – Фойгта с дробной производной

Fig. 9. Schematic representation of the fractional derivative Kelvin – Voigt model

Связь напряжений и деформаций в модели Кельвина – Фойгта с дробной производной определяется с помощью оператора

$$M = G_0\left(1 + \tau_\sigma^\gamma \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\right). \tag{5.3}$$

При подстановке выражения (5.3) в волновое уравнение (1.2) получим:

$$G_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G_0 \tau_\sigma^\gamma \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{5.4}$$

Использование гипотезы плоской волны позволяет перейти к дисперсионному соотношению вида:

$$-G_0 k^2 - G_0 \tau_\sigma^\gamma k^2 e^{i\omega t}\frac{d^\gamma e^{-i\omega t}}{dt^\gamma} = -\rho\,\omega^2. \tag{5.5}$$

Для вычисления дробной производной функции $e^{-i\omega t}$ воспользуемся формулой (5.2) и следствием из этой формулы [44]

$$\frac{d^\gamma f}{dt^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left[\frac{f(0)}{t^\gamma} + \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau\right]. \tag{5.6}$$

Обозначим $\psi(t) = \int_0^t \dfrac{e^{-i\omega\tau}}{(t-\tau)^\gamma} d\tau$, тогда

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left[\frac{1}{t^\gamma} - i\,\omega\psi(t)\right],$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} + i\,\omega\psi(t) = \frac{1}{t^\gamma},$$

$$\psi(t) = c_1 e^{-i\omega t} - \frac{e^{-i\omega t}\, i^{1+\gamma}(-\omega)^\gamma \Gamma(1-\gamma, -i\omega t)}{\omega}, \tag{5.7}$$

где $\Gamma(1-\gamma, -i\omega t)$ – неполная гамма-функция. Учитывая, что $\psi(0) = 0$, получим

$$\psi(t) = \frac{e^{-i\omega t}\, i^{1+\gamma}(-\omega)^\gamma}{\omega}\left(\Gamma(1-\gamma) - \Gamma(1-\gamma, -i\omega t)\right). \tag{5.8}$$

Выражение (5.8) представляет собой итоговое решение для функции $\psi(t)$. При помощи этого решения вычислим дробную производную функции $e^{-i\omega t}$:

$$\frac{d^{\gamma}e^{-i\omega t}}{dt^{\gamma}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\psi(t)\right) = e^{-i\omega t}(-i\omega)^{\gamma}\left(1-\frac{\Gamma(-\gamma,-i\omega t)}{\Gamma(-\gamma)}\right).$$

В результате дисперсионное уравнение (5.5) принимает вид:

$$-G_0k^2 - G_0\tau_{\sigma}^{\gamma}k^2(-i\omega)^{\gamma}\left(1-\frac{\Gamma(-\gamma,-i\omega t)}{\Gamma(-\gamma)}\right) = -\rho\,\omega^2. \qquad (5.9)$$

На рис. 10 построено численное решение дисперсионного уравнения (5.9) при различных значениях порядка дробной производной и параметрах $G_0 = 2\cdot10^6$ Па, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\tau_{\sigma} = 5\cdot10^{-3}$ с, $t = 5\cdot10^{-3}$ с. При значениях параметра γ, близких к нулю, дисперсионное соотношение (5.5) сводится к уравнению, характерному для идеально-упругих твердых тел. При дальнейшем увеличении порядка дробной производной преобладают вязкие свойства среды. Наконец, при значениях параметра γ, близких к единице, модель преобразуется в классическую модель Кельвина – Фойгта. Это означает, что при данном условии результаты численного решения (чёрный график на рис. 10) практически совпадают с результатами на рис. 2.

