Иванычев, Д.А. Решение второй основной неосесимметричной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения / Д.А. Иванычев. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.03 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 3. – С. 29–41.

Perm Polytech Style: Ivanychev D.A. Solution of the Second Main Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for Anisotropic Bodies of Rotation. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 3, pp. 29-41. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.03
УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Д.А. Иванычев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 23 декабря 2024 г.
Одобрена: 16 июля 2025 г.
Принята к публикации:
30 июля 2025 г.

Ключевые слова:

вторая основная задача, метод граничных состояний, трансверсально-изотропные тела, краевые задачи, пространство состояний, неосесимметричные задачи, циклические задачи.

АННОТАЦИЯ

Представлена математическая модель решения второй основной задачи теории упругости для ограниченных тел вращения из трансверсально-изотропного материала. На поверхность тела наложены неосесимметричные кинематические условия, заданные по циклическому закону.

Методика предполагает развитие энергетического метода граничных состояний, основу которого составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом. Изоморфизм пространств состояний позволяет установить взаимно однозначное соответствие между элементами этих пространств. Во внутреннее состояние входят компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и вектора перемещений. В граничное состояние входят поверхностные усилия и перемещения точек границы тела. Отыскание внутреннего состояния сводится к исследованию изоморфного ему граничного состояния. Базис внутренних состояний редуцируется на основе общего решения краевой задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела, ограниченного коаксиальными поверхностями вращения. Проводится ортогонализация пространств состояний, где в качестве скалярных произведений в пространстве внутренних состояний используется внутренняя энергия упругого деформирования; в пространстве граничных состояний – работа поверхностных сил на перемещениях точек границы тела. Окончательно отыскание искомого состояния сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье.

Представлено решение второй основной задачи с граничными условиями, имитирующими поперечное расширение (без продольного сжатия) для кругового в плане цилиндра из трансверсально-изотропного материала. Решение является аналитическим; характеристики напряженно-деформированного состояния имеют полиномиальный вид. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задачи и графическая визуализация результатов.

© **Иванычев Дмитрий Алексеевич** – к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры общей механики, e-mail: Lsivdmal@mail.ru.

Dmitriy A. Ivanychev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant professor, Associate Professor, Department of General Mechanics, e-mail: Lsivdmal@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

SOLUTION OF THE SECOND MAIN AXISYMMETRIC PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR ANISOTROPIC BODIES OF ROTATION

D.A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 23 December 2024
Approved: 16 July 2025
Accepted for publication:
30 July 2025

Keywords:

second main problem, boundary state method, transversally isotropic bodies, boundary value problems, state space, non-axisymmetric problems, cyclic problems.

ABSTRACT

The paper presents a mathematical model for solving the second main problem of the theory of elasticity for limited bodies of revolution made of a transversally isotropic material. Non-axisymmetric kinematic conditions are imposed on the surface of the body, specified according to the cyclic law of sine and cosine. The technique involves the development of the energy method of boundary states, which is based on the concepts of spaces of internal and boundary states, coupled by isomorphism. Isomorphism of state spaces allows us to establish the one-to-one correspondence between the elements of these spaces. The internal state includes the components of the stress tensor, strain tensor and displacement vector. The boundary state includes surface forces and displacements of the body boundary points. Finding an internal state comes down to studying the boundary state isomorphic to it. The basis of the internal states is reduced on the basis of a general solution to the boundary value problem of elastostatics for a transversely isotropic body limited by coaxial surfaces of revolution. Orthogonalization of state spaces is carried out, where the internal energy of elastic deformation is used as scalar products in the space of internal states; in the space of boundary states, the work of surface forces on the displacements of points on the boundary of the body is used. Finally, finding the desired state comes down to solving an infinite system of linear algebraic equations with respect to the Fourier coefficients.

A solution to the second main problem is presented with boundary conditions simulating transverse expansion (without longitudinal compression) for a circular cylinder made of transversely isotropic large dark gray siltstone. The solution is analytical; the characteristics of the stress-strain state have a polynomial form. Explicit and indirect signs of convergence of the problem solution and graphical visualization of the results are presented.

Современные материалы, применяемые в авиакосмической отрасли, в машиностроении обладают асимметрией упругих свойств для разных направлений, т.е. с точки зрения теории упругости являются анизотропными. Это свойство усложняет расчет их напряженно-деформированного состояния. Кроме того, в процессе работы эти тела пребывают в условиях сложного кинематического взаимодействия с другими телами. Естественно, что условия взаимодействия этих тел не являются симметричными относительно, например, оси вращения цилиндрического тела или какой-либо его поверхности. Исследование напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле, которое носит несимметричный характер, является актуальной научной задачей для анизотропных тел.

В области решения краевых задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел имеется существенный задел. На сегодняшний момент исследуются частные аспекты данных задач для усложненных по геометрии и структуре материалов, например многосвязные, слоистые, нелинейные и др. Например, в работе [1] получены точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных транстропных сфер, находящихся под действием внешнего или внутреннего давления. В работе [2] рассмотрена задача о деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления. Полученные асимптотические формулы позволяют описать поведение слоя с разными жесткостями в трансверсальном и тангенциальном направлениях. В работе [3] с помощью преобразования Фурье решена смешанная краевая задача Дирихле – Неймана для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями. Решение записывается через построенную функцию Грина оператора Лапласа. В работе [4] предлагается подход к определению трехмерного напряженно-деформированного состояния (НДС) многослойного транстропного полупространства в случае воздействия на него нормальной нагрузки. Работа [5] посвящена решению контактной задачи для транстропного полупространства с неизвестной областью контакта. Задача сведена к интегральному уравнению относительно давления в зоне контакта, для решения которого применяется численный метод Галанова. В работе [6] методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости рассмотрены осесимметричные краевые задачи для конической оболочки из неоднородного трансверсально-изотропного материала.

В исследовании [7] представлены доказательства теорем о существовании и единственности решения упругопластической краевой задачи, основанной на теории пластического течения трансверсально-изотропных тел. В работе [8] с использованием прямой формулировки метода граничных состояний были решены краевые задачи трехмерной анизотропной теории упругости, сопровождающиеся числовыми примерами для нескольких типов анизотропии. В работе [9] анализировалось предельное нагружение конструкций, выполненных из трансверсально-изотропных материалов, в условиях кусочно-линейной текучести. В работе [10] исследовалась

трехмерная задача деформирования трансверсально-изотропного слоя, находящегося под действием нормального давления. Получены асимптотические решения для слоя с сильным отличием жесткостей в трансверсальном и тангенциальном направлениях. В работе [11], используя преобразование Фурье, приводится решение пространственной задачи о действии нормальной нагрузки на неограниченное слоистое трансверсально-изотропное основание. Работа [12] посвящена построению уточненной итерационной теории построения напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных балок. Теория описывает как внутреннее состояние, так и краевые эффекты типа пограничного слоя. В работе [13] строится напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропных сферических и эллиптических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления. Построению фундаментального решения уравнений статики для трансверсально-изотропных пластин посвящена работа [14]. Пластины находятся под действием сосредоточенной силы. Исследовано влияние упругих констант на влияние на напряженно-деформированное состояние пластин.

