Соболь, Б.В. Равновесное состояние прямолинейной внутренней трещины вблизи угловой точки упругой области, подкрепленной по контуру / Б.В. Соболь, Е.В. Рашидова, В.В. Иващенко. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.09 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 2. – С. 100–110.

Perm Polytech Style: Sobol B.V., Rashidova E.V., Ivashchenko V.V. Equilibrium State of a Straight-Line Internal Crack Near the Corner Point of an Elastic Region Reinforced along the Contour. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 2, pp. 100-110. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.09

пермский политех

**ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА**
**№ 2, 2025**
**PNRPU MECHANICS BULLETIN**
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.2.09
УДК 539.3

# РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНЫ ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ УПРУГОЙ ОБЛАСТИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ

**Б.В. Соболь, Е.В. Рашидова, В.В. Иващенко**

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 04 марта 2025 г.
Одобрена: 03 июня 2025 г.
Принята к публикации:
30 мая 2025 г.

*Ключевые слова:*

область с угловой точкой, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, ядро Коши, сингулярное интегральное уравнение, индикатор сдерживающего воздействия покрытия.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о плоской деформации упругой изотропной клиновидной области, ослабленной внутренним дефектом в виде трещины. Границы исследуемой области подкреплены тонким гибким покрытием. Граничные условия, определяющие влияние покрытия, моделируются специальными соотношениями, полученными на основе асимптотического анализа решения задачи для полосы. Адекватность математической модели покрытия проверена серией численных экспериментов в предшествующих исследованиях авторов. Решение задачи проведено методом интегральных преобразований. Преобразование Меллина позволило свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Построено его общее решение. Для определения неизвестных коэффициентов в найденном общем решении получена система линейных алгебраических уравнений. Условие сопряжения на линии расположения трещины позволило получить сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, характерное для задач об исследовании концентрации напряжений на концах трещины в плоской постановке. Выполнено его численное решение, обеспечивающее возможность расчета значений коэффициентов интенсивности нормальных напряжений на концах трещины. Введено понятие индикатора сдерживающего воздействия покрытия, изучено его поведение для покрытий с различными параметрами, исследовано влияние физических и механических характеристик покрытия: его толщины и жесткости, а также размера трещины, ее расположения относительно угловой точки области, угла раскрытия клиновидной области на раскрытие трещины. Оценка влияния покрытий на напряжённо-деформированное состояние сечений изделий, ослабленных зонами концентрации напряжений, способствует разработке новых конструктивных подходов к структурной составляющей изделий, позволяющих усилить прочность и износостойкость деталей машин и элементов строительных конструкций.

© **Соболь Борис Владимирович** – д. т. н., профессор, зав. кафедрой «Информационные технологии»,
e-mail: b.sobol@mail.ru, iD: 0000-0003-2920-6478.
**Рашидова Елена Викторовна** – к. ф.-м. н., доцент кафедры «Информационные технологии»,
e-mail: el.rash@mail.ru, iD: 0000-0002-6665-3421
**Иващенко Валерия Валерьевна** – ассистент кафедры «Информационные технологии»,
e-mail: valeria_ivashchenko@mail.ru.

**Sobol Boris Vladimirovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Information Technologies Department,
e-mail: b.sobol@mail.ru, iD: 0000-0003-2920-6478.
**Rashidova Elena Viktorovna** – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Information Technologies Department, e-mail: el.rash@mail.ru, iD: 0000-0002-6665-3421.
**Ivashchenko Valeriya Valerievna** – Assistant, Information Technologies Department, e-mail: valeria_ivashchenko@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# EQUILIBRIUM STATE OF A STRAIGHT-LINE INTERNAL CRACK NEAR THE CORNER POINT OF AN ELASTIC REGION REINFORCED ALONG THE CONTOUR

**B.V. Sobol, E.V. Rashidova, V.V. Ivashchenko**

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 March 2025
Approved: 03 June 2025
Accepted for publication:
30 May 2025

*Keywords:*

corner point region, crack, stress intensity factor, Cauchy kernel, singular integral equation, coating restraint indicator.

ABSTRACT

The problem of plane deformation of an elastic isotropic wedge-shaped region weakened by an internal defect in the form of a crack is considered. The boundaries of the investigated region are supported by a thin flexible coating. The boundary conditions determining the influence of the coating are modeled by special relations based on the asymptotic analysis of the problem solution for the strip. The adequacy of the mathematical model of the coating is verified by a series of numerical experiments in the authors' previous studies. The problem solution was carried out by the method of integral transformations. The Mellin transformation allowed reducing the problem to a system of ordinary differential equations of the second order. Its general solution is constructed. To determine the unknown coefficients in the found general solution, a system of linear algebraic equations is obtained. The conjugation condition on the crack location line allowed us to obtain a singular integral equation with a Cauchy kernel, which is characteristic of the problems of stress concentration at the crack ends in the plane formulation. Its numerical solution was carried out, providing the possibility of calculating the values of the normal stress intensity factors at the crack ends. The concept of the indicator of the coating restraining effect is introduced, its behavior for coatings with different parameters is studied, the influence of physical and mechanical characteristics of the coating. We investigated its thickness and stiffness, as well as the crack size, its location relative to the corner point of the area, the angle of opening of the wedge-shaped area on the crack opening. The assessment of how the coatings influence the stress-strain state of sections of products weakened by stress concentration zones contributes to the development of new design approaches to the structural component of products, allowing us to enhance the strength and wear resistance of machine parts and elements of building structures.

## Введение

В современном производстве широко применяется технология нанесения на изделия тонкого гибкого покрывающего слоя, который препятствует негативному воздействию окружающей среды, а также за счет своих высоких механических характеристик позволяет усилить прочность всего изделия. Кроме того, усиление изделий покрытиями препятствует разрушительным воздействиям внутренних дефектов самого изделия.

Наиболее важными с позиции обеспечения прочности являются области концентрации напряжений, в частности, клиновидные области. Изучению плоских задач теории упругости о трещинах в клиновидных областях посвящены публикации как зарубежных, так и отечественных ученых. В частности, в работе [1] рассмотрены задачи о трещине конечной длины, выходящей на вершину клина, а также – полубесконечной внутренней трещине, расположенной на биссектрисе.

Цикл публикаций Б.И. Сметанина [2; 3] посвящен задачам о расклинивании, а также о внутренних трещинах в клине при различных условиях на его гранях.

Значительное количество работ посвящено изучению концентрации напряжений в упругих телах для областей с угловыми точками контура. В работе [4] приведено решение задачи для конуса и клина, в котором использован метод разделения переменных. Выделены, исследованы и решены пять частных задач. Работы Д.А. Пожарского [5; 6] посвящены исследованию пространственных задач теории упругости для клиновидного тела. Рассмотрены случаи эллиптической в плане трещины и полосового разреза. На внешних гранях клина ставятся условия скользящей или жесткой заделки, или отсутствия напряжений.