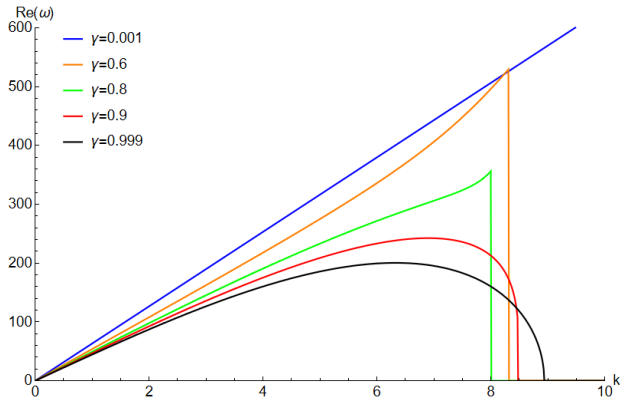


Рис. 10. График зависимости частоты от волнового числа при различных значениях порядка дробной производной для модели Кельвина – Фойгта с дробной производной

Fig. 10. Frequency-wavenumber dispersion curves for the fractional derivative Kelvin –Voigt model at various values of the fractional derivative order

Заключение

Настоящая работа посвящена выводу и анализу дисперсионных соотношений с использованием вязкоупругих моделей с целью исследования «щелевых состояний». Дисперсионные соотношения были получены в результате модификации уравнения упругой поперечной волны в твёрдых телах. Конечный вид модифицированных волновых уравнений определялся структурой выбранных вязкоупругих моделей. Переход между волновыми уравнениями и дисперсионными соотношениями осуществлялся с помощью гипотезы плоской волны в одномерном случае. В качестве вязкоупругих моделей были рассмотрены модели Кельвина – Фойгта, Максвелла, стандартного линейного тела, модель Кельвина – Фойгта с дробной производной. Сделаны выводы и сформулированы критерии качественного изменения вида дисперсионных уравнений для обнаружения разрыва в пространстве импульсов.

Несмотря на простоту и схожесть схем моделей Кельвина – Фойгта и Максвелла, эти модели описывают качественно различное вязкоупругое поведение среды. Как известно, при малых скоростях деформаций модель Кельвина – Фойгта описывает поведение материала, характерное для твердых тел, в то время как модель Максвелла при тех же условиях демонстрирует поведение вязкой жидкости [36]. Поэтому модель Кельвина – Фойгта хорошо предсказывает распространение звуковой волны с диффузионным затуханием, когда чисто упругий механизм при увеличении скорости деформаций постепенно сменяется вязким.

Как и в модели Кельвина – Фойгта, дисперсионное соотношение модели Максвелла содержит разрыв в пространстве импульсов, что подтверждается многочисленными исследованиями [19; 23; 29]. Наличие разрыва в дисперсионных кривых позволяет модели Максвелла описать динамику сдвиговых мод в жидкостях, когда сдвиговая упругость жидкости проявляется на ограниченных масштабах системы [19; 31]. Критическое значение волнового числа k_g, определяющее длину разрыва в пространстве импульсов, имеет обратную зависимость от двух параметров модели: скорости распространения упругой волны c и времени релаксации системы τ_{ε}.

Конечный вид дисперсионного соотношения, полученного из модели стандартного линейного тела, представляет собой кубическое уравнение относительно частоты и совпадает с уравнением из статьи [38]. Аналитическое решение этого уравнения было получено с помощью тригонометрических формул Виета. При обнулении модуля сдвига одного из упругих элементов дисперсионное соотношение модели преобразуется в дисперсионное уравнение модели Максвелла, что подтверждает адекватность полученного решения. Построенные дисперсионные кривые модели демонстрируют конечный разрыв в пространстве импульсов при определённых условиях. Для описания этих условий сформулирован критерий, включающий параметры модели и обнаруживающий «щелевые состояния» в системе.

Дисперсионное соотношение модели Кельвина – Фойгта с дробной производной, как и дисперсионное уравнение классической модели Кельвина – Фойгта, содержит разрыв в пространстве импульсов. В случае, когда параметр дробной производной стремится к единице, что соответствует преобразованию вязкоупругого элемента в вязкий элемент, результаты модели сводятся к результатам классической модели Кельвина – Фойгта. При стремлении параметра дробной производной к нулю схема модели состоит

из двух упругих элементов, поэтому дисперсионные кривые представляют собой линейные функции.

