Князева, А.Г. Термодинамическое обобщение теории термоупругой диффузии для среды с изменяющейся плотностью / А.Г. Князева. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.09 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 3. – С. 101–113.

Perm Polytech Style: Knyazeva A.G. Thermodynamic generalization of the theory of thermoelastic diffusion for a medium with changing density. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 3, pp. 101-113. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.09

пермский политех

**ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА**
**№ 3, 2025**
**PNRPU MECHANICS BULLETIN**
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.09
УДК 536.12

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ СРЕДЫ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПЛОТНОСТЬЮ

**А.Г. Князева**

Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, Томск, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 04 июля 2025 г.
Одобрена: 31 июля 2025 г.
Принята к публикации:
15 августа 2025 г.

*Ключевые слова:*

термодинамика, термоупругая диффузия, неравновесные уравнения состояния, переменная плотность, обобщенная теория, энергия Гельмгольца, потенциал Гиббса, потоки тепла и компонента, механизмы переноса, перекрестные эффекты.

АННОТАЦИЯ

Теория термоупругой диффузии описывает взаимодействие между полями температуры и концентрации в деформируемых твердых телах. Большинство известных работ по теории термоупругой диффузии построено по аналогии с теорией упругости, включая обобщения на среды с релаксацией тепла и массы. При этом даже при учете зависимостей свойств от температуры и состава авторы используют линейные определяющие соотношения, связывающие параметры состояния и физические переменные, которые следуют из термодинамики в приближении неизменной плотности среды. В настоящей работе представлено обобщение основных уравнений теории термоупругой диффузии для среды, плотность которой зависит от основных переменных состояния. Это учитывается при выводе определяющих соотношений. В результате получается система обобщенных уравнений состояния в дифференциальной форме, матрица коэффициентов которой для переменной плотности теряет симметрию. Представлен вывод соотношений, основанный как на использовании потенциала Гельмгольца, так и на применении в качестве потенциала энергии Гиббса. Обнаруживаются новые механизмы переноса тепла и массы. Например, перенос компонента под действием градиента деформаций возможен за счет двух «механизмов». Первый из них связан с различием индивидуальных свойств компонентов (их мольных объемов, через которые рассчитываются коэффициенты концентрационного расширения). Второй механизм переноса можно назвать работой напряжений вдоль градиентов деформаций. Более того, в случае изотропного тела во взаимодействии полей разной природы участвуют не только инварианты тензоров напряжений и деформаций, но их сдвиговые компоненты. Уравнения, получаемые разными способами, внешне различны. Однако в любом случае они содержат все обнаруженные механизмы взаимодействия. Как и в классических теориях, эквивалентность уравнений можно показать, используя стандартный аппарат термодинамики необратимых процессов. В предельных случаях формулы совпадают с полученными ранее.

© **Князева Анна Георгиевна** – д. ф.-м. н., профессор, гл. н. с. ИФПМ СО РАН, e-mail: anna-knyazeva@mail.ru.

**Anna G. Knyazeva** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, e-mail: anna-knyazeva@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# THERMODYNAMIC GENERALIZATION OF THE THEORY OF THERMOELASTIC DIFFUSION FOR A MEDIUM WITH CHANGING DENSITY

**A.G. Knyazeva**

Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russion Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 July 2025
Approved: 31 July 2025
Accepted for publication:
15 August 2025

*Keywords:*

thermodynamics, thermoelastic diffusion, nonequilibrium equations of state, variable density, generalized theory, Helmholtz energy, Gibbs potential, heat and component fluxes, transfer mechanisms, cross effects.

ABSTRACT

The theory of thermoelastic diffusion describes the interaction between temperature and concentration fields in deformable solids. Most of the known works devoted to the theory of thermoelastic diffusion are constructed by analogy with the theory of elasticity, including generalizations to media with relaxation of heat and mass. In this case, even when taking into account the dependences of properties on temperature and composition, the authors use linear constitutive relations linking the state parameters and physical variables that follow from thermodynamics in the approximation of constant density of the medium. This paper presents a generalization of the basic equations of the theory of thermoelastic diffusion for a medium whose density depends on the main state variables. This is taken into account when deriving the constitutive relations. The result leads to the system of generalized state equations in differential form, the coefficient matrix of which for the variable density loses symmetry. The derivation of relations is based on both the use of the Helmholtz potential and the use of the Gibbs energy as a potential. New mechanisms of heat and mass transfer are discovered. For example, the transfer of a component under the action of a deformation gradient is possible due to two "mechanisms". The first of them is connected with the difference in individual properties of the components (their molar volumes, through which the coefficients of concentration expansion are calculated). The second mechanism of transfer can be called the work of stresses along the deformation gradients. Moreover, in the case of an isotropic body, not only the invariants of the stress and deformation tensors but also their shear components participate in the interaction of fields of different nature. The equations obtained in different ways are outwardly different. However, in any case, they contain all the discovered interaction mechanisms. As in classical theories, the equivalence of the equations can be shown using the standard apparatus of thermodynamics of irreversible processes. In limiting cases, the formulas coincide with those obtained earlier.

## Введение

Под теорией термоупругой диффузии, которая привлекает внимание многих исследователей, понимают теорию, описывающую взаимодействие между температурными полями и полями концентрации в деформируемых твердых телах, а также взаимное влияние всех этих полей друг на друга. Эта теория активно развивается, начиная с работ Лорда и Шульмана [1], Новацкого [2], Шермергора [3], Подстригача [4], Любова и Фастова [5; 6] и др.

В настоящее время существуют разнообразные обобщения классических теорий для сред с релаксацией тепла и массы [7; 8]; для анизотропных сред [9]; для сред с включениями [10]; для микрополярных сред [11]; для вязкоупругих сред [12; 13]; для пористых тел [14]; для сред при наличии электрических и магнитных полей [15; 16]. В работе [17] законы Фурье и Фика в модели термоупругой диффузии были модифицированы до включения производных по времени более высокого порядка от теплового потока, градиента температуры, потока компонента и градиента химического потенциала. В статье [18] исследуются задачи обобщенной теории термоупругой диффузии в рамках расширенной термодинамики с производными дробного порядка. В статье [19] теория термоупругой диффузии с дробными производными применяется для исследования поведения ламинированного композита при осесимметричной нагрузке. Развиваются аналитические и численные методы решения частных задач как в линеаризованной [20–25], так и в нелинейной [26–30] постановках.

Тем не менее в этой теории остаются вопросы, требующие специального обсуждения.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выяснить роль сдвиговых компонент тензоров напряжений и деформаций во взаимодействии с полями температуры и концентраций, основываясь на методах термодинамики необратимых процессов. Оказалось, что для этого требуется лишь отказаться от приближения неизменной плотности среды в уравнения термодинамики.

## Общие соотношения в уравнениях

Для построения уравнений теории термоупругой диффузии нам потребуются уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{V}; \qquad (1)$$

уравнение баланса компонента

$$\rho\frac{dC_k}{dt} + \nabla\cdot\mathbf{J}_k = \omega_k\ ; \qquad (2)$$

уравнение баланса внутренней энергии $u$ в субстанциональной форме

$$\rho\frac{du}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{J}_T + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k + \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\nabla\mathbf{V}\,; \qquad (3)$$

и уравнения движения

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho\mathbf{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,, \qquad (4)$$

где $\rho$ – плотность; $C_k$ – массовые концентрации компонентов; $u$ – плотность локальной внутренней энергии; $\mathbf{V}$ – вектор скорости точек среды; $\mathbf{J}_k$ – диффузионные потоки компонентов; $\omega_k$ источники и стоки компонентов; $\mathbf{J}_T$ – поток тепла; $\mathbf{F}_k$ – составляющая вектора внешних сил $\mathbf{F}$, действующая на компоненту с номером $k$; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; $\nabla... = grad...$; $\nabla\cdot... = div...$.

Уравнения (1)–(4) являются следствием интегральных уравнений баланса [31; 32].

Для конкретизации уравнений воспользуемся термодинамикой, которая обладает много большими возможностями, чем полагают апеллирующие к ней многие исследователи.

