Быкова, Ю.С. Автомодельный характер полей вблизи вершины разреза в процессе ползучести в условиях аугментации поврежденности / Ю.С. Быкова, Л.В. Степанова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.05 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 3. – С. 54–69.

Perm Polytech Style: Bykova Y.S., Stepanova L.V. Self-Similarity of the Near Crack-Tip Fields under Creep Regime Taking into Account Damage Augmentation. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 3, pp. 54-69. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.05
УДК 539.42

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ РАЗРЕЗА В ПРОЦЕССЕ ПОЛЗУЧЕСТИ В УСЛОВИЯХ АУГМЕНТАЦИИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Ю.С. Быкова, Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 20 января 2025 г.
Одобрена: 21 апреля 2025 г.
Принята к публикации: 30 июля 2025 г.

Ключевые слова:

МКЭ-анализ, автомодельное решение, автомодельная асимптотика сплошности и напряжений у вершины трещины, метод конечных элементов, пользовательская утилита UMAT, модель накопления повреждений Качанова – Работнова.

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена обработке и анализу конечно-элементных (КЭ) расчетов выполненного цикла вычислительных экспериментов, на основании которых выявлен автомодельный характер распределения функции сплошности (поврежденности) и составляющих напряжения в непосредственной близости вершины разреза на третьей стадии ползучести в поврежденной среде. КЭ-расчеты полей вблизи кончика дефекта проведены с использованием междисциплинарной, универсальной конечно-элементной платформы SIMULIA Abaqus с привлечением утилиты UMAT, интегрирующей процесс аугментации повреждений в вычислительный сценарий МКЭ. В работе реализовано компьютерное моделирование одноосного растяжения пластины, ослабленной центральным горизонтальным разрезом в режиме ползучести, в рамках которого в вычислительные алгоритмы включен прирост повреждений, прогрессирующий с времени согласно классической механической модели нарастания повреждений Качанова – Работнова (КР) по степенному закону для различных значений показателей степеней кинетического уравнения и степенного определяющего уравнения с концепцией истинного напряжения в связанной постановке. Исследование и анализ полученных КЭ-полей напряжений и сплошности в окрестности кончика трещины для целого ряда постоянных материала явственно обнаруживает автомодельный характер распределения полей напряжений и поврежденности вблизи кончика дефекта степенного типа. Выявлена структура решения и найдены значения показателей степеней в автомодельной переменной и автомодельном представлении решения, которое можно интерпретировать как промежуточное автомодельное решение второго типа согласно классификации Г.И. Баренблатта. Показано, что полученное свойство автомодельности решения можно трактовать как асимптотику дальнего поля повреждений и напряжений. Также на извлеченных из МКЭ-расчетов зависимостях напряжения от расстояния от кончика разреза, воспроизведенных в двойных логарифмических координатах, наглядно проявляется асимптотическое поведение, отвечающее ближнему полю напряжений, характеризующееся полным отсутствием сингулярности в непосредственной близости вершины разреза.

© **Быкова Юлия Сергеевна** – ст. преподаватель кафедры математического моделирования в механике, e-mail: bykova.yus@ssau.ru.
Степанова Лариса Валентиновна – д. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедры математического моделирования в механике, e-mail: stepanova.lv@ssau.ru.

Yulia S. Bykova – Senior Lecturer, Department of Mathematical Modeling in Mechanics, e-mail: bykova.yus@ssau.ru.
Larisa V. Stepanova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department, Mathematical Modeling in Mechanics, e-mail: stepanova.lv@ssau.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

SELF-SIMILARITY OF THE NEAR CRACK-TIP FIELDS UNDER CREEP REGIME TAKING INTO ACCOUNT DAMAGE AUGMENTATION

Y.S. Bykova, L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 January 2025
Approved: 21 April 2025
Accepted for publication:
30 July 2025

Keywords:

FEM-analysis, self-similar solution, self-similar asymptotics of continuity and stresses at the crack tip, finite element method, UMAT user utility, Kachanov – Rabotnov damage accumulation model.

ABSTRACT

The paper analyzes a series of computer experiments aimed at identifying the self-similar behavior of stresses and continuity (damage) near the crack tip in a steady-state creep mode in a damaged medium. Finite element computations of crack-tip fields under creep regime were carried out using the interdisciplinary, universal finite element platform SIMULIA Abaqus FEA using the UMAT utility, which integrates the process of damage augmentation into the FEM computational scenario. The paper implements computational simulations of uniaxial stretching of a plate weakened by a central horizontal crack in the steady-state creep mode, which includes damage growth that evolves over time according to the mathematical model of damage growth by Kachanov – Rabotnov (KR) according to a power law for various values of exponents of the kinetic equation and the power constitutive equations. The study and analysis of the FE for the crack-tip stress and continuity (integrity) fields for a number of material constants clearly reveal a self-similar behavior of stress and damage fields near the front tip. The structure of the solution is revealed and the values of the exponents in the self-similar variable and the self-similar representation of the solution are found, which can be interpreted as an intermediate self-similar solution of the second type according to the classification of G.I. Barenblatt. It is elucidated that the revealed property of self-similarity of the solution can be interpreted as the intermediate asymptotes of the far field of damage and stress. The obtained figures also clearly show the asymptotes of the near-field stress, characterized by the absence of a singularity in the immediate vicinity of the crack.

Введение. Современные численные методы реализации моделей процессов аккумуляции поврежденности при ползучести в материалах. Обзор

Ползучесть – важное и сложное явление, часто наблюдаемое при анализе разрушения инженерных материалов и компонент, работающих при высоких температурах, включая материалы, используемые в аэрокосмических и авиационных двигателях, конструкциях энергетической промышленности [1–7]. В инженерных и научных исследованиях понимание и прогнозирование явлений ползучести имеют решающее значение для обеспечения безопасности, надежности и срока службы конструкций и материалов [1–7]. Сложность механики ползучести обусловлена разнообразием ее физических основ. Микроструктура и организация материалов, диффузия атомов, дефекты кристаллической решетки, движение дислокаций и многие другие факторы играют важную роль в процессе ползучести. Эти сложные физические процессы приводят к нелинейности и временной зависимости деформации ползучести, что затрудняет создание точных механических моделей и соответствующих им расчетных схем. При описании деформации ползучести принято выделять первую, вторую и третью стадии ползучести. Наряду с этим для учета тесного взаимодействия различных механизмов и их взаимосвязей в последнее время уделяется большое внимание интеракции ползучести и усталости и их влиянию на процессы разрушения. На накопленную деформацию и развитие поврежденности при ползучести в значительной мере оказывают влияние температура, напряжение, время и внешние факторы – окружающая среда. Численное моделирование аугментации повреждений при ползучести в твердых телах создает значительные трудности из-за присущей этим явлениям сложности и зависимости от времени [1–7]. Повреждения при ползучести, характеризующиеся постепенной деформацией материалов под действием постоянного напряжения, особенно важны в инженерных приложениях, где важна долговременная целостность конструкции [1–7]. За последние десятилетия численные методы получили существенное развитие и нашли успешное применение в инженерных задачах [1–7].

Стремительное развитие компьютерных технологий и программного обеспечения значительно расширило применение методов численного моделирования в исследованиях разрушения при ползучести. Начиная с метода конечных элементов (МКЭ), постоянные инновации в различных методах и технологиях численного моделирования позволили исследователям более точно моделировать и прогнозировать сложные процессы разрушения при ползучести [8–18]. Эти достижения значительно снизили затраты на прогнозирование разрушения при ползучести и продолжают совершенствоваться, повышая точность и эффективность моделирования и стимулируя постоянное развитие исследований механизмов и процессов разрушения при ползучести. Компьютерное моделирование, основанное на методе конечных элементов, остается одним из базисных подходов для симуляции роста повреждений [8–18]. Наряду с хорошо разработанными и апробированными подхода-

ми, предлагаются и развиваются принципиально новые приемы вычислений [8; 9]. Например, в [8] предложена усовершенствованная перидинамическая модель для моделирования вязкоупругой деформации и повреждений при ползучести. Ключевые элементы предлагаемой формулировки включают в себя перидинамические конституциональные уравнения зависящей от времени определяющей модели и неявную дискретизацию перидинамических уравнений. Перидинамическое моделирование деформации ползучести и повреждений, в котором векторы плотности сил в уравнениях равновесия перидинамики (ПД) получены путем рассмотрения модели ползучести Лю и Мураками с параметром повреждения, выполнено в [9]. Градиент деформации определяется с помощью дифференциального оператора перидинамики. Граничные условия сцепления и перемещения непосредственно задаются с помощью новой стратегии при решении уравнений равновесия ПД. ПД-форма элементов сцепления позволяет создавать условия сцепления в реальной области «пограничного слоя» без каких-либо нефизических перегибов вблизи границ. Этот подход был проверен для случаев одноосного и двухосного нагружений с учетом деформации ползучести, вызванной постоянными напряжениями при высоких температурах. Авторы показывают [9], что предсказания деформации при ползучести находятся в отличном согласии с экспериментальными данными и аналитическими решениями.

Франкфорт и Мариго [10] усовершенствовали энергетическую теорию разрушения и предложили вариационную модель линейного упругого разрушения, которая разлагает общую энергию конструкции на сумму энергии деформации при деформировании и энергии разрушения при распространении трещины. В ней утверждается, что ранее существовавшие трещины и дефекты в материале будут расширяться под воздействием внешних нагрузок, что приведет к снижению общей энергии системы. На основе этой модели было разработано дополнительное скалярное фазовое поле, вводимое для описания процесса эволюции повреждений в материале через его вариации, что позволило сформировать основу метода фазового поля разрушения (МФП). Реализация дискретного расчета МФП обычно основана на МКЭ, но процесс генерации сетки в традиционном МКЭ является громоздким и часто использует полигональные сетки для дискретизации геометрических структур [11]. Это неизбежно приводит к геометрическим ошибкам, которые снижают точность расчетов напряжений и деформаций при обработке сложных траекторий трещин и детальных геометрических характеристик. Изогеометрический анализ напрямую использует геометрические модели автоматизированного проектирования для анализа и вычислений и позволяет избежать внесения геометрических ошибок и обеспечивая более точное геометрическое представление. Кроме того, МФП может легко удовлетворить требования к непрерывности более высокого порядка, что делает его весьма подходящим для моделирования тонких вариаций геометрии и сложных структур. Исследование [12] обеспечивает формирование и расчетно-экспериментальное обоснование подхода для прогнозирования живучести и долговечности элементов конструкций, базирующегося на принципах допустимой поврежденности и имитационного моделирования. Авторы [12] дополнительно отмечают, что подходы и методы, используемые в исследовании, тесно взаимосвязаны и в значительной степени дополняют друг друга. Несомненной инновационной новизной результатов является комплексный подход к оценке целостности конструкции, который сочетает в себе формулировку определяющих уравнений с функциями повреждения, численное моделирование на основе МКЭ и метода фазового поля разрушения, экспериментальные исследования усталости и роста трещин с прямыми измерениями полей деформаций с использованием метода DIC. Авторы [12] еще раз показывают, что численное моделирование имеет особое значение для практического применения, поскольку устраняет недостатки натурных испытаний конструкций, которые не обладают необходимой статистической надежностью и ограничены для прямых измерений процессов накопления и роста повреждений в процессе эксплуатации.

