Ватульян, А.О. Оптимизация первой собственной частоты для неоднородных круглых пластин / А.О. Ватульян, О.В. Явруян. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.03 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 38–49.

Perm Polytech Style: Vatulyan A.O., Yavruyan O.V Optimisation of the first natural frequency for heterogeneous circular plates. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 4, pp. 38-49. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.03
УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

А.О. Ватульян[1], О.В. Явруян[1,2]

[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 01 июля 2025 г.
Одобрена: 10 октября 2025 г.
Принята к публикации:
15 октября 2025 г.

Ключевые слова:

круглая пластинка, переменная жесткость, оптимизация, первая собственная частота, максимизация, упругость, вязкоупругость, принцип соответствия, соотношение Релея, метод Галеркина, генетический алгоритм.

АННОТАЦИЯ

Проведено исследование спектральной задачи максимизации первой собственной частоты неоднородной упругой и вязкоупругой круглой пластинки переменной жесткости при различных условиях закрепления края. В качестве управляющих функций выступают механические упругие или вязкоупругие свойства материала. Вязкоупругие свойства учитываются в рамках принципа соответствия.

Рассмотрены несколько подходов к решению спектральной оптимизационной задачи: аналитические, полуаналитические и численные схемы.

В модельной задаче для круглой пластинки, шарнирно опертой по краю, получено аналитическое решение – оптимальное распределение вязкоупругих модулей – длительного и мгновенного модулей, с учетом условия на среднее распределение жесткости пластинки по объему. Построено соотношение Релея, а также обобщенный функционал на базе метода множителей Лагранжа, учитывающий дополнительное условие. Найдено условие оптимальности, которое состоит в постоянстве энергетической характеристики.

В случае круглой пластинки, жестко закрепленной по краю, для нахождения оптимального распределения комплексных модулей предложена численная схема оптимального управления характеристиками материала в классе полиномов, с учетом их свойств положительности и четности. В основе предлагаемой схемы лежит метод Галеркина и метод наименьших квадратов для определения коэффициентов полиномиального разложения управляющих функций.

Предложена также численная схема решения спектральной задачи поиска коэффициентов полиномиального разложения управляющих функций, которая запускает эвристический поиск соответствующих параметров.

Проведены расчеты по каждой из предлагаемых схем решения задач оптимизации. Выявлены недостатки и преимущества каждого подхода. Проведен сравнительный анализ результатов на примере модельных задач.

© **Ватульян Александр Ованесович** – д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук, e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, vatulyan@aaanet.ru.
Явруян Оксана Вячеславовна – д. ф.-м. н., в. н. с. отдела дифференциальных уравнений, e-mail: yavruyan@mail.ru.

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head of the Department of theory of elasticity, Institute of mathematics, mechanics and computer sciences of I.I. Vorovich, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru, vatulyan@aaanet.ru.
Oksana V. Yavruyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Department of differential equations, e-mail: yavruyan@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

OPTIMISATION OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY FOR HETEROGENEOUS CIRCULAR PLATES

A.O. Vatulyan[1], O.V. Yavruyan[1,2]

[1]Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2]Southern Mathematical Institute of VSC RAS and RNO-A, Vladikavkaz, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 July 2025
Approved: 10 October 2025
Accepted for publication:
15 October 2025

Keywords:

circular plate, inhomogeneous, variable stiffness, optimization, first natural frequency, maximization, elasticity, viscoelasticity, complex moduli principle, Rayleigh relation, Galerkin's method, genetic algorithm.

ABSTRACT

A research study was carried out on the spectral problem of maximizing the first natural frequency of a heterogeneous elastic and viscoelastic circular plate with variable stiffness under various edge fixation conditions. The mechanical elastic or viscoelastic properties of the material are used as control functions. Viscoelastic properties are taken into account within the framework of the complex modulus principle.

Several approaches to solving the spectral optimization problem are considered: analytical, semi-analytical and numerical schemes.

In the model problem for a circular plate hinged at the edge, an analytical solution is obtained – the optimal distribution of viscoelastic modules–long-term and instantaneous modules, taking into account the condition for the average distribution of the plate stiffness over the volume. The Rayleigh ratio was constructed, as well as a generalized functional based on the Lagrange multiplier method, taking into account the additional condition. The optimality condition was found, which consists in the constancy of the energy characteristic.

In the case of a circular plate stiffly fixed at the edge, a numerical scheme for optimal control of material characteristics in the class of polynomials is proposed to find the optimal distribution of complex modules, taking into account their positivity and evenness properties. The proposed scheme is based on the Galerkin method and the least squares method for determining the coefficients of the polynomial expansion of control functions.

A numerical scheme for solving the spectral problem of finding the coefficients of the polynomial expansion of control functions is also proposed, which launches a heuristic search for the corresponding parameters.

Calculations were performed for each of the proposed schemes for solving optimization problems. The limits of applicability, disadvantages and advantages of each approach were identified. A comparative analysis of the results was performed using model problems as examples.

Введение

Актуальность задач оптимального проектирования свойств элементов конструкций обусловлена несколькими ключевыми факторами, которые имеют большое значение как в научно-технической, так и в практической сферах. Оптимальное проектирование позволяет повышать эффективность использования материалов, например, минимизируя расход материалов, при сохранении или улучшении эксплуатационных характеристик конструкций. Правильный подбор и оптимизация свойств элементов конструкции (например, прочности, жесткости, устойчивости) обеспечивают надежность и продолжительный срок эксплуатации изделий, что особенно важно для конструкций ответственного назначения в авиации, машиностроении, строительстве, приборостроении.