Необходимость исследования «щелевых состояний» при анализе дисперсионных соотношений обусловлена появлением качественного нового механизма переноса импульса и особых динамических и термодинамических свойств в системе. Это позволит установить спектр различных мод и описать поведение жидкостей, биологических объектов, пластически деформируемых материалов при распространении сдвиговых волн.

Библиографический список

1. Уизем, Дж. Б. Линейные и нелинейные волны / Дж.Б. Уизем; под ред. А.Б. Шабата. – М.: Мир, 1997. – 622 с.
2. Ashcroft, N.W. Solid state physics / N.W. Ashcroft, N.D. Mermin. – N.Y.: Saunders College Publishing, 1976. – 828 p.
3. Kittel, C. Introduction to solid state physics / C. Kittel. – N.Y.: John Wiley & Sons, 2005. – 680 p.
4. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. – Т. 7: Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 250 с.
5. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб; под ред. Н.А. Слезкина. – М.: ОГИЗ, 1947. – 929 с.
6. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. – Т. 6: Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 736 с.
7. Черкесов, Л.В. Введение в гидродинамику и теорию волн / Л.В. Черкесов, В.А. Иванов, С.М. Хартиев. – СПб: Гидрометеоиздат, 1992. – 263 с.
8. Drazin, P.G. Hydrodynamic stability / P.G. Drazin, W.H. Reid. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 619 p.
9. Jackson, J. Classical electrodynamics / J. Jackson. – N.Y.: John Wiley & Sons, 1999. – 834 p.
10. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 656 с.
11. Born, M. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light / M. Born, E. Wolf. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 952 p.
12. Shankar, R. Principles of quantum mechanics / R. Shankar. – N.Y.: Plenum Press, 1994. – 694 p.
13. Zettili, N. Quantum mechanics: Concepts and applications / N. Zettili. – N.Y.: John Wiley & Sons, 2009. – 674 p.
14. Рыскин, Н.М. Нелинейные волны / Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. – М.: Наука, 2000. – 272 с.
15. Azar M.E. Boosting energy levels in graphene magnetic quantum dots through magnetic flux and inhomogeneous gap / M.E. Azar, A. Bouhlal, A. Jellal // Phys. B Condens. Matter. – 2024. – Vol. 685. – P. 1–10.
16. Insight on relationship crystallinity and band gap energies of polyhydroxyalkanoates polymers / D.E. Ghorabe, A.S. Novikov, P.V. Nesterov [et al.] // Mater. Roday Commun. – 2024. – Vol. 39 – P. 108886.
17. Deutscher, G. Coherence gap edge and pseudo-gap in cuprates and other non-BCS superconductors / G. Deutscher // Phys. C. – 2023. – Vol. 614. – P. 1354323.
18. Furrer, A. Pressure effects in high-temperature superconductors: Pseudogap and barocaloric cooling as a spin-off / A. Furrer // Phys. C – 2023. – Vol. 614. – P. 1354351.
19. Gapped momentum states / M. Baggioli, M. Vasin, V. Brazhkin, K. Trachenko // Phys. Rep. – 2020. – Vol. 865. – P. 1–44.
20. Grozdanov, S. Holography and hydrodynamics with weakly broken symmetries / S. Grozdanov, A. Lucas, N. Poovuttikul // Phys. Rev. D – 2019. – Vol. 99. – P. 1–69.