Одним из быстро развивающихся направлений исследований является учет особенностей совместного влияния циклического нагружения и накопления деформаций ползучести [13; 14]. В [13] предложена модель накопления усталостных повреждений на третьей стадии ползучести, учитывающая и описывающая двустороннее влияние усталостных повреждений и повреждений, аккумулируемых при ползучести в элементах конструкций, работающих в режимах периодического (циклического) нагружения при повышенных температурах. Экспериментально-численная модель на основе выбранного эволюционного закона накопления повреждений Лангеберга [13] при ползучести, скомбинированной с усталостными повреждениями, применена для прогнозирования срока службы однонаправленных ламинатов с произвольными углами ориентации [13]. Следовательно, модель, развитая в [13], учитывает 1) воздействие температуры на прирост поврежденности при ползучести и 2) аккрецию повреждений при ползучести в различных условиях действия циклических нагрузок при повышенных температурах (т.е. при одновременном протекании процессов усталости и ползучести). Обзор современных вычислительных подходов может быть найден в [15], где детально описаны применяемые в самое последнее время численные методы механики разрушения и поврежденности. В этой работе представлено введение в популярные вычислительные модели механики повреждений и механики трещин, а также основные достижения и современное состояние применения вычислительных технологий в инженерии. Однако, несмотря на новейшие вычислительные подходы, обеспечивающие точное численное описание про-

цессов деформирования и разрушения, занявшие доминирующее положение в исследованиях явлениях разрушения на различных масштабных уровнях, классический метод конечных элементов позволяет пролить свет на структуру аналитических решений задач механики разрушения и поврежденности.

В настоящей работе для моделирования и анализа процессов накопления поврежденности применяется пользовательская процедура UMAT конечно-элементного комплекса SIMULIA Abaqus [16–20], встраивающая кинетическое уравнение накопления повреждений и степенной закон ползучести, соединяющий скорость деформации ползучести с истинными напряжениями в деформируемом теле, в вычислительный сценарий МКЭ, что дает возможность численно рассмотреть и оценить два обоюдных процесса: 1) развитие поврежденности и эффекты его влияния на напряженно-деформированное состояние и 2) воздействие эволюции напряженно-деформированного состояния в условиях ползучести на рост повреждений в материале. В целом идея внедрения пользовательских процедур в вычислительную реализацию МКЭ не нова и активно применяется для расчета поля поврежденности у концентраторов напряжений [16–20]. В отличие от подходов, осуществленных в [16–20] и предыдущих работах авторов [21–25], ниже, на основании КЭ-подхода с применением пользовательской утилиты UMAT, выявлен автомодельный характер процесса накопления повреждений. Опираясь на полученное МКЭ-решение, нам удалось обнаружить диапазоны изменения расстояния от вершины дефекта и временные интервалы, на которых справедливо автомодельное представление решения задачи о накоплении поврежденности у вершины трещины в условиях ползучести, подчиняющемся степенному эволюционному уравнению для среды со степенными конституциональными соотношениями.

Компьютерная симуляция процессов аккумуляции повреждений

Процессы накопления повреждений в материале существенно влияют на прочностные характеристики изделия, его ресурс и характер разрушения [1–7]. Чтобы воспроизвести механизмы накопления повреждаемости в условиях высокотемпературной ползучести на стадии проектирования изделия, требуются математические модели аккумуляции повреждений. Континуальная теория поврежденности является популярным и эффективным подходом к описанию накопления повреждений в условиях ползучести материала [27–31]. Несмотря на то что многие коммерческие МКЭ-пакеты имеют значительное количество встроенных моделей материалов, которые могут быть использованы в расчетах, они все еще немного отстают от достижений в области технологий материаловедения. Но благодаря расширенным возможностям такого программного продукта, как Simulia Abaqus, а именно использование пользовательских процедур, все же существует способ учета в расчетах требуемого поведения материала, включая процессы накопления в нем повреждений.

Пользовательские процедуры, или подпрограммы UMAT, представляют собой программный код языка Fortran, описывающий поведение материала. Совместимость созданной пользователем подпрограммы UMAT с остальными библиотеками программного комплекса осуществляется с помощью определения входных и выходных данных. В зависимости от задачи к таким данным можно отнести механические и физические свойства материала (модуль Юнга, коэффициента Пуассона, плотность и т.д.), компоненты тензора напряжений и деформаций, его упругую и пластическую составляющие и др. Полная информация о создании пользовательских процедур приведена в руководстве программного продукта Simulia Abaqus [26]. Таким образом, Abaqus UMATs – это подпрограммы в кодировке Fortran, которые вычисляют определяющие уравнения на каждой итерации. Входные данные для задачи механики включают в себя значения приращения деформации (DSTRAN), суммарные значения деформации в конце предыдущего приращения (STRAN), напряжения при предыдущем значении приращения напряжения и свойства материала (PROPS). Приращения времени определяются в переменной DTIME вместе с текущим значением времени (TIME), а набор переменных состояния передается в виде вектора в STATEV. После вычисления определяющих уравнений ключевыми выходными данными в конце приращения времени являются обновленный вектор напряжений STRESS, согласованная матрица DDSDDE и обновленный вектор переменных состояния STATEV.

В настоящей работе реализовано включение модели Качанова – Работнова, являющейся, с одной стороны, пионерской работой [30; 31] и, с другой стороны, широко используемой в самое последнее время [27–29], в численные алгоритмы МКЭ с помощью пользовательской утилиты UMAT. Исследование полученного многопараметрического МКЭ-решения (вычислений для различных материалов с разными показателями степеней кинетического и определяющего уравнений) и проведенный анализ характера временного поведения напряжений и сплошности вблизи вершины разреза позволили идентифицировать отрезки изменения радиальной координаты и временные интервалы, для которых имеет место автомодельный характер распределения напряжений и поврежденности. В методических целях в следующем параграфе приводятся основные уравнения задачи, анализ размерностей величин, входящих в математическую постановку задачи, и вывод автомодельного представления задачи. В четвертом параграфе приводятся результаты МКЭ-анализа решения задачи об одноосном растяжении пластины с центральным разрезом в условиях ползучести.

Основополагающие соотношения. Анализ размерностей и автомодельное представление решения

Для установления и последующего анализа распределений поврежденности и напряжений вблизи кончика разреза в растягиваемой по нормали к плоскости разреза пластине на стадии установившейся ползучести с учетом аугментации повреждений была избрана ключевая модель КР [30; 31]. Поведение материала под нагрузкой задается конституциональными соотношениями, сформулированными на основе апробированного и вошедшего в вычислительную практику степенного закона Бейли-Нортона:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{kl}}{\psi}, \qquad (1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{kl}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; ψ – параметр сплошности Качанова; $s_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_{pp}\delta_{kl}/3$ – компоненты тензора девиатора напряжений; σ_{kl} – компоненты напряжения; $\sigma_e = \sqrt{3 s_{kl} s_{kl}/2}$ – интенсивность касательных напряжений (второй инвариант тензора напряжений); B, n – постоянные материала, значения которых для современных металлов и сплавов могут быть найдены в [32]. Граничное условие в бесконечно удаленной точке ($r \to \infty$) представляет собой условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона, Райса и Розенгрена (HRR-асимптотикой) [33-35] (с использованием аналогии Хоффа): при условии отсутствия процесса развития повреждений ($\psi = 1$) для всех $n \geq 1$ справедливо следующее представление

$$\sigma_{kl}(r, \varphi, t) \to \left(\frac{C^*}{B I_n r} \right)^{1/(n+1)} \overline{\sigma}_{kl}(\varphi, n), \qquad (2)$$

где C^* – не зависящий от пути инвариантный интеграл теории установившейся ползучести [33–35]; $I_n(n)$ – функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный C^*-интеграл; $\overline{\sigma}_{kl}(\varphi, n)$ – безразмерные функции, зависящие от полярного угла φ и показателя нелинейности материала определяемые решением Хатчинсона, Райса и Розенгрена [33–35], r – расстояние от вершины разреза, t – время. Кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \qquad (3)$$

где A, m – постоянные кинетического уравнения, определяемые экспериментально. Для выяснения возможности введения автомодельной переменной и автомодельного представления решения обращаются к анализу размерностей величин [36–38] и переходят к следующим безразмерным переменным:

$$\hat{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl}/\sigma_B, \ \widehat{\dot{\varepsilon}_{kl}} = \dot{\varepsilon}_{kl}/\dot{\varepsilon}_B, \ \hat{t} = t/T, \ \hat{r} = r/L, \ \widehat{\psi} = \psi, \qquad (4)$$

где σ_B – некоторое характерное значение напряжения, $\dot{\varepsilon}_B$ – некоторое характерное значение скорости деформации ползучести, L – некоторая характерная длина, T – характерное время. Введение безразмерных величин (4) соотношения (1)–(3) принимают вид:

$$\dot{\varepsilon}_B \hat{\dot{\varepsilon}}_{kl} = \frac{3}{2} B \sigma_B^n \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\widehat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{s}_{kl}}{\widehat{\psi}},$$

$$\sigma_B \hat{\sigma}_{kl} \to \left(\frac{C^*}{B I_n L \hat{r}} \right)^{1/(n+1)} \overline{\sigma}_{kl}(\varphi, n), \qquad (5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\widehat{\psi}}{d\hat{t}} \frac{1}{T} = -A \sigma_B^m \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\widehat{\psi}} \right)^m.$$

