Бояршинов, Д.А. Идентификация и верификация вязкогиперупругих констант определяющих соотношений для амортизационной резины / Д.А. Бояршинов, О.Ю. Сметанников. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.02 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 24–37.

Perm Polytech Style: Boyarshinov D.A., Smetannikov O.Yu. Identification and verification of visco-hyperelastic constants of defining relations for shock absorbing rubber. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 4, pp. 24-37. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.02
УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ ВЯЗКОГИПЕРУПРУГИХ КОНСТАНТ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ АМОРТИЗАЦИОННОЙ РЕЗИНЫ

Д.А. Бояршинов[1], О.Ю. Сметанников[2]

[1]Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Пермь, Российская Федерация
[2]Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 29 апреля 2025 г.
Одобрена: 03 октября 2025 г.
Принята к публикации: 15 октября 2025 г.

Ключевые слова:

гиперупругость, вязкоупругость. потенциал Муни – Ривлина, потенциал Нео-Гука, свойства материала, резина, циклическое деформирование.

АННОТАЦИЯ

В настоящее время в конструкциях виброзащитных устройств широкое применение нашли высокоэластические материалы, проявляющие ярко выраженные реологические свойства, способствующие снижению пиковых амплитуд колебаний в резонансных режимах. Проектирование подобных конструкций в современных условиях требует построения математической модели, наиболее ответственной частью которой являются определяющие соотношения для описания вязкоупругого и гиперупругого поведения материала и адекватная методика идентификации материальных констант. Цель данного исследования заключается в построении методики определения вязкогиперупругих свойств материала на основании данных квазистатических испытаний. При описании гиперупругого поведения материала использовались потенциалы энергии деформации Муни – Ривлина с двумя константами и Нео-Гука с учетом сжимаемости, а при учете вязкоупругости функция релаксации раскладывалась в ряды Прони. Получены полуаналитические выражения зависимости напряжений от главных растяжений и времени с учетом вязкогиперупругого поведения материала в случаях одноосного напряженного и одноосного деформированного состояний. Для выбора оптимального распределения параметров аппроксимации относительных модулей сдвига и диапазона времен релаксации было оценено влияние изменения вязкоупругих параметров на величину гистерезиса и максимальных напряжений в цикле при различной скорости деформирования. Для вычисления параметров аппроксимации материальных свойств рассматривались результаты натурных циклических испытаний на свободное растяжение и сжатие, а также стесненное сжатие. Разработана процедура определения вязкогиперупругих свойств материала, которая заключается в минимизации разницы между результатами натурных испытаний и вычисленного с помощью построенных полуаналитических выражений значений отклика с использованием метода Нелдера – Мида. В результате были определены гиперупругие и вязкоупругие свойства материала, которые с достаточной точностью согласуются с экспериментальными кривыми. Показано, что потенциал Нео-Гука при своей более простой форме позволяет описать данные натурных испытаний наравне с потенциалом Муни – Ривлина с двумя константами. Вычисленные свойства материала были верифицированы на основании сравнения данных испытаний амортизатора и результатов численного моделирования деформирования демпфера.

© **Бояршинов Дмитрий Альбертович** – инженер-конструктор, e-mail: houston707@mail.ru.
Сметанников Олег Юрьевич – д. т. н., профессор кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики, e-mail: sou2009@mail.ru.

Dmitry A. Boyarshinov – Engineer, Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, e-mail: houston707@mail.ru.
Oleg Yu. Smetannikov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, e-mail: sou2009@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

IDENTIFICATION AND VERIFICATION OF VISCO-HYPERELASTIC CONSTANTS OF DEFINING RELATIONS FOR SHOCK ABSORBING RUBBER

D.A. Boyarshinov[1], O.Yu. Smetannikov[2]

[1]Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, Perm, Russian Federation
[2]Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 29 April 2025
Approved: 03 October 2025
Accepted for publication:
15 October 2025

Keywords:

hyperelasticity, viscoelasticity, Mooney – Rivlin potential, Neo-Hookean potential, material properties, rubber, cyclic deformation.

ABSTRACT

Nowadays, highly elastic materials showing pronounced rheological properties that contribute to the reduction of peak amplitudes of vibrations in resonance modes are widely used in the designs of vibration-protective devices. The design of such structures in modern conditions requires the construction of a mathematical model, the most important part of which are the defining relations for the description of viscoelastic and hyperelastic behavior of the material and an adequate methodology for the identification of material constants. The purpose of this study is to construct a methodology for determining the visco-hyperelastic properties of a material based on quasi-static test data. In describing the hyperelastic behavior of the material, the Mooney – Rivlin strain energy potential with two constants and Neo-Hookean potential with consideration of compressibility were used, and when viscoelasticity was taken into account, the relaxation function was expanded into Prony series. Semi-analytical expressions of stress dependence on principal strains and time with account of visco-hyperelastic behavior of the material in cases of uniaxial stressed and uniaxial deformed states are obtained. To select the optimum distribution of approximation parameters of relative shear moduli and range of relaxation times, the effect of changing viscoelastic parameters on the magnitude of hysteresis and maximum stresses in the cycle at different strain rates was evaluated. The results of full-scale cyclic tests in free tension and compression and constrained compression were used to calculate material constants. A procedure for determining the visco-hyperelastic properties of the material has been developed, which consists in minimizing the difference between the results of mechanical tests and the response values calculated using the constructed semi-analytical expressions using the Nelder – Mead method. As a result, the hyperelastic and viscoelastic material properties were determined, which agree with the experimental curves with reasonable accuracy. It is shown that the Neo-Hookean potential with its simpler form allows describing the data of mechanical tests on a par with the Mooney – Rivlin potential with two constants. The calculated material properties were verified by comparing the shock absorber test data and the results of numerical simulation of the shock absorber deformation.

В современных условиях высока потребность в построении математических моделей высокоэластичных материалов, проявляющих явные реологические свойства. Наиболее известными представителями данного класса материалов являются резины [1], пены [2], живые ткани [3] и т.д. Данные материалы имеют широкое применение благодаря своей способности претерпевать большие упругие деформации, рассеивать энергию из-за высоких демпфирующих свойств и эффекту памяти формы [4]. Разработка и применение моделей тел из указанных материалов производится в медицине [3; 5], робототехнике [6], системах снижения вибрации или ударов [7] и т.д. При построении данных моделей в целях описания больших обратимых деформаций, имеющих нелинейную связь с напряжениями, используют модели гиперупругого поведения [8], а для моделирования влияния истории изменения во времени внешних нагрузок на напряжения и деформации применяют теорию вязкоупругости [9]. Важным этапом создания упомянутых математических моделей является определение материальных констант.

Для моделирования гиперупругих материалов необходимо в первую очередь определить вид потенциала энергии деформации. Выбор определенного типа данного потенциала основывается на следующих факторах: амплитуда деформаций, сходимость численного метода с отдельными потенциалами, а также моделируемое напряженно-деформированное состояние. В работах приводятся различные выражения для потенциала энергии деформации: нео-Гука [1; 2; 4], Огдена [3; 5], Арруда – Бойс [10–12], Муни – Ривлина [13–15] и др. [16; 17]. Для идентификации материальных констант гиперупругой модели обычно проводятся натурные испытания различных испытуемых образцов в выбранном наборе напряженно-деформированных состояний [17; 18], которые различаются количеством осей и симметричностью нагрузки, а также закреплениями. Примером является статья [7] о построении модели демпфера, которая содержит метод вычисления констант потенциала нео-Гука по данным деформирования образцов в условиях одноосного свободного растяжения лопаток и сдвигового нагружения цилиндров. Также в работе [19] определяются свойства белого вещества мозга для потенциала Огдена на основании одноосных и двуосных натурных испытаний.

При моделировании вязкоупругих тел наиболее часто используют одну из следующих моделей поведения: модель Максвелла [20–22], модель Кельвина – Фойгта [20–22], их обобщенные варианты [20; 23] и модель стандартного линейного твердого тела [20–22]. При описа-

нии вязкоупругой модели необходимо выбрать вид представления функции и скорости релаксации или ползучести, которые могут быть представлены в одном из следующих видов: ряды Прони [2; 3], степенные функции [24; 25], трехпараметрическое ядро в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова [17] и др. [25]. Вязкоупругие свойства материала часто проявляют существенную зависимость от температуры, и для термореологически простых материалов можно использовать температурно-временную аналогию, которая позволяет описывать релаксацию материала в заданном диапазоне температур через поведение при некоторой заданной температуре. Для описания температурно-временной аналогии широко используют формулу Вильямса – Ландела – Ферри [26]. Для определения параметров вязкоупругой модели можно проводить испытания на релаксацию или ползучесть, но требуемое время проведения экспериментов может быть слишком высоко. Данную проблему решают с помощью проведения испытаний на разных температурах, чтобы с помощью температурно-временной аналогии описать поведение материала в нужном диапазоне времен релаксации. Одним из широко применяемых типов испытаний является динамический механический анализ (ДМА), который заключается в гармоническом нагружении образца с малой частотой при переменной температуре [27].