В работе [15] исследовалась динамическая задача для трансверсально-изотропного слоя малой толщины. Получены асимптотические разложения однородных решений, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние при различных значениях частоты вынуждающих нагрузок. Исследованию задачи устойчивости трансверсально-изотропных оболочек под действием динамического давления посвящена работа [16], где строится полная система решений уравнения движения сферической оболочки и определяются формы потери устойчивости, а также частоты собственных колебаний.

На сегодняшний момент для трансверсально-изотропных тел вращения средствами метода граничных состояний решена первая основная задача теории упругости при наличии массовых сил [17]. Решению второй основной задачи при одновременном действии на тело массовых сил посвящена работа [18]. По идентичной методике, что и во второй основной задаче, решены основная смешанная [19] и контактная [20] задачи. Особенность решения данных задач заключатся в том, что полученное упругое поле в каждой задаче является осесимметричным и удовлетворяет одновременно заданным условиям как на поверхности тела, так и внутри области (массовым силам). В области неосесимметричных краевых задач механики решены первая [21; 22] и основная смешанная [23] задачи теории упругости.

Целью данной работы является решение неосесимметричной второй основной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения.

Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного конечного и односвязного тела вращения с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. Требуется определить напряженно-деформированное состояние, возникающее в теле, по заданным на границе перемещениям $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ (рис. 1). Тело занимает область V.

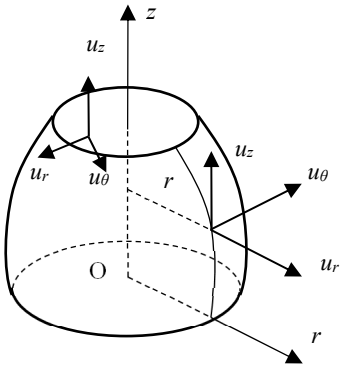


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. The transversely isotropic body of revolution

Перемещения точек границы изменяются по циклическому закону (синуса или косинуса). Объемные силы отсутствуют.

Определяющие соотношения для среды

Решение задачи строится в цилиндрической системе координат r, θ, z. Для однородной трансверсально-изотропной среды имеют место следующие соотношения.

Дифференциальные уравнения равновесия [24]:

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0,$$

Соотношения Коши [24]:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\ \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \qquad (2)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z};\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r};\ \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

Уравнения совместности деформаций [25]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}\right) = 0;$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} = 0;$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\varepsilon_{z\theta})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = 0; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial r}+\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_{z\theta}}{\partial\theta\,\partial z}-\frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zr}}{\partial z}=0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_{zr}}{\partial\theta\,\partial z}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{z\theta}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial\theta}\right)=0;$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial r^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{zr}}{\partial r\,\partial z}=0.$$

Обобщенный закон Гука [26]:

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E_z}\left[\sigma_z-\nu_z(\sigma_r+\sigma_\theta)\right];$$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E_r}(\sigma_r-\nu_r\sigma_\theta)-\frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z; \qquad (4)$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E_r}(\sigma_\theta-\nu_r\sigma_r)-\frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z;$$

$$\gamma_{zr}=\frac{1}{G_z}\tau_{zr};\ \gamma_{z\theta}=\frac{1}{G_z}\tau_{z\theta};\ \gamma_{r\theta}=\frac{1}{G_r}\tau_{r\theta}=\frac{2(1+\nu_r)}{E_r}\tau_{r\theta}.$$

Здесь: u, v, w – компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$ вдоль оси r, θ, z соответственно; ε_r, ε_θ, ε_z, $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$, γ_{zr} – компоненты тензора деформаций; σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$, τ_{zr} – компоненты тензора напряжений; E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z; ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

Метод решения

Для решения задачи используется метод граничных состояний (МГС) [27]. Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,...,\xi_k,...\};\ \Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_k,...\}. \quad (5)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений (индекс k в правой части помещен наверх):

$$\xi_k=\{u_i^k,\varepsilon_{ij}^k,\sigma_{ij}^k\}.$$

Граничное состояние γ_k определяется наборами компонент вектора перемещения точек границы $\mathbf{u}_v=u_{vi}$, поверхностными усилиями $\mathbf{p}_v=p_i$:

$$\gamma_k=\{u_{vi}^k,p_i^k\},\ p_i^k=\sigma_{ij}^k n_j, \qquad (6)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона при отсутствии объемных сил [11], [28]:

$$\int_S \mathbf{p}_v\mathbf{u}_v dS=\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV. \qquad (7)$$

На основе равенства (7), можно назначить скалярные произведения в пространствах состояний. Скалярное произведение в пространстве внутренних состояний выражает внутреннюю энергию упругого деформирования (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояний):

$$(\xi_1,\xi_2)=\int_V(\varepsilon_{ij}^1\sigma_{ij}^2+\varepsilon_{ij}^2\sigma_{ij}^1)dV, \qquad (8)$$

причем в силу коммутативности состояний среды:

$$(\xi_1,\xi_2)=(\xi_2,\xi_1)=\int_V\varepsilon_{ij}^1\sigma_{ij}^2dV=\int_V\varepsilon_{ij}^2\sigma_{ij}^1dV.$$

В пространстве граничных состояний Γ согласно (7) скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела S (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояний):

$$(\gamma_1,\gamma_2)=\int_S p_i^1u_{vi}^2dS.$$

причем в силу тождества Бетти и соотношения Клапейрона: $(\gamma_1,\gamma_2)=(\gamma_2,\gamma_1)$.

В случае гладкой границы и в силу (7) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению, каждому элементу $\xi_k\in\Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k\in\Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k\leftrightarrow\gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

После построения базисов пространств внутренних и граничных состояний, необходимо провести их ортонормирование. Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [29], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (8). Алгоритм основан на процессе Грама – Шмидта, переписанном в форме, использующей лишь перекрестные скалярные произведения элементов исходного базиса, которые сведены в матрицу Грама. Если в процессе ортогонализации на k-м шаге встречается некоторый элемент базиса внутренних состояний ξ_k, алгоритм на этом шаге выдаст «0» (нулевое), если этот элемент является линейной комбинацией элементов ξ_1, …, ξ_{k-1}. Для сохранения ортогональности выходных элементов и для предотвращения деления на ноль при ортонормировании алгоритм делает проверку на нулевые элементы и исключает их. На их место идут следующие элементы исходного базиса внутренних состояний и процесс повторяется.

Ортонормированный базис Γ редуцируется из ортонормированного базиса внутренних состояний, используя выражения (6) и (1).