Уравнение Гиббса в локальной форме имеет вид

$$du = Tds + \sigma_{ij}^{e}\rho^{-1}d\varepsilon_{ij} + \sum_{k=1}^{n}g_k dC_k \qquad (5)$$

и включает только упругую часть тензора напряжений $\sigma_{ij}^{e}$ (то, что это упругие напряжения, будет видно из дальнейшего). Здесь $\varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора полных деформаций; $g_k$ – химические потенциалы компонентов.

Уравнение (5) можно записать вдоль траектории движения центра масс:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = T\frac{ds}{dt} + \sigma_{ij}^{e}\rho^{-1}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^{n}g_k\frac{dC_k}{dt}\,. \qquad (6)$$

Введем тензор напряжений Кирхгофа

$$\Sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho}\,. \qquad (7)$$

Тогда вместо (5) запишем

$$du = Tds + \Sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \sum_{k=1}^{n}g_k dC_k\,. \qquad (8)$$

Заметим, что пока не было никаких предположений относительно величины деформаций и/или сжимаемости/несжимаемости среды.

Внутренняя энергия – функция переменных состояния – энтропии, компонент тензора деформаций и концентраций компонентов, $u = u\left(s,\varepsilon_{ij},C_k\right)$. В целом выбор переменных состояния, очевидно, зависит от условий, в которых находится исследуемый объект.

Например, свободная энергия Гельмгольца

$$f = u - Ts$$

удобна, если в изотермических условиях контролируются деформации, а энергия Гиббса

$$g = u - Ts - \Sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,,$$

если в этих же условиях контролируются напряжения.

В первом случае уравнение Гиббса принимает вид:

$$df = -sdT + \Sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \sum_{k=1}^{n}g_k dC_k\,. \qquad (9)$$

Во втором –

$$dg = -sdT - \varepsilon_{ij}d\Sigma_{ij} + \sum_{k=1}^{n}g_k dC_k\,. \qquad (10)$$

## Неравновесные уравнения состояния

В термодинамике имеются две группы определяющих соотношений – неравновесные уравнения состояния и соотношения, связывающие обобщенные потоки с обобщенными термодинамическими силами.

Поскольку $f = f\left(T,\varepsilon_{ij},C_k\right)$, а (9) – это уравнение в полных дифференциалах, можем записать систему неравновесных уравнений состояния (УРС) в дифференциальной форме [33]

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k}dT + \underline{\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_k}}d\varepsilon_{ij} + \underline{\underline{\left(\frac{\partial s}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon}}}dC_k\,;$$

$$d\Sigma_{ij} = \underline{\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k}}dT + \underline{\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{T,C_k}}d\varepsilon_{kl} + \underline{\underline{\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon}}}dC_k\,; \qquad (11)$$

$$dg_k = \underline{\underline{\left(\frac{\partial g_k}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_l}}}dT + \underline{\left(\frac{\partial g_k}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_l}}d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial g_k}{\partial C_l}\right)_{T,\varepsilon}dC_l\,.$$

Множители при дифференциалах в (11), стоящие на диагонали, очевидно, определяют привычные термодинамические свойства – теплоемкость; упругие модули и индивидуальные термодинамические свойства компонентов. Подчеркнутые одинаковым образом слагаемые определяют физические коэффициенты, ответственные за перекрестные эффекты, связанные со взаимодействием разных физических полей.

Действительно, по определению,

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k} = c_\varepsilon = c_{\varepsilon,C_k}\left(T,\varepsilon_{ij},C_k\right) = -T\left(\frac{\partial f}{\partial T^2}\right)_{\varepsilon,C_k} \qquad (12)$$

есть теплоемкость при постоянстве деформаций (аналог изохорной теплоемкости).

Следовательно,

$$s_2\left(\boldsymbol{\varepsilon},C_k\right) - s_1\left(\boldsymbol{\varepsilon},C_k\right) = \int_{T_1}^{T_2}\frac{c_\varepsilon}{T}dT\,.$$

Это уравнение позволяет рассчитать энтропию, если теплоемкость в зависимости от термодинамических переменных состояния (в данном случае температуры, деформаций и концентраций) известны.

Второе слагаемое в первом уравнении (11) содержит производные

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_k} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right) = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) = -\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k}. \quad (13)$$

Используя определение (7), находим:

$$\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k} = \frac{\partial \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho}}{\partial T} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}^{\ e}}{\partial T} - \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T} - \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad (14)$$

где $\beta_{ij}^{T} = C_{ijkl}^{\ \ T}\alpha_{kl}^{T}$ – «классический» тензор коэффициентов термоупругости [34–36]; а $\alpha_{kl}^{T}$ – тензор коэффициентов теплового расширения; $C_{ijkl}^{\ \ T}$ – коэффициенты тензора упругих модулей. Индекс «$T$» в последнем случае указывает, что эти коэффициенты определены для изотермических условий.

Таким образом, «новый» тензор коэффициентов термоупругости

$$\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k} = -\overline{\beta}_{ij}^{T}$$

явно зависит от плотности и от ее производной по температуре:

$$\overline{\beta}_{ij}^{T} = \frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T} + \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T};\ \beta_{ij}^{T} = -\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k}. \quad (15)$$

Найдем последнее слагаемое в первом уравнении (11):

$$s_k = \left(\frac{\partial s}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial C_k}\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial f}{\partial C_k} = -\left(\frac{\partial g_k}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_l} \quad (16)$$

– это есть парциальные энтропии компонентов.

Следовательно, первое из УРС принимает вид

$$ds = \frac{c_\varepsilon}{T}dT + \overline{\beta}_{ij}^{T}d\varepsilon_{ij} + s_k dC_k. \quad (17)$$

Аналогично (14) имеем

$$\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial C_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial C_k}\right) = \left(\frac{\partial g_k}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_l} = -\overline{\beta}_{ij}^{k}, \quad (18)$$

где

$$\overline{\beta}_{ij}^{k} = -\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial C_k}\frac{\sigma_{ij}}{\rho} = \frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{k} + \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial C_k}, \quad (19)$$

$\beta_{ij}^{k}$ – «классические» тензоры концентрационной упругости компонентов,

$$\beta_{ij}^{k} = -\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon}.$$

Во второй группе УРС (11) осталось определить явно (через свободную энергию) упругие модули:

$$\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k} = \overline{C}_{ij\alpha\beta}, \quad (20)$$

или

$$\overline{C}_{ij\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right) = \overline{C}_{\alpha\beta ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}/\rho}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k},$$

или

$$\overline{C}_{ij\alpha\beta} == \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k} = \frac{1}{\rho}C_{ij\alpha\beta} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k}. \quad (21)$$

Следовательно, вторая группа УРС принимает вид

$$d\Sigma_{ij} = -\overline{\beta}_{ij}^{T}dT + \overline{C}_{ij\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta} - \overline{\beta}_{ij}^{k}dC_k. \quad (22)$$

Оставшаяся группа уравнений состояния содержит уже известные коэффициенты и коэффициенты $\beta_l^k = \left(\frac{\partial g_k}{\partial C_l}\right)_{T,\varepsilon}$, конкретный вид которых определяется типом среды (идеальный раствор, регулярный раствор; неидеальный раствор) ([37–39] и др.):

$$\beta_l^k = \left(\frac{\partial g_k}{\partial C_l}\right)_{T,\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial C_l}\left(\frac{\partial f}{C_k}\right)\right)_{T,\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial C_k}\left(\frac{\partial f}{C_l}\right)\right)_{T,\varepsilon} = \left(\frac{\partial g_l}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon} = \beta_k^l.$$

Следовательно,

$$dg_k = -s_k dT - \overline{\beta}_{ij}^{k}d\varepsilon_{ij} + \beta_l^k dC_l. \quad (23)$$

Учитывая определения «обобщенных» коэффициентов и тензора Кирхгофа, получим из (22):

$$\frac{1}{\rho}d\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}d\rho = -\overline{\beta}_{ij}^{T}dT + \overline{C}_{ij\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta} - \overline{\beta}_{ij}^{k}dC_k = -\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T} + \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{1}{\rho}C_{ij\alpha\beta} - \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k}\right)d\varepsilon_{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{k} + \frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial C_k}\right)dC_k.$$

Группируем слагаемые:

$$\frac{1}{\rho}d\sigma_{ij}-\frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}d\rho=\frac{1}{\rho}\left[-\beta_{ij}^{T}dT+C_{ij\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta}-\beta_{ij}^{k}dC_k\right]-$$

$$-\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k}dT+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k}d\varepsilon_{\alpha\beta}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon}dC_k\right].$$

То есть если плотность рассматривается как функция тех же самых термодинамических переменных состояния, то в общих определяющих соотношениях внешне ничто не изменяется. Однако появляется несимметрия в перекрестных коэффициентах.