Следовательно, масштаб $\dot{\varepsilon}_B$ может быть выражен через σ_B посредством равенства: $\dot{\varepsilon}_B = B\sigma_B$, где в силу (5) масштаб σ_B определяется через характерную длину L:

$$\sigma_B = \left(C^* / \left(B I_n L \right) \right)^{1/(n+1)}. \qquad (6)$$

Введенный временной масштаб T, согласно (5), удовлетворяет соотношению:

$$1/T = A \sigma_B^m, \qquad (7)$$

которое с учетом (6) приобретает вид:

$$1/T = A \sigma_B^m = A \left(C^* / \left(B I_n L \right) \right)^{m/(n+1)}. \qquad (8)$$

В соответствии с вышеприведенным анализом размерностей величин безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{kl}$ как функции от введенных безразмерных переменных допускают представление:

$$\hat{\sigma}_{kl} = \Sigma_{kl}\left(r/L, t/T, \varphi, n, m \right) = \\ = \Sigma_{kl}\left(r/L, tA\left(C^* / \left(B I_n L \right) \right)^{m/(n+1)}, \varphi, n, m \right). \qquad (9)$$

Решение (9) не должно зависеть от неизвестного характерного линейного размера L, отсутствующего в постановке задачи. Иначе, можно сказать, принимается предположение, что характерный размер тела много больше длины трещины, т.е. этот параметр стремится к бесконечности, и мы приходим к вырожденной постановке задачи и параметр характерная длина L исключается путем введения автомодельной переменной R [36–38]:

$$R = r / \left[k(n) \left(At \right)^{\frac{n+1}{m}} \right], \quad k(n) = C^* / \left(B I_n \right). \qquad (10)$$

Тогда справедливо автомодельное представление напряжений

$$\sigma_{kl}(r,\varphi,t)=\hat{\sigma}_{kl}\sigma_B=\left(At\right)^{-1/m}\Sigma_{kl}\left(R,\varphi\right). \qquad (11)$$

Граничные условия при $r\to\infty$ также могут быть сформулированы в обобщающей соотношения (2) форме:

$$\sigma_{kl}(r,\varphi,t)\to\widetilde{C}r^{s}\overline{\sigma}_{ij}(\varphi,n). \qquad (12)$$

С учетом введенных безразмерных параметров соотношение (12) приобретает вид:

$$\sigma_{kl}(r,\varphi,t)=\sigma_B\Sigma_{kl}\left(r/L,t/T,\varphi\right)=\widetilde{C}k^{s}t^{-1/m}\overline{\sigma}_{ij}(R,\varphi). \qquad (13)$$

где автомодельная радиальная переменная определяется выражением

$$R=r\left[tA\widetilde{C}^{m}\right]^{1/(sm)},\ k=\left(A\widetilde{C}^{m}\right)^{-1/(sm)},\ k=\left(A\widetilde{C}^{m}\right)^{-1/(sm)}. \qquad (14)$$

В результате получено автомодельное решение, обладающее структурой:

$$\sigma_{kl}(r,\varphi,t)=\left(At\right)^{-1/m}\Sigma_{kl}\left(R,\varphi\right),\quad \psi(r,\varphi,t)=\Psi\left(R,\varphi\right),\quad R=r\left[tA\widetilde{C}^{m}\right]^{1/(sm)}. \qquad (15)$$

В (15) $\Sigma_{kl}\left(R,\varphi\right)$ и $\Psi\left(R,\varphi\right)$ – безразмерные функции от двух безразмерных величин R,φ. Эти функции подлежат определению при решении задач с конкретными граничными условиями.

Вычислительная процедура и результаты

Для численного нахождения и анализа образования, роста и слияния повреждений вблизи вершины разреза в режиме ползучести развита программа UMAT, моделирующая степенные соотношения (1) и (3) в КЭ-вычислениях. Для выполнения КЭ-расчета с созданной пользовательской подпрограммой необходимо идентифицировать ее в SIMULIA Abaqus в расчетной задаче. Для этого создается материал через меню программного комплекса SIMULIA Abaqus *Materials* дерева проекта. Постоянные материалы задаются в меню *Mechanical Constants.* В коде UMAT они описаны в меню ELASTIC PROPERTIES. Во время расчета UMAT вызывается для каждой материальной точки на каждой итерации расчетного временного шага. В рамках вычислительного эксперимента проведено компьютерное КЭ-моделирование одноосного нагружения пластины с центральным разрезом. КЭ-модель пластины имеет размеры 0,1×0,1м. Трещина моделируется разрезом с закругленными вершинами, длина и радиус которых составляют соответственно 10^{-2} м и 10^{-6} м (рис. 1).

КЭ-модель пластины выполнена преимущественно квадратными элементами первого порядка, т.е. элементами, не имеющими промежуточных (срединных) узлов. У вершины трещины в исследуемой зоне сетка структурированная, количество конечных элементов, характерный размер которых равен $2\cdot10^{-4}$ мм, на четверть окружности у закругления выреза равно 18. Построение геометрии модели и КЭ-сетки осуществлялось с максимальным измельчением сетки, исходя из возможностей программного комплекса SIMULIA Abaqus. Вид сетки у вершины дефекта представлен на рис. 2.

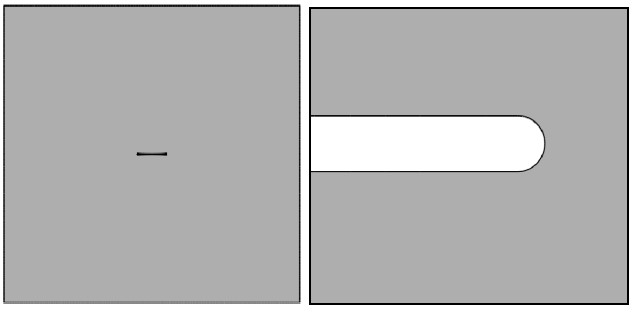


Рис.1. Геометрическое представление пластины с закругленным вырезом в МКЭ-пакете

Fig. 1. Geometry of a plate model with a rounded crack in the FEM platform

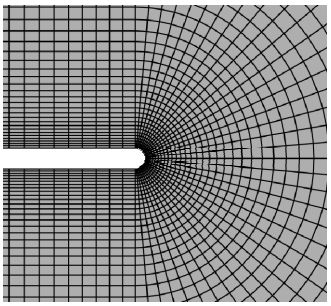


Рис. 2. КЭ-сетка: типичный пример КЭ-разбиения вблизи закругленного выреза

Fig. 2. FEM mesh: standard example of FEM: the structured grid near the rounded notch

Для расчетов были выбраны материалы со значениями материальных констант B и n согласно данным таблицы.

Материальные постоянные

Material constants

n	m	B, $(\text{Н/мм}^2)^{-n}(\text{ч})^{-1}$	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
5	3,5	$2.2\ 10^{-17}$	121000	0,34
7	4,9	$1.9\ 10^{-22}$	121000	0,34
9	6,9	$1.6\ 10^{-27}$	121000	0,34

Валидация результатов, полученных для данной модели, проводилась с помощью сравнения с известным аналитическим решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена [33–35]. Хорошая сходимость позволила использовать данную КЭМ для дальнейшего исследования. Для большого ряда значений материальных постоянных кинетического уравнения (3) и конститу-

циональных уравнений (1) найдены механические поля вблизи закругленного кончика разреза. На рис. 3 представлены результаты расчета с показателем ползучести $n = 7$ и двух моментов времени: 4000 и 10000 ч, а также приведено распределение полей напряжений.

Распределение интенсивности деформаций ползучести представлено на рис. 4.

На рис. 5 изображены картины распределений параметра сплошности (линии равных значений сплошности) для значения показателя степени определяющих соотношений $n = 7$ с течением времени.