Окончательно проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомых внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \ ; \ \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k \ ; \ u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k \ ; \ \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k \ ; \ \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k \ . \quad (9)$$

В случае второй основной задачи коэффициенты Фурье представляют собой скалярное произведение:

$$c_k = \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS \ , \quad (10)$$

где $\mathbf{p}_v^j$ – базисные поверхностные усилия в пространстве граничных состояний.

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими перемещениями точек границы тела в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

Формирование базиса

Основную сложность формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [24] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного конечного тела без полостей и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

При установлении зависимости используется следующий прием. Упругое тело, напряженное состояние которого требуется изучить, рассматривается как часть некоторого бесконечного цилиндра с осью η, параллельной образующей цилиндра. С телом связана система координат $r\theta z$. Меридианное сечение тела совпадает с плоскостью поперечного сечения бесконечного цилиндра с осями координат zy (направление $\eta \perp$ плоскости zy, ось z общая для тела и цилиндра). Предполагается, что цилиндр находится в некотором двумерном напряженном состоянии, не меняющимся вдоль образующей. Компоненты этого состояния u_y^{pl}, u_η^{pl}, u_z^{pl}, σ_y^{pl}, σ_z^{pl}, σ_{zy}^{pl}, σ_η^{pl} определяют плоскую деформацию с депланацией сечения цилиндра в плоскости zy. Эти же компоненты определяют напряженное состояние заданного упругого тела, так как оно является частью цилиндра. Для определения пространственного напряженного состояния тела рассматривается ряд цилиндров, отличающихся направлением образующей, или углом поворота относительно оси z. Представляя последовательно тело вырезанным из каждого такого цилиндра при $m \to \infty$ (m – число цилиндров), редуцируется ряд напряженных состояний, суперпозиция которых и дает суммарное трехмерное состояние. В общем случае напряженное состояние каждого цилиндра в процессе поворота изменяется, и трехмерное состояние тела будет неосесимметричным (зависящим от угловой координаты θ). Например, для компоненты вектора перемещения w пространственного состояния имеет место выражение:

$$w = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (u_z{}^{pl})_k \ .$$

Перейдя к пределу при $m \to \infty$, сумма заменяется интегралом. При последующей замене переменой интегрирования окончательно связь между перемещениями неосесимметричной деформации и плоской деформации соответствующего цилиндра имеет вид [24]:

$$u = \sum_{n=a}^{b} [u_n \cos n\theta + u_n \sin n\theta] \ ;$$

$$v = \sum_{n=a}^{b} [-v_n \sin n\theta + v_n \cos n\theta] \ ; \quad (11)$$

$$w = \sum_{n=a}^{b} [w_n \cos n\theta + w_n \sin n\theta] \ ;$$

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta \, d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta \, d\beta \ ;$$

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta \, d\beta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta \, d\beta \ ;$$

$$w_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_z^{pl} \cos n\beta \, d\beta \ ,$$

где a и b – пределы суммирования.

Соответственно для компонент тензора напряжений имеют место следующие выражения:

$$\sigma_z = \sum_{n=a}^{b} [\sigma_z^n \cos n\theta + \sigma_z^n \sin n\theta] \ ;$$

$$\sigma_r = \sum_{n=a}^{b} [\sigma_y^n \cos n\theta + \sigma_y^n \sin n\theta] \ ;$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=a}^{b} [\sigma_\eta^n \cos n\theta + \sigma_\eta^n \sin n\theta] ;$$

$$\sigma_{zr} = \sum_{n=a}^{b} [\sigma_{zy}^n \cos n\theta + \sigma_{zy}^n \sin n\theta] ; \quad (12)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{n=a}^{b} [\sigma_{y\eta}^n \cos n\theta - \sigma_{y\eta}^n \sin n\theta] \ ;$$

$$\sigma_{z\theta} = \sum_{n=a}^{b}[\sigma_{z\eta}^{n}\cos n\theta - \sigma_{z\eta}^{n}\sin n\theta];$$

$$S_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sigma_z^{pl}\cos n\beta\, d\beta;\ S_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sigma_y^{pl}+\sigma_\eta^{pl})\cos n\beta\, d\beta;$$

$$S_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sigma_y^{pl}-\sigma_\eta^{pl}+2\sigma_{y\eta}^{pl})\cos(n-2)\beta\, d\beta;$$

$$S_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sigma_y^{pl}-\sigma_\eta^{pl}-2\sigma_{y\eta}^{pl})\cos(n+2)\beta\, d\beta;$$

$$S_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sigma_{zy}^{pl}+\sigma_{z\eta}^{pl})\cos(n-1)\beta\, d\beta;$$

$$S_6 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sigma_{zy}^{pl}-\sigma_{z\eta}^{pl})\cos(n+1)\beta\, d\beta;$$

$$\sigma_z^n = S_1;\ \sigma_y^n = (2S_2+S_3+S_4)/4;\ \sigma_{zy}^n = (S_5+S_6)/2;$$

$$\sigma_\eta^n = (2S_2+S_3+S_4)/4;\ \sigma_{z\eta}^n = (S_5-S_6)/2;$$

$$\sigma_{y\eta}^n = (S_3-S_4)/4.$$

Здесь компоненты с верхним индексом *pl* соответствуют компонентам плоского вспомогательного состояния.

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация и депланация, возникающие в сечениях цилиндра, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости *zy* (направление $\eta \perp$ плоскости *zy*) [24]:

$$u_y^{pl} = \mathrm{Re}[iq_1\varphi_1(\varsigma_1)+iq_2\varphi_2(\varsigma_2)];$$

$$u_z^{pl} = \mathrm{Re}[p_1\varphi_1(\varsigma_1)+p_2\varphi_2(\varsigma_2)];$$

$$\sigma_z^{pl} = -\mathrm{Re}[\gamma_1^2\varphi_1'(\varsigma_1)+\gamma_2^2\varphi_2'(\varsigma_2)];$$

$$\sigma_y^{pl} = \mathrm{Re}[\varphi_1'(\varsigma_1)+\varphi_2'(\varsigma_2)]; \qquad (13)$$

$$\sigma_{zy}^{pl} = -\mathrm{Re}[\gamma_1\varphi_1'(\varsigma_1)+\gamma_2\varphi_2'(\varsigma_2)];$$

$$\sigma_{z\eta}^{pl} = \mathrm{Re}[i\gamma_3\varphi_3(\varsigma_3)];\ \sigma_{y\eta}^{pl} = -\mathrm{Re}[\varphi_3(\varsigma_3)];$$

$$\sigma_\eta^{pl} = \nu_r\sigma_y^{pl} + \nu_z\frac{E_r}{E_z}\sigma_z^{pl},$$

где константы q_i, p_i и γ_3 определены упругими параметрами материала; $\varsigma_j = z/\gamma_j + iy$; γ_1 и γ_2 – комплексные корни характеристического уравнения [9]; функции $\varphi_j(\varsigma_j)$ – аналитические по своим переменным.