Таким образом, имеем систему УРС в виде:

$$ds=\frac{c_\varepsilon}{T}dT+\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)d\varepsilon_{ij}+s_k dC_k;\qquad(24)$$

$$d\sigma_{ij}=-\beta_{ij}^{T}dT+C_{ij\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta}-\beta_{ij}^{k}dC_k;\qquad(25)$$

$$dg_k=-s_k dT-\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{k}+\frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)d\varepsilon_{ij}+\beta_{l}^{k}dC_l;\qquad(26)$$

$$d\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{\varepsilon,C_k}dT+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k}d\varepsilon_{\alpha\beta}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon}dC_k.\qquad(27)$$

И в (22), и в (25) приращения напряжений линейно связаны с приращениями деформаций, температуры и концентраций, т.е. являются упругими по определению.

Учитывая (15) и (21), найдем

$$\overline{\beta}_{ij}^{T}=\overline{C}_{ijkl}\alpha_{kl}^{T}=\left[\frac{1}{\rho}C_{ijkl}-\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{kl}}\right)_{T,C_k}\right]\alpha_{kl}^{T}=$$

$$=\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}=\frac{1}{\rho}\left[C_{ijkl}{}^{T}\alpha_{kl}^{T}\right]+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T},$$

или

$$-\frac{\sigma_{ij}}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{kl}}\right)_{T,C_k}\alpha_{kl}^{T}=\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T},$$

или

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{kl}}\right)_{T,C_k}\alpha_{kl}^{T}=-\frac{\partial\rho}{\partial T}.\qquad(28)$$

Аналогично найдем

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{T}\alpha_{ij}^{k}=-\frac{\partial\rho}{\partial C_k}.\qquad(29)$$

Благодаря этим соотношениям, можем принять

$$\rho=\rho\left(T,C_k\right).$$

Тогда вместо (24)–(26) получим

$$ds=\frac{c_\varepsilon}{T}dT+\left(\frac{1}{\rho}C_{ij\alpha\beta}\alpha_{\alpha\beta}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)d\varepsilon_{ij}+s_k dC_k;$$

$$d\sigma_{ij}=C_{ij\alpha\beta}\left[d\varepsilon_{\alpha\beta}-\alpha_{ij}^{T}dT-\sum_{(k)}\alpha_{ij}^{k}dC_k\right];\qquad(30)$$

$$dg_k=-s_k dT-\left(\frac{1}{\rho}C_{ij\alpha\beta}\alpha_{\alpha\beta l}^{k}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)d\varepsilon_{ij}+\beta_{l}^{k}dC_l.$$

Перейдем к изотропному телу:

$$ds=\frac{c_\varepsilon}{T}dT+\left(\frac{1}{\rho}3K\alpha_T\delta_{ij}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)d\varepsilon_{ij}+s_k dC_k;$$

$$d\sigma_{ij}=2\mu d\varepsilon_{ij}+\delta_{ij}\left[\lambda d\varepsilon_{ll}-Kdw\right];\qquad(31)$$

$$dg_k=-s_k dT-\left(\frac{1}{\rho}3K\alpha_k\delta_{ij}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)d\varepsilon_{ij}+\beta_{l}^{k}dC_l,$$

где

$$dw=3\left[\alpha_T dT+\sum_{(k)}\alpha_k dC_k\right],\qquad(32)$$

$$\alpha_T=\frac{1}{3}\left(\alpha_{11}^{T}+\alpha_{22}^{T}+\alpha_{33}^{T}\right)=\frac{1}{3}\alpha_V\ \text{ и}$$

$$\alpha_k=\frac{1}{3}\left(\alpha_{11}^{k}+\alpha_{22}^{k}+\alpha_{33}^{k}\right)=\frac{1}{3}\alpha_{k,V}$$

– линейные коэффициенты теплового и концентрационного расширения.

Видим, что даже в изотропном теле энтропия и химические потенциалы компонентов зависят от всех компонент тензоров напряжений и деформаций. Это не противоречит принципам термодинамики, поскольку скалярная величина может зависеть от компонент тензора второго ранга.

## Уравнение теплопроводности

Чтобы вывести уравнение теплопроводности, можно использовать разные последовательности выкладок. В настоящей работе уравнение теплопроводности найдем, используя (3) и (6):

$$\rho T\frac{ds}{dt}+\sum_{k=1}^{n}\rho g_k\frac{dC_k}{dt}=$$

$$=-\nabla\cdot\mathbf{J}_T+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k+\left(\sigma\cdot\cdot\nabla\mathbf{V}-\sigma_{ij}^{e}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right).\qquad(33)$$

Из (24) следует

$$\frac{ds}{dt}=\frac{c_\varepsilon}{T}\frac{dT}{dt}+\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}+s_k\frac{dC_k}{dt}.$$

Поэтому уравнение (33) принимает вид:

$$\rho T\left(\frac{c_\varepsilon}{T}\frac{dT}{dt}+\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}+s_k\frac{dC_k}{dt}\right)+\sum_{k=1}^{n}\rho g_k\frac{dC_k}{dt}=$$
$$=-\nabla\cdot\mathbf{J}_T+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k+\left(\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\sigma_{ij}^{e}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right).$$

Группируем слагаемые:

$$\rho c_\varepsilon\frac{dT}{dt}+\rho T\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}+\sum_{k=1}^{n}\rho h_k\frac{dC_k}{dt}=$$
$$=-\nabla\cdot\mathbf{J}_T+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k+\left(\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\sigma_{ij}^{e}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\right),$$

где $h_k=g_k+Ts_k$, по определению, парциальная энтальпия компонента *k*.

В упругом теле $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{e}$.

Если примем, что компоненты тензора деформаций удовлетворяют соотношениям Коши (для других определений тензора деформаций выкладки становятся более громоздкими),

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

так что

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

и

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right),$$

то придем к уравнению теплопроводности вида

$$\rho c_\varepsilon\frac{dT}{dt}+\rho T\left(\frac{1}{\rho}\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}+\sum_{k=1}^{n}\rho h_k\frac{dC_k}{dt}=$$
$$=-\nabla\cdot\mathbf{J}_T+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k.$$

Воспользовавшись уравнением баланса компонента (2), найдем

$$\rho c_\varepsilon\frac{dT}{dt}+T\left(\beta_{ij}^{T}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=$$
$$=-\frac{\partial\mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k-\sum_{k=1}^{n}h_k\omega_k,\qquad(34)$$

где $\mathbf{J}_{qj}$ – компоненты вектора плотности суммарного потока тепла:

$$\mathbf{J}_{qj}=\mathbf{J}_{Tj}-\sum_{(k)}h_k\mathbf{J}_{k,j}\ .\qquad(35)$$

Для изотропного тела имеем:

$$\rho c_\varepsilon\frac{dT}{dt}+T\left(3K\alpha_T\delta_{ij}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=$$
$$=-\frac{\partial\mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{J}_k-\sum_{k=1}^{n}h_k\omega_k.\qquad(36)$$

То есть слагаемое, отвечающее за связанность полей температуры и деформаций, теперь включает не только первый инвариант тензора деформаций, но и произведение компонент тензоров напряжений и деформаций, включая сдвиговые:

$$T\left(3K\alpha_T\delta_{ij}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=3K\alpha_T T\frac{d\varepsilon_{kk}}{dt}+\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\sigma_{ij}^{\ e}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\ .$$

Этот факт обнаруживается безо всяких дополнительных предположений. Однако при выводе уравнений через потенциал Гиббса получаем несколько иной результат (см. далее), хотя все «новые» механизмы взаимодействия полей разной физической природы охраняются.