Методики определения свойств материала обычно включают в себя проведение некоторого набора натурных испытаний и процедуру вычисления материальных констант на основании данных испытаний. Суть данных методик заключается в минимизации разницы между данными реакции, полученными по результатам испытаний, и результатами, вычисленными по подобранным константам материала. Для вычисления кривых отклика по подобранным материальным константам обычно используют аналитические решения [17; 18], которые могут быть получены для испытаний на образцах простой формы в условиях однородного напряженно-деформированного состояния с различными вариантами нагрузок по осям, но также некоторыми авторами для получения кривых реакций используются конечно-элементные модели проведенных испытаний [2; 3; 28], что требует больших вычислительных ресурсов. Для упрощения получения аналитических выражений часто гиперупругие и вязкоупругие константы определяются отдельно [2; 4]. В таком случае испытания для идентификации гиперупругих свойств проводятся с малой скоростью для снижения вязкоупругих эффектов, а эксперименты для вычисления вязкоупругих констант выполняют в малых деформациях. Однако существуют работы [3; 28], в которых свойства материала определяются на основании испытаний при явном проявлении вязкоупругих и гиперупругих свойств, что ведет к более сложным и требующим больше вычислительных ресурсов, но имеющим более высокую точность аналитическим или численным решениям. Для вычисления материальных констант используют различные методы минимизации разницы между экспериментальными и численными данными реакции материала на нагрузку: метод Нелдера – Мида [4; 29; 30], генетический алгоритм [11; 28; 31], нейронные сети [32] и др. [2; 3].

В предыдущей статье [33] вязкогиперупругие свойства материала амортизатора были определены по данным ДМА и испытаний в условиях одноосного напряженного состояния (ОНС) и одноосного деформированного состояния (ОДС) при записи реакции только во время приложения нагрузки от нуля до заданного значения. Таким образом в экспериментах в ОДС и ОНС нельзя было получить петлю гистерезиса, которая явно характеризует вязкое поведение материала. Испытания в условиях ОНС заключались в свободном растяжении лопаток, при котором напряжения в образце возникают только по оси нагружения, а эксперименты при ОДС представляли собой стесненное сжатие цилиндров в оснастке, не позволяющей образцу расширяться в направлении, поперечном нагрузке. После обработки результатов циклических испытаний при больших деформациях, которые за счет записи всей истории деформирования на разных амплитудах являются более релевантными для описания поведения материала при комнатной температуре, было выявлено, что величина гистерезиса не согласуется с данными ДМА. Это делает актуальной задачу построения методики определении вязкогиперупругих свойств материала на основании данных циклических испытаний.

Математическая постановка

Данная работа посвящена процессу деформирования материала, который проявляет явные гиперупругие и вязкоупругие свойства, что приводит к математической постановке, включающей в себя общие соотношения механики сплошных сред, а также определяющие соотношения вязкогиперупругого поведения.

В качестве общих соотношений механики сплошных сред приводятся уравнения равновесия:

$$\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\overline{\mathbf{F}}=0\,, \tag{1}$$

где $\tilde{\nabla}$ – оператор Гамильтона в конечной конфигурации, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, ρ – плотность, $\overline{\mathbf{F}}$ – вектор объемных нагрузок.

Так как в данной работе используются ряды Прони для описания вязкоупругого поведения и принимается условие постоянства модуля объемного сжатия, то, основываясь на [34], определяющие соотношения для описания вязкогиперупругого материала с учетом (2)–(3) можно записать в форме (4):

$$S_{ij}=2\frac{\partial W}{\partial C_{ij}}\,, \tag{2}$$

$$W\left(C\right)=w\left(\overline{C}\right)+U\left(J_C\right), \tag{3}$$

$$S_{ij}=\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)d\left(2\frac{\partial w}{\partial C_{ij}}\right)+2\frac{\partial U}{\partial C_{ij}},\quad(4)$$

где W – потенциал энергии деформации, S_{ij} – компоненты тензора напряжений Пиола – Кирхгофа второго рода, C_{ij} – компоненты тензора мер деформаций Коши-Грина, *w, U* – части потенциала энергии деформации, зависящие от изохорной части *C* и изменения объема соответственно, α_i – параметры аппроксимации относительных модулей сдвига, τ_i – параметры аппроксимации времен сдвиговой релаксации, n_G – количество параметров аппроксимации времен сдвиговой релаксации, *t* – время, $\overline{C}$ – изохорная часть *C*, J_C – определитель *C*.

Полуаналитическое решение задачи вязкогиперупругого деформирования в условиях ОНС и ОДС

На основе частого использования в мировой практике [16] в данной работе было решено использовать потенциалы энергии деформации в виде Муни – Ривлина с двумя константами и Нео-Гука с учетом сжимаемости. Потенциал Муни – Ривлина с двумя константами представляется в следующем виде:

$$W=C_{10}\left(\overline{I}_1-3\right)+C_{01}\left(\overline{I}_2-3\right)+\frac{1}{d}\left(J-1\right)^2,\quad(5)$$

где C_{10},C_{01},d – материальные константы, J – определитель тензора градиента места, $\overline{I}_i$ – инварианты девиатора тензора меры деформаций Коши – Грина.

Потенциал Нео-Гука является частным случаем представления Муни – Ривлина с константой $C_{01}=0$:

$$W=\frac{\mu}{2}\left(\overline{I}_1-3\right)+\frac{1}{d}\left(J-1\right)^2,\quad(6)$$

где μ – начальный модуль сдвига.

Дополнительные вспомогательные соотношения, использованные для вывода полуаналитического решения, приведены в [33]. Подставляя полученные в [33] выражения для гиперупругого поведения в соотношение (4), можно получить зависимости напряжений от главных растяжений и времени в случае ОНС и ОДС. Выражения напряжений для рассматриваемых далее состояний будут записаны только для направлений 1 и 3 в связи с равнозначностью направлений 1 и 2.

Рассмотрим случай ОНС с потенциалом Муни – Ривлина с двумя константами с учетом сжимаемости, где главные растяжения λ_i в направлении 1 и направлении 2 равны между собой $\lambda_1=\lambda_2$, а напряжения Коши в данных направлениях равны нулю $\sigma_{11}=\sigma_{22}=0$. Главное растяжение представляет собой относительную длину образца в рассматриваемом направлении $\lambda_i=\frac{l_i(t)}{l_i(0)}$.

Таким образом можно записать выражения для главных значений тензора напряжения Пиола – Кирхгофа второго рода S_{ii}:

$$S_{11}=\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)d\left(\frac{2}{3}C_{10}\left(\lambda_1^{\frac{-4}{3}}\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_1^{\frac{-10}{3}}\lambda_3^{\frac{4}{3}}\right)+\frac{2}{3}C_{01}\left(\lambda_1^{\frac{-2}{3}}\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_1^{\frac{-8}{3}}\lambda_3^{\frac{2}{3}}\right)\right)+2\lambda_3\frac{\left(\lambda_1^2\lambda_3-1\right)}{d}=0;\quad(7)$$

$$S_{33}=\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times d\left(\frac{4}{3}C_{10}\left(\lambda_1^{\frac{-4}{3}}\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_1^{\frac{2}{3}}\lambda_3^{\frac{-8}{3}}\right)+\frac{4}{3}C_{01}\left(\lambda_1^{\frac{-2}{3}}\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_1^{\frac{4}{3}}\lambda_3^{\frac{-10}{3}}\right)\right)+\frac{2\lambda_1^2\left(\lambda_1^2\lambda_3-1\right)}{\lambda_3 d}.\quad(8)$$

Главные истинные напряжения:

$$\sigma_{11}=\frac{1}{\lambda_3}\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times d\left(\frac{2}{3}C_{10}\left(\lambda_1^{\frac{-4}{3}}\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_1^{\frac{-10}{3}}\lambda_3^{\frac{4}{3}}\right)+\frac{2}{3}C_{01}\left(\lambda_1^{\frac{-2}{3}}\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_1^{\frac{-8}{3}}\lambda_3^{\frac{2}{3}}\right)\right)+2\frac{\left(\lambda_1^2\lambda_3-1\right)}{d}=0;\quad(9)$$

$$\sigma_{33}=\frac{\lambda_3}{\lambda_1^2}\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times d\left(\frac{4}{3}C_{10}\left(\lambda_1^{\frac{-4}{3}}\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_1^{\frac{2}{3}}\lambda_3^{\frac{-8}{3}}\right)+\frac{4}{3}C_{01}\left(\lambda_1^{\frac{-2}{3}}\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_1^{\frac{4}{3}}\lambda_3^{\frac{-10}{3}}\right)\right)+\frac{2\left(\lambda_1^2\lambda_3-1\right)}{d}.\quad(10)$$

Главные значения тензора напряжения Пиола – Кирхгофа первого рода:

$$S_{33}^*=\lambda_1^2\sigma_{33}=\lambda_3\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times d\left(\frac{4}{3}C_{10}\left(\lambda_1^{\frac{-4}{3}}\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_1^{\frac{2}{3}}\lambda_3^{\frac{-8}{3}}\right)+\frac{4}{3}C_{01}\left(\lambda_1^{\frac{-2}{3}}\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_1^{\frac{4}{3}}\lambda_3^{\frac{-10}{3}}\right)\right)+\frac{2\lambda_1^2\left(\lambda_1^2\lambda_3-1\right)}{d}=\frac{P(t)}{S_0},\quad(11)$$

где $P(t)$ – усилие сжатия в направлении 3, S_0 – начальная площадь поперечного сечения.