Оптимальное проектирование помогает максимально эффективно использовать потенциал неоднородных материалов (в том числе функционально-градиентных (ФГ)), позволяя удовлетворить множеству требований, предъявляемым к механическим, электромеханическим, тепловым, вибрационным и другим характеристикам современных конструкций, в состав которых они будут входить. Оптимизация позволяет сбалансировать эти требования для достижения наилучших результатов.

Использование новых материалов и технологий (композиты, ФГ – материалы) позволяет реализовать новые подходы к проектированию с учетом их уникальных свойств. При этом характер неоднородности должен иметь достаточно простой закон изменения по координатам, обеспечивающий эффективное управление технологическими процессами при изготовлении соответствующих элементов конструкций. Это приводит к новым формулировкам задач оптимального проектирования свойств материалов на конечномерных множествах простой структуры, например, среди полиномиальных, экспоненциальных, кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций.

Современные методы численного моделирования и оптимизации (например, методы конечных элементов, эволюционные алгоритмы) делают возможным решение новых задач оптимального проектирования с высокой точностью и скоростью.

Одним из достаточно хорошо развитых направлений оптимального проектирования является подбор геометрических характеристик конструкций и их элементов, удовлетворяющих рассматриваемому критерию качества, при этом внешние воздействия, условия закрепления границ и внутренняя структура элементов конструкций известны. Такие задачи исследованы в базовых работах Н.В. Баничука [1], Н. Ольхоффа [2],

И.Ф. Ниордсона [3], а также в работах [4–7], в которых подробно описаны методы исследования оптимизационных задач на базе вариационных подходов, рассмотрены различные постановки и модельные задачи оптимального проектирования простейших элементов конструкций – балок, стержней, пластин и оболочек.

В настоящей работе проводится исследование спектральной задачи о максимизации первой собственной частоты для круглой неоднородной по радиальной координате пластинки. Максимизация первой собственной частоты представляет собой важную практическую задачу, особенно актуальную в машиностроении, приборостроении, аэрокосмической промышленности, поскольку она влияет на виброустойчивость конструкций и расширяет рабочий частотный диапазон.

Увеличение первой собственной частоты возможно за счет изменения геометрии (распределения толщины пластинки и плотности материала (топологическая оптимизация)), за счет изменения способа закрепления и за счет изменения свойства (жесткости/модуля Юнга) пластинки. Эти управляющие параметры определяют основной спектр возможных постановок спектральной задачи оптимизации.

В отдельный класс оптимизационных задач можно выделить задачи топологической оптимизации пластин и оболочек [8–9]. Данный подход позволяет улучшить их механические свойства (жесткость, устойчивость, вибродинамику), оптимальным образом распределяя массу, уменьшая при этом вес конструкции. Стоит отметить, что ввиду сложной геометрии объекта, получаемой при топологической оптимизации, для расчета используются численные конечно-элементные пакеты и эвристические алгоритмы для определения оптимальных параметров. За последние 10 лет достигнут значительный прогресс в решении оптимизационных задач для пластин (прямоугольных, круглых) в рамках топологической оптимизации и использования новых материалов. Благодаря активному интересу к этому направлению исследования разработаны эффективные методы оптимизации – SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), ESO/BESO, ESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization), Level-Set-метод [10].

В работе [10] предлагается метод оптимизации микроструктурной геометрии слоистой пористой оболочки на основе метода гомогенизации для максимизации собственной частоты, согласно представленным результатам первая частота повышается за счет оптимального проектирования пор оболочки. В [11] проведено оптимальное проектирование механических характеристик в спектральных задачах, в которых осуществляется гомогенизация внутренней структуры и подбор параметров соответствующей эквивалентной модели с привлечением генетических алгоритмов.

В [12] представлен и реализован алгоритм, реализующий топологическую оптимизацию распределения массы двумерного тела под нагрузкой с целью минимизации веса тела при ограничении на максимальные напряжения. За основу взята идея переменной плотности, а также алгоритм BESO, добавляющий и удаляющий элементы в зависимости от поля напряжений в узлах.

Результаты задач топологической оптимизации имеют широкий спектр приложения от аэрокосмической промышленности [13] до биомедицинских прогрессивных разработок [14], однако необходимо отметить, что элементы конструкций, изготовленные с учетом рекомендаций топологической оптимизации, не могут носить массовый характер ввиду сложности их изготовления.

Методы исследования спектральной задачи оптимизации можно разделить на несколько основных видов, которые разделяются по характеру и способу получаемых решений.

Классическое определение оптимального распределения геометрических или механических характеристик, которое опирается на вариационные принципы и построение соотношений Релея для первой собственной частоты [1; 2; 4; 14–17], позволяет в ряде задач получить аналитическое решение. Так, в работе [14] проведено исследование оптимизационной задачи максимизации первой собственной частоты для неоднородной круглой пластинки переменной жесткости при наличии предварительных напряжений в ней. Получено аналитическое решение и проведен анализ влияния характера предварительных напряжений на спектральный параметр.

Аналитическое решение можно получить также при предположении малости неоднородности в рамках метода возмущений, который рассмотрен в работах [1; 4].

Эффективные полуаналитические схемы, которые опираются по проекционные методы – метод Галеркина, а также метод Релея – Ритца. Так, в статье [18] применен метод Ритца для расчета частоты вибрации для композитных перфорированных пластин. Решена задача максимизации основной частоты за счет оптимальной последовательности укладки слоев композита.