## Уравнения для потоков тепла и компонентов

Как сказано выше, термодинамика предлагает еще одну группу определяющих соотношений. Это соотношения, связывающие потоки с обобщенными термодинамическими силами. В термодинамике необратимых процессов их выбирают из условия неотрицательности производства энтропии. Для простоты ограничимся бинарной системой и не будем учитывать внешние силы. В этом случае в линейном приближении без учета внешних сил имеем

$$\mathbf{J}_q=L_{qq}X_q+L_{q2}X_{21};$$
$$\mathbf{J}_2=L_{2q}X_q+L_{22}X_{21},$$

где

$$X_q=-\frac{\nabla T}{T^2};\ X_{21}=-\frac{\nabla\left(g_2-g_1\right)_T}{T};\ L_{q2}=L_{2q}.$$

Так как у нас всего два компонента, то справедливо

$$C_1+C_2=1\ \text{ и }\ \mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2=0.\qquad(37)$$

Из системы УРС (31) для изотропного тела имеем

$$dg_1=-s_1dT-\left(\frac{1}{\rho}3K\alpha_1\delta_{ij}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_1}\right)d\varepsilon_{ij}+\beta_1^1dC_1+\beta_2^1dC_2;$$

$$dg_2=-s_2dT-\left(\frac{1}{\rho}3K\alpha_2\delta_{ij}+\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_2}\right)d\varepsilon_{ij}+\beta_1^2dC_1+\beta_2^2dC_2,$$

откуда следует

$$\nabla\left(g_2-g_1\right)_T=-\left[\frac{1}{\rho}3K\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij}+2\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij}+$$
$$+\left(-\beta_1^2+\beta_1^1+\beta_2^2-\beta_2^1\right)\nabla C_2.\qquad(38)$$

Следовательно, учитывая (37), находим:

$$\mathbf{J}_q = -L_{qq}\frac{\nabla T}{T^2} + L_{q2}\frac{1}{T}\left\{\left[\frac{1}{\rho}3K\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij} + 2\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij} - \right.$$
$$\left. -\left(-\beta_1^2+\beta_1^1+\beta_2^2-\beta_2^1\right)\nabla C_2\right\};$$

$$\mathbf{J}_2 = -L_{2q}\frac{\nabla T}{T^2} + L_{22}\frac{1}{T}\left\{\left[\frac{1}{\rho}3K\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij} + 2\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij} - \right.$$
$$\left. -\left(-\beta_1^2+\beta_1^1+\beta_2^2-\beta_2^1\right)\nabla C_2\right\}.$$

Если представим химический потенциал компонента в виде

$$g_k = g_{k0} + RTm_k^{-1}\ln\left(C_k f_k\left(C_l\right)\right), \tag{39}$$

то

$$\begin{aligned}\beta_l^k &= \frac{\partial g_k}{\partial C_l} = RTm_k^{-1}\frac{\partial}{\partial C_l}\ln\left(C_k f_k\left(C_l\right)\right) = \\ &= RTm_k^{-1}\left[\frac{\partial\ln C_k}{\partial C_l} + \frac{\partial\ln f_k\left(C_l\right)}{\partial C_l}\right] = \\ &= RTm_k^{-1}\left[\frac{1}{C_k}\frac{\partial C_k}{\partial C_l} + \frac{\partial\ln f_k\left(C_l\right)}{\partial C_l}\right] = \\ &= \frac{RT}{C_k m_k}\left[\delta_{kl} + \frac{C_k}{C_l}\frac{\partial\ln f_k\left(C_l\right)}{\partial\ln C_l}\right] = \frac{RT}{C_k m_k}g_{kl},\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$g_{kl} = \delta_{kl} + \frac{C_k}{C_l}\frac{\partial\ln\gamma_k\left(C_l\right)}{\partial\ln C_l} \tag{41}$$

– термодинамические множители.

Тогда

$$\left(-\beta_1^2+\beta_1^1+\beta_2^2-\beta_2^1\right) = \left(\beta_1^1+\beta_2^2-2\beta_2^1\right) =$$
$$= \frac{RT}{C_2 m_2}\left(g_{22} - 2g_{21} + \frac{C_2 m_2}{C_1 m_1}\right) = \frac{RT}{C_2 m_2}F\left(C_2\right).$$

В соответствии с законами Фурье и Фика можем выделить коэффициент теплопроводности и коэффициент самодиффузии

$$\lambda_T = \frac{L_{qq}}{T^2} \quad \text{и} \quad D_0 = \frac{RL_{22}}{C_2 m_2 \rho}.$$

Тогда $L_{22} = \rho\dfrac{D_0 C_2 m_2}{R}$. Следовательно,

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T\nabla T + L_{q2}\frac{1}{T}\left\{\left[\frac{1}{\rho}3K\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij} + 2\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij} - \right.$$
$$\left. -\frac{RT}{C_2 m_2}F\left(C_2\right)\nabla C_2\right\};$$

$$\mathbf{J}_2 = -L_{2q}\frac{\nabla T}{T^2} + \rho\frac{D_0 C_2 m_2}{RT}\left\{\left[\frac{1}{\rho}3K\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij} + 2\frac{\sigma_{ij}^{\ e}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij} - \right.$$
$$\left. -\frac{RT}{C_2 m_2}F\left(C_2\right)\nabla C_2\right\}.$$

Коэффициент $L_{1q}$, как и в [40], можем выразить через коэффициент термодиффузии $L_{2q} = T^2 C_2 D_T\rho$. С помощью коэффициента Соре $S_T = D_T/D$ запишем $L_{2q} = L_{q2} = T^2 C_2 D S_T\rho$. В результате найдем

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T\nabla T + DS_T T\times$$
$$\times\left[3KC_2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij} + 2\sigma_{ij}^{\ e}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij} - DQ^*\nabla C_2; \tag{42}$$

$$\mathbf{J}_2 = -C_2 DS_T\rho\nabla T +$$
$$+\left[3KC_2 B\delta_{ij} + 2\frac{D_0 m_2}{RT}\sigma_{ij}^{\ e}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij} - \rho D\nabla C_2, \tag{43}$$

где $Q^* = S_T\dfrac{R\rho T^2}{m_2}F\left(C_2\right)$ – теплота переноса; $D = D_0 F\left(C_2\right)$ – коэффициент диффузии; коэффициент $B = \dfrac{D_0 m_2}{RT}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$ назван в [40] коэффициентом переноса под действием напряжений.

Таким образом, перенос компонента под действием градиента деформаций возможен за счет двух «механизмов». Один из них связан с различием индивидуальных свойств компонентов (их мольных объемов, через которые рассчитываются коэффициенты концентрационного расширения). Здесь «задействованы» только градиенты диагональных компонентов тензора деформаций. Второй механизм переноса можно назвать работой напряжений вдоль градиентов деформаций. Для его появления нет необходимости в искусственном введении тензоров химических потенциалов. Однако в случае кристаллов тензорной переменной состояния может быть концентрация. Тогда тензор химического потенциала компонента будет естественным, сопряженным тензорной концентрации параметром [41; 42].

Если плотность неизменна, то вместо (42), (43)

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T\nabla T - C_2 DS_T T3K\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\nabla\varepsilon_{ikk} - DQ^*\nabla C_2; \tag{44}$$

$$\mathbf{J}_2 = -C_2 DS_T\rho\nabla T - 3KC_2 B\nabla\varepsilon_{kk} - \rho D\nabla C_2. \tag{45}$$

Эти уравнения в целом (с точностью до обозначений) эквивалентны тем, которые выведены в [40], но содержат коэффициенты, определенные для иных условий, и градиент первого инварианта деформаций, а не упругих напряжений. В (43), (44) из шести коэффициентов переноса независимы только три. Остальные вычисляются через них и иные уже известные свойства. Новых физических параметров не появляется и в (42), (43),

несмотря на появление «новых» механизмов переноса тепла и массы.