В работах [7; 8] представлены подходы к нахождению асимптотического решения вблизи угловых точек, исследованы особенности найденных упругих решений. Публикации [9; 10] посвящены исследованию пространственных задач теории упругости о полосовой трещине в составном упругом клине и о периодической цепочке эллиптических трещин, расположенных параллельно ребру клина.

В монографии В.М. Александрова, С.М. Мхитаряна [11] произведен асимптотический анализ точного решения задачи для упругой полосы при условии ее малой относительной толщины, высокой податливости в отношении изгибных деформаций. Эти результаты позволяют, в частности, сформулировать специальные граничные условия, моделирующие влияние тонких гибких покрытий

Исследования [12; 13] изучают и анализируют поведение напряжений в вершинах внутренних трещин с

учетом поверхностных эффектов. Для случая плоских и антиплоских задач подбором необходимых характеристик найдены условия для устранения сингулярности напряжений. В исследовании [14], посвященном изучению анизотропной клинообразной области, построено решение задачи, зависящее от геометрических параметров клина и механических характеристик материала, определен показатель сингулярности напряжений. В статье [15] представлено общее решение для определения порядка сингулярности напряжений в анизотропном клине. Порядок зависит от угла раствора клина, граничных условий и свойств материала. Чтобы уменьшить степень сингулярности напряжений в углу клина, можно определить направление волокна, соответствующее минимальному порядку сингулярности.

Отметим, что, наряду с задачами о трещинах, задачи о включениях и контактные задачи рассматриваются как задачи со смешанными граничными условиями и являются идентичными по применяемым подходам и методам.

В публикациях [16–18] исследован цикл пространственных задач о составном упругом клине. Рассмотрены различные варианты смешанных граничных условий на смежных гранях клиновидных слоев (трещина, включение). Исследованы случаи, когда внешние грани клина свободны от напряжений, находятся в условиях гладкого контакта или зафиксированы жестко. Решение проведено асимптотическим методом с использованием интегральных преобразований. Построены интегральные уравнения. Определено НДС в окрестности границ смены граничных условий. В монографии [19] представлены теоретические основы решения задач статики упругого клина, приведены фундаментальные решения уравнений теории упругости для клиновидной области, исследованы особенности напряженно-деформированного состояния в ее вершине. В работах [20, 21] рассмотрены задачи о пространственной упругой клиновидной области для случая смешанных граничных условий на ее гранях и с учетом сил трения. Одна из граней области контактирует с цепочкой жестких штампов. Представлены интегральные уравнения, решение которых проведено численно. Получены значения вдавливающих сил для различных значений угла раскрытия клиновидной области.

В работе [22] рассмотрена задача о полубесконечной антиплоской интерфейсной трещине, расположенной между двумя функционально-градиентными клиновидными областями. Изучено влияние упругих свойств составляющих на интенсивность напряжений в вершинах трещины и показатель сингулярности в вершине самой структуры. Публикация [23] посвящена решению задачи об антиплоской трещине, выходящей из вершины составного функционально-градиентного клина. Исследовано влияние соотношений геометрических и физических параметров задачи на коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины.

Как известно, контактные задачи механики деформируемого твердого тела, как и задачи теории трещин, относятся задачам со смешанными граничными условиями и по применяемым подходам и методам являются родственными. В связи с этим приведем одну из недавних публикаций В.А. Бабешко [24], в которой построено точное решение статической контактной задачи о действии с трением жесткого клиновидного штампа, занимающего первый квадрант, на слой изотропного композитного материала.

## Постановка задачи. Переход к сингулярному интегральному уравнению

Рассмотрим плоскую задачу об изотропной упругой клиновидной области, стороны которой усилены тонким гибким материалом. В полярной системе координат $(r,\varphi)$ рассматриваемая область определяется неравенствами: $r \ge 0$, $|\varphi| \le \alpha$, где величина $2\alpha$ определяет угол раскрытия клина.

Внутри области, на ее биссектрисе, находится трещина в виде внутреннего разреза длиной $l = b - a$, где $\varphi = 0$, $a \le r \le b$ – место расположения трещины. Действие нормальных сил $p(r)$ на стороны трещины приводит к ее раскрытию. Предполагаем, что на бесконечности при $r \to \infty$ компоненты тензора напряжений и вектора перемещений стремятся к нулю. В работе будет исследовано НДС тела на концах трещины.

Публикации [25; 26] посвящены решению обратной задачи в аналогичной постановке, в них проведен процесс идентификации дефектов изотропных упругих тел, в том числе клиновидной области с покрытием [26], на основе ультразвуковых колебаний и сверточных нейронных сетей. Решение прямой задачи, излагаемое в предлагаемой работе, дополняет и обеспечивает комплексный подход к исследованию, а именно полученные в данной работе результаты позволяют определить критическое состояние рассматриваемого объекта.

Исследуемая в работе область представлена на рис. 1.

Симметрия тела относительно луча $\varphi = 0$ позволяет свести задачу к исследованию половины области: $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le \alpha$.

Обозначим функции раскрытия трещины

$$\gamma(r) = v(r,\varphi)\big|_{\varphi=-0} - v(r,\varphi)\big|_{\varphi=+0}, \ \vartheta(r) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=-0} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=+0},$$

где $u(r,\varphi)$ и $v(r,\varphi)$ – компоненты вектора перемещений: радиальная $u$ и тангенциальная $v$.

Искомое решение удовлетворяет уравнениям равновесия в перемещениях, заданным в полярной системе координат:

$$Lu+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{2}{r^2}v'_\varphi=0,$$
$$Lv+\frac{1}{(1-2\mu)r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2}u'_\varphi=0, \quad (1)$$

где $\mu$ – коэффициент Пуассона; $L=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$; $\theta=u'_r+\frac{1}{r}(u+v'_\varphi)$.

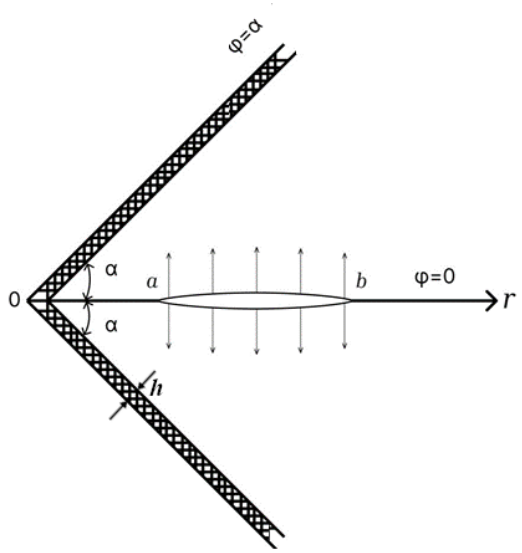



Рис. 1. Плоская клиновидная область со сторонами, усиленными тонким гибким материалом, содержащая конечный разрыв (трещину) на биссектрисе

Fig. 1. A flat wedge-shaped area with sides reinforced with thin flexible material, containing a finite crack on the bisectrix

Компоненты тензора напряжений в полярной системе координат:

$$\sigma_\varphi=2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}u+\frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right),\ \tau_\varphi=2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r}v\right), \quad (2)$$

где $G$ – модуль сдвига.