Придавая функциям $\varphi_j(\varsigma_j)$ поочередно значения:

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\varsigma_1)\\ \varphi_2(\varsigma_2)\\ \varphi_3(\varsigma_3)\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}\varsigma_1^m\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\varsigma_2^m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\varsigma_3^m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\varsigma_1^m\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\varsigma_2^m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\varsigma_3^m\end{pmatrix},\ldots\right\},\ m\in N,$$

можно сгенерировать набор плоских вспомогательных состояний (13) и по зависимостям (11) и (12) построить совокупность пространственных состояний, образуя базис пространства внутренних состояний (5).

Решение задач

Рассмотрим упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы – алевролит крупный [28]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи, аналогия которой приведена в работе [30], упругие характеристики материала составили: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$, и цилиндр занимает область $V = \{(z,r)\mid\ 0 \le r \le 1, -1 \le z \le 1\}$.

Область цилиндра и граничные условия представлены на рис. 2.

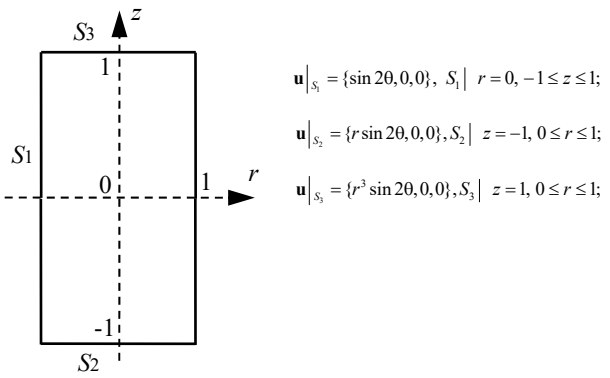


Рис. 2. Граничные условия к задаче для цилиндра

Fig. 2. Boundary conditions to the problem for a cylinder

Особенности формирования базиса в зависимости от вида заданных граничных условий описаны в работах [21; 23].

Базис внутренних состояний формируется из левых частей выражений (11) и (12) с пределами суммирования $a = 2$ и $b = 2$, например, для перемещений:

$$u = \sum_{n=a}^{b}[u_n\cos(n\theta)];\ v = \sum_{n=a}^{b}[-v_n\sin(n\theta)];$$

$$w = \sum_{n=a}^{b}[w_n\cos(n\theta)].$$

После процедуры ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в таблице (показано 6 элементов). В таблице истинное значение показанной величины равно показанному значению, умноженному на коэффициент κ.

При решении задачи использовался базис из 71 элемента. Приведем значения для восьми коэффициентов Фурье (10):

$c_1 = 3,7934$; $c_2 = -0,1838$; $c_3 = -0,1478$; $c_4 = -2,0768$;
$c_5 = 4,0221$; $c_6 = -0,3465$; $c_7 = 0,2602$; $c_8 = 0,093$.

На рис. 3 представлен график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

Перемещения ортонормированного базиса ($\kappa = 10^{-3}$)

Displacements of an orthonormal basis ($\kappa = 10^{-3}$)

u	v	w
$131r\sin 2\theta$	$131r\cos 2\theta$	0
$143rz\sin 2\theta$	$143rz\cos 2\theta$	$66r^2\sin 2\theta$
$-178rz\sin 2\theta$	$-178rz\cos 2\theta$	$200r^2\sin 2\theta$
$-(8r+47r^3-132rz^2)\sin$	$-(8r+23r^3-132rz^2)\sin$	$132r^2z\sin 2\theta$
$(11r+6r^3-266rz^2)\sin 2$	$(11r+147r^3-266rz^2)\sin$	$251r^2z\sin 2\theta$
$(185r-52r^3-14rz^2)\sin$	$(185r-225r^3-14rz^2)\sin$	$137r^2z\sin 2\theta$

Искомые характеристики упругого поля определяются по зависимостям (9).

Проверка результата и оценка точности осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными граничными условиями в результате решения (рис. 4). Здесь и далее на графиках заданные (| | | |) и восстановленные (▬▬) ГУ изображены в масштабе: истинное значение величины равно указанному значению на графике, умноженному на коэффициент κ. С целью визуального выявления максимальной погрешности угол θ выбран таким образом, чтобы тригонометрические функции имели максимальные значения.