Для определения напряжений в направлении 3 необходимо вычислить главные растяжения в направлении 1 или 2, которые находятся из решения нелинейного уравнения (9) методом половинного деления.

Далее рассмотрим случай ОДС, где главные растяжения λ_i в направлении 1 и направлении 2 равны единице $\lambda_1=\lambda_2=1$, а определитель C равен λ_3, т.е. $J=\lambda_3$.

Главные значения тензора напряжения Пиола-Кирхгофа второго рода:

$$S_{11}=\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times$$
$$\times d\left(\frac{2}{3}C_{10}\left(\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_3^{\frac{4}{3}}\right)+\frac{2}{3}C_{01}\left(\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_3^{\frac{2}{3}}\right)\right)+2\lambda_3\frac{\left(\lambda_3-1\right)}{d};\quad(12)$$

$$S_{33}=\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times$$
$$\times d\left(\frac{4}{3}C_{10}\left(\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_3^{\frac{-8}{3}}\right)+\frac{4}{3}C_{01}\left(\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_3^{\frac{-10}{3}}\right)\right)+\frac{2\left(\lambda_3-1\right)}{\lambda_3 d}.\quad(13)$$

Главные истинные напряжения:

$$\sigma_{11}=\frac{2}{3\lambda_3}\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times$$
$$\times d\left(C_{10}\left(\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_3^{\frac{4}{3}}\right)+C_{01}\left(\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_3^{\frac{2}{3}}\right)\right)+\frac{2\left(\lambda_3-1\right)}{d}=0;\quad(14)$$

$$\sigma_{33}=\lambda_3\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times$$
$$\times d\left(\frac{4}{3}C_{10}\left(\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_3^{\frac{-8}{3}}\right)+\frac{4}{3}C_{01}\left(\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_3^{\frac{-10}{3}}\right)\right)+\frac{2\left(\lambda_3-1\right)}{d}.\quad(15)$$

Главные значения тензора напряжения Пиола – Кирхгофа первого рода:

$$S_{11}^*=S_{11}=\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times$$
$$\times d\left(\frac{2}{3}C_{10}\left(\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_3^{\frac{4}{3}}\right)+\frac{2}{3}C_{01}\left(\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_3^{\frac{2}{3}}\right)\right)+\quad(16)$$
$$+2\lambda_3\frac{\left(\lambda_3-1\right)}{d};$$

$$S_{33}^*=\sigma_{33}=\lambda_3\int_0^t\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n_G}\alpha_k\exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_k}\right)\right)\times$$
$$\times d\left(\frac{4}{3}C_{10}\left(\lambda_3^{\frac{-2}{3}}-\lambda_3^{\frac{-8}{3}}\right)+\frac{4}{3}C_{01}\left(\lambda_3^{\frac{-4}{3}}-\lambda_3^{\frac{-10}{3}}\right)\right)+\quad(17)$$
$$+\frac{2\left(\lambda_3-1\right)}{d}=\frac{P(t)}{S_0}.$$

Выражения для напряжений в случае использования потенциала нео-Гука получаются из приведенных выше при $C_{01}=0$.

Методика и результаты испытаний

Определение вязкогиперупругих констант материала в данной работе проводилось на основании натурных испытаний резины ИРП-1354, проведенных в ИМСС УрО РАН и ПНИПУ. Рассматривались эксперименты в условиях ОНС при растяжении и сжатии, а также при сжатии в ОДС. Для оценки поведения материала в ОНС при сжатии и растяжении испытания включали в себя деформирования двух типов образцов: растяжения лопаток и свободное сжатие цилиндров. В качестве образцов при скорости 25 %/мин в случае ОДС и ОНС при сжатии использовалось 6 цилиндрических образцов высотой 12 мм и диаметром 19 мм, а при растяжении в условиях ОНС – 5 лопаток с длиной рабочей части 40 мм, шириной 6 мм и толщиной 2 мм. В испытаниях в условиях ОНС при растяжении с различной скоростью использовался образец в форме прямоугольного параллелепипеда с длиной 15,5 мм, шириной 6,15 мм и толщиной 2 мм. Для минимизации трения в случае стесненного и свободного сжатия цилиндров использовалась смазка и пленки ПТФЭ. Так как наибольший интерес заключался в рассмотрении поведения материала в условиях циклического нагружения, то испытания представляли собой циклическое деформирование образцов с изменением амплитуды нагрузки. На рис. 1–2 приведены программы испытаний в виде зависимости нагрузки от времени. Дополнительно были проведены испытания в случае свободного растяжения при других скоростях деформирования. Программа испытаний для сжатия по модулю совпадает с программой для растяжения.

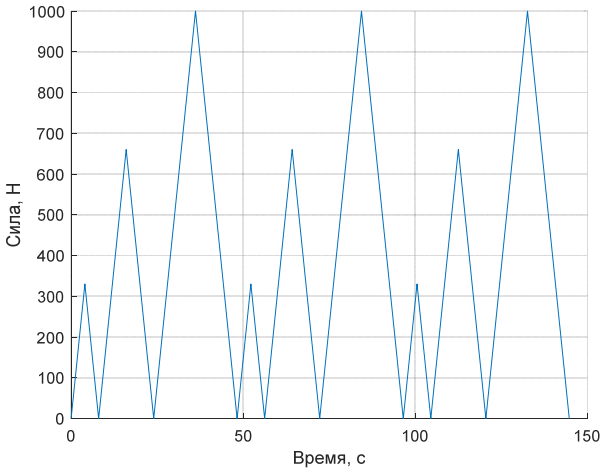


Рис. 1. Зависимость силовой нагрузки от времени в случае ОДС при сжатии

Fig. 1. Dependence of the force loading on time in the case of a uniaxial strain state under compression

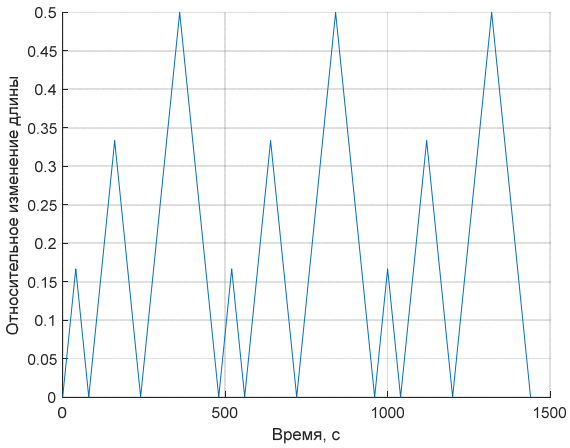


Рис. 2. Зависимость относительного изменения длины от времени в случае ОНС при растяжении со скоростью 25 %/мин

Fig. 2. Dependence of relative length change on time in the case of uniaxial stress state under tension at a speed of 25 %/min

Данные программы корректировались в ходе испытаний, исходя из жесткости материала и остаточных деформаций. На рис. 3 в качестве примера показана полученная зависимость напряжения Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины в условиях ОНС при растяжении со скоростью 18 %/мин при двух повторениях. В дальнейшем кривые результатов испытаний нескольких образцов усреднялись для получения одной кривой для каждого типа испытаний.

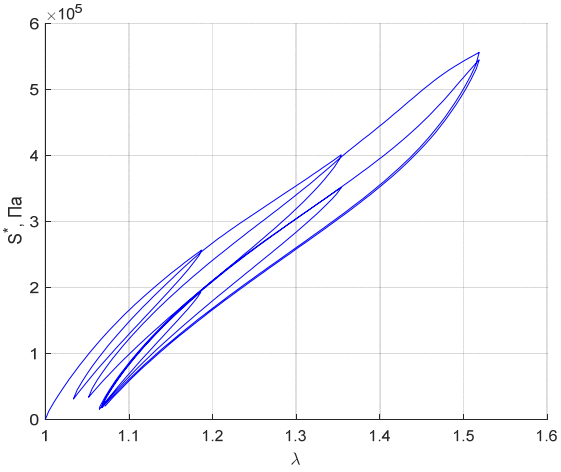
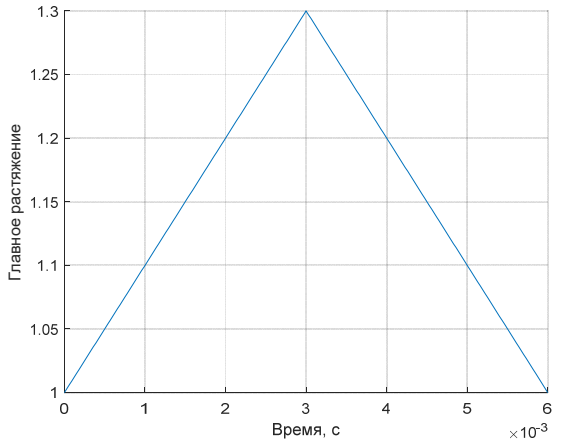


Рис. 3. Зависимость напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины в случае свободного растяжения при скорости 18 %/мин при двух повторениях