На берегах трещины и ее продолжении выполняются условия:

$$\text{для}\ \ \varphi=0:\quad \sigma_\varphi=-p(r)\quad \text{при}\quad a\le r\le b,$$
$$v=0\quad \text{при}\ 0\le r<a\ \ \text{и}\ \ r>b. \quad (3)$$

Условия на гранях области:

$$r_{r\varphi}=0,\ r\ge 0; \quad (4)$$

$$\varphi=\alpha:\ \ \sigma_\varphi=0,\ \ 4G_1hu''_r=(1-\mu_1)\tau_{r\varphi}-2\mu_1h\sigma'_\varphi, \quad (5)$$

где $G_1$ – модуль сдвига покрытия; $\mu_1$ – коэффициент Пуассона покрытия; $h$ – толщина покрытия. Предполагаем, что относительная толщина покрытия мала по сравнению с длиной трещины: $h/(b-a)<<1$.

Для формулировки граничного условия (5) использовано асимптотическое представление решения задачи для упругой полосы в предположении ее малой относительной толщины и отсутствии сопротивления на изгиб [11]. Исследование условия (5) для различных соотношений толщины и жесткости покрытия проведено в работе [27].

Применяя преобразование Меллина к (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 2-го порядка:

$$(1+\kappa)(s^2-1)U-(1-\kappa)U''_\varphi-2(s+\kappa)V'_\varphi=0,$$
$$(1-\kappa)(s^2-1)V-(1+\kappa)V''_\varphi+2(s-\kappa)U'_\varphi=0, \quad (6)$$

где $\kappa=3-4\mu$.

Общее решение (6) имеет вид:

$$U=(s+\kappa)\left[c_1sn^++c_2cs^+\right]+(s-1)\left[c_3sn^-+c_4cs^-\right], \quad (7)$$

$$V=-(s-\kappa)\left[c_1cs^+-c_2sn^+\right]-(s-1)\left[c_3cs^--c_4sn^-\right], \quad (8)$$

где $c_i$ – произвольные постоянные, $i=1, 2, 3, 4$;

$sn^+=\sin\left[(s+1)\varphi\right],\quad sn^-=\sin\left[(s-1)\varphi\right],$

$cs^+=\cos\left[(s+1)\varphi\right],\quad cs^-=\cos\left[(s-1)\varphi\right].$

$$\sigma_\varphi=\frac{G}{i\pi}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}A_\sigma s(s-1)r^{-s-1}ds, \quad (9)$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{G}{i\pi}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}A_\tau sr^{-s-1}ds, \quad (10)$$

где

$$A_\sigma=c_1sn^++c_2cs^++c_3sn^-+c_4cs^-,$$
$$A_\tau=(s+1)\left[c_1cs^+-c_2sn^+\right]+(s-1)\left[c_3cs^--c_4sn^-\right].$$

Учитывая (9), (10) в соотношениях (4), (5), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$.

$$\begin{gathered}c_1(1+s)-c_3(1-s)=0,\\ c_1(s-\kappa)-c_3(1-s)=\gamma^*,\\ c_1sn^+_\alpha+c_2cs^+_\alpha+c_3sn^-_\alpha+c_4cs^-_\alpha=0,\\ 2G_1h(s+1)r^{-1}\left((s+\kappa)\left[c_1sn^+_\alpha+c_2cs^+_\alpha\right]+\right.\\ \left.+(s-1)\left[c_3sn^-_\alpha+c_4cs^-_\alpha\right]\right)=\\ =G\left((1-\mu_1)-2\mu_1h(s-1)\right)\times\\ \times\left((s+1)\left[c_1cs^+_\alpha-c_2sn^+_\alpha\right]+(s-1)\left[c_3cs^-_\alpha-c_4sn^-_\alpha\right]\right).\end{gathered} \quad (11)$$

Здесь

$sn^+_\alpha=\sin\left[(s+1)\alpha\right],\quad sn^-_\alpha=\sin\left[(s-1)\alpha\right],$

$cs^+_\alpha=\cos\left[(s+1)\alpha\right],\quad cs^-_\alpha=\cos\left[(s-1)\alpha\right],$

$$\gamma(r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\gamma^{*}(s)r^{-s}ds,$$
$$\gamma^{*}(s)=\int\limits_{0}^{\infty}\gamma(r)r^{s-1}dr. \qquad (12)$$

Решение системы (11) имеет вид:

$$c_1=\frac{\gamma^{*}}{1+\kappa},$$
$$c_2=\frac{-2G(1-\mu_1)\gamma^{*}r}{1+\kappa}A_2,$$
$$c_3=\frac{\gamma^{*}(1+s)}{(1+\kappa)(1-s)}, \qquad (13)$$
$$c_4=\frac{2G(1-\mu_1)\gamma^{*}(1+s)r}{(1+\kappa)(1-s)}A_4.$$

Здесь

$$A_2=\frac{Nm_2}{Dm},$$
$$A_4=\frac{Nm_2}{Dm},$$

$$Dm=Gr(1-\mu_1)(s\sin 2\alpha+\sin 2s\alpha)+8G_1h(1+s)(1-\mu)cs_{\alpha}^{+}cs_{\alpha}^{-},$$

$$Nm_2=(s\sin^2\alpha+\sin^2 s\alpha)+4G_1h(1+s)(1-\mu)sn_{\alpha}^{+}cs_{\alpha}^{-},$$

$$Nm_4=(s\sin^2\alpha-\sin^2 s\alpha)+4G_1h(1+s)(1-\mu)sn_{\alpha}^{-}cs_{\alpha}^{+}.$$

Подставим найденное выражение $\sigma_\varphi$ (9) с уже определенными коэффициентами (13) в условие сопряжения (3), получаем для $a\le r\le b$:

$$\frac{G}{i\pi(1-\mu)}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\gamma^{*}K(s,r)sr^{-s-1}ds=-p(r), \qquad (14)$$

где

$$K(s,r)=\frac{Gr(1-\mu_1)(s^2\sin^2\alpha-\sin^2 s\alpha)+2G_1h(1+s)(1-\mu)(s\sin 2\alpha-\sin 2s\alpha)}{Gr(1-\mu_1)(s\sin 2\alpha+\sin 2s\alpha)+8G_1h(1+s)(1-\mu)cs_{\alpha}^{+}cs_{\alpha}^{-}}. \qquad (15)$$