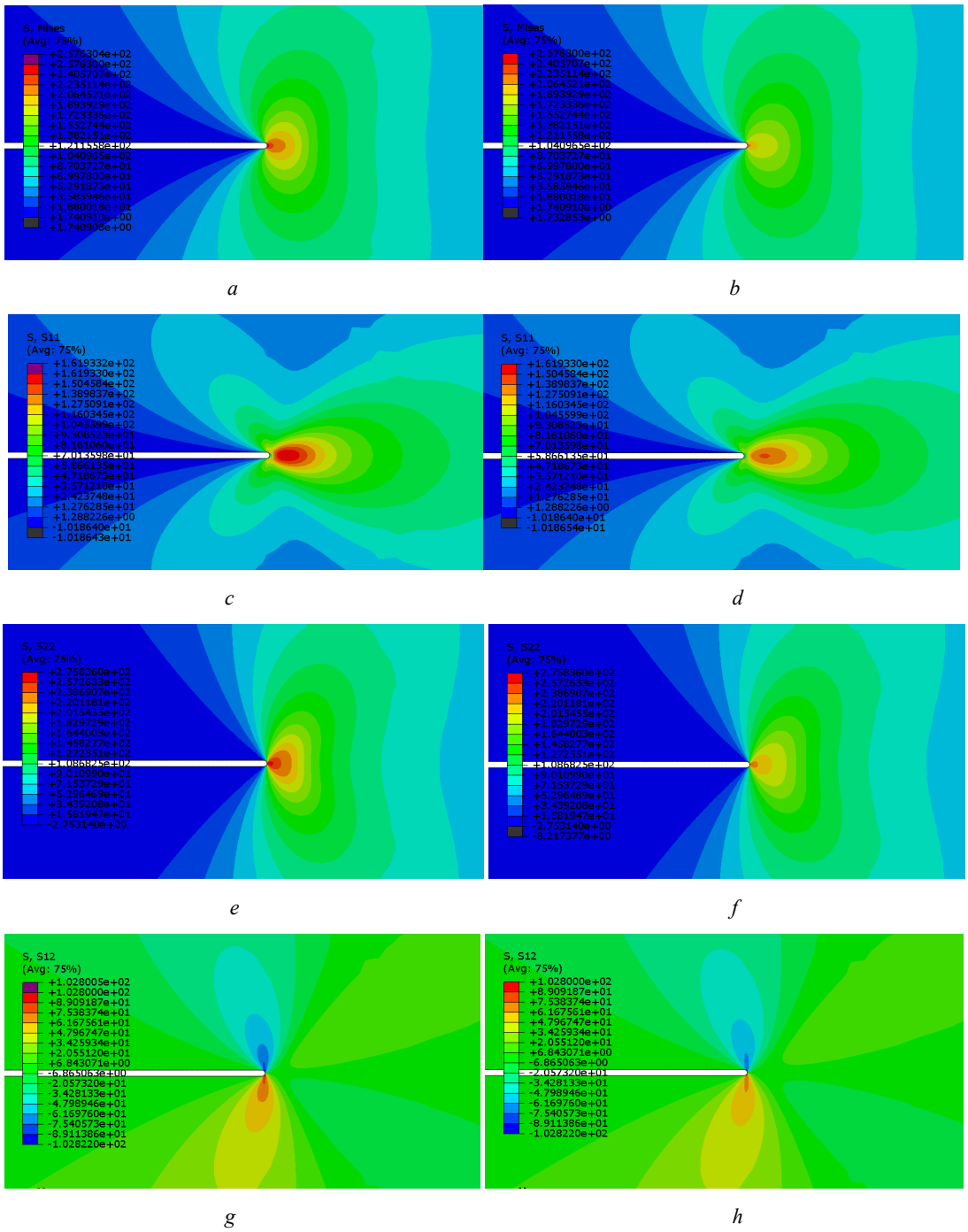
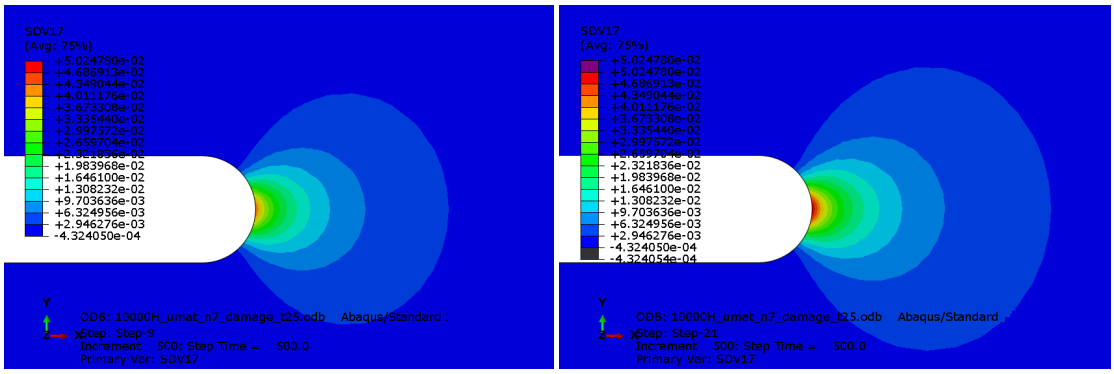


Рис. 3. Распределение поля напряжений: *a* – интенсивность напряжений, 4000 ч; *b* – интенсивность напряжений, 10000 ч; *c* – компонента σ_{11}, 4000 ч; *d* – компонента σ_{11}, 10000 ч; *e* – компонента σ_{22}, 4000 ч; *f* – компонента σ_{22}, 10000 ч; *g* – компонента σ_{12}, 4000 ч; *h* –компонента σ_{12}, 10000 ч

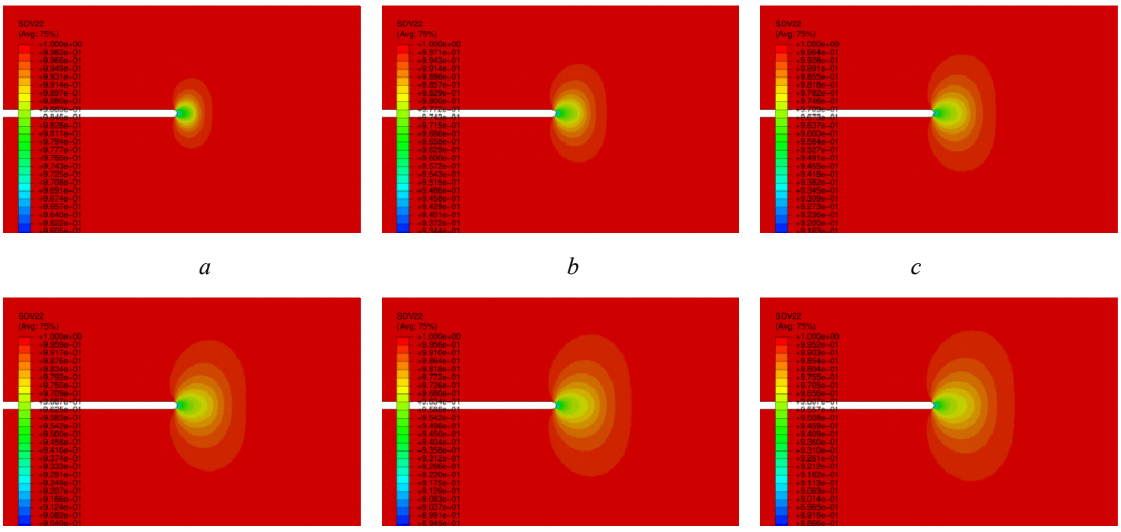
Fig. 3. Stress field distribution: *a* – stress intensity, 4000 h; *b* – stress intensity, 10000 h; *c* – component, 4000 h; *d* – component, 10000 h; *e* – component, 4000 h; *f* – component, 10000 h; *g* – component, 4000 h; *h* – component, 10000 h



a *b*

Рис.4. Распределение интенсивности деформаций ползучести для 4000 ч (*a*) и 10000 ч (*b*)

Fig. 4. Equivalent creep strain distributions for 4000 h (*a*) and 10000 h (*b*)



a *b* *c*

d *e* *g*

Рис. 5. Распределение параметра сплошности у вершины трещины: *a* – 500 ч; *b* – 2000 ч; *c* – 4000 ч; *d* – 6000 ч; *e* – 8000 ч; *g* –10000 ч

Fig. 5. Distribution of the continuity parameter at the crack tip: *a* – 500 h; *b* – 2000 h; *c* – 4000 h; *d* – 6000 h; *e* – 8000 h; *g* –10000 h

Для показателей ползучести $n = 5$ и $n = 9$ были получены аналогичные картины.

Извлеченные из численных КЭ-результатов распределения компоненты тензора напряжений σ_{22} вдоль линии продолжения разреза, соответствующей радиальной траектории $\varphi = 0$, отображены на рис. 6 в двойных логарифмических координатах для различных значений времени для $n = 5$, $n = 7$ и $n = 9$. Анализируя полученные кривые, можно сделать вывод, что в КЭ-расчетах с принятием во внимание процесса накопления повреждений в зоне ползучести наблюдается выход на асимптотическое поведение напряжений: прямые красные линии на графиках (см. рис. 6), аппроксимирующие значения компоненты тензора напряжений σ_{22} для указанных моментов времени. На рис. 6 все кривые совпадают для упругого участка деформирования (см. рис. 6, слева на каждой иллюстрации). На рис. 6 справа показано, что все кривые в области развитой ползучести имеют одинаковый наклон, что отвечает выходу на степенную асимптотику.

Полученные из численного расчета средние значения коэффициента наклона этих прямых равны: для $n = 5$ значение коэффициента наклона $l = -s = 0,4$; для $n = 7$ значение коэффициента наклона $l = -s = -0,33$; для $n = 9$ значение коэффициента наклона $l = -s = 0,3$. Ранее было показано [39; 40], что уравнения задачи (1)–(3) допускают автомодельное представление решения (15) с промежуточной автомодельной переменной (14), где показатель степени s находится из решения краевой задачи. Поэтому дальнейший анализ КЭ-решения был нацелен на определение показателя степени s, а также интервалов изменения радиальной и временной

координат, для которых справедливо представление (14). На рис. 7–9 изображены кривые зависимости компоненты напряжения $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (отнесенного к приложенной растягивающей нагрузке) от автомодельной переменной, показанные в двойных логарифмических координатах. В автомодельных координатах $\Pi_{22}=\sigma_{22}(r,\varphi=0,t)(At)^{1/m}$ и $\Pi_R=R=r\left[tA\widetilde{C}^m\right]^{1/(sm)}$ все расчетные точки ложатся на единую кривую $\Pi_{22}=\Pi_{22}(R,\varphi=0)$.