21. Trachenko, K. Quantum dissipation in a scalar field theory with gapped momentum states / K. Trachenko // Sci. Rep. – 2019. – Vol. 9. – P. 1–6.
22. Larecki, W. Influence of nonlinearity of the phonon dispersion relation on wave velocities in the four-moment maximum entropy phonon hydrodynamics / W. Larecki, Z. Banach // Phys. D – 2014. – Vol. 266. – P. 65–79.
23. Baggioli, M. Transverse collective modes in interacting holographic plasmas / M. Baggioli, U. Gran, M. Tornsö // J. High Energy Phys. – 2020. – arXiv ePrint:1912.07321.
24. Gran, U. Exotic holographic dispersion / U. Gran, M. Tornsö, T. Zingg // J. High Energy Phys. – 2019. – arXiv ePrint:1808.05867.
25. Davison, R.A. Momentum dissipation and effective theories of coherent and incoherent transport / R.A Davison., B. Goutéraux // J. High Energy Phys. – 2015. – arXiv ePrint:1411.1062.
26. Chiral magnetic waves in strongly coupled Weyl semimetals / Y. Ahn, M. Baggioli, Y. Liu, X.M. Wu // J. High Energy Phys. – 2024. – arXiv ePrint:2401.07772.
27. Dielectric properties and plasmon modes of gapped momentum systems of different dimensionality / Y. Yerin, A.A. Varlamov, R. Felici, A. Carlo // Phys. Rev. B – 2023. – Vol. 108. – P. 1–11.
28. Localized shear as a quasi-plastic mechanism of momentum transfer in liquids / O.B. Naimark, S.V. Uvarov, I.A. Bannikova [et al.] // Lett. Mater. – 2023. – Vol. 13. – P. 93–97.
29. Naimark, O. Collective modes of defects and gapped momentum states in liquids / O. Naimark // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2509. – P. 020139.
30. Goree, J. Cutoff wave number for shear waves and Maxwell relaxation time in Yukawa liquids / J. Goree, Z. Donkó, P. Hartmann // Phys. Rev. E – 2012. – Vol. 85. – P. 1–7.
31. Emergence and Evolution of the k Gap in Spectra of Liquid and Supercritical States / C. Yang, M.T. Dove, V.V. Brazhkin, K. Trachenko // Phys. Rev. Lett. – 2017. – Vol. 118. – P. 1–5.
32. Experimental observation of gapped shear waves and liquid-like to gas-like dynamical crossover in active granular matter / C. Jiang, Z. Zheng, Y. Chen, M. Baggioli // Commun. Phys. – 2025. – Vol. 8. – P. 1–19.
33. Emergence of Debye scaling in the density of states of liquids under nanoconfinement / Y. Yu, S. Jin, X. Fan [et al.] // ACS Nano. – 2024. – Vol. 18. – P. 24829–24841.
34. Pilgrim, W.C. State dependent particle dynamics in liquid alkali metals / W.C. Pilgrim, C. Morkel // J. Phys. Condens. Matter. – 2006. – Vol. 18 – pp. 585-633.
35. Френкель, Я.И. Кинетическая теория жидкостей / Я.И. Френкель. – М.: Издательство академии наук СССР, 1945. – 425 с.
36. Baggioli, M. Deformations, relaxation, and broken symmetries in liquids, solids, and glasses: A unified topological field theory / M. Baggioli, M. Landry, A. Zaccone // Phys. Rev. E – 2022. – Vol. 105. – P. 024602.
37. LiU, H.P. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition / H.P. LiU, D.L. Anderson, H. Kanamori // Geophys. J.R. Astron. Soc. – 1976. – Vol. 47 – pp. 41-58.
38. Meidav T. Viscoelastic Properties of the Standard Linear Solid // Geophys. Prospect. – 1964. – Vol. 12. – P. 80–99.