В случае использования при решении оптимизационных задач эвристических алгоритмов одним из основных моментов, который обеспечивает устойчивое нахождение оптимального решения, является решение прямой спектральной задачи о строении спектра свободных колебаний. Имеется большое количество работ, посвященных решению этой задачи в случае упругой неоднородной круглой пластины переменной толщины [19–21], в меньшем количестве представлены работы в случае пластин с переменным модулем Юнга [22] и с учетом затухания [23]. Как правило, основные методы исследования опираются на метод Релея – Ритца, дифференциально-квадратурный метод, метод пристрелки, асимптотический подход [24], позволяющий определить влияние геометрии, включающий также случаи пластин с отверстиями на собственные значения частот круглой пластинки [25].

Однако стоит отметить, что большинство оптимизационных задач решены в рамках упругой модели, однако учет затухания в таких задачах практически не исследован, хотя работы по определению собственных

частот вязкоупругих тел имеются [26]. Предложенный в работе [16] подход для исследования оптимизационной задачи для неоднородной вязкоупругой балки с переменным модулем Юнга с учетом затухания развит в настоящей работе для случая вязкоупругой круглой пластинки.

В настоящей работе проведено исследование спектральной оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты круглой неоднородной по радиальной координате пластины с учетом и без учета затухания при различных граничных условиях, предполагающих жесткое закрепление или шарнирное опирание края пластинки.

1. Постановка оптимизационной задачи для круглой пластинки

Рассмотрим спектральную задачу об установившихся осесимметричных изгибных колебаниях изотропной упругой (**задача 1**) и вязкоупругой (**задача 2**) круглой пластинки переменной жесткости, которая меняется по радиальной координате.

Согласно гипотезам Кирхгофа – Лява [27], компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат r,φ,z выражаются через функцию поперечного прогиба $w = w(r)$

$$u_r = -zw', u_\varphi = 0, u_z = w. \tag{1.1}$$

Тогда выражения для изгибающих моментов и перерезывающей силы будут иметь вид

$$M_{rr} = -D\left(w'' + \nu\frac{w'}{r}\right), M_{\varphi\varphi} = -D\left(\nu w'' + \frac{w'}{r}\right), \tag{1.2}$$

$$Q_r = -D\left(w'' + \frac{w'}{r}\right)' - D'\left(w'' + \nu\frac{w'}{r}\right). \tag{1.3}$$

Уравнения свободных колебаний пластинки имеет вид [2; 27]

$$\left(r\left[D\left(w'' + \frac{w'}{r}\right)' + D'\left(w'' + \nu\frac{w'}{r}\right)\right]\right)' = \rho\omega^2 Hrw, \tag{1.4}$$

где ω, ρ, H, ν – круговая частота установившихся колебаний, плотность, толщина пластины и коэффициент Пуассона соответственно. Рассматривается постановка, в которой коэффициент Пуассона и плотность считаются постоянными, $D(r)$ – цилиндрическая жесткость, которая в упругом случае представима в виде ($E(r)$ – модуль Юнга):

$$D(r) = \frac{E(r)H^3}{12(1-\nu^2)}.$$

В случае вязкоупругой пластинки (**задача 2**) для учета затухания может быть использован принцип соответствия [28], согласно которому модуль Юнга заменяется на комплекснозначную функцию, зависящую от радиальной координаты и частоты колебаний

$$E^*(r, i\omega) = \frac{h(r) + i\omega n g(r)}{1 + i\omega n}, r \in [0, R], \tag{1.5}$$

где $g(r), h(r), g(r) > h(r)$ – функции, характеризующие мгновенный и длительный модули упругости, n – время релаксации.

Проведем процедуру обезразмеривания задачи, введя безразмерные переменные, величины и функции:

$$r = \tilde{r}R, w = \tilde{w}R, H = \tilde{H}R, A = \frac{12(1-\nu^2)}{\tilde{H}^2},$$

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{E_*}, E = \tilde{E}E_* \text{ для } \textbf{задачи 1}.$$

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{g_*}, g = \tilde{g}g_*, h = \tilde{h}g_*, \tau = n\sqrt{\frac{g_*}{\rho R^2}} \text{ для } \textbf{задачи 2},$$

где g_*, E_* – характерные значения соответствующих модулей, например, их значения при $r = R$. Тогда уравнение свободных колебаний пластинки перепишется в виде

$$\left(\tilde{r}\tilde{Q}_r\right)' = -Ak^2\tilde{w}\tilde{r}. \tag{1.6}$$

Учитывая (1.5), представим комплексную жесткость вязкоупругой пластинки в виде

$$D^*(\tilde{r}, ik) = \frac{\tilde{h}(\tilde{r}) + i\tau k\tilde{g}(\tilde{r})}{1 + i\tau k}.$$

В дальнейших выкладках знак тильды будем опускать.

В рамках настоящего исследования рассмотрены следующие модельные задачи о собственных колебаниях круглой упругой пластины, шарнирно опертой (**задача 1а**) и жестко закрепленной (**задача 1б**) по краю, а также задача о собственных колебаниях вязкоупругой круглой пластины, шарнирно опертой по краю (**задача 2а**).

Граничные условия для соответствующих задач имеют вид:

для шарнирного опирания (**задачи 1а, 2а**):

$$w'(0) = 0, Q_r(0) = 0, \tag{1.7}$$

$$w(1) = 0, M_r(1) = 0;$$

для жесткой заделки (**задача 1б**):

$$w'(1) = w(1) = 0, \tag{1.8}$$

$$w'(0) = 0, Q_r(0) = 0.$$

Спектральная задача оптимального проектирования сформулирована следующим образом – определить оптимальное распределение переменных упругих или вязкоупругих характеристик пластины в зависимости от

радиальной координаты, при котором первая собственная частота будет максимальной. Не нарушая общности рассуждений, можно перейти к оптимизационной задаче относительно функции жесткости, выбрав ее в качестве управляющей функции.