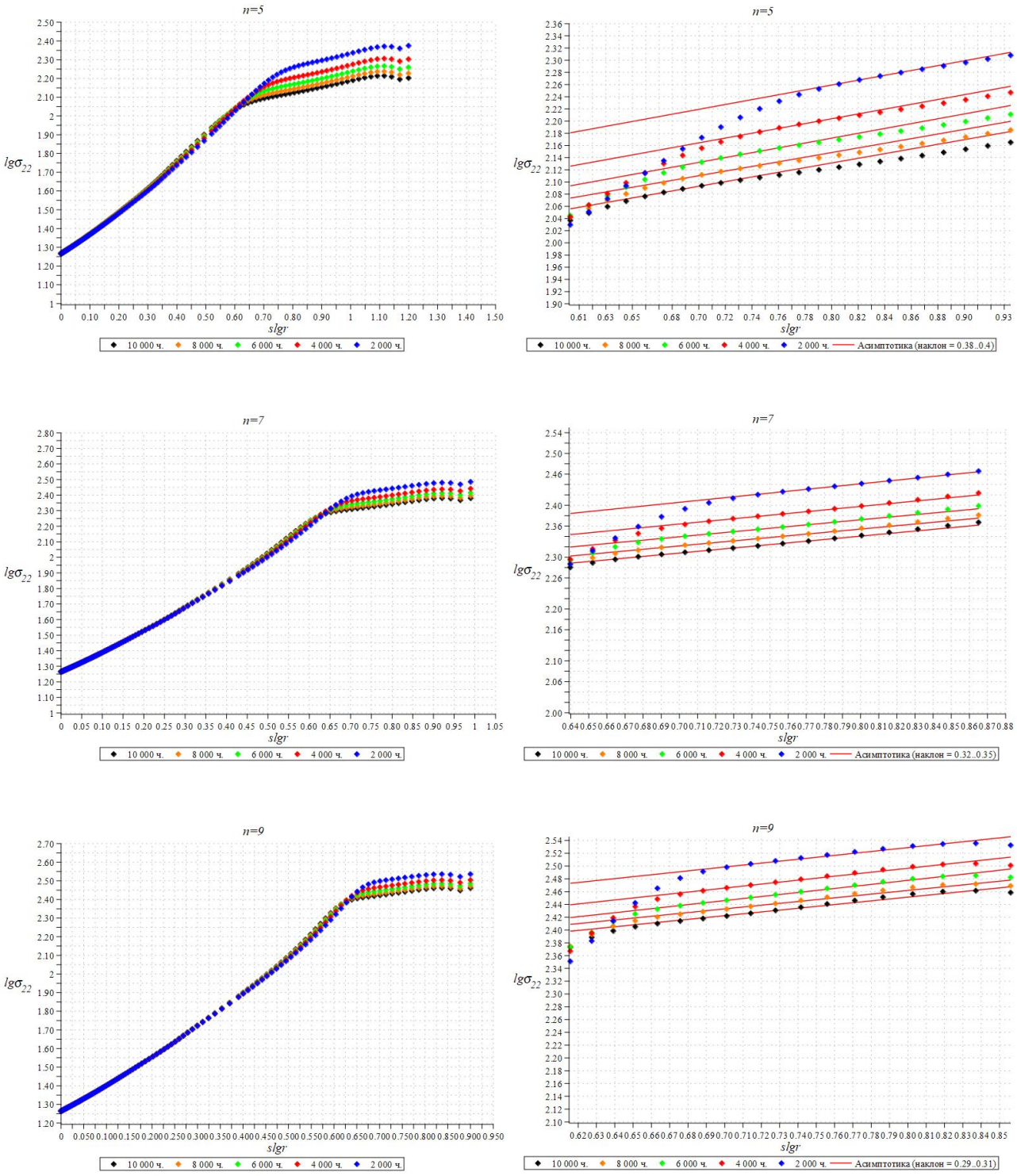


Рис. 6. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} у вершины трещины

Fig. 6. Distribution of the stress tensor component σ_{22} at the crack tip

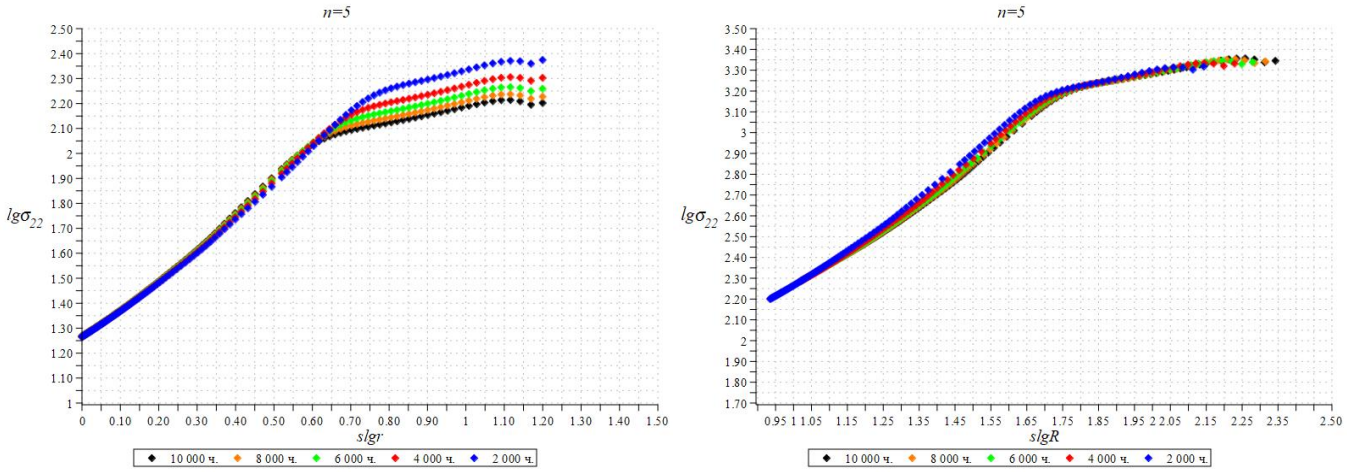


Рис. 7. Нормальная компонента тензора напряжений σ_{22} как функция расстояния от кончика разреза для показателя ползучести $n=5$ в двойных логарифмических координатах: кривые зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (отнесенного к приложенной нагрузке) от расстояния от кончика разреза r для различных времен (слева) и кривая зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{22}\left(R,\varphi=0\right)$ (нормированного в соответствии с формулами (14)) от автомодельной переменной R (справа)

Fig. 7. Normal components of the stress tensor σ_{22} as a function of the distance from the crack tip for the creep index $n=5$ in log-log coordinates: curves of dependence of the dimensionless stress $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (related to the applied load) on the distance from the crack tip r for different times (left) and the curve of dependence of the dimensionless stress $\sigma_{22}\left(R,\varphi=0\right)$ normalized according to the eqn.(14) on the self-similar variable R (the scaled coordinates in accordance with eqn. (14)), (right)

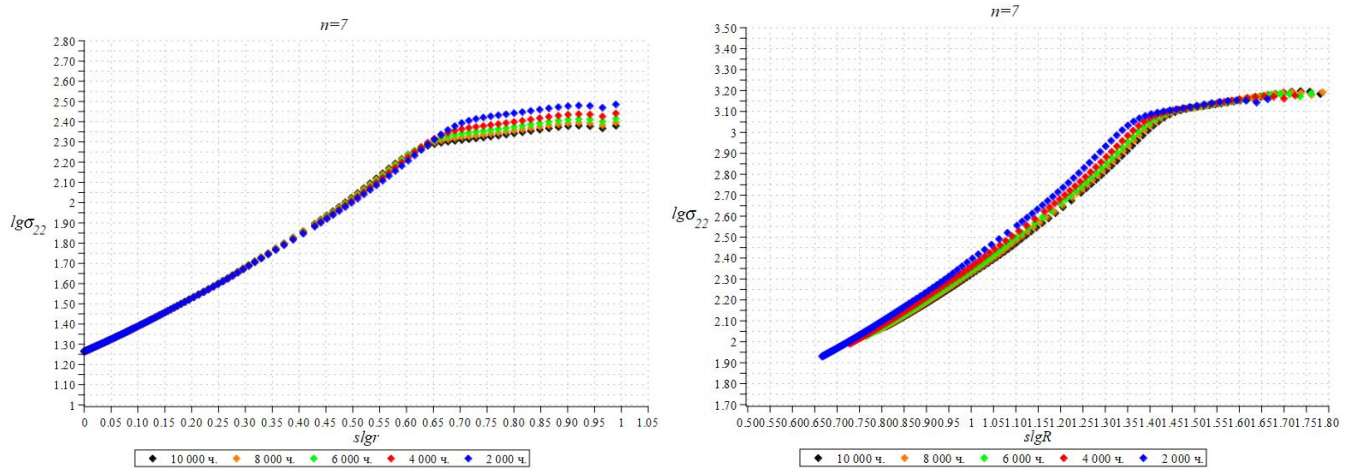


Рис. 8. Нормальная компонента тензора напряжений σ_{22} как функция расстояния от кончика разреза для показателя ползучести $n=7$ в двойных логарифмических координатах: кривые зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (отнесенного к приложенной нагрузке) от расстояния от кончика разреза r для различных времен (слева) и кривая зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{22}\left(R,\varphi=0\right)$ (нормированного в соответствии с формулами (14)) от автомодельной переменной R (справа)

Fig. 8. Normal components of stress tensor σ_{22} as a function of the distance from the crack tip for the creep index $n=7$ in log-log coordinates: curves of dependence of the dimensionless stress $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (related to the applied load) on the distance from the crack tip r for different times (left) and the curve of dependence of the dimensionless stress $\sigma_{22}\left(R,\varphi=0\right)$ normalized according to the eqn.(14) on the self-similar variable R (the scaled coordinates in accordance with eqn. (14)), (right)

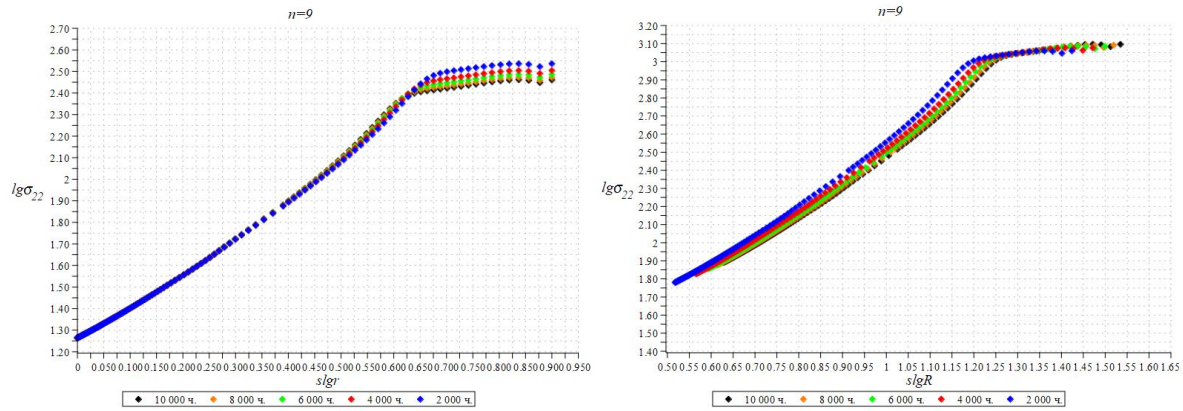


Рис. 9. Нормальная компонента тензора напряжений σ_{22} как функция расстояния от кончика разреза для показателя ползучести $n=9$ в двойных логарифмических координатах: кривые зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (отнесенного к приложенной нагрузке) от расстояния от кончика разреза r для различных времен (слева) и кривая зависимости безразмерного напряжения $\sigma_{22}\left(R,\varphi=0\right)$ (нормированного в соответствии с формулами (14)) от автомодельной переменной R (справа)