Подставим (12) в (14):

$$\frac{4G}{i\pi(1+\kappa)}\int\limits_{\alpha}^{b}\frac{\gamma(\rho)}{\rho}d\rho\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}K(s,r)s\frac{\rho^{s}}{r^{s}}ds=-rp(r). \qquad (16)$$

Выполним замену:

$$s=iu,\quad \left(\frac{\rho}{r}\right)^{s}=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{iu}=\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)+i\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right). \qquad (17)$$

После проведенной замены функция $K(s,r)$ переходит в функцию $\tilde{K}(u,r)$.

$$\tilde{K}(u,r)=-\frac{Gr(1-\mu_1)(sh^2u\alpha-u^2\sin^2\alpha)+2iG_1h(1+iu)(1-\mu)(u\sin 2\alpha-sh2ua)}{4G_1h(1+iu)(1-\mu)(\cos 2\alpha+ch2u\alpha)+iGr(1-\mu_1)(u\sin 2\alpha+sh2ua)}. \qquad (18)$$

Представим $\tilde{K}(u,r)=\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)$

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)=-8GG_1hr(1+u^2)(1-\mu)(1-\mu_1)\sin^2\alpha\, sh^2u\alpha\Big/$$
$$\Big/\left(16G_1^2h^2(1-\mu)^2(\cos 2\alpha+ch\,2u\alpha)^2-\right. \qquad (19)$$
$$\left.-\left(4G_1hu(1-\mu)(\cos 2\alpha+ch\,2u\alpha)+Gr(1-\mu_1)(u\sin 2\alpha+sh\,2u\alpha)\right)^2\right).$$

$$\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)=\left(8G_1^2h^2(1-\mu)^2(\cos 2\alpha+ch\,2ua)(u\sin 2\alpha-sh\,2u\alpha)-\right.$$
$$-\left(Gr(\mu_1-1)(sh^2u\alpha-u^2\sin^2\alpha)-2G_1hu(1-\mu)(u\sin 2\alpha-sh\,2u\alpha)\right) \qquad (20)$$
$$\left.\left(4G_1hu(1-\mu)(\cos 2\alpha+ch\,2u\alpha)+Gr(1-\mu_1)(u\sin 2\alpha+sh2u\alpha)\right)\right)\Big/$$
$$\Big/\left(\left(4G_1h(1-\mu)(\cos 2\alpha+ch\,2u\alpha)\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(4G_1h(1-\mu)(\cos 2\alpha+ch\,2u\alpha)\,u+Gr(1-\mu_1)(u\sin 2\alpha+sh\,2u\alpha)\right)^2\right).$$

Далее умножаем

$$\left(\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\right)\left(\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)+i\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)\right).$$

Получаем

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)u-\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)u+$$
$$+i\,u\left(\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)+\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)\right). \qquad (21)$$

Учитывая четность $\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)$ и нечетность $\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)$ по переменной $u$, имеем в (21) нечетную функцию в действительной части выражения, которая при интегрировании по симметричному промежутку приводит к нулевому значению.

Замена (17), приведенные выше рассуждения и четность мнимой части выражения (21) сводят (16) к интегральному уравнению

$$\frac{8G}{\pi(1+\kappa)}\int\limits_{a}^{b}\frac{\gamma(\rho)}{\rho}d\rho\int\limits_{0}^{\infty}\left(\mathrm{Re}(\tilde{K}(u,r))\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)+\right.$$
$$\left.+\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)\right)udu=-rp(r). \qquad (22)$$

Проведем интегрирование

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{\gamma(\rho)}{\rho}d\rho\int\limits_{0}^{\infty}\left(\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)+\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)\right)udu=$$
$$=\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)u\int\limits_{a}^{b}\frac{\gamma(\rho)}{\rho}\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho du+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)u\int\limits_{a}^{b}\frac{\gamma(\rho)}{\rho}\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho du.$$

Интегрируем по частям

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{\gamma(\rho)}{\rho}\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho=\left\|\begin{matrix}\gamma(\rho)=u\\ \frac{1}{\rho}\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)=dv\end{matrix}\right\|= \qquad (23)$$
$$=-\frac{1}{u}\int\limits_{b}^{b}\gamma'(\rho)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho.$$

$$\int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho}\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho = \left\| \begin{matrix} \gamma(\rho)=u \\ \frac{1}{\rho}\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)=dv \end{matrix} \right\| = \\ = \frac{1}{u}\int_b^b \gamma'(\rho)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho. \quad (24)$$

Подставляем выражения (23), (24) в интегральное уравнение (22), получаем

$$\frac{8G}{\pi(1+\kappa)}\int_b^b \gamma'(\rho)\,d\rho\int_0^\infty\left(\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)-\right. \\ \left.-\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)\right)du = -r\rho(r). \quad (25)$$

Проведенный анализ функций $\mathrm{Re}(\tilde{K}(u,r))$ и $\mathrm{Im}(\tilde{K}(u,r))$ при $u\to\infty$ показал, что

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)=O(e^{-2u\alpha}),$$

$$\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)=-1+O(e^{-2u\alpha}),\quad 0\le\alpha\le\pi. \quad (26)$$

$$L(u,r)=\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)- \\ -\left(\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)+1\right)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)+\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right),$$

$$M(u,r)=\mathrm{Re}\left(\tilde{K}(u,r)\right)\cos\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)- \\ -\left(\mathrm{Im}\left(\tilde{K}(u,r)\right)+1\right)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right).$$

Тогда $L(u,r)=M(u,r)+\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)$ и уравнение (25) принимает вид:

$$\int_a^b \gamma'(\rho)\,d\rho\int_0^\infty L(u,r)\,du = -\frac{\pi}{\theta}rp(r), \quad (27)$$

здесь $\theta=\frac{G}{1-\mu}$.

Пусть

$$l(r)=\int_0^\infty L(u,r)\,du \quad (28)$$

Переходим к безразмерным переменным, используя замену переменных

$$r=a\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right),$$

$$\rho=a\exp\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right),$$

$$\lambda=2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}.$$

Получаем

$$\int_{-1}^1 \gamma'\left(a\exp\left(\frac{1+\zeta}{\lambda}\right)\right)l\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)a\exp\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)d\zeta = \\ = -\frac{\pi\lambda}{\theta}a\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)p\left(a\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\right). \quad (29)$$

Вводим замену

$$\varphi(\zeta)=\gamma'\left(\alpha\exp\left(\frac{1+\zeta}{\lambda}\right)\right)\exp\left(\frac{1+\zeta}{\lambda}\right). \quad (30)$$

Уравнение (28) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\zeta)l\left(\frac{\zeta-x}{\lambda}\right)d\zeta=\frac{\pi\lambda}{\theta}\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)p\left(\alpha\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\right), \quad (31)$$

где $|x|\le 1$.