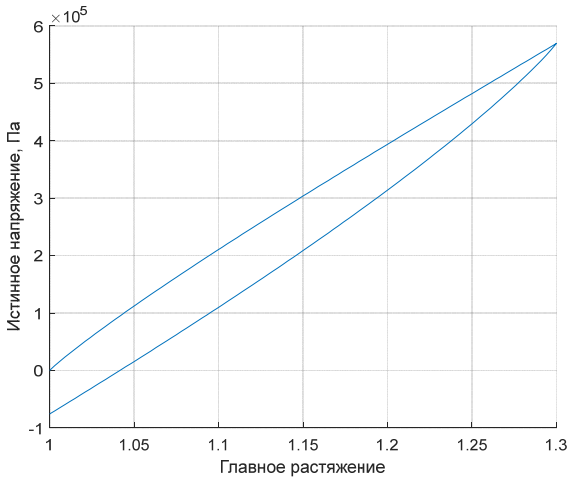
Fig. 3. Dependence of the first Piola – Kirchhoff stresses on relative length in the case of free stretching at a speed of 18 %/min with two repetitions

Выбор вида распределения вязкоупругих констант

По результатам испытаний на растяжение было выявлено, что при увеличении скорости деформирования с 18 до 90 %/мин величина гистерезиса и напряжений изменяется слабо. В связи с этим образовалась задача определения закона распределения параметров аппроксимации относительных модулей и диапазона времен релаксации, при которых происходит слабое изменение рассматриваемых параметров циклического деформирования путем оценки влияния на них вязкоупругих констант в заданном диапазоне скоростей. Для решения данной задачи с помощью полученных ранее выражений для потенциала нео-Гука в одноосном напряженном состоянии оценивалась величина максимальных истинных напряжений и гистерезиса в цикле деформирования с заданием изменения главного растяжения от 1 до 1,3 и обратно до 1 при различных скоростях деформирования и наборах вязкоупругих свойств. Величина гистерезиса вычислялась как интеграл от напряжений по главному растяжению в направлении приложения нагрузки. На рис. 4 приведены графики изменения нагрузки в виде главного растяжения и пример отклика в рассматриваемом цикле деформирования.



a

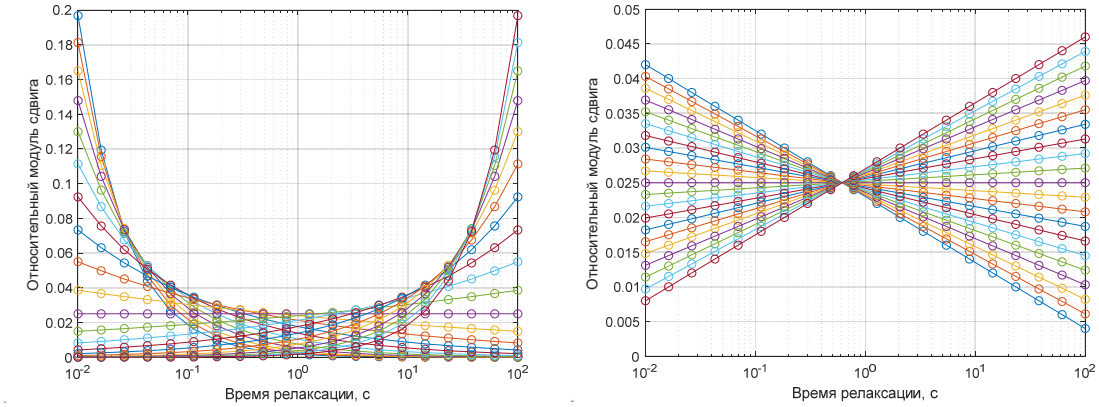


b

Рис. 4. Характеристики цикла деформирования: *a* – зависимость главного растяжения от времени; *b* – зависимость истинного напряжения от главного растяжения

Fig. 4. Characteristics of the deformation cycle: *a* – dependence of the principal stretches on time; *b* – dependence of the true stress on principal stretches

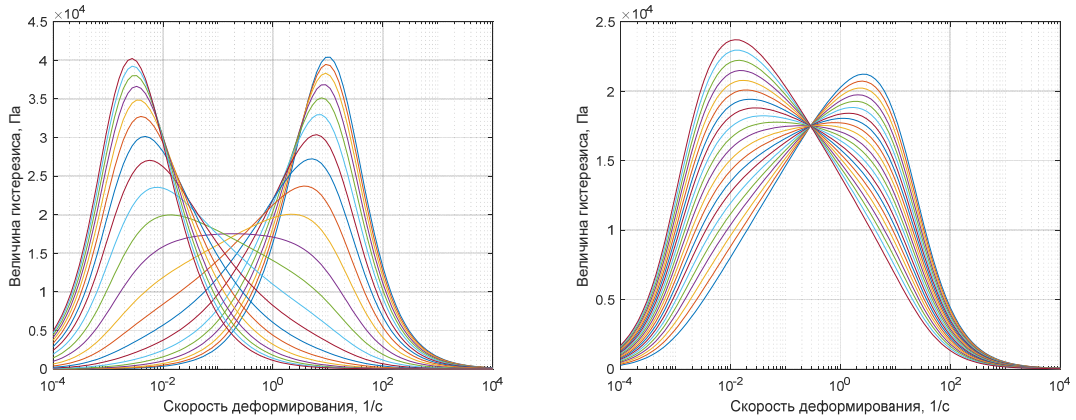
Первым оценивалось влияние вида распределения параметров аппроксимации относительных модулей α_i. Были получены характеристики цикла при различной скорости деформирования для нескольких наборов параметров аппроксимации относительных модулей в случае линейного и экспоненциального распределения с суммой относительных модулей 0,5, количестве членов ряда Прони 20, диапазоне времен релаксаций от 10^{-2} до 10^{2} с, $\mu = 10^{6}$ Па, $d = 10^{-9}$ 1/Па. Различные распределения параметров аппроксимации относительных модулей были получены путем варьирования коэффициента в функции, которая описывает закон линейного или экспоненциального распределения. На рис. 5 каждая кривая отображает свой набор вязкоупругих констант, соответствующий совпадающим по цвету кривым зависимости величины гистерезиса и максимальных напряжений от скорости деформирования на рис. 6, 7. По данным графикам можно сделать вывод, что только при равномерном распределении, которое соответствует фиолетовым кривым, существует область скоростей деформирования с неизменной величиной гистерезиса.



a *b*

Рис. 5. Зависимость параметров аппроксимации относительных модулей от соответствующих им параметров аппроксимации времен релаксаций: *a* – в случае экспоненциального распределения; *b* – в случае линейного распределения

Fig. 5. Dependence of the approximation parameters of relative shear moduli corresponding approximation parameters of relaxation times: *a* – in the case of an exponential distribution; *b* – in the case of a linear distribution

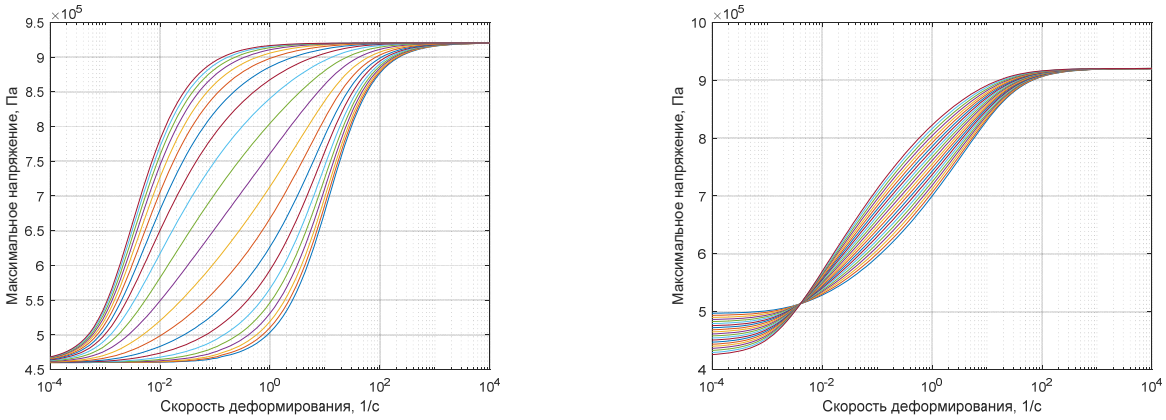


a *b*

Рис. 6. Зависимость величины гистерезиса от скорости деформирования: *a* – в случае экспоненциального распределения; *b* – в случае линейного распределения

Fig. 6. Dependence of the hysteresis value on the deformation rate: *a* – in the case of an exponential distribution; *b* – in the case of a linear distribution