В качестве ограничения на управляющую функцию примем условие на среднее значение жесткости вида:

$$\int_0^1 rD(r)\,dr = d_0. \tag{1.9}$$

В случае вязкоупругой пластинки жесткость пластинки есть комплекснозначная функция $D^*(r,ik)$, на которую наложены условия вида

$$\begin{gathered}\int_0^1 rh(r)\,dr = h_0,\ \ \int_0^1 rg(r)\,dr = g_0,\\ \int_0^1 rD^*(r,ik)\,dr = d_0^*,\ \ d_0^* = \frac{h_0 + ik\tau g_0}{1+ik\tau}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

2. Соотношение Релея для первой собственной частоты и условие оптимальности

Соотношение Релея для первой собственной частоты в случае упругой пластинки имеет вид [2]

$$k^2 = \frac{\int_0^1 (rQ_r)'\,w\,dr}{A\int_0^1 w^2 r\,dr}. \tag{2.1}$$

Интегрируя по частям интеграл в числителе (2.1), получим следующее выражение для спектральной характеристики в случае **задачи 1:**

$$k^2 = \frac{\int_0^1 DrT[r,w,w]\,dr}{AK[w,w]}, \tag{2.2}$$

$$T[r,w,u] = w''u'' + \frac{\nu}{r}(w'u'' + u'w'') + \frac{w'u'}{r^2}, K[w,u] = \int_0^1 wurdr.$$

Для вывода соотношения Релея в случае вязкоупругой пластинки (**задачи 2**) умножим дифференциальное уравнение (1.6) на комплексно сопряженную функцию $\overline{w}(r,ik)$ и проинтегрируем полученное выражение в пределах от $r \in [0,1]$

$$\int_0^1 \left(\left(rQ_r^*(w)\right)'\overline{w} + k^2 Aw\overline{w}r \right) dr = 0. \tag{2.3}$$

Интегрируя по частям, с учетом граничных условий, получим соотношение

$$\int_0^1 \left(D^* T[r,w\overline{w}] - k^2 Aw\overline{w} \right) rdr = 0. \tag{2.4}$$

Аналогичное соотношение можно получить также для уравнения (1.6), записанного относительно $\overline{w}(r,ik)$ и умноженного на $w(r,ik)$. После несложных преобразований получим

$$\int_0^1 \left(\overline{D}^* T[r,\overline{w},w] - k^2 A\overline{w}w \right) rdr = 0. \tag{2.5}$$

Складывая (2.4) и (2.5), можем записать соотношение Релея для вязкоупругой пластинки (**задачи 2**)

$$k^2 = \frac{\int_0^1 Re(D^*)T[r,w,\overline{w}]rdr}{AK[w,\overline{w}]}. \tag{2.6}$$

Таким образом, можно заметить, что соотношение Релея получено относительно вещественной части функции жесткости, которую можно выразить через функции мгновенного и длительного модулей:

$$D^*(r,ik) = \frac{h(r) + i\tau k g(r)}{1+i\tau k} = g(r) + \frac{h(r) - g(r)}{1+i\tau k}, \tag{2.7}$$

$$D^*(r,ik) = D_0(r,k) + iD_1(r,k),$$

$$D_0(r,k) = g(r) + \frac{h(r) - g(r)}{1+\tau^2 k^2},$$

$$D_1(r,k) = -\frac{\tau k}{1+\tau^2 k^2}\left(h(r) - g(r)\right).$$

Для получения условия оптимальности пластины рассмотрим главный функционал, который строится согласно методу множителей Лагранжа и учитывает дополнительное ограничение

$$\begin{gathered}J[D,w,\beta] = AK[w,\overline{w}]^{-1}\int_0^1 rDT[r,w\overline{w}]dV -\\ -\beta\left(\int_0^1 rDdr - d_0\right) \to \max_D.\end{gathered}$$

Стоит отметить, что в вязкоупругом случае получаем аналогичный функционал, который в предельном переходе при $\tau \to 0$ сводится к упругому случаю.

Оптимальное решение исходной задачи соответствует оптимальному решению функционала (2.7) и определяется из условий

$$\delta J[D,w,\beta] = \frac{d}{dt} J[D + t\delta D, w + t\delta w, \beta + t\delta\beta]\Big|_{t=0} = 0. \tag{2.8}$$

Определив вариацию функционала (2.7) и, ввиду независимости вариаций δD, $\delta w, \delta\beta$, приравнивая множители перед ними к нулю, получим условие оптимальности в виде:

$$\delta D = 0 : T[r,w,w] = a^2,\ a^2 = \text{const}, \tag{2.9}$$

$$\delta w = 0 : \left(rQ_r\right)' + k^2 Arw = 0.$$

Аналогично формулируется условие оптимальности для вязкоупругого случая в виде: $T[r,w,\overline{w}] = a^2$.

3. Решение оптимизационной задачи

Решение оптимизационной задачи о построении оптимального распределения свойств упругих или вязкоупругих модулей и нахождении соответствующей им максимальной первой собственной частоты может быть осуществлено с позиции нескольких подходов.

В ряде случаев, когда условие оптимальности представляет собой дифференциальное уравнение, аналитическое решение которого может быть получено, например, в случае шарнирного опирания пластинки, оптимизационную задачу удается решить в аналитическом виде.