Преобразуем выражение (28) для функции $l(r)$, учитывая значение интеграла,

$$\int_0^\infty \sin(ut)du=\frac{1}{t}\ \ [28].$$

$$l(r)=\int_0^\infty M(u,r)du+\int_0^\infty \sin(ut)du=\int_0^\infty M(u,r)du+\frac{1}{t}. \quad (32)$$

Получаем сингулярное интегральное уравнение задачи:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\zeta)\left[\frac{\lambda}{\zeta-x}+\int_0^\infty M\left(u,\alpha\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\right)du\right]d\zeta = \\ = -\frac{\pi\lambda}{\theta}q(x),\ |x|\le 1, \quad (33)$$

$$q(x)=\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)p\left(\alpha\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\right).$$

Обе части уравнения (33) разделим на $\lambda\neq 0$.

Таким образом, получаем сингулярное интегральное уравнение (СИУ) с ядром Коши:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-x}+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty M\left(u,\alpha\exp\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\right)du\right]d\zeta=-\frac{\pi}{\theta}q(x). \quad (34)$$

Решение СИУ (34) проведено методом коллокаций. Искомая функция $\varphi(\zeta)$ была задана как произведение двух множителей, где первый множитель обеспечивал явное выделение сингулярности, а второй представлял собой линейную комбинацию $T_k(\zeta)$ полиномов Чебышева первого рода. Точками коллокации выбраны корни полиномов Чебышева.

Найденная функция разрыва $\varphi(x)$, позволила найти значение коэффициента интенсивности $K_I$ нормальных напряжений в окрестности вершин трещины:

$$K_I=\pm\lim_{x\to\mp 1\pm 0}\left(\varphi(x)(1\pm x)^{1/2}\right). \quad (35)$$

Выявлена зависимость точности найденного решения между числом точек коллокаций и величиной искусственно введенного безразмерного параметра $\lambda$:

$$\lambda = l/(a+l), \tag{36}$$

характеризующего размер трещины и ее положение относительно вершины клина. Точность решения уменьшается с ростом значения $\lambda$. Проведенные численные эксперименты позволили сделать вывод: решение уравнения (34) с ошибкой до 5 % для $\lambda = 0,75$ обеспечивается не менее чем 10 точками; для $\lambda = 0,55$ требуется не менее 5 точек при той же точности решения.

## Результаты вычислительного эксперимента

Ввиду того что построенное решение зависит от многих параметров задачи, определяющих геометрию сечения и физические свойства материалов, представленные выводы имеют качественно-обобщенное значение.

Для каждого конкретного набора параметров задачи в ходе вычислительного эксперимента рассчитывалась величина $N$, названная индикатором сдерживающего воздействия покрытия, определяемая как отношение коэффициента интенсивности $K_I$ нормальных напряжений в окрестности вершин трещины для модели с покрытием к аналогичному коэффициенту для модели с такими же параметрами, но без покрытия [29]. Значения индикатора на ближней и дальней от угловой точки области вершинах трещины обозначаем соответственно $N(-1)$ и $N(+1)$.

В качестве основного материала во всех исследованных моделях использован чугун, широко применяемый в станкостроении благодаря своим технологическим характеристикам. Для усиления сечения сторон клиновидной области были рассмотрены следующие материалы: алюминий (Al), никель (Ni), хром (Cr), нитрид титана (TiN), карбид вольфрама (WC). Используемые при расчетах механические параметры материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Механические параметры материалов

Table 1

Mechanical parameters of materials

| Название | Обозначение | Коэффициент Пуассона ($\nu$) | Модуль упругости (E), ГПа |
|---|---|---|---|
| Чугун | СЧ | 0,27 | 160 |
| Алюминий | Al | 0,34 | 70 |
| Никель | Ni | 0,28 | 204 |
| Хром | Cr | 0,35 | 288 |
| Нитрид титана | TiN | 0,28 | 361 |
| Карбид вольфрама | WC | 0,26 | 532 |

Относительное расстояние от вершины клиновидной области до трещины определяется безразмерным параметром $\lambda$: $\lambda = l/(a+l)$, где $l = (b-a)/2$ $(a,b)$ – координаты концов трещины, показаны на рис.1). Чем ближе значение $\lambda$ к единице, тем ближе трещина расположена к вершине клина. На рис. 2 представлены результаты расчетов зависимости индикатора сдерживающего воздействия покрытия $N$ от расположения трещины относительно вершины клина. Модуль упругости покрытия $E_1$, характеризующий его жесткость, будем сравнивать с модулем упругости основного материала $E$ исследуемой области. Исследованы покрытия разной жесткости, такие как алюминий (менее жесткий) и никель, хром, нитрид титана, карбид вольфрама и другие (более жесткие). Выявлено, что жесткость покрытия влияет на амплитуду раскрытия трещины. Покрытия с жесткостью меньшей, чем жесткость основного материала исследуемой области, слабо сдерживают раскрытие трещины, толщина таких покрытий не является параметром, препятствующим раскрытию трещины. В частности, непосредственные вычисления показывают, что в случае материала покрытия – алюминий – значения индикатора сдерживания при увеличении толщины покрытия в 10 раз различаются не более чем на 1 %. В случаях более жесткого покрытия его толщина есть параметр, оказывающий воздействие на раскрытие трещины. Чем больше толщина покрытия, тем более выражен сдерживающий эффект. На рис. 3 и 4 показан данный эффект для материала покрытия – хром.

Исследовано влияние угла раствора клиновидной области на индикатор сдерживания, результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 5 и 6. В представленной модели на рис. 5 покрытие – алюминий, его относительная толщина $h/l = 0,04$. На рис. 6 покрытие – карбид вольфрама, его относительная толщина $h/l = 0,01$. Расположение трещины определяется параметром $\lambda$ ($\lambda = 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3$). Значения координат концов трещины для указанных параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2

Координаты концов трещины, соответствующие безразмерному параметр $\lambda$

Table 2

Coordinates of crack ends corresponding to the dimensionless parameter $\lambda$

| $\lambda$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 0,3 | 0,233 | 0,433 |
| 0,4 | 0,150 | 0,350 |
| 0,5 | 0,100 | 0,300 |
| 0,6 | 0,067 | 0,267 |
| 0,7 | 0,043 | 0,243 |

Выявлено, что величина угла раствора клина влияет на процесс раскрытия трещины. Чем меньше угол раствора клина, тем больше покрытие препятствует раскрытию трещины.