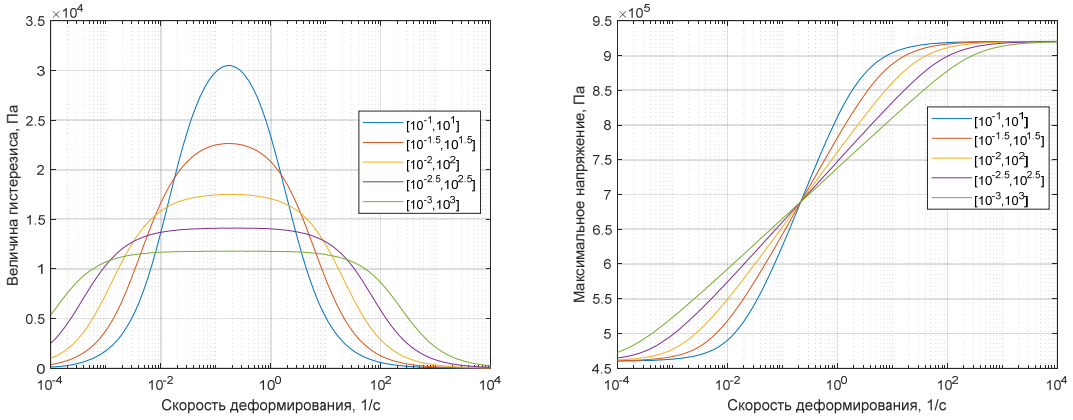
Для оценки влияния других вязкоупругих параметров были построены кривые зависимости параметров цикла от скорости приложения нагрузки при различных наборах времен релаксации с равномерным распределением α_i, исходя из приведенных выше результатов. Графики зависимости параметров цикла от скорости деформирования при изменении диапазона параметров аппроксимации времен релаксации и количества членов ряда Прони приведены на рис. 8–10. Данные графики позволяют сделать вывод, что с помощью изменения ширины диапазона можно варьировать величину максимального гистерезиса и длину участка, в котором он постоянен при разных скоростях деформирования, а смещение диапазона смещает кривые максимального напряжения и гистерезиса по оси скорости. Кривая максимального напряжения в цикле при расширении диапазона медленнее изменяется при изменении скорости деформирования, а увеличение количества членов ряда Прони уменьшает осцилляцию кривых параметров цикла и перестает влиять на них при достижении некоторого достаточно числа.



a *b*

Рис. 7. Зависимость максимального напряжения от скорости деформирования: *a* – в случае экспоненциального распределения; *b* – в случае линейного распределения

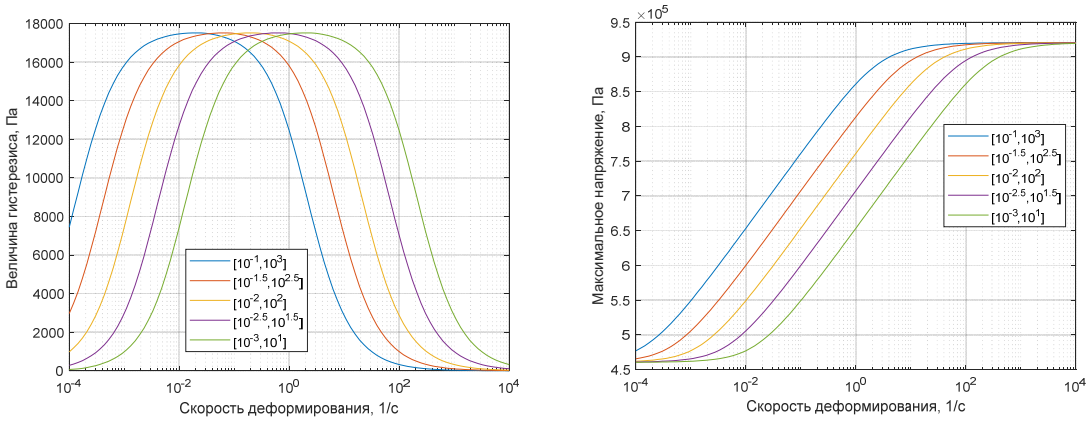
Fig. 7. Dependence of the maximum stress on the deformation rate: a – in the case of an exponential distribution; *b* – in the case of a linear distribution



a *b*

Рис. 8. Зависимость параметров цикла от скорости деформирования при изменении ширины диапазона времен релаксации: *a* – величина гистерезиса; *b* – максимальное напряжение

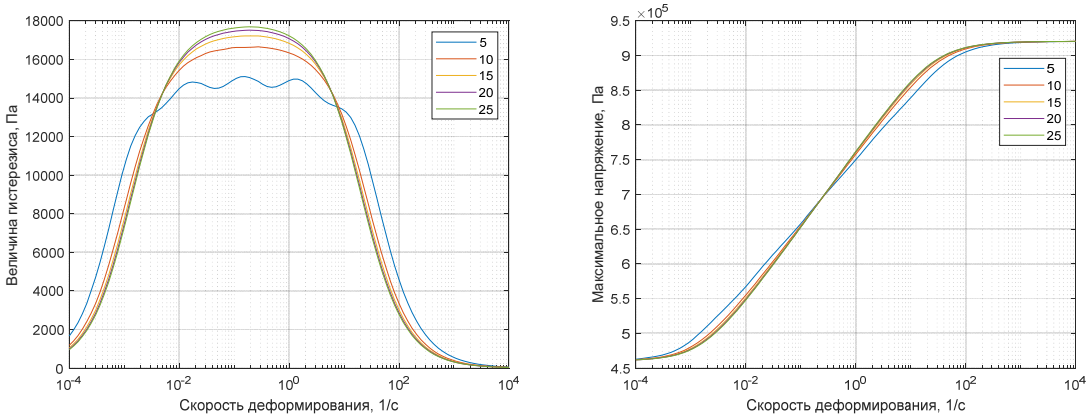
Fig. 8. Dependence of the cycle parameters on the deformation rate when changing the width of the relaxation time range: *a* – hysteresis value; *b* – maximum stress



a *b*

Рис. 9. Зависимость параметров цикла от скорости деформирования при смещении диапазона времен релаксации: *a* – величина гистерезиса; *b* – максимальное напряжение

Fig. 9. Dependence of the cycle parameters on the deformation rate when the relaxation time range is shifted: *a* – hysteresis value; *b* – maximum stress



a *b*

Рис. 10. Зависимость параметров цикла от скорости деформирования при изменении количества членов ряда Прони: *a* – величина гистерезиса; *b* – максимальное напряжение

Fig. 10. Dependence of the cycle parameters on the deformation rate when the number of members of the Prony series changes: *a* – hysteresis value; *b* – maximum stress

Идентификация вязкогиперупругих материальных констант

Определение материальных констант вязкогиперупругой модели производилось с помощью решения задачи минимизации разницы между результатами экспериментов и аналитическим решением с подобранными константами материала. В качестве функции отклонения экспериментально полученных напряжений от вычисленных на основании полученных выражений (11) и (17) использовалось следующее выражение:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - Y_i}{X_i}\right)^2}{n-1}}, \qquad (18)$$

где R – функция отклонения, n – количество точек сравнения, X_i – напряжения Пиола – Кирхгофа первого рода в точке i из данных натурных испытаний, Y_i – напряжения Пиола – Кирхгофа первого рода в точке i, вычисленные по формулам (11) и (17) с заданными материальными константами.

Для учета истории нагружения при вычислении напряжений рассматривался весь процесс деформирования, но в оптимизации использовались данные только последнего цикла, так как результаты данной работы в дальнейшем планируется применить для описания процесса циклических деформаций, а на первые циклы нагружения оказывает влияние эффект Маллинза [35]. Стоит отметить, что в данной работе свойства материала определялись в диапазоне деформаций до 35 %, и данные для циклов с большей амплитудой деформаций не использовались в оптимизации. Процесс минимизации R производился в программном пакете MatLab с использованием функции fminsearch, реализующей метод Нелдера – Мида. На рис. 11–14 приведены зависимости

напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины на последнем цикле нагружения в направлении оси деформирования для натурных экспериментов и из полуаналитического решения с подобранными параметрами для потенциала Муни – Ривлина $C_{10} = 3{,}87 \cdot 10^5$ Па, $C_{01} = 1{,}16 \cdot 10^2$ Па, $d = 1{,}79 \cdot 10^{-9}$ 1/Па и $\mu = 7{,}74 \cdot 10^5$ Па, $d = 1{,}79 \cdot 10^{-9}$ 1/Па для потенциала нео-Гука. Вычисленные вязкоупругие константы имеют 10 членов ряда разложения с параметрами аппроксимации относительных модулей сдвига равными 0,099 и параметрами аппроксимации временен релаксации, которые равномерно распределены в логарифмической шкале от 1 с до 10^7 с.