Следующим подходом, который может быть применен в случаях, когда аналитическое решение построить невозможно, является построение численной схемы поиска оптимального распределения свойств, основанной на поиске оптимального решения в конечномерном пространстве. При этом характеристики неоднородности должны иметь достаточно простые законы изменения по координатам, например полиномиальное, обеспечивающие эффективную реализацию технологическим процессом при изготовлении. Такой подход, на первый взгляд, кажется упрощением исходной постановки оптимизационной задачи, однако имеет в своей основе практическое обоснование.

В результате такого подхода, оптимизационная задача сводится к отысканию неизвестных коэффициентов разложения управляющей функции. Эти коэффициенты могут быть найдены либо с помощью генетического алгоритма, либо с помощью метода Галеркина.

Описанные схемы поиска оптимальных решений апробированы на модельных задачах для пластинки и балки, ниже приведены примеры решения модельных задач для упругих и вязкоупругих круглых пластин.

3.1. Аналитическое решение модельных задач

В случае шарнирно опертой пластины возможно получить оптимальное распределение упругих и вязкоупругих модулей в аналитическом виде.

Условие оптимальности представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции прогиба, представляющей собой первую собственную форму свободных колебаний (a – const).

Рассмотрим **задачу 1а.** Условие оптимальности имеет вид

$$w''^2 + \frac{2\nu}{r} w'w'' + \frac{w'^2}{r^2} = a^2, \tag{3.1}$$

$$w(1) = 0, w'(0) = 0.$$

Аналитическое решение краевой задачи (3.1) имеет вид

$$w_{opt} = \frac{\sqrt{2}a}{4\sqrt{\nu+1}}\left(1-r^2\right). \tag{3.2}$$

Для определения оптимального распределения жесткости подставим полученное представление (3.2) в дифференциальное уравнение движения и после несложных математических преобразований получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции жесткости. Стоит отметить, что для выполнения граничных условий (1.7) необходимо накладывать ограничения на функцию $D(r)$:

$$\left(rD'\right)' = -k^2 Ar\frac{1-r^2}{2(\nu+1)}, \tag{3.3}$$

$$D(1) = 0, D'(0) = 0.$$

Решение краевой задачи (3.3) имеет вид:

$$D(r) = k^2\frac{\left(3-r^2\right)\left(1-r^2\right)}{C},\ C = \frac{32(1+\nu)}{A} = \frac{8H^2}{3(1-\nu)} \tag{3.4}$$

Удовлетворяя (3.4) дополнительному условию (1.9), получим значение оптимального спектрального параметра

$$k_{opt}^2 = \frac{d_0 C}{f_0} = \frac{48 d_0(1+\nu)}{A}, f_0 = \int_0^1\left(3-r^2\right)\left(1-r^2\right)rdr = \frac{2}{3}, \tag{3.5}$$

$$D_{opt}(r) = \frac{d_0}{f_0}\left(3-r^2\right)\left(1-r^2\right).$$

Так, для $\tilde{h} = 0{,}1, d_0 = 1$ получаем оптимальное значение спектральной характеристики $k_{opt} = 0{,}2108$ при $\nu = 0{,}1$ и $k_{opt} = 0{,}2390$ при $\nu = 0{,}3$.

Рассмотрим **задачу 2а.** Условие оптимальности имеет вид

$$w''\overline{w}'' + \frac{\nu}{r}\left(w'\overline{w}'' + \overline{w}'w''\right) + \frac{w'\overline{w}'}{r^2} = a^2, \tag{3.6}$$

$$w(1) = 0, w'(0) = 0.$$

Несложно получить аналитическое решение краевой задачи (3.6) ($C_1 = \sqrt{a^2-1}$)

$$w_{opt} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\nu+1}}\left(1-r^2\right)\left(1+C_1 i\right). \tag{3.7}$$

Оптимальное распределение вещественной части функции жесткости имеет вид:

$$D_0(r) = k^2\frac{\left(3-r^2\right)\left(1-r^2\right)}{C}. \tag{3.8}$$

Удовлетворим (3.8) дополнительному условию (1.10) и с учетом (2.6) получим уравнение для определения оптимальной спектральной характеристики

$$k^2\left(1+k^2\tau^2\right) = \frac{C}{f_0}\left(g_0\tau^2k^2 + h_0\right), C = \frac{32(1+\nu)}{A}, \tag{3.9}$$

в результате решения которого получим четыре корня, три из которых отбрасываются (два мнимых корня, один не удовлетворяет условию положительности), четвертый корень определяет оптимальный спектральный

параметр k_{opt}. Отметим также выполнение предельного перехода в (3.9) к (3.5) при $\tau \to 0$.

После определения спектрального параметра и оптимального распределения D_0 можно найти законы распределения модулей:

$$g_{opt}(r) = \frac{g_0}{f_0}\left(3-r^2\right)\left(1-r^2\right), \qquad (3.10)$$

$$h_{opt}(r) = d\left(3-r^2\right)\left(1-r^2\right),$$

$$d = k_{opt}^2\left(m - \frac{g_0}{f_0}\tau^2\right), m = 1+\tau^2 k_{opt}^2.$$

Согласно предложенной схеме был проведен расчет оптимальной спектральной характеристики. Так, для $\nu = 0{,}1,\ \tilde{h} = 0{,}1,\ g_0 = 2{,}5,\ h_0 = 1$ при $\tau = 0{,}001$ получаем значение спектральной характеристики $k_{opt} = 0{,}2108;;$ при $\tau = 0{,}5$ получаем $k_{opt} = 0{,}2126.$