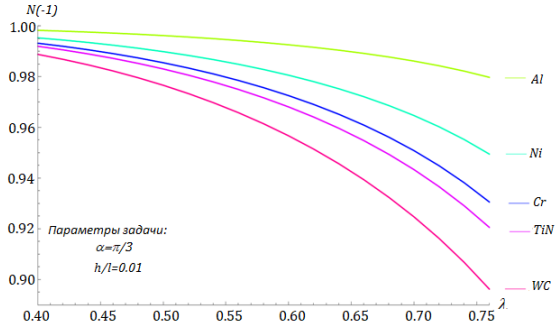



Рис. 2. Влияние положения трещины на значение величины индикатора сдерживающего воздействия покрытия $N(-1)$ для разных случаев материала покрытия, при его относительной толщине $h/l = 0{,}01$ и угле раскрытия клина $\alpha = \pi/3$

Fig. 2. Influence of crack position on the value of the coating impact indicator value $N(-1)$ for different cases of pavement material, its relative thickness $h/l = 0{,}01$ and wedge opening angle $\alpha = \pi/3$

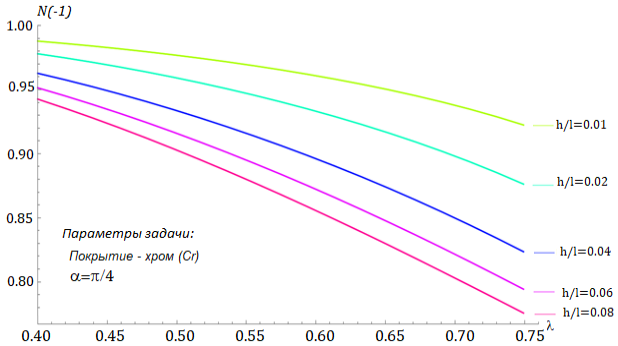



Рис. 3. Влияние положения трещины на значение величины индикатора сдерживающего воздействия покрытия $N(-1)$ для разных случаев относительной толщины покрытия $h/l$. Угол раскрытия клина $\alpha = \pi/4$. Материал покрытия – хром

Fig. 3. Influence of crack position on the value of the coating impact indicator value $N(-1)$ for different cases of relative coating thickness $h/l$. The wedge opening angle $\alpha = \pi/4$. The coating material is chromium

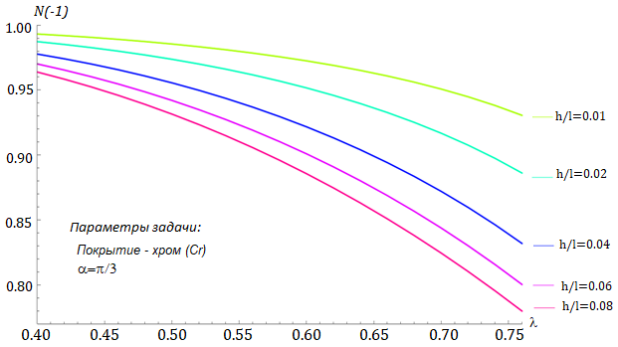



Рис. 4. Влияние положения трещины на значение величины индикатора сдерживающего воздействия покрытия $N(-1)$ для разных случаев относительной толщины покрытия $h/l$. Угол раскрытия клина $\alpha = \pi/3$. Материал покрытия – хром

Fig. 4. Influence of crack position on the value of the coating impact indicator value $N(-1)$ for different cases of relative coating thickness $h/l$. The wedge opening angle $\alpha = \pi/3$. The coating material is chromium

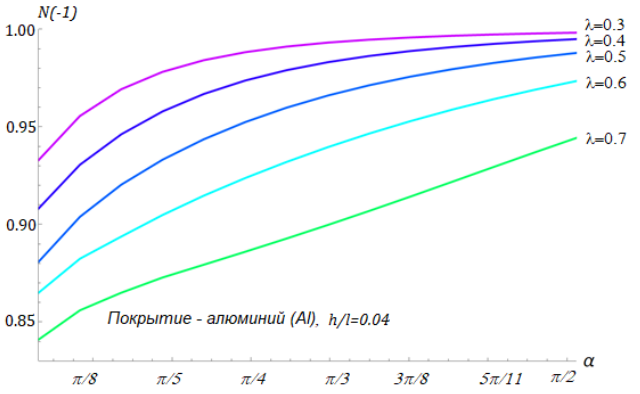



Рис. 5. Влияние угла раствора клина на значение величины индикатора сдерживающего воздействия покрытия $N(-1)$ для разных случаев расположения трещины. Материал покрытия – алюминий, его относительная толщина $h/l = 0{,}04$

Fig. 5. Influence of the wedge solution angle on the value of the coating impact indicator value $N(-1)$ for different crack location cases. The coating material is aluminum, its relative thickness $h/l = 0{,}04$

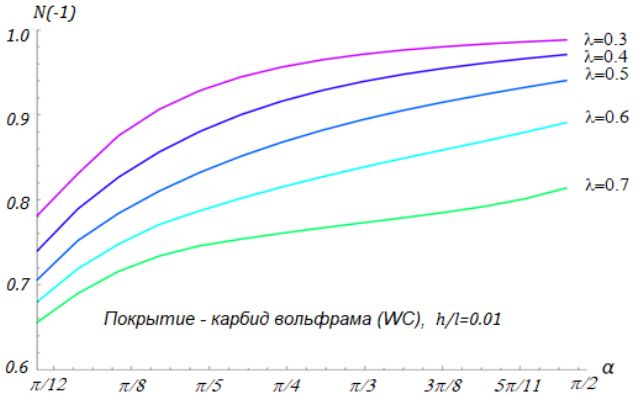



Рис. 6. Влияние угла раствора клина на значение величины индикатора сдерживающего воздействия покрытия $N(-1)$ для разных случаев расположения трещины. Материал покрытия – карбид вольфрама, его относительная толщина $h/l = 0{,}01$

Fig. 6. Influence of the wedge solution angle on the value of the coating impact indicator value $N(-1)$ for different crack location cases. The coating material is tungsten carbide, its relative thickness $h/l = 0{,}01$

В рамках проведенных исследований влияния усиления сторон клиновидной области на раскрытие трещины изучено влияние толщины и жесткости покрытия, удаление трещины от вершины клиновидной области, раскрытие угла клина на поведение индикатора сдерживающего воздействия покрытия. В процессе реализации вычислительного эксперимента исследована относительная толщина покрытия в пределах от 0,01 до 0,10; жесткость материала покрытия варьируется от мягкой – алюминия – до жесткой – карбид вольфрама, по отношению к основному материалу исследуемой области – чугуну.

## Заключение

Результаты исследования позволяют сформулировать следующие выводы:

– сформулированная задача применением метода интегральных преобразований и адекватной математической модели покрытия сведена к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши;

– проведенные вычисления показали, что для жестких покрытий снижение интенсивности напряжений на концах трещины в рассматриваемой задаче обусловлено следующими факторами: увеличение толщины покрытия; уменьшение угла раствора клиновидной области; приближение трещины к вершине клиновидной области. В случаях более мягких покрытий, а также большего удаления трещины от вершины и увеличения угла раствора клиновидной области указанное влияние менее существенно.

В ходе проведенных расчетов был осуществлен переход к частным случаям задачи, а именно: как частные рассмотрены случаи равновесной трещины в клиновидной области без покрытия [3; 29], поперечной трещины в полуплоскости с покрытием [27; 30] и другие. Полученные результаты совпадают или с малыми погрешностями отличаются от известных данных [30; 31], что позволяет судить о достоверности проведенных расчетов.