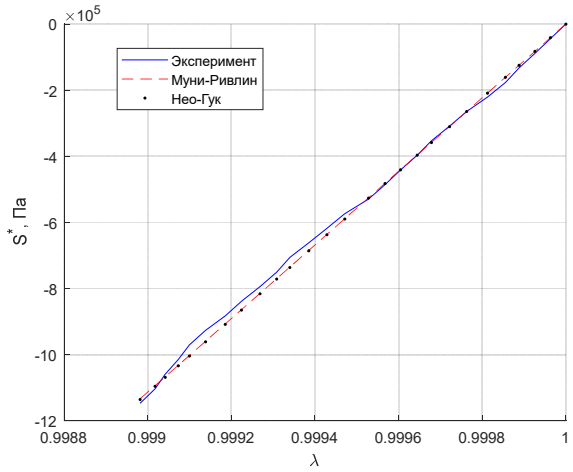


Рис. 11. Зависимость напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины в случае стесненного сжатия на последнем цикле нагружения

Fig. 11. Dependence of first Piola – Kirchhoff stresses on relative length in the case of constrained compression on the last loading cycle

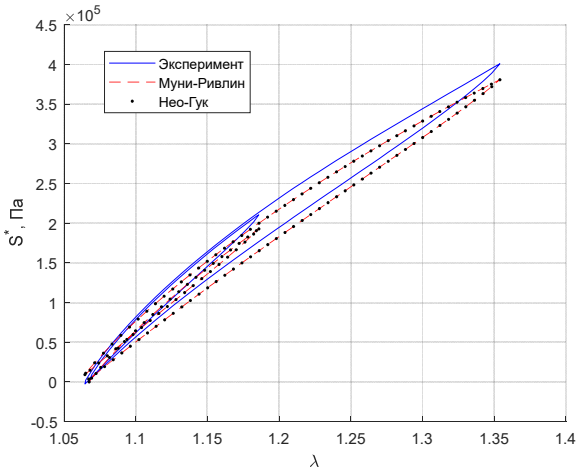


Рис. 12. Зависимость напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины в случае свободного растяжения при скорости 18 %/мин на последнем цикле нагружения

Fig. 12. Dependence of the first Piola – Kirchhoff stresses on relative length in the case of free stretching at a speed of 18 %/min on the last loading cycle

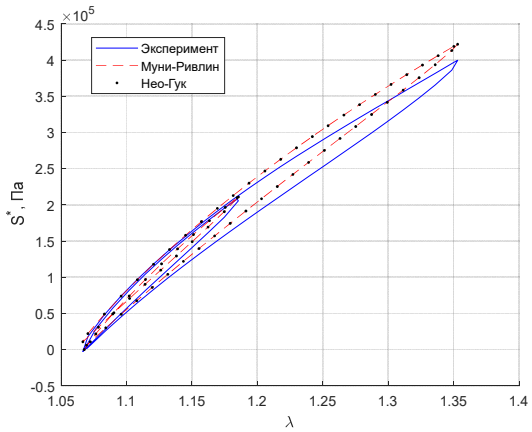


Рис. 13. Зависимость напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины в случае свободного растяжения при скорости 90 %/мин на последнем цикле нагружения

Fig. 13. Dependence of the first Piola – Kirchhoff stresses on relative length in the case of free stretching at a speed of 90 %/min on the last loading cycle

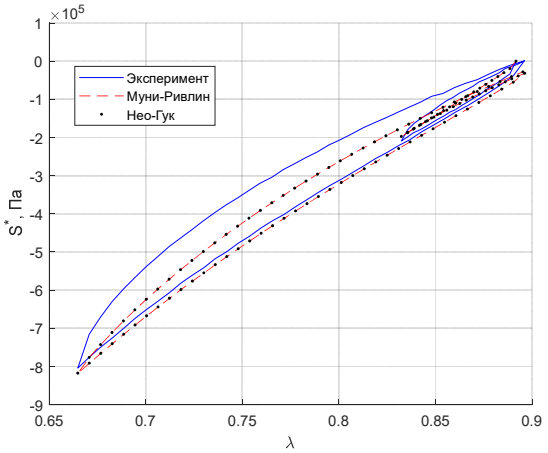


Рис. 14. Зависимость напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода от относительной длины в случае свободного сжатия на последнем цикле нагружения

Fig. 14. Dependence of the first Piola – Kirchhoff stresses on relative length in the case of free compression on the last loading cycle

Стоит отметить, что заметно худшее описание процесса деформирования в условиях свободного сжатия объясняется тем, что испытания на сжатие производились на цилиндрических образцах, имеющих несколько другие свойства относительно лопаток, используемых при растяжении, из-за отличия в процессе изготовления. Из рис. 11–14 можно сделать вывод, что потенциал Нео-Гука позволяет описать экспериментальные кривые наравне с потенциалом Муни – Ривлина, имея более простую форму.

6. Модель квазистатического деформирования амортизатора

Верификация полученных свойств материала была проведена путем сравнения данных циклических испытаний 4 амортизаторов, проведенных в ИМСС УрО РАН,

и результатов математического моделирования демпфера, геометрия которого приведена на рис. 15. Ось Z на рисунке соответствует поперечному направлению деформирования, а ось Y – осевому.

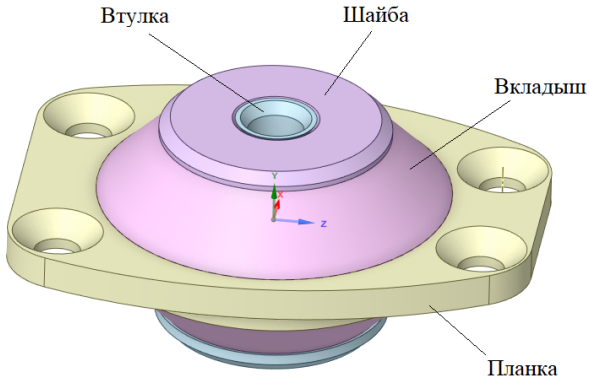


Рис. 15. Внешний вид амортизатора

Fig. 15. Appearance of the shock absorber

Для достижения данной цели были использованы конечно-элементные модели квазистатического деформирования амортизатора в поперечном и осевом направлении из работы [33], построенные в модуле Mechanical программного комплекса ANSYS Workbench. Из-за наличия плоскостей симметрии при деформировании в поперечном направлении рассматривалась четверть амортизатора, а в условии осевого деформирования – одна восьмая. На плоскостях симметрии были заданы нулевые перемещения в направлении нормали. Втулка, шайба и планка состоят из стали с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$, а вкладыш является вязкогиперупругим материалом со свойствами, определенными в данной работе ранее. На поверхности кромки планки, которая контактирует с вкладышем, было задано условие склейки. На остальных поверхностях контакт вкладыша с планкой, шайбой и втулкой рассматривался как контакт с коэффициентом трения 0,4. Для моделирования процесса циклического деформирования учитывается предварительное напряженно-деформированное состояние, которое образуется в результате сборки амортизатора и последующего термоциклирования. Первый этап нагрузки в математической модели заключается в поджатии резины в радиальном направлении за счет увеличения радиуса втулки на 0,15 мм. Далее происходит сжатие вкладыша в осевом направлении путем перемещения шайбы и нижней части втулки в направлении центра амортизатора на 0,4 мм. Учет термоциклирования происходит путем выдержки амортизатора после сборки 10^4 с. Циклическое деформирование заключается в перемещении планки с амплитудой 0,6 мм со скоростью 3 мм/мин в течение трех циклов при закрепленных по всем осям шайбе и втулке. На рис. 16–17 приведены зависимости реакции от перемещения при последнем цикле деформировании амортизатора в поперечном направлении, полученные из испытаний и численно.

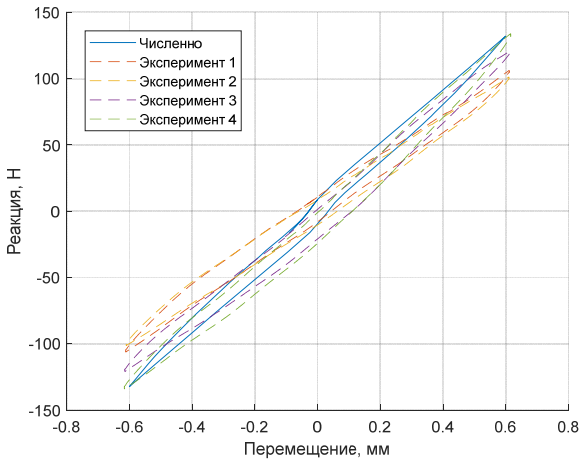


Рис. 16. Зависимость реакции в амортизаторе от перемещения в осевом направлении на последнем цикле деформирования

Fig. 16. Dependence of the reactions of the shock absorber on displacement in the axial direction on the last deformation cycle

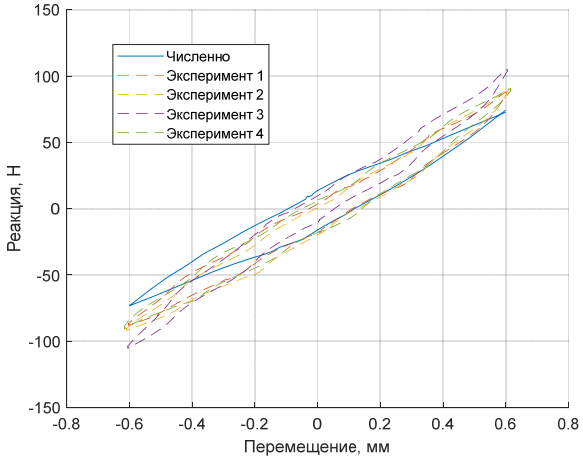


Рис. 17. Зависимость реакции в амортизаторе от перемещения в поперечном направлении на последнем цикле деформирования

Fig.17. Dependence of the reactions of the shock absorber on displacement in the transverse direction on the last deformation cycle

Модели амортизатора были проверены на сходимость. Увеличение количества элементов с 9307 до 17749 в модели с осевым направлением деформирования приводит к изменению максимальной реакции менее чем на 1,5 %, а повышение количества элементов с 19 936 до 30 915 в модели с поперечным направлением деформирования – к изменению на 3,7 %. Полученные кривые зависимости силового отклика амортизатора от перемещения имеют удовлетворительную близость к результатам натурных испытаний с максимальными деформациями вкладыша около 27 %, что позволяет говорить о достаточной точности вычисления материальных констант резины, полученных на основании данных испытаний с максимальными деформациями 35 %. Отклонение полученного численно максимального усилия в осевом направлении относительно среднего экспериментально-

го значения равно 14,4 % при среднем отклонении натурных данных для 4 амортизаторов 10,2 %. В случае поперечного нагружения максимальная реакция для численного решения отклоняется на 21,5 % от среднего экспериментального при среднем отклонении результатов испытаний 4 демпферов 6 %. Такие отклонения численных и экспериментальных данных могут быть объяснены разницей между свойствами материала амортизатора и образцов резины для испытаний из-за отличий в температурных условиях изготовления, обусловленных геометрией образцов, а также расхождением геометрии и площади проклейки амортизатора с планируемым при изготовлении, что подтверждается разницей между данными испытаний 4 амортизаторов.