39. Holm, S. Dispersion analysis for wave equations with fractional Laplacian loss operators / S. Holm // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2020. – Vol. 22. – P. 1596–1606.

40. Наймарк, О.Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения / О.Б. Наймарк // Физическая мезомеханика. – 2003. – № 6. – С. 45–72.

41. Efremov, Y.M. Viscoelasticity in simple indentation-cycle experiments: a computational study / Y.M. Efremov, S.L. Kotova, P.S. Timashev // Sci. Rep. – 2020. – Vol. 10. – P. 1–15.

42. Наймарк, О.Б. Структурно-скейлинговые переходы в твердых телах с дефектами и некоторые симметрийные аспекты теории поля / О.Б. Наймарк // Физическая мезомеханика. – 2010. – № 13. – С. 113–126.

43. Наймарк, О.Б. О некоторых закономерностях скейлинга в пластичности, разрушении, турбулентности / О.Б. Наймарк // Физическая мезомеханика – 2015. – № 18. – С. 71–83.

44. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения) / А.К. Уринов, С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина, Ш.Т. Каримов. – М.: Фаргона, 2022. – 193 с.

References

1. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. N.Y.: *John Wiley & Sons*, 1974, 664 p.

2. Ashcroft N.W., Mermin N.D. Solid state physics. N.Y.: *Saunders College Publishing*, 1976, 828 p.

3. Kittel C. Introduction to solid state physics. N.Y.: *John Wiley & Sons*, 2005, 680 p.

4. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. Volume 7 of course of theoretical physics. Oxford: *Butterworth-Heinemann*, 2012, 396 p.

5. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge: *Cambridge university press warehouse*, 1895, 632 p.

6. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. Volume 6 of course of theoretical physics. Oxford: *Pergamon Press*, 2013, 551 p.

7. Cherkesov L.V., Ivanov V.A., Khartiev S.M. Vvedenie v gidrodinamiku i teoriyu voln [Introduction to hydrodynamics and wave theory]. Saint Petersburg: *Gidrometeoizdat*, 1992, 263 p.

8. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic stability. Cambridge: *Cambridge University Press*, 2004, 619 p.

9. Jackson J. Classical electrodynamics. N.Y.: *John Wiley & Sons*, 1999, 834 p.

10. Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodynamics of continuous media. Volume 8 of course of theoretical physics. Oxford: *Pergamon Press*, 2013, 475 p.

11. Born M., Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Cambridge: *Cambridge University Press*, 1999, 952 p.

12. Shankar R. Principles of quantum mechanics. N.Y.: *Plenum Press*, 1994, 694 p.

13. Zettili N. Quantum mechanics: Concepts and applications. N.Y.: *John Wiley & Sons*, 2009, 674 p.

14. Ryskin N.M., Trubetskov D.I. Nekinejny`e volny` [Nonlinear waves]. Moscow: *Nauka*, 2000, 272 p.

15. Azar M.E., Bouhlal, A., Jellal, A. Boosting energy levels in graphene magnetic quantum dots through magnetic flux and inhomogeneous gap // Phys. B Condens. Matter**.** – 2024. – Vol. 685 – pp. 1-10.

16. Ghorabe D.E., Novikov A.S., Nesterov P.V., et al. Insight on relationship crystallinity and band gap energies of polyhydroxyalkanoates polymers. *Mater. Roday Commun*, 2024, Vol. 39, pp. 108886.

17. Deutscher G. Coherence gap edge and pseudo-gap in cuprates and other non-BCS superconductors. *Phys. C*, 2023, Vol. 614, pp. 1354323.

18. Furrer A. Pressure effects in high-temperature superconductors: Pseudogap and barocaloric cooling as a spin-off. *Phys. C,* 2023, Vol. 614, pp. 1354351.

19. Baggioli M., Vasin M., Brazhkin V., Trachenko K. Gapped momentum states. *Phys. Rep*, 2020, Vol. 865, pp. 1-44.

20. Grozdanov S., Lucas A., Poovuttikul N. Holography and hydrodynamics with weakly broken symmetries. *Phys. Rev. D*, 2019, Vol. 99, pp. 1-69.

21. Trachenko K. Quantum dissipation in a scalar field theory with gapped momentum states. *Sci. Rep*, 2019, Vol. 9, pp. 1-6.

22. Larecki W., Banach Z. Influence of nonlinearity of the phonon dispersion relation on wave velocities in the four-moment maximum entropy phonon hydrodynamics. *Phys. D*, 2014, Vol. 266, pp. 65-79.

23. Baggioli M., Gran U., Tornsö, M. Transverse collective modes in interacting holographic plasmas. *J. High Energy Phys*, 2020, arXiv ePrint: 1912.07321.

24. Gran U., Tornsö M., Zingg T. Exotic holographic dispersion. *J. High Energy Phys*, 2019, arXiv ePrint: 1808.05867.

25. Davison R.A., Goutéraux B. Momentum dissipation and effective theories of coherent and incoherent transport. *J. High Energy Phys*, 2015, arXiv ePrint: 1411.1062.