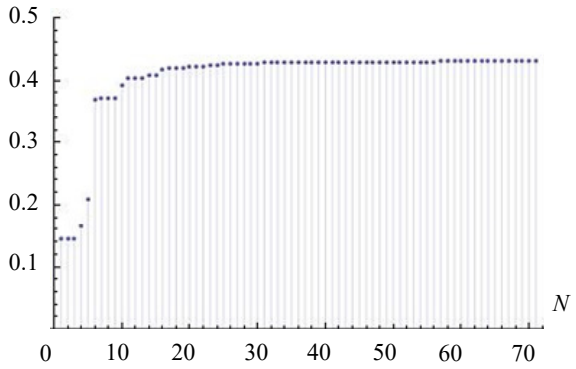


Рис. 3. Сумма Бесселя

Fig. 3. Bessel sum

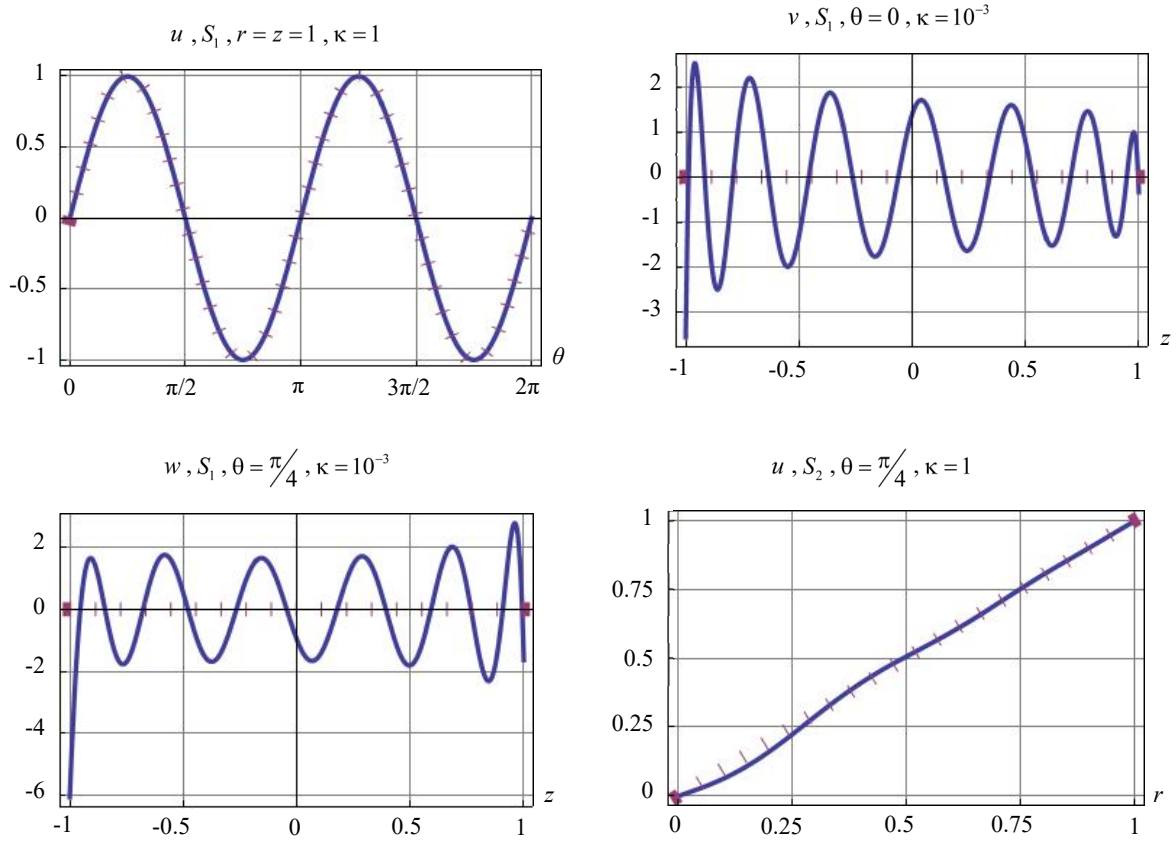


Рис. 4. Верификация граничных условий на участках поверхности

Fig. 4. Verification of boundary conditions on surface areas

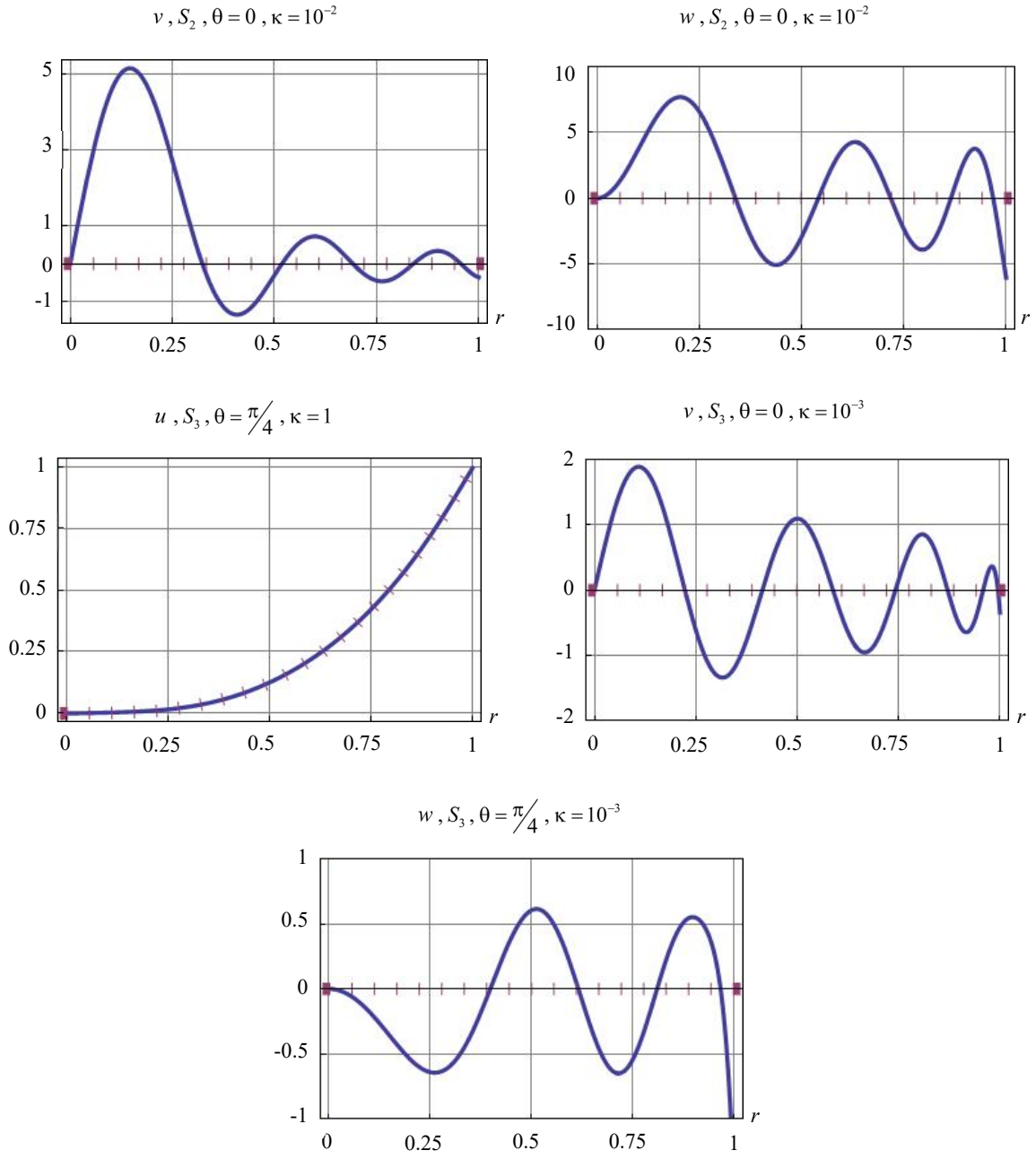


Рис. 4. Окончание

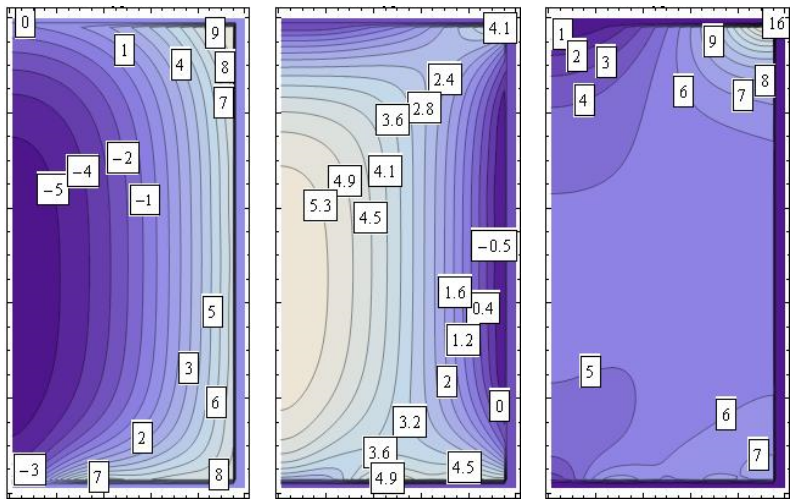
Fig. 4. The end

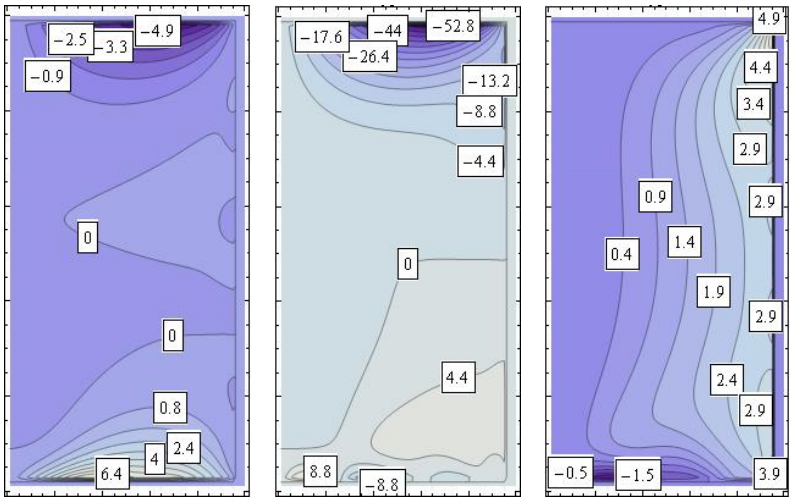
Характеристики полученного напряженно-деформированного состояния представлены в виде изолиний на рис. 5 (в явном виде необозримы). Истинное значение показанной величины равно соответствующему значению на изолиниях, умноженному на коэффициент κ. На изолиниях рис. 5, *a*, показана область $0 \le r \le 1,\ -1 \le z \le 1$. На рис. 5, *b*, показаны изолинии компонент тензора напряжений в зависимости от угловой координаты θ. Приведено сечение $z = 1$.

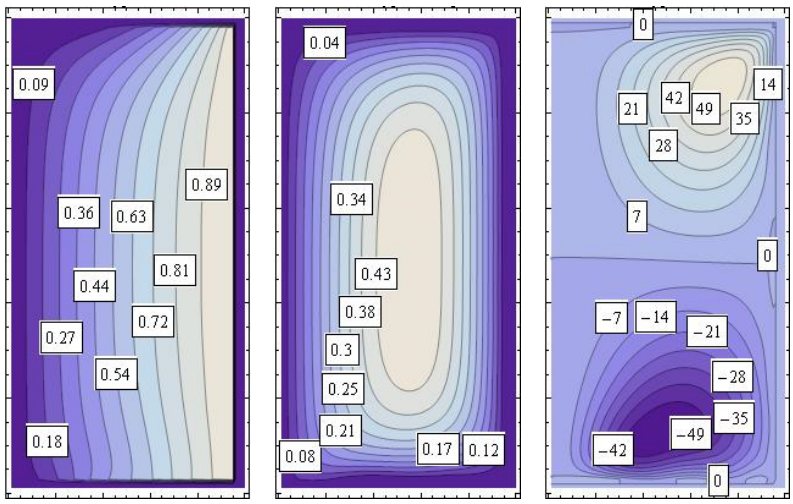