Можно провести асимптотический анализ зависимости спектральной характеристики k от времени релаксации τ. Для этого представим в виде разложения по степеням τ характеристику

$$k = k_0 + \tau^2 k_2 + \tau^4 k_4 + O\left(\tau^4\right).$$

Подставив в уравнение (3.9) и выписав множители при одинаковых степенях τ, получим асимптотические выражения

$$k_0 = \sqrt{\frac{Ch_0}{f_0}}, k_2 = \frac{C^2 h_0\left(g_0 - h_0\right)}{2k_0 f_0^2},$$
$$k_4 = \frac{C^3 h_0\left(3g_0^2 - 10g_0h_0 + 7h_0^2\right)}{8k_0 f_0^3}. \qquad (3.11)$$

Стоит отметить, что при $\tau = 0$ получаем формулу для спектрального параметра упругой пластинки ($h_0 = d_0$). Формулы (3.11) позволяют рассчитать асимптотическое значение спектрального параметра при малых значениях времени релаксации. Численные результаты, демонстрирующие диапазоны работоспособности для модельного примера, приведены на рис. 3.

4. Решение модельных задач методом Галеркина в классе полиномов. Численные результаты

А. Модельная задача 1б

В случае жестко закрепленной по краю упругой пластины получить аналитическое решение дифференциального уравнения, соответствующего условию оптимальности (2.8), не представляется возможным. В этом случае для определения оптимального распределения модулей можно воспользоваться одним из численных методов, например, методом Галеркина.

Рассмотрим условие оптимальности упругой пластины

$$w''^2 + 2\nu\frac{w''w'}{r} + \left(\frac{w'}{r}\right)^2 = a^2. \qquad (4.1)$$

Выберем в качестве координатных функций следующие, удовлетворяющие граничным условиям (1.8):

$$\varphi_k(r) = \left(1-r^2\right)^2 r^{2(k-1)}. \qquad (4.2)$$

Будем разыскивать решение (4.1) в виде линейной комбинации

$$w = \sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(r). \qquad (4.3)$$

Согласно методу Галеркина, построим интегральную невязку дифференциального уравнения (4.1) для представления решения вида (4.3), предварительно умножив (4.1) на каждую из координатных функций и проинтегрировав в пределах от 0 до 1

$$F_k\left(B_1,\ldots B_n\right) =$$
$$= \int_0^1 \left(w''^2 + 2\nu\frac{w''w'}{r} + \left(\frac{w'}{r}\right)^2 - a^2 \right)\varphi_k(r)\,dr, k = 1\ldots n.$$

Коэффициенты B_k находим из условия ортогональности координатных функций (4.2) и невязки, в результате чего получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов B_k

$$F_k\left(B_1,\ldots B_n\right) = 0, k = 1\ldots n.$$

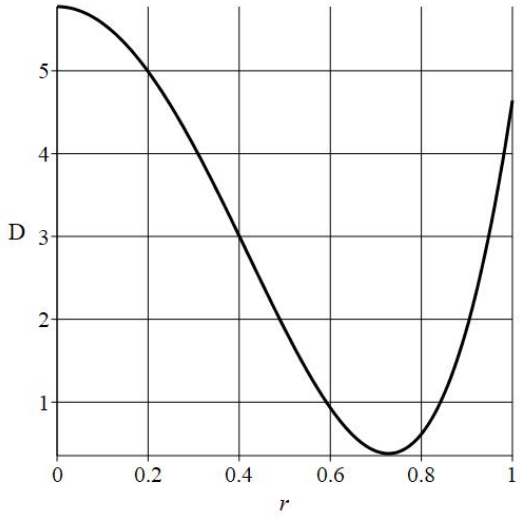
Решив систему, получаем значения коэффициентов (4.3) B_k^{opt} с точностью до множителя a. Таким образом, строится первая собственная форма колебаний пластинки.

$$w_* = a\sum_{k=1}^{n} B_k^{opt}\varphi_k(r).$$

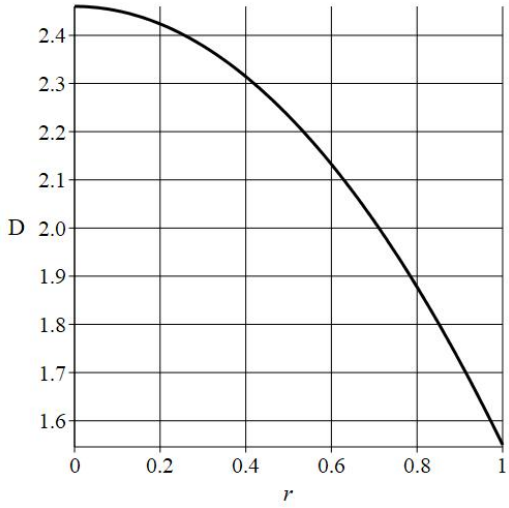
Далее для определения оптимальной жесткости, учитывая соответствующие свойства характеристики – положительность, четность, будем разыскивать функцию $D(r)$ в конечномерном пространстве, например, в классе полиномов четвертой степени. Как показали расчеты, четвертой степени полинома оказывается достаточно, поскольку дальнейшие уточнения не вносят особых изменений в поведение функции.