## Библиографический список


1. Srivastav, R.P. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous loads / R.P. Srivastav, P. Narain // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1965. – Vol. 61, no. 4. – P. 945–954.

2. Сметанин, Б.И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое / Б.И. Сметанин // Инженерный журнал. МТТ. – 1968. – № 2. – С. 115–122.

3. Сметанин, Б.И. О расклинивании упругого бесконечного клина / Б.И. Сметанин // ПММ. – 1969. – Т. 33, вып. 5. – С. 935–940.

4. Партон, В.З. Математические методы теории упругости: в 2 т. / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 674 с.

5. Пожарский, Д.А. Об эллиптической трещине в упругом пространственном клине / Д.А. Пожарский // Изв. РАН. МТТ. – 1993. – № 6. – С. 105–112.

6. Пожарский, Д.А. О пространственной задаче для упругого клина, имеющего полосовой разрез / Д.А. Пожарский // ПММ. – 1994. – Т. 58, вып. 5. – С. 148–153.

7. Каландия, А.И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов / А.И. Каландия // ПММ. – 1969. – Т. 33, вып. 1. – С. 127–131.

8. Белоконь, А.В. Колебания и волны в полуограниченных и ограниченных телах: специальность 01.02.04. «Физические и математические науки»: дис. … д-ра физ.-мат. наук / Александр Владимирович Белоконь. – Ростов-на-Дону, 1987. – 450 с.

9. Пожарский, Д.А. Полосовой разрез в составном упругом клине / Д.А. Пожарский // ПММ. – 2016. – Т. 80, вып. 4. – С. 489–495.

10. Пожарский, Д.А. Периодическая система трещин в упругом клине / Д.А. Пожарский // ПММ. – 2018. – Т. 82, вып. 3. – С. 381-389. DOI: 10.7868/S0032823518030104

11. Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.

12. Kim, C.I. A clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects / C.I. Kim, C.Q. Ru, P. Schiavone // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2013. – Vol. 18, no. 1. – P. 59–66. DOI: 10.1177/108128651143522

13. Analysis of local singular fields near the corner of a quarter-plane with mixed boundary conditions in finite plane elastostatics / C.I. Kim, C.Q. Ru, L.J. Sudak, P. Schiavone // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol. 47, no. 2. – P. 151–155. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.019

14. Munz, D. Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors / D. Munz, Y.Y. Yang // International Journal of Fracture. – 1993. – Vol. 60. – P. 169–177.

15. Chue, C.H. A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge / C.H. Chue, C.I. Liu // The International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 6889–6906. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00015-4

16. Александров, В.М. Задачи о разрезах в составном упругом клине / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // ПММ. – 2009. – Т. 73, вып. 1. – С. 143–149.

17. Александров, В.М. Пространственные контактные задачи с трением для составного упругого клина / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // ПММ. – 2010. – Т. 74, вып. 6. – С. 969–977.

18. Александров, В.М. Пространственная задача о тонком включении в составном упругом клине / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // ПММ. – 2011. – Т. 75, вып. 5. – С. 843–849.

19. Пожарский, Д.А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения: монография / Д.А. Пожарский. – Ростов н/Д.: ДГТУ-Принт, 2019. – 312 с.

20. Пожарская, Е.Д. Периодическая контактная задача для клина с учетом сил трения / Е.Д. Пожарская, Д.А. Пожарский, Б.В. Соболь // Изв. РАН. МТТ. – 2023. – № 5. – С. 170–179. DOI: 10.31857/S0572329923600056

21. Пожарская, Е.Д. Периодическая система жестких включений в пространственном упругом клине / Е.Д. Пожарская // Тенденции развития науки и образования. – 2023. – № 96. – С. 177–180. DOI: 10.18411/trnio-04-2023-501

22. Тихомиров, В.В. Функционально-градиентный клин, ослабленный полубесконечной трещиной / В.В. Тихомиров // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 201–213. DOI: /10.18721/JPM.15315

23. Тихомиров, В.В. Антиплоская трещина, выходящая из вершины составного функционально-градиентного клина / В.В. Тихомиров // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2023. – Т. 16, № 3. – С. 150–159. DOI: /10.18721/JPM.16312

24. О свойствах решения контактных задач с трением для штампа в виде четверти плоскости, контактирующего со слоистым основанием / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов // ПММ. – Т. 89, вып. 1. – 2025. – С. 49–58. DOI: 10.31857/S0032823525010048.

25. Идентификация трещиноподобного дефекта и исследование концентрации напряжений в полосе с покрытием /

Б.В. Соболь, А.Н. Соловьев, Е.В. Рашидова, П.В. Васильев // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 4. – С. 165–174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.16

26. Идентификация дефектов в клине с покрытием на основе методов ультразвукового неразрушающего контроля и сверточных нейронных сетей / Б.В. Соболь, А.Н. Соловьев, П.В. Васильев [и др.] // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 1. – С. 111–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.11

27. Краснощеков, А.А. Равновесное состояние внутренней поперечной трещины в полубесконечном упругом теле с тонким покрытием / А.А. Краснощеков, Б.В. Соболь // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 136–150. DOI: 10.3103/S0025654416010118

28. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

29. Александров, В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболь. – М: Физматлит, 1993. – 224 с.

30. Рашидова, Е.В. Равновесная поперечная внутренняя трещина в составной упругой полуплоскости / Е.В. Рашидова, Б.В. Соболь // ПММ. – 2017. – Т. 81, вып. 3. –С. 348-364. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.016

31. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. / пер. с англ.; под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.

## References

1. Srivastav R.P., Narain P. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous loads. Proc. Camb. Phil. Soc. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1965, Vol. 61, No. 4, pp. 945-954.

2. Smetanin B.I. Nekotorye zadachi o shchelyakh v uprugom kline i sloe [Some problems about slots in an elastic wedge and layer]. Engineering Journal. Mechanics of Solids, 1968, No. 2, pp. 115-122.

3. Smetanin B.I. O rasklinivanii uprugogo beskonechnogo klina [About the wedging of an elastic infinite wedge]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1969, Vol. 33, No. 5, pp. 935-940.

4. Parton V.Z., Perlin P.I. Matematicheskie metody teorii uprugosti. V 2-kh tomakh [Mathematical methods of the theory of elasticity. In 2 volumes]. M : Mir, 1984, 674 p.

5. Pozharskii D.A. Ob ellipticheskoi treshchine v uprugom prostranstvennom kline [Elliptic crack in an elastic three-dimensional wedge]. Mechanics of Solids, 1993, Vol. 28, No. 6, pp. 102-109.

6. Pozharskii D.A. O prostranstvennoi zadache dlya uprugogo klina, imeyushchego polosovoi razrez [A spatial problem for an elastic wedge with a strip cut]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1994, Vol. 58, No. 5, pp. 913-918.