Таким образом, для определения независимых переменных $\rho, V_1, V_2, V_3, T, C_2$ и $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^e$ имеем уравнения, представленные в таблице

Поток тепла и поток компонента определяются в этом случае из соотношений (44) и (45). Обобщенную теорию термоупругой диффузии получим, учитывая конечность времен релаксации тепла и массы

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T \nabla T - C_2 D S_T T 3K\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\nabla\varepsilon_{kk} - DQ^*\nabla C_2 - t_q \frac{d\mathbf{J}_q}{dt};$$

$$\mathbf{J}_2 = -C_2 D S_T \rho \nabla T - 3KC_2 B \nabla\varepsilon_{kk} - \rho D \nabla C_2 - t_C \frac{d\mathbf{J}_2}{dt}.$$

## Вывод основных соотношений, основанный на потенциале Гиббса

Построить (конкретизировать) уравнения можем, используя как отправную точку любой термодинамический потенциал. Однако уравнения не будут тождественными друг другу, так как будут содержать коэффициенты, соответствующие физическим параметрам, измеряемым в разных условиях (например, теплоемкость при постоянстве деформаций и теплоемкость при постоянстве напряжений; изотермические и адиабатические упругие модули и т.п.). При выводе соотношений далее будем использовать те же обозначения, что и выше, не уточняя, как правило, условия определения.

Так как $g = g\left(T, \Sigma_{ij}, C_k\right)$, то система уравнений состояния в исходной форме примет вид

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\Sigma, C_k} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T, C_k} d\Sigma_{ij} + \left(\frac{\partial s}{\partial C_k}\right)_{T,\Sigma} dC_k;$$

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T}\right)_{\Sigma, C_k} dT + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \Sigma_{kl}}\right)_{T, C_k} d\Sigma_{kl} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\Sigma} dC_k; \quad (46)$$

Уравнения теории термоупругой диффузии для среды с изменяющейся плотностью

Equations of the theory of thermoelastic diffusion for a medium with varying density

| Общие соотношения | |
|---|---|
| $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{V};\ \rho\frac{dC_k}{dt} + \nabla\cdot\mathbf{J}_k = \omega_k;\ \rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho\mathbf{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma};\ \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$ | |
| Основной потенциал $f$ | Основной потенциал $g$ |
| $\rho c_\varepsilon \frac{dT}{dt} + \left(3KT\alpha_T\delta_{ij} + \sigma_{ij}^e\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial \ln T}\right)\right)\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} h_k\omega_k$ | $\rho c_\Sigma \frac{dT}{dt} + \alpha_T T\frac{d\sigma_{ll}^e}{dt} - \alpha_T T\sigma_{ll}^e\frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} h_k\omega_k$ |
| $\mathbf{J}_{q,i} = -\lambda_T\nabla T - DQ^*\nabla C_2 + DS_T T\left[3KC_2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\delta_{ij} + 2\sigma_{ij}^e\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij}$ | $\mathbf{J}_{q,i} = -\lambda_T\nabla T - DQ_{eff}^*\nabla C_2 + TC_2 DS_T \times \left(\alpha_2-\alpha_1\right)\left(\nabla\sigma_{ll}^e + \frac{\sigma_{ll}^e}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_{ij}^e}\right)_{T,C_k}\nabla\sigma_{ij}^e\right)$ |
| $\mathbf{J}_{2,i} = -C_2 DS_T\rho\nabla T - \rho D\nabla C_2 + \left[3KC_2 B\delta_{ij} + 2\frac{D_0 m_2}{RT}\sigma_{ij}^e\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln C_2}\right]\nabla\varepsilon_{ij}$ | $\mathbf{J}_{2,i} = -C_2 DS_T\rho\nabla T - \rho D_{eff}\nabla C_2 + \frac{D_0 C_2 m_2}{RT}\times \left(\alpha_2-\alpha_1\right)\left(\nabla\sigma_{ll}^e + \frac{\sigma_{ll}^e}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\sigma_{ij}^e}\right)_{T,C_k}\nabla\sigma_{ij}^e\right)$ |
| $d\sigma_{ij} = -\beta_{ij}^T dT + C_{ij\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta} - \beta_{ij}^k dC_k$ | $d\varepsilon_{ij} = \left[\alpha_{ij}^T - \overline{S}_{ij\alpha\beta}\frac{\sigma_{\alpha\beta}^e}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{\sigma,C_k}\right]dT + \overline{S}_{ij\alpha\beta}\frac{1}{\rho}\left[1 - \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\sigma_{\alpha\beta}^e}\right)_{T,C_k}\right]d\sigma_{\alpha\beta}^e + \left[\alpha_{ij}^k - \overline{S}_{ij\alpha\beta}\frac{\sigma_{\alpha\beta}^e}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)_{T,\sigma}\right]dC_k$ |

$$dg_k = \underbrace{\left(\frac{\partial g_k}{\partial T}\right)_{\Sigma,C_l}}_{=======} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial g_k}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T,C_l}}_{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim} d\Sigma_{ij} + \left(\frac{\partial g_k}{\partial C_l}\right)_{T,\Sigma} dC_l,$$

где

$$s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_{\Sigma,C_k}; \quad \varepsilon_{ij} = -\left(\frac{\partial g}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T,C_k}; \quad g_k = \left(\frac{\partial g}{\partial C_k}\right)_{\Sigma,T,C_l}. \quad (47)$$

Как и выше, матрица коэффициентов в (46) – симметрична. Учитывая (47), запишем

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\Sigma,C_k} = c_\Sigma = c_{\Sigma,C_k}\left(T,\Sigma_{ij},C_k\right) = -T\left(\frac{\partial g}{\partial T^2}\right)_{\Sigma,C_k};$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T,C_k} = -\frac{\partial}{\partial \Sigma_{ij}}\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right) = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial g}{\partial \Sigma_{ij}}\right) = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T}\right)_{\Sigma,C_k} = \alpha_{ij}^T;$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\Sigma} = -\frac{\partial}{\partial C_k}\left(\frac{\partial g}{\partial \Sigma_{ij}}\right) = -\frac{\partial}{\partial \Sigma_{ij}}\left(\frac{\partial g}{\partial C_k}\right) = -\left(\frac{\partial g_k}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T,C_l} = \alpha_{ij}^k;$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \Sigma_{kl}}\right)_{T,C_k} = -\frac{\partial}{\partial \Sigma_{kl}}\left(\frac{\partial g}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T,C_k} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \Sigma_{ij}}\left(\frac{\partial g}{\partial \Sigma_{kl}}\right)_{T,C_k} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \Sigma_{ij}}\right)_{T,C_k} = \overline{S}_{ijkl} = \overline{S}_{klij}\$$

$$\beta_l^k = \left(\frac{\partial g_k}{\partial C_l}\right)_{T,\Sigma} = \left(\frac{\partial}{\partial C_l}\left(\frac{\partial g}{C_k}\right)\right)_{T,\Sigma} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial C_k}\left(\frac{\partial g}{C_l}\right)\right)_{T,\Sigma} = \left(\frac{\partial g_l}{\partial C_k}\right)_{T,\Sigma} = \beta_k^l.$$

Следовательно, система УРС принимает вид

$$ds = \frac{c_\Sigma}{T} dT + \alpha_{ij}^T d\Sigma_{ij} + s_k dC_k;$$
$$d\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}^T dT + \overline{S}_{ij\alpha\beta} d\Sigma_{\alpha\beta} + \alpha_{ij}^k dC_k;$$
$$dg_k = -s_k dT - \alpha_{ij}^k d\Sigma_{ij} + \beta_l^k dC_l$$

или

$$ds = \frac{c_\Sigma}{T} dT + \alpha_{ij}^T \frac{1}{\rho} d\sigma_{ij}^e + s_k dC_k - \alpha_{ij}^T \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} d\rho; \quad (48)$$

$$d\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}^T dT + \overline{S}_{ij\alpha\beta} \frac{1}{\rho} d_{\alpha\beta}^e + \alpha_{ij}^k dC_k - \overline{S}_{ij\alpha\beta} \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} d\rho; \quad (49)$$

$$dg_k = -s_k dT - \alpha_{ij}^k \frac{1}{\rho} d\sigma_{ij}^e + \beta_l^k dC_l + \alpha_{ij}^k \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} d\rho. \quad (50)$$

С помощью (48), (33) и (2) получим уравнение теплопроводности:

$$\rho c_\Sigma \frac{dT}{dt} + \alpha_{ij}^T T \frac{d\sigma_{ij}^e}{dt} - \alpha_{ij}^T T \frac{\sigma_{ij}^e}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{J}_k + \sum_{k=1}^n h_k \omega_k,$$

в котором присутствуют, как и выше, два слагаемых, отвечающих за связанность полей температуры и напряжений. Для изотропного тела имеем

$$\rho c_\Sigma \frac{dT}{dt} + \alpha_T T \frac{d\sigma_{ll}^e}{dt} - \alpha_T T \frac{\sigma_{ll}^e}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{J}_k + \sum_{k=1}^n h_k \omega_k.$$