$$D(r) = A_1 + A_2 r^2 + A_3 r^4. \qquad (4.4)$$

Подставим представление (4.4), а также найденную собственную форму колебаний вида (4.3) во второе дифференциальное уравнение (2.8). Для определения коэффициентов может быть использован метод наименьших квадратов, который сводится к определению A_j из условия минимума функционала



a) $D_{opt} = 19,25r^4 - 20,38r^2 + 5,77,\ k_{opt} = 0,4776$



b) $D_{opt} = -0,91r^2 + 2,46,\ k_{opt} = 0.433$

Рис. 1. Оптимальное распределение жесткости для задачи 1 в классе полиномов четвертой (*a*) и второй (*b*) степеней

Fig. 1. Optimal stiffness distribution for Problem 1 in the class of polynomials of the fourth (*a*) and second (*b*) degrees

$$\Phi = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{3} A_j \left(r \left[r^{2(j-1)} \left(w''_{opt} + \frac{w'_{opt}}{r} \right)' + r^{2(j-1)} \nu \left(w''_{opt} + \nu \frac{w'_{opt}}{r} \right) \right] \right)' - Ak^2 r w_{opt} \right)^2 dr,$$

$$\Phi \to \min_{A_1, A_2, A_3},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_j} = 0, j = 1, 2, 3. \qquad (4.5)$$

В результате решения системы (4.5) получаем значения коэффициентов A_j с точностью до множителя, который определяется из условия (1.9).

После определения D_{opt} оптимальная собственная частота может быть найдена из соотношения Релея.

По предложенной схеме проведены расчеты для определения оптимального распределения первой собственной частоты и оптимальной функции жесткости.

Например, для значений параметров $\nu = 0,3$, $H = 0,1$, $d_0 = 1$ с тремя координатными функциями получили оптимальное распределение жесткости и оптимальный спектральный параметр (рис. 1, *a*). В случае, когда оптимальное распределение разыскивается в классе квадратичных полиномов, результат решения оптимизационной задачи представлен на рис. 1, *b*).

Апробация результатов была проведена путем решения прямой задачи об определении первой собственной частоты при заданной функции жесткости, результаты совпали с точностью порядка 2 %, что связано с вычислительной погрешностью решения дифференциального уравнения четвертого порядка методом Ритца, в качестве координатных функций была выбрана система функций (4.2), а также путем сравнения с результатами работы [23] (с учетом проведенной процедуры обезразмеривания).

Для сравнения были произведены расчеты первой собственной частоты для других законов изменения жесткости. Результаты приведены в таблице, где β – нормирующий коэффициент, который выбирался, исходя из условия $\int_0^1 rD(r)\,dr = 1$.

Сравнение частотной характеристики
для различных законов изменения жесткости

Comparison of frequency response
for different stiffness variation laws

$\beta D(r)$	k_{opt}
$1 - \sin\frac{\pi r}{2R}$	0,2799
$\left(1 - \sin\frac{\pi r}{2R}\right)(1 + e^r)$	0,3259
$1,1 - r^2$	0,3801
$1 + r$	0,4315
$1 + r^2$	0,4330
$1 + e^r$	0,4339
1	0,4421
$18r^4 - 15r^2 + 5$	0,4639
D_{opt}	0,4775

Б. Модельная задача 1а, 1б

Согласно описанной выше схеме был проведен также вычислительный эксперимент для определения оптимального распределения жесткости пластины в случае шарнирного опирания.

В качестве координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям $\varphi'_k(0) = \varphi_k(1) = 0$, выбраны функции: $\varphi_k(r) = (1 - r^2) r^{2(k-1)}$, первая собственная

форма разыскивается в виде линейной комбинации соответствующих координатных функций.

Для **задачи 1а** получены численные результаты для упругой пластинки при следующих значениях параметров: $\nu = 0{,}1$, $H = 0{,}1$, $n = 3$, первая собственная форма

$$w_{opt} = 0{,}3371a\left(1-r^2\right)+1{,}073610^{-10}a\left(1-r^2\right)r^2+O\left(10^{-11}\right),$$

оптимальное распределение жесткости и оптимальная собственная частота (рис. 2)

$$D_{opt} = 1{,}49999r^4 - 1{,}49999r^2 + 4{,}5, k_{opt} = 0{,}210819.$$

Полученные численные результаты с точностью до 10^{-6} совпадают с аналитически полученными результатами, что свидетельствует об эффективности предлагаемой схемы.

По данной схеме также численно решена **задача 2а**, на рис. 2 приведены графики, определяющие зависимости оптимальной жесткости (вещественной части) от времени релаксации.

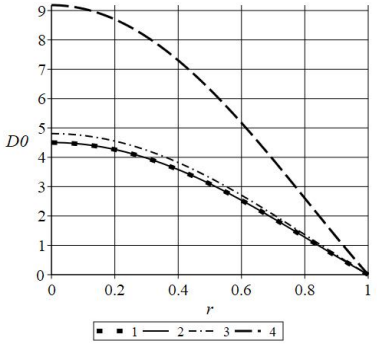


Рис. 2 Оптимальное распределение жесткости (вещественная часть) **задача 2а** для разных значений τ, *1* – при $\tau = 0{,}001$, $k_{opt} = 0{,}210819$, *2* – при $\tau = 0{,}1$, $k_{opt} = 0{,}21089$, *3* – при $\tau = 1, k_{opt} = 0.21787$, *4* – при $\tau = 5, k_{opt} = 0.30118$

Fig. 2 Optimal distribution of stiffness (real part – left, imaginary part – right) for **Problem 2** for different values τ, *1* – $\tau = 0.001, k_{opt} = 0.210819$, *2* – $\tau = 0.1, k_{opt} = 0.21089$, *3* – $\tau = 1, k_{opt} = 0.21787$, *4* – $\tau = 5, k_{opt} = 0.30118$