$$\sigma_\theta,\ \theta = \pi/4,\ \kappa = 1,\ \sigma_{r\theta},\ \theta = 0,\ \kappa = 1\ \ \sigma_{rr},$$
$$\theta = \pi/4,\ \kappa = 1$$

Полученные компоненты упругого поля удовлетворяют всем уравнениям теории упругости для трансверсально-изотропного тела (1)–(4).

Таким образом, в работе сформулирована методика решения неосесимметричной второй основной задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения в случае, когда перемещения точек границы заданы по циклическому закону. Методика представляет собой развитие метода граничных состояний, а именно представлен новый способ формирования базиса внутренних состояний, основанный на общем решении задачи о плоской деформации. Исследован прием декомпозиции базиса под условия конкретной задачи.



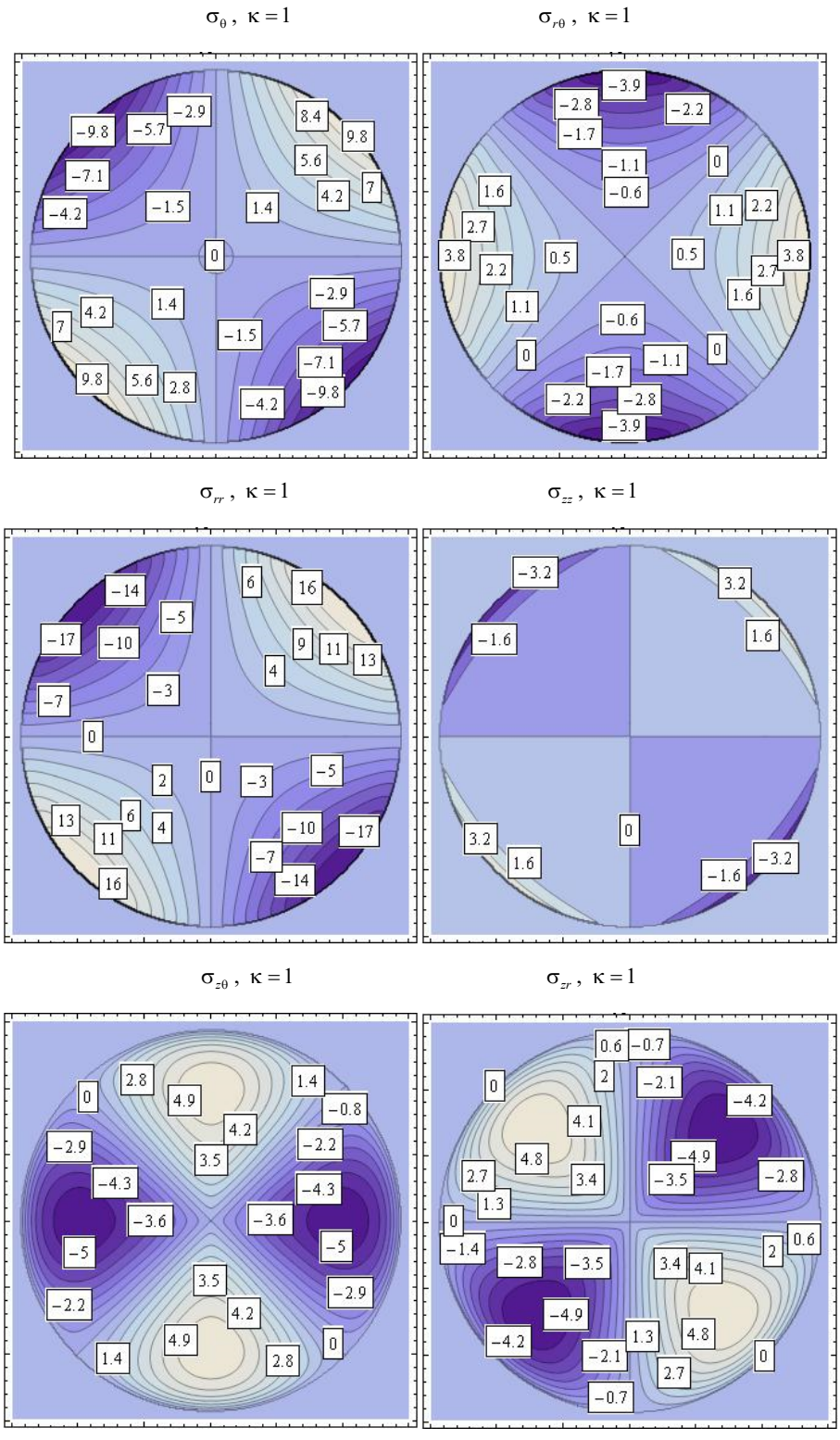




a

Рис. 5. Изолинии компонент полученного упругого поля: *a* – в меридиональных сечениях цилиндра; *b* – в поперечном сечении цилиндра