Заключение

С учетом вязкогиперупругого поведения материала получены полуаналитические выражения отклика тела от времени и деформаций для случаев свободного и стесненного одноосного растяжения – сжатия. Были обработаны результаты экспериментов на циклическое деформирование резиновых образцов в условиях одноосного деформированного и напряженного состояний. Построена процедура минимизации разницы между данными натурных испытаний и полуаналитически вычисленных значений отклика, которая позволяет идентифицировать вязкогиперупругие свойства материала. Вычисленные свойства материала в достаточной степени согласуются с результатами экспериментов при использовании потенциала энергии деформации Нео-Гука, а усложнение вида потенциала до Муни – Ривлина с двумя константами практически не повышает точность описания натурных данных. Полученные свойства с помощью математической модели квазистатического деформирования амортизатора были верифицированы на данных натурных испытаний. Приведенная методика определения вязкогиперупругих свойств материала может быть применена для описания поведения при скоростях деформаций, сопоставимых со скоростями в используемых натурных испытаниях, и в диапазоне деформаций, зависимым от ограничений выбранного потенциала энергии деформации.

Библиографический список

1. Arani, H.K. Nonlinear Dynamic Response of an Abruptly Loaded Rubber-Like Hyperelastic Plate Resting on a Dissipative Viscoelastic Winkler–Pasternak Medium / H.K. Arani, M. Shariyat // Iran J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng. – 2023. – Vol. 47. – P. 219-236. DOI: s40997-022-00512-1
2. Time-dependent modeling and experimental characterization of foamed EPDM rubber / S. Buchen, N.H. Kröger, T. Reppel [et al.] // Continuum Mech. Thermodyn. – 2021. – Vol. 33. – P. 1747–1764. DOI: 10.1007/s00161-021-01004-4
3. Visco-hyperelastic characterization of human brain white matter micro-level constituents in different strain rates / M. Ramzanpour, M. Hosseini-Farid, J. McLean [et al.] // Med. Biol. Eng. Comput. – 2020. – Vol. 58 – P. 2107–2118. DOI: 10.1007/s11517-020-02228-3
4. Сметанников, О.Ю. Исследование средствами ANSYS эффекта памяти формы в изделиях из сшитого полиэтилена / О.Ю. Сметанников, Ю.Б. Фасхутдинова, Е.В. Субботин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – № 13 – С. 134–149. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.2.11
5. Assigning viscoelastic and hyperelastic properties to the middle-ear soft tissues for sound transmission / J. Zhang, C. Jiao, D. Zou [et al.] // Biomech Model Mechanobiol. – 2020. – Vol. 19. – P. 957–970. DOI: 10.1007/s10237-019-01263-w
6. Mathematical modeling, analysis and control in soft robotics: a survey / R. Ortigosa-Martínez, J. Martínez-Frutos, C. Mora-Corral [et al.] // SeMA. – 2024. – Vol. 81. – P. 147–164. DOI: 10.1007/s40324-023-00334-4
7. Hejazi, F. Seismic performance of structure equipped with a new rubber bracing damper system / F. Hejazi, H. Farahpour, N. Ayyash // Archiv. Civ. Mech. Eng. – 2024. – Vol. 24. DOI: 10.1007/s43452-023-00845-x
8. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
9. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеенко, Н.А. Труфанов [и др.] / – Екатеринбург.: УрО РАН, 2003. – 411 с.
10. Arruda, E.M. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials / E.M. Arruda, M.C. Boyce // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – Vol. 41. – P. 389–412.
11. Hyperelastic constitutive model parameters identification using optical-based techniques and hybrid optimisation / S. Mollaee, D.M. Budgett, A.J. Taberner [et al.] // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2024. – Vol. 20. – P. 233–249. DOI: 10.1007/s10999-023-09673-6
12. Nafo, W. Measuring the Hyperelastic Response of Porcine Liver Tissues In-Vitro Using Controlled Cavitation Rheology / W. Nafo, A. Al-Mayah // Exp. Mech. – 2021. – Vol. 61. – P. 445–458. DOI: 10.1007/s11340-020-00674-6
13. Mooney, M. A theory of large elastic deformation / M. Mooney // J. Appl. Phys. – 1940. – Vol. 11. – P. 582–592.
14. Snap-through and Eulerian buckling of the bi-stable von Mises truss in nonlinear elasticity: a theoretical, numerical and experimental investigation / F.O. Falope, M. Pelliciari, L. Lanzoni [et al.] // Int. J. Non-Linear Mech. – 2021. – Vol. 134. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103739
15. Lengger, M. A viscoelastic Mooney–Rivlin model for adhesive curing and first steps toward its calibration based on photoelasticity measurements / M. Lengger, G. Possart, P. Steinmann // Arch. Appl. Mech. – 2022. – Vol. 92. – P. 3943–3965. DOI: 10.1007/s00419-022-02273-4
16. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures / H.B. Khaniki, M.H. Ghayesh, R. Chin [et al.] // Nonlinear Dyn. – 2022. – Vol. 110. – P. 963–994. DOI: 10.1007/s11071-022-07700-3
17. Адамов А.А. Исследование и моделирование нестационарного термомеханического поведения вязкоупругих резиноподобных материалов и элементов конструкций при конечных деформациях: дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Пермь, 2004. – 303 с.
18. Ogden, R. Non-Linear Elastic Deformations / R. Ogden. – New York: Dover Publications, 1997. – 532 p.
19. Yousefsani, S.A. Bidirectional hyperelastic characterization of brain white matter tissue / S.A. Yousefsani, M.Z.V. Karimi // Biomech Model Mechanobiol. – 2023. – Vol. 22. – P. 495–513. DOI: 10.1007/s10237-022-01659-1

20. Zhang, W. Comparative Analysis of Nonlinear Viscoelastic Models Across Common Biomechanical Experiments / W. Zhang, A. Capilnasiu, D. Nordsletten // J. Elast. – 2021. – Vol. 145. – P. 117–152. DOI: 10.1007/s10659-021-09827-7

21. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications / D. Younesian, A. Hosseinkhani, H. Askari [et al.] // Nonlinear Dyn. – 2019. – Vol. 97. – P. 853–895. DOI: 10.1007/s11071-019-04977-9

22. Shitikova, M.V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review / M.V. Shitikova // Mech. Solids. – 2022. – Vol. 57. – P. 1–33. DOI: 10.3103/S0025654422010022

23. Viscoelastic models revisited: characteristics and interconversion formulas for generalized Kelvin–Voigt and Maxwell models / A. Serra-Aguila, J.M. Puigoriol-Forcada, G. Reyes [et al.] // Acta Mech. Sin. – 2019. – Vol. 35. – P. 1191–1209. DOI: 10.1007/s10409-019-00895-6

24. Harjule, P. Fractional Order Models for Viscoelasticity in Lung Tissues with Power, Exponential and Mittag–Leffler Memories / P. Harjule, M.K. Bansal // Int. J. Appl. Comput. Math. – 2020. – Vol. 6. DOI: 10.1007/s40819-020-00872-9

25. Hristov, J. Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels / J. Hristov // Eur. Phys. J. Plus. – 2019. – Vol. 134. DOI: 10.1140/epjp/i2019-12697-7

26. Williams, M.L. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids / M.L. Williams, R.F. Landel, J.D. Ferry // Journal of the American Chemical Society. – 1955. – Vol. 77. – P. 3701–3707. DOI: 10.1021/ja01619a008

27. Ferry, J.D. Viscoelastic properties of polymers / J.D. Ferry. – New York: Wiley, 1980. – 672 p.

28. Identification of the visco-hyperelastic properties of brain white matter based on the combination of inverse method and experiment / Q. Liu, J. Liu, F. Guan [et al.] // Med. Biol. Eng. Comput. – 2019. – Vol. 57. – P. 1109–1120. DOI: 10.1007/s11517-018-1944-7

29. Suchocki, C. Polyconvex hyperelastic modeling of rubberlike materials / C. Suchocki, S. Jemioło // J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. – 2021. – Vol. 43. DOI: 10.1007/s40430-021-03062-w

30. A Compressible hyper-viscoelastic material constitutive model for human brain tissue and the identification of its parameters / M Hosseini-Farid, M. Ramzanpour, M. Ziejewski [et al.] // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2019. – Vol. 116. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.06.008

31. Behavior characterization of visco-hyperelastic models for rubber-like materials using genetic algorithms / J.A. López-Campos, A. Segade, J.R. Fernandez [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol. 66. DOI: 10.1016/j.apm.2018.08.031

32. A parameter identification scheme of the visco-hyperelastic constitutive model of rubber-like materials based on general regression neural network / S. Chen, C. Wang., X. Lu [et al.] // Arch. Appl. Mech. – 2023. – Vol. 93. – P. 3229–3241. DOI: 10.1007/s00419-023-02434-z

33. Бояршинов, Д.А. Модель термомеханического поведения амортизационного узла / Д.А. Бояршинов, О.Ю. Сметанников // Вычислительная механика сплошных сред. – 2022. – № 3. – С. 303–315. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.23

34. Simo, J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects / J.C. Simo // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1987. – Vol. 60. – P. 153–173. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90107-1

35. Mullins, L. Softening of rubber by deformation / L. Mullins // Rubber Chem. Technol. – 1969. – Vol. 42. – P. 339–362.