26. Ahn Y., Baggioli M., Liu Y., Wu X.M. Chiral magnetic waves in strongly coupled Weyl semimetals. *J. High Energy Phys*, 2024, arXiv ePrint: 2401.07772.

27. Yerin Y., Varlamov A.A., Felici R., Carlo, A. Dielectric properties and plasmon modes of gapped momentum systems of different dimensionality. *Phys. Rev. B*, 2023, Vol. 108, pp. 1-11.

28. Naimark O.B., Uvarov S.V., Bannikova I.A., et al. Localized shear as a quasi-plastic mechanism of momentum transfer in liquids. *Lett. Mater*, 2023, Vol. 13, pp. 93-97.

29. Naimark O. Collective modes of defects and gapped momentum states in liquids. *in AIP Conference Proceedings*, 2022, Vol. 2509, pp. 020139.

30. Goree J., Donkó Z., Hartmann P. Cutoff wave number for shear waves and Maxwell relaxation time in Yukawa liquids. *Phys. Rev. E*, 2012, Vol. 85, pp. 1-7.

31. Yang C., Dove M.T., Brazhkin V.V., Trachenko K. Emergence and Evolution of the k Gap in Spectra of Liquid and Supercritical States. *Phys. Rev. Lett*, 2017, Vol. 118, pp. 1-5.

32. Jiang C., Zheng Z., Chen Y., Baggioli M. Experimental observation of gapped shear waves and liquid-like to gas-like dynamical crossover in active granular matter. *Commun. Phys.*, 2025, Vol. 8, pp. 1-19.

33. Yu Y., Jin S., Fan X., et al. Emergence of Debye scaling in the density of states of liquids under nanoconfinement. *ACS Nano*, 2024, Vol. 18, pp. 24829-24841.

34. Pilgrim W.C., Morkel C. State dependent particle dynamics in liquid alkali metals. *J. Phys. Condens. Matter*, 2006, Vol. 18, pp. 585-633.

35. Frenkel J. Kinetic theory of liquids. Oxford: *At the Clarendon Press*, 1946, 502 p.

36. Baggioli M., Landry M., Zaccone A. Deformations, relaxation, and broken symmetries in liquids, solids, and glasses: A unified topological field theory. *Phys. Rev. E*, 2022, Vol. 105, pp. 024602.

37. LiU H.P., Anderson D.L., Kanamori H. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophys. J. R. Astron. Soc*, 1976, Vol. 47, pp. 41-58.

38. Meidav T. Viscoelastic Properties of the Standard Linear Solid. *Geophys. Prospect*, 1964, Vol. 12, pp. 80-99.

39. Holm S. Dispersion analysis for wave equations with fractional Laplacian loss operators. *Fract. Calc. Appl. Anal*, 2020, Vol. 22, pp. 1596-1606.

40. Naimark O.B. Collective properties of defect ensembles and some nonlinear problems of plasticity and fracture. *Physical mesomechanics*, 2003, Vol. 6, pp. 45-72.

41. Efremov Y.M., Kotova S.L., Timashev P.S. Viscoelasticity in simple indentation-cycle experiments: a computational study. *Sci. Rep*, 2020, Vol. 10, pp. 1-15.

42. Naimark O.B. Structural-scale transitions in solids with defects and symmetry aspects of field theory. *Physical mesomechanics*, 2010, Vol. 13, pp. 113-126.

43. Naimark O.B. Some regularities of scaling in plasticity, fracture, and turbulence. *Physical mesomechanics*, 2015, Vol. 18, pp. 71-83.

44. Urinov A.K., Sitnik S.M., Shishkina E.L., Karimov Sh.T. Drobny`e integraly` i proizvodny`e (obobshheniya i prilozheniya) [Fractional integrals and derivatives (generalizations and applications)]. Moscow: *Fargona*, 2022, 193 p.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания, регистрационный номер темы 124020200116-1.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was completed within the framework of a state assignment, topic registration number 124020200116-1.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.