7. Kalandia A.I. Zamechaniya ob osobennosti uprugikh reshenii vblizi uglov [Remarks on the singularity of elastic solutions near the corners]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1969, Vol. 33, No. 1, pp. 127-131.

8. Belokon A.V. Kolebaniya i volny v poluogranichennykh i ogranichennykh telakh: Doktorskaya dissertatsiya: 01.02.04 Fizicheskie i matematicheskie nauki [Fluctuations and waves in semi-constrained and constrained bodies: Cand. ... Dr. Phys.-Math. sciences: 01.02.04]. Rostov-on-Don, 1987, 450 p.

9. Pozharskii D.A. Polosovoi razrez v sostavnom uprugom kline [A strip cut in a composite elastic wedge]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 2016, Vol. 80, No. 4, pp. 345-350. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.09.010.

10. Pozharskii D.A. Periodicheskaya sistema treshchin v uprugom kline [Periodic crack systems in an elastic wedge]. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, Supplement 1, pp. 137-145. DOI: 10.3103/S0025654418030123.

11. Aleksandrov V. M., Mkhitaryan S. M. Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloikami [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]. Moscow : Nauka, 1983, 488 p.

12. Kim C. I., Ru C.Q., Schiavone P. A clarification of the role of crack-tip conditions in linear elasticity with surface effects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2013, Vol. 18, No. 1, pp. 59-66. DOI: 10.1177/1081286511435227.

13. Kim C. I., Ru C.Q., Sudak L. J., Schiavone P. Analysis of local singular fields near the corner of a quarter-plane with mixed boundary conditions in finite plane elastostatics. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 2012, Vol. 47, No. 2, pp. 151-155. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.019.

14. Munz D., Yang Y.Y. Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors. International Journal of Fracture, 1993, Vol. 60, pp. 169-177.

15. Chue C. H., Liu C. I. A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, Vol. 38, pp. 6889-6906. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00015-4.

16. Aleksandrov V.M., Pozharskiy D.A. Zadachi o razrezakh v sostavnom uprugom kline [Problems about cuts in a composite elastic wedge]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 2009, Vol. 73, Issue 1. – pp. 143-149.

17. Aleksandrov V.M., Pozharskiy D.A. Prostranstvennye kontaktnye zadachi s treniem dlya sostavnogo uprugogo klina [Spatial contact problems with friction for a composite elastic wedge]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, Vol. 74, Issue 6, pp. 969 - 977.

18. Aleksandrov V.M., Pozharskiy D.A. Prostranstvennaya zadacha o tonkom vklyuchenii v sostavnom uprugom kline [Spatial problem about a thin inclusion in a composite elastic wedge]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 2011, Vol. 75, Issue 5, pp. 843 - 849.

19. Pozharskiy D.A. Fundamental'nye resheniya statiki uprugogo klina i ikh prilozheniya [Fundamental solutions of the elastic wedge statics and their applications]. Rostov-na-Donu, Don State Technical University – Print, 2019, 312 p.

20. Pozharskaya E.D., Pozharsky D.A., Sobol B.V. Periodicheskaya kontaktnaya zadacha dlya klina s uchetom sil treniya [Periodic contact problem for a wedge taking into account the friction forces]. Mechanics of Solid, 2023, No. 5, pp. 170-179. DOI: 10.3103/S0025654423700218.

21. Pozharskaya E.D. Periodicheskaya sistema zhestkikh vklyuchenii v prostranstvennom uprugom kline [Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge]. Trends of science and education development, 2023, No. 96, pp. 177-180. DOI: 10.18411/trnio-04-2023-501.

22. Tikhomirov V.V. Funktsional'no-gradientnyi klin, oslablennyi polubeskonechnoi treshchinoi [Functionally graded wedge weakened by a semi-infinite crack]/ St. Petersburg State Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics, 2022, Vol. 15, No. 3, pp. 201-213. DOI: /10.18721/JPM.15315.

23. Tikhomirov V.V. Antiploskaya treshchina, vykhodyashchaya iz vershiny sostavnogo funktsional'no-gradientnogo klina [An antiplane crack emerging from the top of a sectional functional gradient wedge]. St. Petersburg State Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics, 2023, Vol. 16, No. 3, pp. 150-159. DOI: /10.18721/JPM.16312.

24. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. O svoystvakh resheniya kontaktnykh zadach s treniem dlya shtampa v vide chetverti ploskosti, kontaktiruyushchego so sloistym osnovaniem [On the properties of the solution of contact problems with friction for a die in the form of a quarter plane in contact with a layered base]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 2025, Vol. 89, No. 1, pp. 49-58. DOI: 10.31857/S0032823525010048.

25. Sobol B.V., Soloviev A.N., Rashidova E.V., Vasiliev P.V. Identifikatsiya treshchinopodobnogo defekta i issledovanie kontsentratsii napryazhenii v polose s pokrytiem [Identification of a crack-like defect and investigation of stress concentration in a coated strip]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, No. 4, pp. 165-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.16.

26. Sobol B.V., Soloviev A.N. , Vasiliev P.V., Senichev A.V., Novikova A.I. Identifikatsiya defektov v kline s pokrytiem na osnove metodov ul'trazvukovogo nerazrushayushchego kontrolya i svertochnykh neironnykh setei [Defects identification in a coated wedge based on the methods of ultrasonic nondestructive testing and convolutional neural networks]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, No. 1, pp. 111-124. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.11.

27. Krasnoshchekov A.A., Sobol B.V. Ravnovesnoe sostoyanie vnutrennei poperechnoi treshchiny v polubeskonechnom uprugom tele s tonkim pokrytiem [Equilibrium state of an internal transverse crack in a semi-infinite elastic body with a thin coating]. *Mechanics of Solids,* 2016, No. 1, pp. 136-150. DOI: 10.3103/S0025654416010118.

28. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series and products]. M.: Fizmatgiz, 1963, 1100 p.

29. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol B.V. Tonkie kontsentratory napryazhenii v uprugikh telakh [Thin stress concentrators in elastic bodies]. M: Fizmatlit, 1993, 224 p.

30. Rashidova E.V., Sobol B.V. Ravnovesnaya poperechnaya vnutrennyaya treshchina v sostavnoi uprugoi poluploskosti [Equilibrium transverse internal crack in a composite elastic half-plane]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, Vol. 81, No. 3, pp. 348-364. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.016.

31. Spravochnik koeffitsientov intensivnosti napryazheniy. V 2 tomakh, Tom 1: Pod redaktsiei Yu. Murakami [Handbook of Stress Intensity Factors. In 2 Volumes, Vol. 1: Per. with English / Edited by Y. Murakami]. M.: Mir, 1990, 448 p.

**Финансирование.** Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00014.
**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
**Вклад авторов равноценен.**

**Funding.** The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-21-00014.
**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.
**The contribution of the authors is equivalent.**