Производную плотности можем заменить из уравнения неразрывности:

$$\rho c_\Sigma \frac{dT}{dt} + \alpha_T T \frac{d\sigma_{ll}^e}{dt} - \alpha_T T \sigma_{ll}^e \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} = \\ = -\frac{\partial \mathbf{J}_{qj}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{J}_k + \sum_{k=1}^n h_k \omega_k. \quad (51)$$

Общие соотношения для потоков имеют прежний вид, однако обобщенная термодинамическая сила, сопряженная потоку компонента, теперь следует из (50). Для изотропного тела имеем:

$$\nabla\left(g_2 - g_1\right)_T = -\frac{1}{\rho}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\nabla\sigma_{ll} +$$
$$+\left(-\beta_1^2 + \beta_1^1 + \beta_2^2 - \beta_2^1\right)\nabla C_2 + \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\frac{\sigma_{ll}}{\rho^2}\nabla\rho.$$

Следовательно,

$$\mathbf{J}_q = -L_{qq}\frac{\nabla T}{T^2} + L_{q2}\frac{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}{T\rho} \times$$
$$\times\left\{\nabla\sigma_{ll} + \frac{\sigma_{ll}}{\rho}\nabla\rho - \left(-\beta_1^2 + \beta_1^1 + \beta_2^2 - \beta_2^1\right)\nabla C_2\right\};$$
$$\mathbf{J}_2 = -L_{2q}\frac{\nabla T}{T^2} + L_{22}\frac{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}{T\rho} \times$$
$$\times\left\{\nabla\sigma_{ll} + \frac{\sigma_{ll}}{\rho}\nabla\rho - \left(-\beta_1^2 + \beta_1^1 + \beta_2^2 - \beta_2^1\right)\nabla C_2\right\}.$$

Положим, что

$$\rho = \rho\left(T, \sigma_{ij}^e, C_k\right).$$

Тогда

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{\sigma,C_k} dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k} d\sigma_{\alpha\beta}^e + \left(\frac{\partial \rho}{\partial C_k}\right)_{T,\sigma} dC_k \quad (52)$$

и

$$\left(\nabla\rho\right)_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma_{ij}}\right)_{T,C_k} \nabla\sigma_{\alpha\beta}^e + \left(\frac{\partial \rho}{\partial C_k}\right)_{T,\sigma} \nabla C_k.$$

Используя это соотношение и определения коэффициентов переноса, введенные выше, запишем:

$$\mathbf{J}_q = -\lambda_T \nabla T + TC_2 DS_T\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) \times$$
$$\times\left(\nabla\sigma_{ll}^e + \frac{\sigma_{ll}^e}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma_{ij}^e}\right)_{T,C_k} \nabla\sigma_{ij}^e\right) - DQ_{eff}^* \nabla C_2; \quad (53)$$

$$\mathbf{J}_2 = -C_2 D S_T \rho \nabla T + \frac{D_0 C_2 m_2}{RT}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\times$$
$$\times\left(\nabla\sigma^e_{ll} + \frac{\sigma^e_{ll}}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\sigma^e_{ij}}\right)_{T,C_k}\nabla\sigma^e_{ij}\right) - \rho D_{eff}\nabla C_2, \quad (54)$$

где

$$Q^*_{eff} = Q^* - 2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)TS_T\sigma^e_{ll}\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln C_2}\right)_{T,\sigma};$$

$$D_{eff} = D_0\left(F\left(C_2\right) - 2\frac{m_2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}{RT}\frac{\sigma^e_{ll}}{\rho}\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln C_2}\right)_{T,\sigma}\right).$$

Если $\rho = \text{const}$, из (52), (53) приходим к формулам, полученным в [40].

Остановимся теперь на соотношениях для компонент тензора деформаций (49). Используя (52), получим

$$d\varepsilon_{ij} = \left[\alpha^T_{ij} - \overline{S}_{ij\alpha\beta}\frac{\sigma^e_{\alpha\beta}}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{\sigma,C_k}\right]dT +$$
$$+\overline{S}_{ij\alpha\beta}\frac{1}{\rho}\left[1 - \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln\sigma^e_{\alpha\beta}}\right)_{T,C_k}\right]d\sigma^e_{\alpha\beta} + \quad (55)$$
$$+\left[\alpha^k_{ij} - \overline{S}_{ij\alpha\beta}\frac{\sigma^e_{\alpha\beta}}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial C_k}\right)_{T,\sigma}\right]dC_k.$$

Во всех соотношениях $\varepsilon_{ij}$ – компоненты полного тензора деформаций. Первое слагаемое в (55) дает термические деформации, последнее – деформации, связанные с изменением состава, которые, как правило, необратимы. Среднее слагаемое связывает приращения деформаций с приращением упругих напряжений. Но здесь имеется поправка на изменение плотности.

Уравнения для этого варианта теории собраны в таблице справа.

Никаких преимуществ уравнения, полученные разными способами, друг перед другом не имеют. Если речь идет об описании диффузии и сопутствующих явлений в условиях контролируемого объема (или деформаций), то следует использовать уравнение, построенное с помощью потенциала Гельмгольца. То есть в этом случае задачу решаем в деформациях. Если описывается процесс для условий контролируемого давления (напряжений), то более подходящим является уравнение, построенное с помощью потенциала Гиббса. В этом случае решаем задачу в напряжениях.

Заметим, что с помощью стандартных термодинамических методов можно установить соответствия между коэффициентами, измеряемыми для разных условий, и показать эквивалентность полученных уравнений, как это делается и для $\rho = \text{const}$, на чем в данной работе не останавливаемся.

## Заключение

Таким образом, в работе представлен вывод основных соотношений теории термоупругой диффузии для среды с изменяющейся плотностью. Подобное обобщение сделано впервые. Соотношения, полученные с помощью потенциала Гиббса и потенциала Гельмгольца, внешне различаются; однако все механизмы взаимодействия полей присутствуют в соотношениях в любом случае. Показано, что влияние напряжений и деформаций на перенос компонента и перенос тепла проявляется не только через инварианты тензоров. Сдвиговые компоненты тензоров напряжений и деформаций оказывают влияние на компоненты плотности потоков тепла и массы. В этом нет никакого противоречия с термодинамикой: плотность как скалярная величина может зависеть от всех компонент тензоров напряжений и деформаций. Результат остается справедливым как для анизотропного, так и для изотропного тела.

Обобщенные уравнения, полученные без применения предположения о постоянстве плотности, точно так же, как и более простые уравнения для потоков тепла и массы, могут быть использованы в качестве определяющих соотношений для построения как квазистатических, так и динамических моделей процессов переноса в деформируемых средах. В первом случае верификация будет возможна при постановке специальных экспериментов, соответствующих не одноосному нагружению (или одноосной деформации), а условиям плоского напряженно-деформированного состояния, когда нельзя пренебречь сдвиговыми компонентами тензоров.

Дополнительно заметим, что формулы вида (28), (29) могут быть использованы для экспериментального определения тензоров коэффициентов концентрационного и термического расширения по данным об изменении плотности.

## Библиографический список

1. Lord, H. generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. Lord, Y.A. Shulman // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. – 1967. – Vol. 15. – P. 299–309. DOI: 10.1016/0022-5096(67)90024-5

2. Nowacki, W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids I / W. Nowacki // Bulletin of the Polish Academy of Sciences – Technical Sciences. – 1974. – Vol. 22. – P. 55–64.

3. Darinskii, B.M. On the theory of diffusion relaxation in polycrystals / B.M. Darinskii, T.D. Shermergor // J Appl Mech Tech Phys. 1965. – No 6. – P. 54–57. DOI: 10.1007/BF00913383

4. Podstrigach, Y.S. Diffusion theory of the inelasticity of metals / Y.S. Podstrigach // J Appl Mech Tech Phys. – 1965. – No 2. – P. 56–60. DOI: 10.1007/BF00915613

5. Любов, Б.Я. Влияние концентрационных напряжений на процессы диффузии в твердых растворах / Б.Я. Любов, Н.С. Фастов // ДАН СССР.1952. – Т. 84, Вып. 5. – С. 939–941.