Fig. 5. Isolines of the components of the resulting elastic field: *a* – in the meridional sections of the cylinder; *b* – in the cross-section of the cylinder



b

Рис. 5. Окончание

Fig. 5. The end

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных). В случае многосвязных областей представления (15) для комплексных потенциалов будут иными. Скорость сходимости рядов зависит от граничных условий и условий внутри области, а также от геометрии тела.

Решение является аналитическим и имеет полиномиальный вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния.

Библиографический список

1. Фукалов, А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения / А.А. Фукалов, А.В. Кутергин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 25–26.

2. Стружанов, В.В. Осесимметричные деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления / В.В. Стружанов, Д.А. Сагдуллаева // Вестник СПбГУ. – 2015. Сер. 1. – Т. 2(60). – Вып. 3. – С. 426–430.

3. Алгазин, О.Д. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое / О.Д. Алгазин, А.В. Копаев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2015. – № 1. – С. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13

4. Круподеров, А.В. Функции Грина для трансверсально-изотропных оснований / А.В. Круподеров // Вестник БНТУ. – 2011. – № 5. – С. 54–60.

5. Пожарский, Д.А. Трёхмерная контактная задача для трансверсально изотропного тела / Д.А. Пожарский, Д.Б. Давтян // Вестник ДГТУ. – 2013. – № 7/8(75). – С. 22–26. DOI: 10.12737/2016.

6. Ахмедов, Н.К. Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки / Н.К. Ахмедов, М.Ф. Мехтиев, Г.Н. Шахвердиева // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 5–11.

7. Кодиров, А.У. Решение задач для упругопластических трансверсально-изотропных тел / А.У. Кодиров // Бюллетень науки и практики. – 2015. – том. 5. – № 2. – С. 10–13. DOI: 10.33619/2414-2948/39/01.

8. Игумнов Л.А. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости / Л.А. Игумнов, И.П. Марков, В.П. Пазин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – № 1(3). – С. 115–119.

9. Семыкина, Т.Д. Расчет предельных нагрузок для конструкций из трансверсально-изотропных материалов / Т.Д. Семыкина, Л.П. Цуканова // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 233–236.

10. Бауэр, С.М. Осесимметричные деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления / С.М. Бауэр, А.Л. Смирнов // Вестник СПбГУ. – 2015. – Сер. 1. – Т. 2(60). – Вып. 3. – С. 426–430.

11. Круподеров, А.В. Фундаментальные решения для многослойных трансверсально изотропных оснований / А.В. Круподеров // Известия ТулГУ. Науки о земле. – 2011. – Вып. 1. – С. 137–146.

12. Плеханов, А.В. Итерационная теория расчета трансверсально изотропных балок / А.В. Плеханов, М.Д. Бородянский // Вісник ПДАБА. – 2011. – № 10. – С. 11–16.

13. Ермаков, А.М. Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропных сопряженных эллиптических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления / А.М. Ермаков // Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2009. – Сер. 1. – Вып. 3. – С. 110–118.

14. Боков, И.П. Построение фундаментального решения уравнений статики {1,2}-аппроксимации безмоментного напряженного состояния для трансверсально-изотропных пластин / И.П. Боков, Н.С. Бондаренко, Е.А. Стрельникова // Scientific Journal «ScienceRise». – 2016. – №. 8/2(25). – С. 41–48. DOI: 10.15587/2313-8416.2016.76534.

15. Мехтиев, М.Ф. Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально изотропного сферического слоя малой толщины / М.Ф. Мехтиев, Н.К. Ахмедов, С.М. Юсубова // Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки. – 2020. – №. 2. – С. 61–71. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71

16. Платонов, В.В. Устойчивость трансверсально изотропной сферической оболочки под действием динамического нормального давления / В.В. Платонов // Вестник СПбГУ. – 2010. – Сер. 1. – Вып. 3. – С. 105–110.

17. Иванычев, Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения / Д.А. Иванычев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 66. – С. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.

18. Иванычев, Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами / Д.А. Иванычев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 61. – С. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.

19. Ivanychev, D.A. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body / D.A. Ivanychev // Proceedings - 2020 2th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2020. pp. 56–61. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280697.

20. Иванычев, Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами / Д.А. Иванычев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

21. Иванычев, Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения / Д.А. Иванычев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2022. – № 2(101). – С. 4–21. DOI: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21.

22. Simulation of the Stress State of an Anisotropic Body of Revolution Under the Action of a Non-Axisymmetric Load / D.A. Ivanychev, E.Yu. Levina, E.A. Malyavin, A.Yu. Podbolotov // Proceedings – 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2022. – P. 61–66. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973963.

23. Иванычев, Д.А. Решение смешанной неосесимметричной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения / Д.А. Иванычев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 2. – С. 85–97. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.08.

24. Александров, А.Я. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного) / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

25. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

26. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

27. Пеньков, В.Б. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики / В.Б. Пеньков, В.В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2. № 2. – С. 115–137.

28. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

29. Саталкина, Л.В. Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений / Л.В. Саталкина // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. – Липецк: ЛГТУ, 2007. – С. 130–131.

30. Левина, Л.В. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела / Л.В. Левина, О.С. Новикова, В.Б. Пеньков // Вестник ЛГТУ. – 2016. – № 2(28). – С. 16–24.

References

1. Fukalov A.A., Kutergin A.V. Tochnyye analiticheskiye resheniya zadach o ravnovesii uprugikh anizotropnykh tyazhelykh tel s tsentral'noy i osevoy simmetriyey i ikh prilozheniya [Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic heavy bodies with central and axial symmetry and their applications]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no 4(4), pp. 25-26.

2. Struzhanov V.V. Sagdullayeva D.A. Osesimmetrichnyye deformatsii transversal'no-izotropnogo tsilindricheskogo sloya pod deystviyem normal'nogo davleniya [Axisymmetric deformations of a transversely isotropic cylindrical layer under normal pressure]. *Vestnik SPbGU*, 2015, series 1, vol. 2(60), iss. 3, pp. 426-430.