Fig. 9. Normal components of the stress tensor σ_{22} as a function of the distance from the crack tip for the creep index $n=9$ in log-log coordinates: curves of dependence of the dimensionless stress $\sigma_{22}(r,\varphi=0)$ (related to the applied load) on the distance from the crack tip r for different times (left) and the curve of dependence of the dimensionless stress $\sigma_{22}\left(R,\varphi=0\right)$ normalized according to the eqn.(14) on the self-similar variable R (the scaled coordinates in accordance with eqn. (14)), (right)

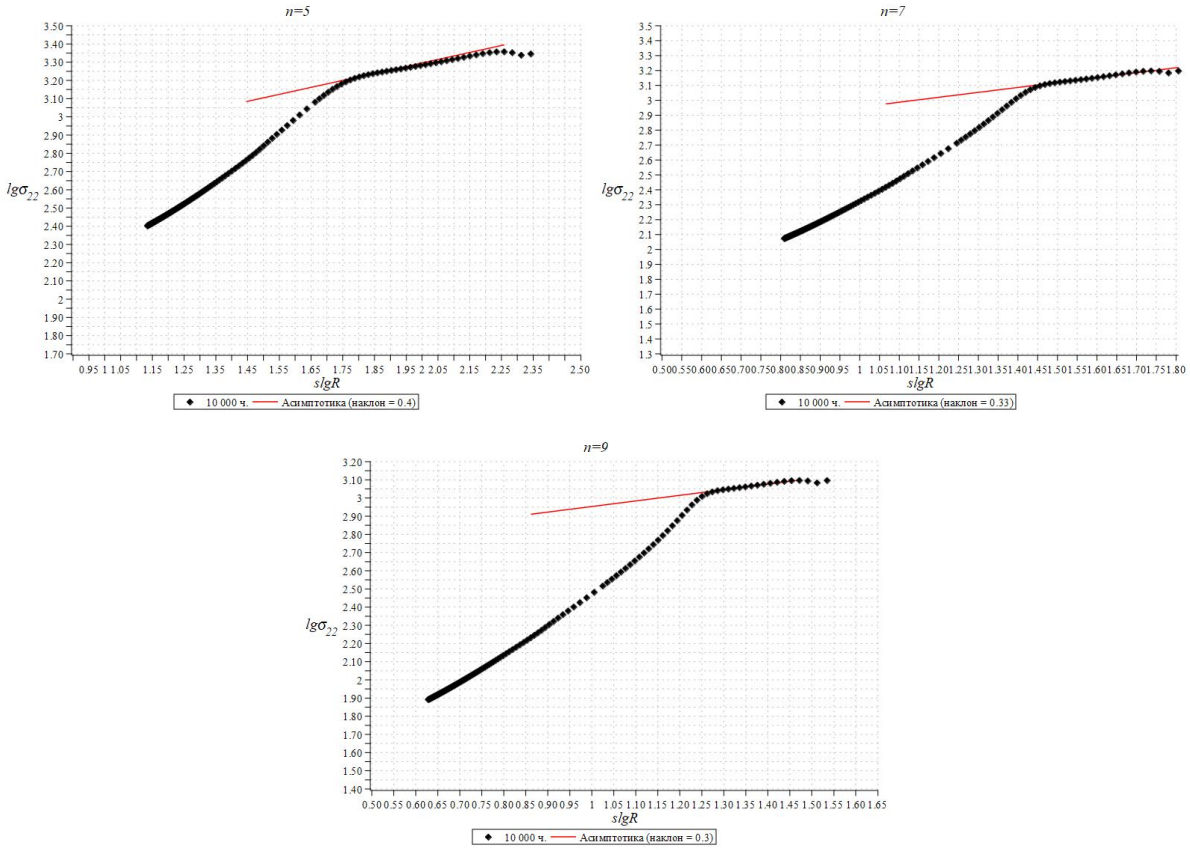


Рис. 10. Кривые зависимости безразмерного напряжения σ_{22} от автомодельной радиальной координаты R. Асимптотика в зоне ползучести

Fig. 10. Curve of dependence of the dimensionless stress σ_{22} on the self-similar radial coordinate R. Asymptotics in the creep zone

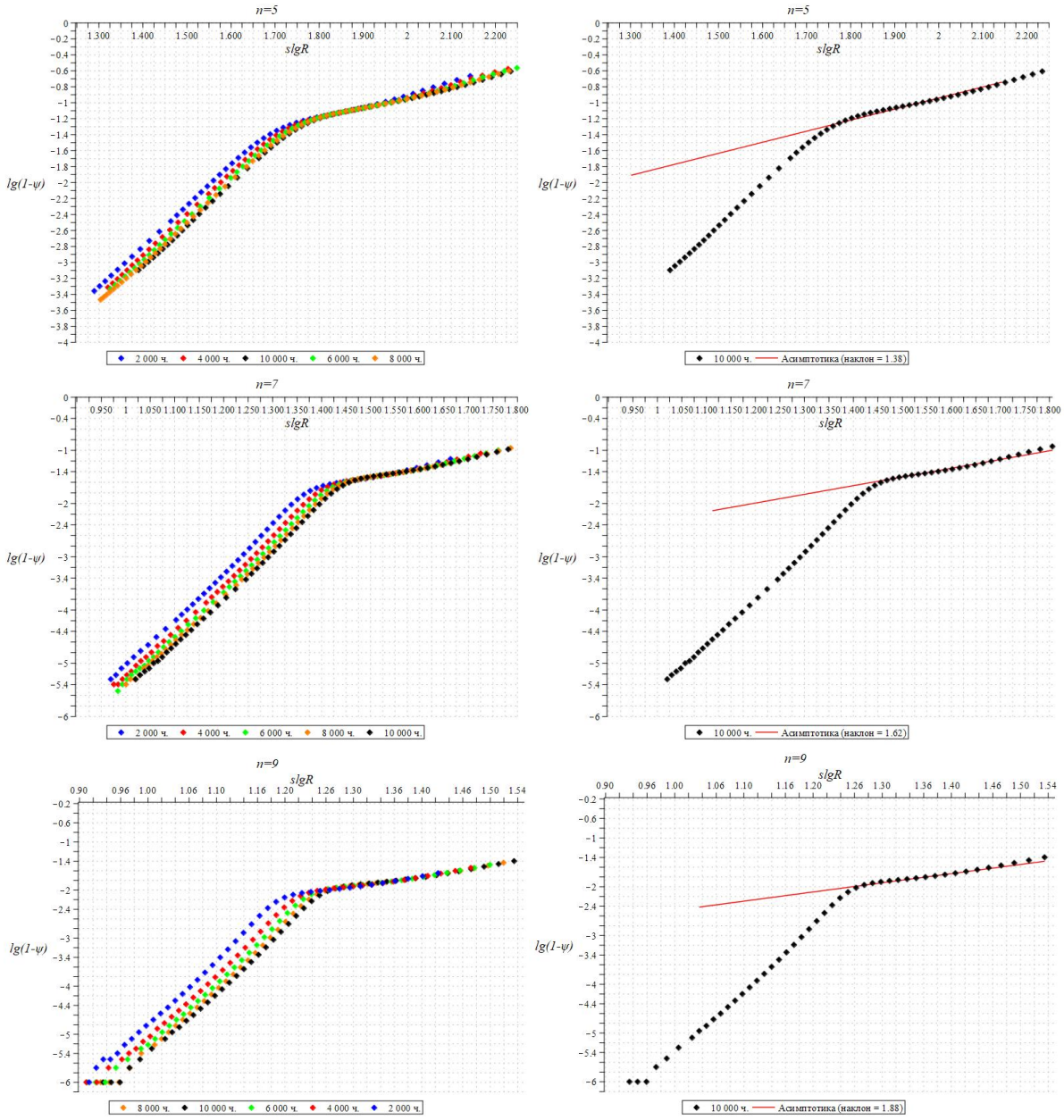


Рис. 11. Кривые зависимости параметра поврежденности $1-\psi$ от автомодельной переменной R. Асимптотика в зоне ползучести

Fig.11. Curve of dependence of the damage parameter $1-\psi$ on the self-similar radial coordinate R. Asymptotics in the creep zone

Из рис. 7–9, справа, отчетливо видно, что кривые, отвечающие различным временам, объединяются в единую кривую в диапазоне автомодельной переменной, отвечающем временам и расстояниям от кончика трещины, для которых развивается ползучесть и процесс накопления повреждений, что ясно свидетельствует об автомодельном характере распределения напряжений. Данное автомодельное решение можно интерпретировать как автомодельное решение второго рода, поскольку искомые степени в автомодельном представлении решения разыскиваются численно для рассмотренных в МКЭ-анализе показателей нелинейности степенного определяющего закона ползучести (1) и степенного эволюционного уравнения (3). Для случая $n=5$ показатель степени приближенно равен $0{,}4$; для $n=7$: $0{,}33$; для $n=9$: $0{,}3$. Полученные значения степеней совпадают с коэффициентами наклона кривых зависимости безразмерного напряжения σ_{22} от автомодельной радиальной координаты в двойных логарифмических координатах (рис. 10), а также с коэффициентами наклона кривых, соответствующих распределению компонент тензора напряжений σ_{22}, представленных на рис. 6.

Полученные значения показатели степеней в автомодельном представлении решения $s<0$, значит, из кинетического уравнения (3) следует, что

$$\psi = 1 - R^{sm} g(\varphi), \quad \lg(1-\psi) = sm \lg R + \lg g(\varphi), \qquad (16)$$

где $m = 0{,}7n$.

Кривые зависимости параметра поврежденности $1-\psi$ от автомодельной промежуточной переменной R (при $\varphi=0$), изображенные в двойных логарифмических координатах, приведены на рис. 11, на которых определенно видно, что кривые, отвечающие различным моментам временам, также объединяются в единую кривую (совпадают) в зоне ползучести. В автомодельных координатах $\Pi_\psi = 1-\psi(R,\varphi=0)$ и $\Pi_R = R = r\left[tA\widetilde{C}^m\right]^{1/(sm)}$ все расчетные точки ложатся на единую кривую $\Pi_\psi = \Pi_\psi(R)$, причем на тех же самых расстояниях, что и кривые зависимости безразмерного напряжения σ_{22} от промежуточной автомодельной переменной (см. рис. 7–9).