References

1. Arani H.K., Shariyat M. Nonlinear Dynamic Response of an Abruptly Loaded Rubber-Like Hyperelastic Plate Resting on a Dissipative Viscoelastic Winkler–Pasternak Medium. *Iran J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng*, 2023, Vol. 47, pp. 219-236. doi: s40997-022-00512-1

2. Buchen S., Kröger N.H., Reppel T., Weinberg K. Time-dependent modeling and experimental characterization of foamed EPDM rubber. *Continuum Mech. Thermodyn*, 2021, Vol. 33, pp. 1747-1764. doi: 10.1007/s00161-021-01004-4

3. Ramzanpour M., Hosseini-Farid M., McLean J., Ziejewski M., Karami G. Visco-hyperelastic characterization of human brain white matter micro-level constituents in different strain rates. *Med. Biol. Eng. Comput*, 2020, Vol. 58, pp. 2107-2118. doi: 10.1007/s11517-020-02228-3

4. Smetannikov O.Yu., Faskhutdinova Iu.B., Subbotin E.V. Issledovanie sredstvami ANSYS effekta pamiati formy v izdeliiakh iz sshitogo polietilena [ANSYS research of shape memory effects in cross-linked polyethylene products]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, Vol. 13, pp. 134-149. doi: 10.7242/1999-6691/2020.13.2.11

5. Zhang J., Jiao C., Zou D., Ta N., Rao Z. Assigning viscoelastic and hyperelastic properties to the middle-ear soft tissues for sound transmission. *Biomech Model Mechanobiol*, 2020, Vol. 19, pp. 957-970. doi: 10.1007/s10237-019-01263-w

6. Ortigosa-Martínez R., Martínez-Frutos J., Mora-Corral C., Pedregal P., Periago F. Mathematical modeling, analysis and control in soft robotics: a survey. *SeMA*, 2024, Vol. 81, pp. 147-164. doi: 10.1007/s40324-023-00334-4

7. Hejazi F., Farahpour H., Ayyash N. Seismic performance of structure equipped with a new rubber bracing damper system. *Archiv. Civ. Mech. Eng*, 2024, Vol. 24. doi: 10.1007/s43452-023-00845-x

8. Lur'e A.I. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 940 p.

9. Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., et al. Metody prikladnoi viazkouprugosti [Methods of applied viscoelasticity]. Ekaterinburg, UrO RAN, 2003, 411 p.

10. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, Vol. 41, pp. 389-412.

11. Mollaee S., Budgett D.M., Taberner A.J., Nielsen P. Hyperelastic constitutive model parameters identification using optical-based techniques and hybrid optimization. *Int. J. Mech. Mater. Des*, 2024, Vol. 20, pp. 233-249. doi: 10.1007/s10999-023-09673-6

12. Nafo W., Al-Mayah A. Measuring the Hyperelastic Response of Porcine Liver Tissues In-Vitro Using Controlled Cavitation Rheology. *Exp. Mech*, 2021, Vol. 61, pp. 445-458. doi: 10.1007/s11340-020-00674-6

13. Mooney M.: A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys*, 1940, Vol. 11, pp. 582-592.

14. Falope F.O., Pelliciari M., Lanzoni L., Tarantino A.M. Snap-through and Eulerian buckling of the bi-stable von Mises truss in nonlinear elasticity: a theoretical, numerical and experimental

investigation. *Int. J. Non-Linear Mech*, 2021, Vol. 134. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103739

15. Lengger M., Possart G., Steinmann P. A viscoelastic Mooney–Rivlin model for adhesive curing and first steps toward its calibration based on photoelasticity measurements. *Arch. Appl. Mech*, 2022, Vol. 92, pp. 3943-3965. doi: 10.1007/s00419-022-02273-4

16. Khaniki H.B., Ghayesh M.H., Chin R., Amabili M. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures. *Nonlinear Dyn*, 2022, Vol. 110, pp. 963-994. doi: 10.1007/s11071-022-07700-3

17. Adamov A.A. Issledovanie i modelirovanie nestatsionarnogo termomekhanicheskogo povedeniia viazkouprugikh rezinopodobnykh materialov i elementov konstruktsii pri konechnykh deformatsiiakh [Investigation and modeling of nonstationary thermomechanical behavior of viscoelastic rubber-like materials and structural elements under finite strains]. – dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk. – Perm', 2004. – 303 p.

18. R. Ogden. Non-Linear Elastic Deformations. New York, Dover Publications, 1997, 532 p.

19. Yousefsani S.A., Karimi M.Z.V. Bidirectional hyperelastic characterization of brain white matter tissue. *Biomech Model Mechanobiol*, 2023, Vol. 22, pp. 495-513. doi: 10.1007/s10237-022-01659-1

20. Zhang W., Capilnasiu A. Nordsletten D. Comparative Analysis of Nonlinear Viscoelastic Models Across Common Biomechanical Experiments. *J. Elast*, 2021, Vol. 145, pp. 117-152. doi: 10.1007/s10659-021-09827-7

21. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dyn*, 2019, Vol. 97, pp. 853-895. doi: 10.1007/s11071-019-04977-9

22. Shitikova M.V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review. *Mech. Solids*, 2022, Vol. 57, pp. 1-33. doi: 10.3103/S0025654422010022

23. Serra-Aguila A., Puigoriol-Forcada J.M., Reyes G., Menacho J. Viscoelastic models revisited: characteristics and interconversion formulas for generalized Kelvin–Voigt and Maxwell models. *Acta Mech. Sin*, 2019, Vol. 35, pp. 1191-1209. doi: 10.1007/s10409-019-00895-6

24. Harjule P., Bansal M.K. Fractional Order Models for Viscoelasticity in Lung Tissues with Power, Exponential and Mittag–Leffler Memories. *Int. J. Appl. Comput. Math*, 2020, Vol. 6, doi: 10.1007/s40819-020-00872-9

25. Hristov J. Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels. *Eur. Phys. J. Plus*, 2019, Vol. 134. doi: 10.1140/epjp/i2019-12697-7

26. Williams M.L., Landel R.F., Ferry J.D. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 1955, Vol. 77, pp. 3701-3707. doi: 10.1021/ja01619a008

27. Ferry J.D. Viscoelastic properties of polymers. New York, Wiley, 1980, 672 p.

28. Liu Q, Liu J, Guan F, Han X, Cao L, Shan K. Identification of the visco-hyperelastic properties of brain white matter based on the combination of inverse method and experiment. *Med. Biol. Eng. Comput*, 2019, Vol. 57, pp. 1109–1120. doi: 10.1007/s11517-018-1944-7

29. Suchocki C., Jemioło S. Polyconvex hyperelastic modeling of rubberlike materials. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng*, 2021, Vol. 43. doi: 10.1007/s40430-021-03062-w

30. Hosseini-Farid M, Ramzanpour M., Ziejewski M., Karami G. A Compressible hyper-viscoelastic material constitutive model for human brain tissue and the identification of its parameters. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, Vol. 116. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.06.008

31. López-Campos J.A., Segade A., Fernandez J.R., Casarejos E., Vilan J.A. Behavior characterization of visco-hyperelastic models for rubber-like materials using genetic algorithms. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, Vol. 66. doi: 10.1016/j.apm.2018.08.031

32. Chen S., Wang C., Lu X., Li M., Li M., Li M. A parameter identification scheme of the visco-hyperelastic constitutive model of rubber-like materials based on general regression neural network, *Arch. Appl. Mech*, 2023, Vol. 93, pp. 3229–3241. doi: 10.1007/s00419-023-02434-z

33. Boyarshinov D.A., Smetannikov O.Yu. Model' termomekhanicheskogo povedeniia amortizatsionnogo uzla [Model of thermomechanical behavior of a shock-absorbing unit]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, Vol. 3, pp. 303-315. doi: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.23

34. Simo J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, Vol. 60, pp. 153–173. doi: 10.1016/0045-7825(87)90107-1

35. Mullins L. Softening of rubber by deformation. *Rubber Chem. Technol*, 1969, Vol. 42, pp. 339–362.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0006).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSNM-2023-0006).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The authors' contributions are equal.