3. Algazin O.D., Kopayev A.V. Resheniye smeshannoy krayevoy zadachi dlya uravneniya Laplasa v mnogomernom beskonechnom sloye [Solution of a mixed boundary value problem for the Laplace equation in a multidimensional infinite layer]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Yestestvennyye nauki*, 2015, no.1, pp. 3-13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13.

4. Krupoderov A.V. Funktsii Grina dlya transversal'no-izotropnykh osnovaniy [Green's functions for transversally isotropic bases]. *Vestnik BNTU*, 2011, no. 5, pp. 54-60.

5. Pozharskiy D.A., Davtyan D.B. Trokhmernaya kontaktnaya zadacha dlya transversal'no izotropnogo tela [Three-dimensional contact problem for a transversally isotropic body]. *Vestnik DGTU*, 2013, № 7/8(75), pp. 22-26. DOI: 10.12737/2016.

6. Akhmedov N.K., Mekhtiyev M.F., Shakhverdiyeva G.N. Analiz osesimmetrichnoy zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnoy transversal'no-izotropnoy konicheskoy obolochki [Analysis of the axisymmetric problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous transversely isotropic conical shell]. *Izvestiya vuzov. Severokavkazskiy region. Yestestvennyye nauki*, 2015, no. 2, pp. 5-11.

7. Kodirov A.U. Resheniye zadach dlya uprugoplasticheskikh transversal'no-izotropnykh tel [Solution of problems for elastic-plastic transversely isotropic bodies]. *Byulleten' nauki i praktiki*, 2015, vol. 5, no 2, pp. 10-13. DOI: 10.33619/2414-2948/39/01.

8. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P. Granichno-elementnoye resheniye krayevykh zadach trekhmernoy anizotropnoy teorii uprugosti [Boundary-element solution of boundary value problems of three-dimensional anisotropic elasticity theory]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2013, no 1(3), pp. 115-119.

9. Semykina T.D., Tsukanova L.P. Raschet predel'nykh nagruzok dlya konstruktsiy iz transversal'no-izotropnykh materialov [Calculation of ultimate loads for structures made of transversely isotropic materials]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, vol. 7, no 4, pp. 233-236.

10. Bauer S.M., Smirnov A.L. Osesimmetrichnyye deformatsii transversal'no-izotropnogo tsilindricheskogo sloya pod deystviyem normal'nogo davleniya [Axisymmetric deformations of a transversely isotropic cylindrical layer under normal pressure]. *Vestnik SPbGU*, 2015, ser. 1, vol. 2(60), iss. 3, pp. 426-430.

11. Krupoderov A.V. Fundamental'nyye resheniya dlya mnogosloynykh transversal'no izotropnykh osnovaniy [Fundamental solutions for multilayer transversely isotropic foundations]. *Izvestiya TulGU. Nauki o zemle*, 2011, iss. 1, pp. 137-146.

12. Plekhanov A.V., Borodyanskiy M.D. Iteratsionnaya teoriya rascheta transversal'no izotropnykh balok [Iterative theory of calculation of transversely isotropic beams]. *Visnik PDABA*, 2011, no. 10, pp. 11-16.

13. Yermakov A.M. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye transversal'no-izotropnykh sopryazhennykh ellipticheskikh obolochek, nakhodyashchikhsya pod deystviyem vnutrennego davleniya [Stress-strain state of transversely isotropic conjugate elliptical shells under internal pressure]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, 2009, ser. 1, iss. 3, pp. 110-118.

14. Bokov I.P., Bondarenko N.S., Strel'nikova Ye.A. Postroyeniye fundamental'nogo resheniya uravneniy statiki {1,2}-approksimatsii bezmomentnogo napryazhennogo sostoyaniya dlya transversal'no-izotropnykh plastin [Construction of a fundamental solution of the static equations of the {1,2}-approximation of the momentless stress state for transversely isotropic plates]. *Scientific Journal «ScienceRise»*, 2016, no. 8/2(25), pp. 41-48. DOI: 10.15587/2313-8416.2016.76534.

15. Mekhtiyev M.F., Akhmedov N.K., Yusubova S.M. Asimptoticheskoye povedeniye resheniya osesimmetrichnoy dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti dlya transversal'no izotropnogo sfericheskogo sloya maloy tolshchiny [Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric dynamic problem of elasticity theory for a transversely isotropic spherical layer of small thickness]. *Izvestiya vuzov. Severokavkazskiy region. Yestestvennyye nauki*, 2020, no. 2, pp. 61-71. DOI: DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71.

16. Platonov V.V. Ustoychivost' transversal'no izotropnoy sfericheskoy obolochki pod deystviyem dinamicheskogo normal'nogo davleniya [Stability of a transversely isotropic spherical shell under dynamic normal pressure]. *Vestnik SPbGU*, 2010, ser. 1, iss. 3, pp. 105-110.

17. Ivanychev D.A. Resheniye neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatic problem for a transversely isotropic body of revolution]. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, no. 66, pp. 96-111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.

18. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The boundary state method in solving the second main problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, no. 61, pp. 45-60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.

19. Ivanychev D.A. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. *Proceedings - 2020 2th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, 2020, pp. 56-61. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280697.

20. Ivanychev D.A. Resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi salami [Solution of the contact problem of elasticity theory for anisotropic

bodies of revolution with mass forces]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 49-62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

21. Ivanychev D.A. Resheniye neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Resheniye neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Yestestvennyye nauki*, 2022, № 2(101), pp. 4-21. DOI: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21.

22. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., MalyavinE.A., Podbolotov A.Yu. Simulation of the Stress State of an Anisotropic Body of Revolution Under the Action of a Non-Axisymmetric Load. *Proceedings - 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, 2022, pp. 61-66. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973963.

23. Ivanychev D.A. Resheniye smeshannoy neosesimmetrichnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya [Solution of a mixed non-axisymmetric problem of elasticity theory for anisotropic bodies of revolution]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, № 2, pp. 85-97. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.08.

24. Aleksandrov A.Ia., Solov'ev Iu.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo) [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. *Moscow, Nauka. Glavnaia redaktsiia fizikomatematicheskoi literatury*, 1978, 464 p.

25. Novatskii V. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Mir*, 1975, p. 872.

26. Lur'ye A.I. Teoriya uprugosti. [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, p. 940.

27. Penkov V.B., Penkov V.V. Metod granichnykh sostoianii dlia resheniia zadach lineinoi mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115-137

28. Lekhnitskii S.G. Teoriia uprugosti anizotropnogo tela [The theory of elasticity of an anisotropic body]. *Moscow, Nauka*, 1977, 416 p.

29. Satalkina L.V. Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyemkosti vychisleniy [Increasing the basis of the state space under severe constraints on the energy intensity of calculations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov LGTU. Lipetsk*: LGTU, 2007, pp. 130-131.

30. Levina L.V., Novikova O.S., Penkov V.B. Polnoparametricheskoye resheniye zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU*, 2016, no. 2(28), pp. 16-24.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора. 100 %.

Funding. The study was not supported by sponsorship.
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution is 100 %.