Наклон этих кривых в зоне ползучести (см. рис.11) равен приближенно 1,38; 1,62; 1,88, что совпадает со значениями, получаемыми по формуле $k=-sm$. Для случая $n=5$: $k=-sm=0,4\cdot(5\cdot0,7)=1,4$; при $n=7$: $k=-sm=0,33\cdot(7\cdot0,7)=1,62$; при $n=9$: $k=-sm=0,3\cdot(9\cdot0,7)=1,89$.

Заключение

На основе вычислений, проведенных с помощью пользовательской процедуры UMAT, добавляющей кинетическое степенное уравнение накопления повреждений и степенной конституциональный закон с истинными напряжениями в конечно-элементный анализ, выявлено свойство автомодельности распределений напряжений и поврежденности вблизи закругленной вершины трещины в поврежденной среде в процессе ползучести. Полученные и проанализированные радиальные зависимости напряжений и сплошности позволяют выявить асимптотику дальнего и ближнего полей напряжений и сплошности. Акцент в настоящем исследовании сделан на асимптотике дальнего поля, для которого для ряда значений материальных констант даны оценки показателей степеней автомодельной промежуточной асимптотики и степеней в автомодельном представлении решения. Новизной выполненного теоретико-численного анализа, базирующегося на МКЭ, является выделение промежуточной автомодельной структуры решения и диапазонов изменения радиальной и временных координат, для которых справедлива выделенная автомодельная структура решения.

Результаты этого исследования будут способствовать более глубокому пониманию явлений ползучести и накопления повреждений в материалах и станут надежным руководством для инженерной практики и научных исследований.

Безусловно, необходимо дополнительное теоретическое и численное исследование, чтобы получить показатели степени s как решения нелинейной задачи на собственные значения [41–43].

Библиографический список

1. Sandsrom, R. Basic Modelling and Theory of Creep of Metallic Materials/ R. Sandsrom. – Cham: Springer, 2024. – 317 p. DOI: 10.1007/978-3-031-49507-6.

2. Creep damage constitutive model of rock based on the mechanisms of crack-initiated damage and extended damage / T. Li, C. Chen, F. Peng, C. Ma, M. Li, Y. Wang // Underground Space. – 2024. – Vol. 18. – P. 295–313. DOI: 10.1016/j.undsp.2023.12.008.

3. A thermodynamically consistent creep constitutive model considering damage mechanisms / W. Chen, X. He, C. Sun, L. Meng // International Journal of Mechanical Sciences. – 2024. – Vol. 276. – 109373. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109373.

4. Creep damage laws for bonded joints under pure mode II loading / R.F.M. Couto, M.F.S.F. de Moura, A.G. Magalhães, R.D.F. Moreira // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2025. – Vol. 136. – 103879. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2024.103879.

5. Федоренков, Д.И. Реализация модели поврежденности Lemaitre с кинематическим упрочнением в конечно-элементном комплексе ANSYS / Д. И. Федоренков, Д. А. Косов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 2. – С. 147–157. – DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.12.

6. Пантелеев, И. А. О выпуклости потенциала модели нелинейной упругой среды с тензорным параметром поврежденности / И. А. Пантелеев, В. Ляховский // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 1. – С. 89–101. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.08.

7. Хлыбов, А.А. О возможности спектрально-акустического контроля поврежденности поликристаллических материалов на базе имитационно-механической модели / А.А. Хлыбов, А.Л. Углов, Д.А. Рябов // Физическая мезомеханика. – 2023. – Т. 26, № 2. – С. 106–114. DOI: 10.55652/1683-805X_2023_26_2_106.

8. Wang, L. Peridynamic modelling of time-dependent behaviour and creep damage in hyper-viscoelastic solids with pre-cracks / L. Wang, Z.-Y. Yin// Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2025. – Vol. 433. – Part A. – 117512. DOI: 10.1016/j.cma.2024.117512.

9. Behera, D. Peridynamic simulation of creep deformation and damage / D. Behera, P. Roy, E. Madenci // Continuum Mech. Thermodynamics. – 2024. – Vol. 36. – P. 1283–1304. DOI: 10.1007/s00161-024-01295-3.

10. Francfort, G.A. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem / G.A. Francfort, J.-J. Marigo // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1998. – Vol.46, no. 8. – P. 1319–1342.

11. Creep crack propagation using phase-field model within a multi-patch isogeometric framework / Z. Si, Hirshikesh, T. Yu, W. Fang, S. Natarajan // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2025. – Vol. 435. – 117598. DOI:10.1016/j.cma.2024.117598.

12. Khamidullin, R. Comprehensive study of the structural integrity of a damaged turbine disk using FEM, DIC and phase field methods / R. Khamidullin, V. Shlyannikov, D. Kosov, A. Zakharov // International Journal of Fatigue. – 2025. – Vol. 192. – 108720. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2024.108720.

13. Fatigue-creep damage model for carbon fibre reinforced composites under high temperature cyclic loading / Y.-E. Guo, D.-G. Shang, L.-X. Zuo, L.-F. Qu, C.-L. Chen // Composites Science and Technology. – 2024. Vol. 258. – 110909. DOI: 10.1016/j.compscitech.2024.110909.

14. Mechanisms of deformation, damage and life behavior of inconel 617 alloy during creep-fatigue interaction at 700 C / Q. Wang, J. Yu, B. Li, Y. Li, K. Wang, X. Chen // International Journal of Fatigue. – 2025. – Vol. 190. – 108635. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2024.108635.

15. Recent trends in computational damage models: An overview / R. Piska, K. Sivadas, K. Boyina, A. Vuppuluri, A. Chaurasia, C. Parimi, T. Rabczuk // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 132. – 104494. DOI: 10.1016/j.tafmec.2024.104494.

16. Arruda, M.R.T. Jacobian vs. disturbance method for UMATs in ABAQUS: An application to isotropic damage mechanics / M.R.T. Arruda, J. Shen // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2024. – Vol. 167. – 104928. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104928.

17. Lucarini, S. UMAT4COMSOL: An Abaqus user material (UMAT) subroutine wrapper for COMSOL / S. Lucarini, E. Martínez-Pañeda // Advances in Engineering Software. – 20024. – Vol. 190. – 103610. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2024.103610.

18. OXFORD-UMAT: An efficient and versatile crystal plasticity framework / E. Demir, A. Martinez-Pechero, C. Hardie, E. Tarleton // International Journal of Solids and Structures. – 2025. – Vol. 307. – 113110. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.113110.

19. An insight into the creep failure mechanism of sliver defect in the second-generation nickel-based single crystal superalloy CMSX-4 / X. Yu, W. Xuan, C. Zhang, X. Zhang, X. Wang, Y. Zhao, B. Wang, H. Li, J. Bao, Z. Ren // Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 307. – 110307. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.110307.

20. Constitutive modelling and damage prediction of AlSi10Mg alloy manufactured by SLM technology with emphasis on ratcheting in LCF regime / P. Das, R. Halama, A.V. Natarajan, N. Khutia, P.P. Dey, L. Kunčická, J. Hajnyš, R. Kocich, F. Sari // International Journal of Fatigue. – 2024. – Vol. 181. – 108115. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2023.108115.

21. Shlyannikov, V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems / V. Shlyannikov, A. Tumanov // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 150. – P. 166–183. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009.

22. Исследование асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности / Д.В. Чаплий, О.Н. Белова, Л.В. Степанова, Ю.С. Быкова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 17–38. DOI 10.15593/perm.mech/2024.3.02.

23. Выявление асимптотического поведения поврежденности у фронта трещины при ползучести на основании конечно-элементных расчетов / Л.В. Степанова, О.Н. Белова, Д.В. Чаплий, Ю.С. Быкова // Прикладная механика и техническая физика. – DOI: 10.15372/PMTF202415561.

24. Чаплий, Д. В. Параметрическое исследование полей, ассоциированных с вершиной трещины, в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности с использованием UMAT / Д. В. Чаплий, Л. В. Степанова, О. Н. Белова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2023. – Т. 27, № 3. – С. 509–529. DOI: 10.14498/vsgtu2005.

25. Быкова, Ю. С. Влияние процесса накопления повреждений на асимптотическое поведение полей напряжений в условиях ползучести образца с центральной трещиной / Ю.С. Быкова, Л. В. Степанова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2023. – Т. 29, № 4. – С. 7–25. DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25.

26. ABAQUS/Standard User's Manual, Version 2024, Dassault Systemes Simulia Corp, United States. – 2024.

27. On the prediction of creep behaviour of alloy 617 using Kachanov-Rabotnov model coupled with multi-objective genetic algorithm optimization / J. Choi, L. Bortolan Neto, R.N. Wright, J.J. Kruzic, O. Muránsky // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2022. – Vol. 199. – 104721. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2022.104721.

28. Haque, M.S. Comparative analysis of the sin-hyperbolic and Kachanov–Rabotnov creep-damage model / M. S. Haque, C. M. Stewart // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2019. – Vol. 171. – P. 1–9. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2019.02.001

29. Viscoelastic–viscoplastic model with ductile damage accounting for tension–compression asymmetry and hydrostatic pressure effect for polyamide 66 / S. Satouri, G. Chatzigeorgiou, F. Meraghni, G. Robert // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2025. – Vol. 110. – 105491. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105491

30. Качанов, Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд. технических наук. – 1958. – № 8. – С. 26–31.

31. Работнов, Ю.Н. О механизме длительного разрушения / Ю.Н. Работнов // Вопросы прочности материалов и конструкций: сб. статей. – М:, Изд-во АН СССР. – 1959. – С. 5–7.

32. Meng, Q. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review / Meng Q., Wang Z. // Engineering Fracture Mechanics. –2019. – Vol. 205. – P. 547–576.

33. Hutchinson, J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material / J.W. Hutchinson // J Mech Phys Solids. – 1968. – Vol. 16. – P. 13–31

34. Rice, J.R. Plain strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material / J.R. Rice, G.F. Rosengren // J Mech Phys Solids. – 1968. – Vol. 16. – P. 1–12.

35. Hutchinson, J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip/ J.W. Hutchinson// J Mech Phys Solids. – 1968. – Vol. 16. – P. 337–347.

36. Barenblatt, G.I. Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics / G.I. Barenblatt. – Cambridge University Press, 1996.

37. Barenblatt, G.I. Flow, deformation and fracture lectures on fluid mechanics and mechanics of deformable solids for mathematicians and physicists / G.I. Barenblatt. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 273 p.