6. Фастов, Н.С. К термодинамике необратимых процессов в упруго-деформированных средах / Н.С. Фастов // Проблемы металловедения и физики металлов. – М.: Металлургиздат. – 1958. – No 5. – С. 550–576.

7. Sherief, H.H. The theory of generalized thermoelastic diffusion p / H.H. Sherief, F. Hamza, H. Saleh // International Journal of Engineering Science. – 2004. – Vol. 42. – P. 591–608. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2003.05.00

8. Paul, K. A novel mathematical model on generalized thermoelastic diffusion theory / K. Paul, B. Mukhopadhyay // Journal of Thermal Stresses. – 2023. Vol. 46, iss.4. – P. 253–275. DOI: 10.1080/01495739.2023.2176385

9. Aouadi, M. Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media p / M. Aouadi // Journal of Thermal Stresses. – 2008. – Vol. 31, no 3. – P. 270–285. DOI: 10.1080/01495730701876742

10. Singh, B. On theory of generalized thermoelastic solids with voids and diffusion / B. Singh // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2011. – Vol. 30. – P. 976–982. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2011.06.007

11. Aouadi, M. The coupled theory of micropolar thermoelastic diffusion / M. Aouadi // Acta Mech. – 2009. – Vol. 208, no. 3. – P. 181–203. DOI: 10.1007/s00707-008-0137-0

12. Copetti, M.I.M. A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory / M.I.M. Copetti, M. Aouadi // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – Vol. 109. – P. 157–183. DOI: 10.1016/j.apnum.2016.06.011

13. Kaspar, L. A Chemo-Thermo-Mechanically Coupled Theory for Elastic–viscoplastic Deformation, Diffusion, and Volumetric Swelling Due to a Chemical Reaction / L. Kaspar, and L. Anand // International Journal of Plasticity. –2011. – Vol. 27, no. 9. – P. 1409–143. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.04.001

14. Kansal, T. Generalized theory of thermoelastic diffusion with double porosity / T. Kansal // Arch. Mech., 2018. – Vol. 70, no. 3. – P.241–268.

15. A model of nonlinear thermo-electroelasticity in extended thermodynamics / M.S. Abou-Dina, A.R. El Dhab, A.F. Ghale, E.K. Rawy // International Journal of Engineering Science. – 2017. – Vol. 119. – P. 29–39. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.06.010

16. Electromagnetic field in fiber-reinforced micropolar thermoelastic medium using four models / S.M. Abo-Dahab, A.M. Abd-Alla, A.A. Kilany // Journal of Ocean Engineering and Science. – 2020. – Vol. 5. – P. 230–248. DOI: 10.1016/j.joes.2019.12.003;

17. Abouelregal, A.E. Generalized mathematical novel model of thermoelastic diffusion with four phase lags and higher-order time derivative / A.E. Abouelregal // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – Vol. 135. – article number 263. DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00282-2

18. Guo, Ch.L.H. Eneralized thermoelastic diffusion problems with fractional order strain / Ch.L.H. Guo, X. Tian, T. He // European Journal of Mechanics / A Solids. – 2019. – Vol. 78. – Article number 103827. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103827

19. Li, Ch. Fractional-order rate-dependent thermoelastic diffusion theory based on new definitions of fractional derivatives with non-singular kernels and the associated structural transient dynamic responses analysis of sandwich-like composite laminates / Ch. Li, J. Liu, T. He // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2024. – Vol. 132. – Article number 107896. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.107896

20. Aouadi, M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia / M. Aouadi, M.I.M. Copetti // AppliedNumericalMathematics. – 2018. – Vol. 126. – P. 113–137. DOI: 10.1016/j.apnum.2017.12.007

21. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space / T. He, Ch. Li, Sh. Shi, Yo. Ma // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2015. – Vol. 52. – P. 37–43. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.01.002

22. Miglani, A. Wave Propagation in Micropolar Thermoelastic Diffusion Medium / A. Miglani, S. Kaushal // Journal of Solid Mechanics. – 2012. – Vol. 4, no. 2. – P. 195–208.

23. Yadav, A.K. Thermoelastic waves in a fractional-order initially stressed micropolar diffusive porous medium / A.K. Yadav // Journal of Ocean Engineering and Science. – 2021. – Vol. 6. – P. 376–388. DOI: 10.1016/j.joes.2021.04.001

24. Davydov, S.A. Thermoelastic diffusion phase-lag model for a layer with internal heat and mass sources / S.A. Davydov, A.V. Zemskov // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2022. – Vol. 183., Part C. – Article number 122213. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122213

25. Зверев Н.А., Земсков А.В. Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков / Н.А. Зверев, А.В. Земсков // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 1. – С. 95–112. DOI: 10.20948/mm-2023-01-07

26. Time-domain finite element method to generalized diffusion-elasticity problems with the concentration-dependent elastic constants and the diffusivity / Ch. Li, H. Guo, X. Tian, T. He // Applied Mathematical Modelling. –.2020. – Vol. 87. – P. 55–76. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.004

27. Madureira, R.L.R. Numerical analysis for a thermoelastic diffusion problem in moving boundary / R.L.R. Madureira, A.M.A. Rincon, M. Aouadi // Mathematics and Computers in Simulation. – 2021. – Vol. 187. – P. 630–655. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.03.032

28. Numerical solution to a nonlinear, one-dimensional problem of anisotropic thermoelasticity with volume force and heat supply in a half-space: interaction of displacements / W. Mahmoud,· A.F. Ghale, E.K. Rawy, H.A.Z. Hassan, A.A. Mosharaf // Arch Appl Mech. – 2015. – Vol. 85. – P. 433–454. DOI: 10.1007/s00419-014-0921-3

29. Parfenova, E.S. The chemical interaction charged particles with target material under surface treatment of metal with particle beam / E.S. Parfenova, A.G. Knyazeva // Zeitschrift fur angewandte mathematik und mechanics. – 2022. – Vol. 102, no. 8. – Article number e202200083. DOI: 10.1002/zamm.202200083

30. Parfenova, E.S. Surface treatment of metal by combined particle beam / E.S. Parfenova, A.G. Knyazeva // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 205. – Article number 104150. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104150

31. Kondepudi, D. Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures / D. Kondepudi, I. Prigogine. – Wiley: Chichester, UK, 1998. – 486 p.

32. Gyarmati, I. Non-equilibrium Thermodynamics: Field Theory and Variational Principles / I. Gyarmati. – Springer: Berlin, Heidelberg, 1970. – 184 p.

33. Князева, А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов / А.Г. Князева. – Томск: Иван Федоров, 2014. – 172 с.

34. Новацкий, В. Теория упругости (перевод с польского) / В. Новацкий. – М.: Мир., 1975. – 72 с.

35. Коваленко, А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1965. – 202 с.

36. Шермергор, Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т.Д. Шермергор. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

37. Свелин, Р.А. Термодинамика твердого состояния / Р.А. Свелин. – М.: Металлургия, 1968. – 316 с.

38. Гуров, К.П. Взаимная диффузия в многофазных системах / К.П. Гуров, Б.А. Карташкин, Ю.Э. Угасте. – М.: Наука, 1981. – 350 с.

39. Еремеев, В.С. Диффузия и напряжения / В.С. Еремеев. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 180 с.

40. Князева, А.Г. Коэффициенты переноса для трехкомпонентного деформируемого сплава / А.Г. Князева, В.Н. Демидов // Вестник ПермГТУ, Механика. – 2011. – № 3. – С. 84–99.

41. Povstenko, Y.Z. From the Chemical Potential Tensor and Concentration Tensor to Nonlocal Continuum Theories / Y.Z. Povstenko // J. of Math. Sci. – 2020. – Vol. 249. – P. 389–403. DOI: 10.1007/s10958-020-04949-0

Knyazeva, A.G. Generalizations of the Clapeyron-Clausius equation in a coupled thermomechanical model / A.G. Knyazeva // J. of Applied mechanics and technical Physics. – 1999. – Vol. 40, no. 6. – P.103–111. DOI: 10.1007/BF02469178

## References

1. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity, // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. – 1967. – V. 15. – pp. 299-309. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5

2. Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in solids I / W. Nowacki // Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Sciences. – 1974. – V. 22. – pp. 55-64.