38. Баренблатт, Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике / Г.И. Баренблатт. – М.: Ленанд, 2021. 256 с.

39. Riedel, H. Fracture at High Temperature / H. Riedel. – Berlin: Springer, 1987. – 418 p.

40. Астафьев В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2001. – 631 с.

41. Stepanova, L.V. Nonlinear eigenvalue problems arising from nonlinear fracture mechanics boundary value problems / L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva // Procedia Structural Integrity. – 2022. – Vol. 37. – P. 908–919.

42. Степанова, Л.В. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния /

Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 129–162. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08.

43. Kong, W. A higher-order asymptotic solution for 3D sharp V-notch front tip fields in creeping solids / W. Kong, Y. Dai, Y. Liu // Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 306. – 110256. DOI:10.1016/j.engfracmech.2024.110256.

References

1. Sandsrom R. Basic Modelling and Theory of Creep of Metallic Materials. Springer: Cham, 2024, 317 p. Doi:10.1007/978-3-031-49507-6.

2. Li T., C. Chen, Peng F., Ma C., Li M., Wang Y. Creep damage constitutive model of rock based on the mechanisms of crack-initiated damage and extended damage. *Underground Space*, 2024, Vol. 18, pp. 295-313. Doi:10.1016/j.undsp.2023.12.008.

3. Chen W., He X., Sun C., Meng L. A thermodynamically consistent creep constitutive model considering damage mechanisms. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, Vol. 276, 109373. Doi:10.1016/j.ijmecsci.2024.109373.

4. Couto R.F.M., de Moura M.F.S.F., Magalhães A.G., Moreira R.D.F. Creep damage laws for bonded joints under pure mode II loading. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2025, Vol. 136, 103879, Doi:10.1016/j.ijadhadh.2024.103879.

5. Fedorenkov D.I., Kosov D.A. Implementation of the Lemaitre damage model with kinematic hardening in the ANSYS finite element complex. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 2, pp. 147-157. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.12

6. Panteleev I.A., Lyakhovsky V. On the convexity of potential of nonlinear elastic media model with tensor damage parameter. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 1, pp. 89-101. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.08.

7. Khlybov A.A., Uglov A.L., Ryabov D.A. Spectral-acoustic monitoring of damage in polycrystalline materials based on a simulation-mechanical. *Physical mesomechanics*, 2023, Vol. 26, № 2, pp. 106-114. DOI 10.55652/1683-805X_2023_26_2_106.

8. Wang L., Yin Z.-Y. Peridynamic modelling of time-dependent behaviour and creep damage in hyper-viscoelastic solids with pre-cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, Vol. 433, Part A, 117512. Doi:10.1016/j.cma.2024.117512.

9. Behera D., Roy P., Madenci E. Peridynamic simulation of creep deformation and damage. *Continuum Mech. Thermodyn,* 2024, Vol. 36, pp. 1283–1304. Doi:10.1007/s00161-024-01295-3.

10. Francfort G.A., Marigo J.-J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1998, Vol. 46, No. 8, pp. 1319-1342. Doi: 10.1016/S00225096(98)00034-9.

11. Si Z., Hirshikesh, Yu T., Fang W., Natarajan S. Creep crack propagation using phase-field model within a multi-patch isogeometric framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, Vol. 435, 117598. Doi:10.1016/j.cma.2024.117598.

12. Khamidullin R., Shlyannikov V., Kosov D., Zakharov A. Comprehensive study of the structural integrity of a damaged turbine disk using FEM, DIC and phase field methods. *International Journal of Fatigue*, 2025, Vol. 192, 108720. Doi:10.1016/j.ijfatigue.2024.108720.

13. Guo Y.-E., Shang D.-G., Zuo L.-X., Qu L.-F., Chen C.-L. Fatigue-creep damage model for carbon fibre reinforced composites under high temperature cyclic loading. *Composites Science and Technology*, 2024, Vol. 258, 110909. Doi:10.1016/j.compscitech.2024.110909.

14. Wang Q., Yu J., Li B., Li Y., Wang K., Chen X. Mechanisms of deformation, damage and life behavior of inconel 617 alloy during creep-fatigue interaction at 700 °C. *International Journal of Fatigue*, 2025, Vol. 190, 108635. Doi:10.1016/j.ijfatigue.2024.108635.

15. Piska R., Sivadas K., Boyina K., Vuppuluri A., Chaurasia A., Parimi C., Rabczuk T. Recent trends in computational damage models: An overview. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, Vol. 132, 104494. Doi:10.1016/j.tafmec.2024.104494.

16. Arruda M.R.T., Shen J. Jacobian vs. disturbance method for UMATs in ABAQUS: An application to isotropic damage mechanics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2024. Vol. 167, 104928. Doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104928.

17. Lucarini S., Martínez-Pañeda E. UMAT4COMSOL: An Abaqus user material (UMAT) subroutine wrapper for COMSOL. *Advances in Engineering Software*, 2024, Vol. 190, 103610. Doi:10.1016/j.advengsoft.2024.103610.

18. Demir E., Martinez-Pechero A., Hardie C., Tarleton E. OXFORD-UMAT: An efficient and versatile crystal plasticity framework. *International Journal of Solids and Structures*, 2025, Vol. 307, 113110. Doi:10.1016/j.ijsolstr.2024.113110.

19. Yu X., Xuan W., Zhang C., Zhang X., Wang X., Zhao Y., Wang B., Li H., Bao J., Ren Z. An insight into the creep failure mechanism of sliver defect in the second-generation nickel-based single crystal superalloy CMSX-4. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, Vol. 307, 110307. Doi:10.1016/j.engfracmech.2024.110307.

20. Das P., Halama R., Natarajan A.V., Khutia N., Dey P.P., Kunčická L., Hajnyš J., Kocich R., Sari F. Constitutive modelling and damage prediction of AlSi10Mg alloy manufactured by SLM technology with emphasis on ratcheting in LCF regime. *International Journal of Fatigue*, 2024, Vol. 181, 108115. Doi:10.1016/j.ijfatigue.2023.108115.

21. Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, Vol. 150, pp. 166-183. Doi:10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009.

22. Chapliy D.V., Belova O.N., Stepanova L.V., Bykova Yu.S. Asymptotic behaviour of the crack tip fields under creep regime taking into account damage accumulation processes. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, no. 3, pp. 17-38. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.02.

23. Stepanova L.V., Belova O.N., Chapliy D.V., Bukova Y.S. Identification of the asymptotic behavior of damage at the crack front during creep based on finite element computations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* DOI 10.15372/PMTF202415561.

24. Chapliy D. V., Stepanova L. V., Belova O. N. Parametric analysis of the stress-strain and continuity fields at the crack tip under creep regime taking into account the processes of damage accumulation using UMAT, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 509–529. DOI:10.14498/vsgtu2005 (In Russian).

25. Bykova Y.S., Stepanova L.V. Influence of the process of damage accumulation on the asymptotic behavior of stress fields under creep conditions of a sample with a central crack. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series,* 2023, vol. 29, no. 4, pp. 7–25. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25.

26. ABAQUS/Standard User's Manual, Version 2024, Dassault Systemes Simulia Corp, United States. 2024.

27. Choi J., Neto L.B., Wright R.N., Kruzic J.J., Muránsky O. On the prediction of creep behaviour of alloy 617 using Kachanov-Rabotnov model coupled with multi-objective genetic algorithm optimization. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2022. Vol. 199, 104721. Doi:10.1016/j.ijpvp.2022.104721.

28. Haque M.S., Stewart C.M. Comparative analysis of the sin-hyperbolic and Kachanov–Rabotnov creep-damage models. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019, Vol. 171, pp. 1-9. Doi:10.1016/j.ijpvp.2019.02.001.

29. Satouri S., Chatzigeorgiou G., Meraghni F., Robert G. Viscoelastic–viscoplastic model with ductile damage accounting for tension–compression asymmetry and hydrostatic pressure effect for polyamide 66. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2025. Vol. 110, 105491. Doi:10.1016/j.euromechsol.2024.105491.

30. Kachanov L.M. On the Time of Fracture under Creeping Conditions [O vremeni razrushenija v uslovijah polzuchesti]. Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN, 1958, No. 8, 26-31.

31. Rabotnov Y.N. About the mechanism of long-term destruction [O mehanizme dlitel'nogo razrushenija] in Problems of Strength of Materials and Structures. Izd-vo AN SSSR, 1959, pp.5-7 [in Russian].

32. Meng Q., Wang Z. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review. *Engineering Fracture Mechanics,* 2019, Vol. 205, pp. 547-576. https://doi.org/10.1016//j.engfracmech.2015.09.055

33. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J Mech Phys Solids*, 1968, Vol. 16, pp. 13-31. doi:10.1016/022-5096(68)90014-8.

34. Rice J R, Rosengren G.F. Plain strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J Mech Phys Solids*, 1968, Vol. 16, pp. 1-12. doi:10.1016/022-5096(68)90013-6.

35. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J Mech Phys Solids,* 1968, Vol. 16, pp. 337-347. doi:10.1016/022-5096(68)90021-5.

36. Barenblatt, G. I. Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics. Cambridge University Press, 1996, 386 p.

37. Barenblatt G.I. Flow, deformation and fracture lectures on fluid mechanics and mechanics of deformable solids for mathematicians and physicists. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, 273 p.

38. Barenblatt G.I. Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics. Moscow: Lenand, 2021, 256 p.

39. Riedel H. Fracture at High Temperature. Berlin: Springer. – 1987. – 418 p.

40. Astafjev V.I., Radayev Y.N., Stepanova L.V. Nonlinear fracture mechanics // Izd-vo "Samarskiy universitet", 2001. 632 p.

41. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Nonlinear eigenvalue problems arising from nonlinear fracture mechanics boundary value problems. *Procedia Structural Integrity,* 2022, Vol.37, pp. 908-919. Doi:10.1016/j.prostr.2022.02.025.

42. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, No. 3, pp. 129-162. DOI 10.15593/perm.mech/2014.3.08.

43. Kong W., Dai Y., Liu Y. A higher-order asymptotic solution for 3D sharp V-notch front tip fields in creeping solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, Vol. 306, 110256. Doi:10.1016/j.engfracmech.2024.110256.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00272).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценный.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 25-21-00272).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution is equal.