3. Darinskii B.M., Shermergo, T.D. On the theory of diffusion relaxation in polycrystals // J Appl Mech Tech Phys. – 1965. – No 6. – pp. 54–57. https://doi.org/10.1007/BF00913383

4. Podstrigach, Y.S. Diffusion theory of the inelasticity of metals // J Appl Mech Tech Phys. 1965. No2. P. 56–60. https://doi.org/10.1007/BF00915613

5. Lyubov B. Ya. and Fastov N. S., Effect of concentrational stresses on diffusion processes in solid solutions // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1952. – No. 5. – pp. 939–946.

6. Fastov N.S. On thermodynamics of irreversible processes in elastic deformed media (in Russian) // Problemy metallovedeniya I fisiki metallov. – 1958. – No 5. – pp. 550–576.

7. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. The theory of generalized thermoelastic diffusion // International Journal of Engineering Science. – 2004. – V. 42. – pp. 591-608. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2003.05.00

8. Paul K., Mukhopadhyay B. A novel mathematical model on generalized thermoelastic diffusion theory // Journal of Thermal Stresses. – 2023. V. 46, Is.4. – pp. 253-275. https://doi.org/10.1080/01495739.2023.2176385

9. Aouadi M. Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media / M. Aouadi // Journal of Thermal Stresses. – 2008. – V. 31, No 3. – pp. 270-285. https://doi.org/10.1080/01495730701876742

10. Singh B. On theory of generalized thermoelastic solids with voids and diffusion // European Journal of Mechanics A/Solids 30. – 2011. P. 976-982. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.06.007

11. Aouadi M. The coupled theory of micropolar thermoelastic diffusion // Acta Mechanica – 2009. – V. 208, No 3. – pp.181-203. https://doi.org/10.1007/s00707-008-0137-0

12. Copetti M.I.M., Aouadi M.A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – V. 109. – pp. 157–183. http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011

13. Kaspar L., and Anand L. A Chemo-Thermo-Mechanically Coupled Theory for Elastic–viscoplastic Deformation, Diffusion, and Volumetric Swelling Due to a Chemical Reaction // International Journal of Plasticity. –2011. – V. 27, No. 9. pp. 1409-143.1 http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.04.001

14. Kansal T. Generalized theory of thermoelastic diffusion with double porosity // Arch. Mech. – 2018. – V. 70, No 3. – pp.241–268.

15. Abou-Dina M.S., El Dhab A.R., Ghale A.F., Rawy E.K. A model of nonlinear thermo-electroelasticity in extended thermodynamics // International Journal of Engineering Science. – 2017. – V. 119. – pp. 29–39. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.06.010

16. Abo-Dahab S.M., Abd-Alla A.M., Kilany A.A.Electromagnetic field in fiber-reinforced micropolar thermoelastic medium using four models // Journal of Ocean Engineering and Science. –2020. – V. 5. – pp. 230–248. https://doi.org/10.1016/j.joes.2019.12.003

17. Abouelregal A.E. Generalized mathematical novel model of thermoelastic diffusion with four phase lags and higher-order time derivative // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – V. 135. – Article number 263 https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00282-2

18. Guo Ch.L.H., Tian X., He T. eneralized thermoelastic diffusion problems with fractional order strain // European Journal of Mechanics / A Solids. –.2019. V. 78. –Article number 103827. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103827

19. Li Ch., Liu J., He T., Fractional-order rate-dependent thermoelastic diffusion theory based on new definitions of fractional derivatives with non-singular kernels and the associated structural transient dynamic responses analysis of sandwich-like composite laminates, // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. –2024. - V. 132. –Article number 107896. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107896

20. Aouadi M., Copetti M.I.M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia // AppliedNumericalMathematics. – 2018. – V. 126. – pp. 113–137. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007

21. He T., Li Ch., Shi Sh., Ma Yo. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2015. – V. 52. – pp. 37-43. http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.01.002

22. Miglani A., Kaushal S. Wave Propagation in Micropolar Thermoelastic Diffusion Medium // Journal of Solid Mechanics. – 2012. – V. 4, No. 2. – pp 195-208.

23. Yadav A.K. Thermoelastic waves in a fractional-order initially stressed micropolar diffusive porous medium // Journal of Ocean Engineering and Science. – 2021. – V. 6. – pp. 376–388. https://doi.org/10.1016/j.joes.2021.04.001

24. Davydov S.A., Zemskov A.V. Thermoelastic diffusion phase-lag model for a layer with internal heat and mass sources // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2022. – V. 183. – Part C. – Article number 122213. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122213

25. Zverev N.A., Zemskov A.V. Modeling of non-stationary mechanodiffusion processes in hollow cylinder with regard to relaxation diffusion fluxes (in Russian) // Matematicheskoe modelirovanie. – 2023. – V. 35, № 1. – pp. 95-112. https://doi.org/10.20948/mm-2023-01-07

26. Li Ch., Guo H., Tian X., He T. Time-domain finite element method to generalized diffusion-elasticity problems with the concentration-dependent elastic constants and the diffusivity // Applied Mathematical Modelling. – 2020. – V. 87. – pp. 55–76. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.05.004

27. Madureira R.L.R., A. Rincon M.A., Aouadi M. Numerical analysis for a thermoelastic diffusion problem in moving boundary // Mathematics and Computers in Simulation. – 2021. – V. 187. – pp. 630–655. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.032

28. Mahmoud W.,·Ghale A. F., Rawy E. K., Hassan H. A. Z., Mosharaf A. A. Numerical solution to a nonlinear, one-dimensional problem of anisotropic thermoelasticity with volume force and heat supply in a half-space: interaction of displacements // Arch Appl Mech. – 2015. V. 85. pp. 433–454. https://doi.org/10.1007/s00419-014-0921-3

29. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. The chemical interaction charged particles with target material under surface treatment of metal with particle beam // Zeitschrift fur angewandte mathematik und mechanics. – 2022. –V. 102, No 8. – Article number e202200083. https://doi.org/10.1002/zamm.202200083

30. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. Surface treatment of metal by combined particle beam // International Journal of Engineering Science. – 2024. – V. 205. Article number 104150. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2024.104150

31. Dilip Kondepudi, Ilya Prigogine Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures. – Wiley: Chichester, UK., 1998. – 486 p.

32. Gyarmati I. Non-equilibrium Thermodynamics: Field Theory and Variational Principles. – Springer: Berlin, Heidelberg, 1970. –184 p.

33. Knyazeva A.G. Introduction to thermodynamics of irreversible processes. Lections on models (in Russian). – Tomsk: Ivan Fedorov, 2014. – 172 p.

34. Nowacki W. Elasticity theory / M.: Mir., 1975. – 872 p.

35. Kovalenko A.D. Introduction to thermal elasticity (in Russian). – Kiev: Naukova dumka, 1965. – 202 p.

36. Shermergor T.D. Elasticity theory for micro heterogeneous media. – M.: Nauka, 1977 . – 400 p.

37. Svelin R.A., Thermodynamics of solid state (in Russian). – M.: Metallurgiya, 1968. – 316 p.

38. Gurov K.P., Kartashkin B.A., Ugaste Yu. E. Mutual diffusion in multiphase systems. – M.: Nauka,– 1981. – 350.

39. Eremeev V.S. Diffusion and stresses. – M: Energoatomizdat, 1984. – 180 p.

40. Knyazeva A.G., Demidov V.N. Transfer coefficients for three component deformable alloy (In Russian) // Vestnik Perm GTU. Mechanika. – 2011. – № 3. – pp.84-99.

41. Povstenko Y.Z. From the Chemical Potential Tensor and Concentration Tensor to Nonlocal Continuum Theories // J. of Math. Sci. – 2020. – V. 249. – pp. 389–403. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04949-0

42. Knyazeva A.G. Generalyzation of . Generalizations of the Clapeyron-Clausius equation in a coupled thermomechanical model // J. of Applied mechanics and technical Physics. – 1999. – V. 40, № 6. – pp. 103-111. https://doi.org/10.1007/BF02469178.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.
**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
**Вклад автора.** 100 %.

**Funding.** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Problems of Materials Science SB RAS, topic number FWRW-2022-0003.
**Conflict of interest.** The author declare no conflict of interest.
**The contribution** is 100 %.