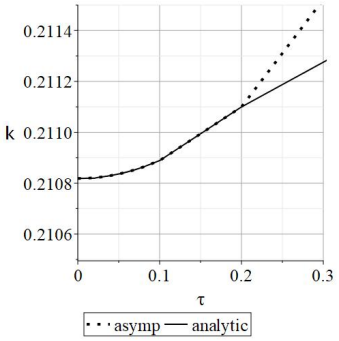


Рис. 3 Зависимость спектрального параметра от времени релаксации, рассчитанные по асимптотической формуле и методом Галеркина

Fig. 3. Relation of the spectral parameter, calculated using the asymptotic formula and the Galerkin method

Оценена точность решения в зависимости от количества координатных функций. На рис. 4 приведены соответствующие графики вещественных частей функций, характеризующих отклонение оптимальной функции жесткости, полученных методом Галеркина от решения, полученного аналитически при $\tau = 0{,}001$.

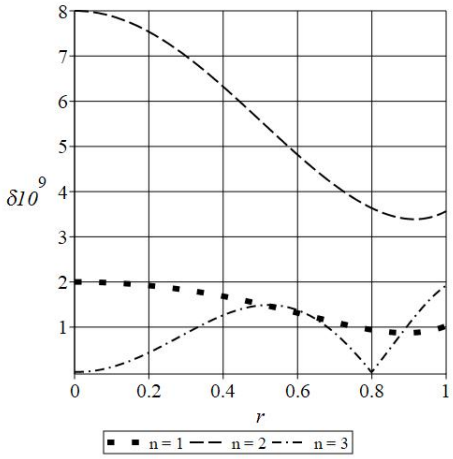


Рис. 4. Отклонение $\delta = Re\left|D_{opt} - D_*\right|$ в зависимости от количества координатных функций *n*

Fig. 4. Deviation $\delta = Re\left|D_{opt} - D_*\right|$ depending on the number of coordinate functions

Полученные результаты совпадают с аналитическими результатами, что свидетельствует о работоспособности предлагаемой численной схемы.

5. Решение модельной задачи 1б

Оптимизационную задачу об отыскании максимальной собственной частоты в конечномерном пространстве функций можно решить, используя эвристические оптимизационные алгоритмы. Подобный подход использован при решении спектральной модельной задачи для упругой неоднородной жестко закрепленной по краю круглой пластинки, которая рассмотрена также в п. 4 А). В качестве оптимизируемых параметров в фитнес функции выступают коэффициенты разложения функции жесткости в классе полиномов четвертой степени. На функцию жесткости кроме ограничения вида (1.9) наложены дополнительные ограничения

$$\forall r \in \left[0, R\right], 0 < D_{\min} \le D \le D_{\max}. \qquad (5.1)$$

Ограничение вида (5.1) определяет диапазон изменения коэффициентов и дополнительные условия при генерации новой особи в эвристическом алгоритме. В случае полинома это условие может быть заменено эквивалентным условием о принадлежности диапазону $\left[D_{\min}, D_{\max}\right]$ наибольшего и наименьшего значений полинома, которые достигаются либо в точках $0, R$, либо в точка экстремума.

Основные пункты предлагаемой схемы сводятся к следующим пунктам – пунктам построения фитнес функции:

1) функция жесткости D задается в виде (4.4) с учетом условия (1.9);

2) строится разложение w в виде (4.3);

3) строится функция невязки $F\left(B_1,..,B_n\right)$, находятся частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial B_j}=0$ и составляется матрица T соответствующей однородной линейной системы, элементы которой зависят от спектрального параметра. Из условия равенства нулю определителя матрицы T находятся собственные значения, при этом наименьший корень соответствует спектральной характеристике, отвечающей за первую собственную частоту.

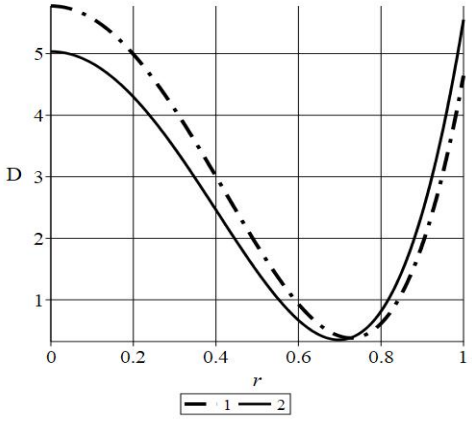


Рис. 5. Оптимальное распределение жесткости **задачи 1б**: *1* – метод Галеркина, $k_{\text{opt}}=0,4572$, *2* – генетический алгоритм, $k_{\text{opt}}=0,4575$

Fig. 5. Optimal distribution of stiffness for **Problem 1b**: *1* – Galerkin's method, $k_{\text{opt}}=0.4572$, *2* – genetic algorithm, $k_{\text{opt}}=0.4575$

Согласно предлагаемой схеме проведены расчеты максимальной собственной частоты и соответствующего распределения жесткости (в классе полиномов четвертой степени) для круглой пластинки, закрепленной по краю.

Входные параметры соответствуют входным данным задачи из п. 4 А), максимальное количество итераций – 100, количество элементов в каждой итерации – 50, $D_{\min}=0,3$, $D_{\max}=6$, $A_1\in[10,20]$, $A_2\in[-21,21]$, $A_3\in[1,20]$. В результате получены значения $k_{opt}=0,4575$, $D_{opt}=19,76r^4-19,25r^2+5,03$ (рис. 5).

Предлагаемый подход представляет собой универсальную схему решения спектральных оптимизационных задача и может быть использован для решения других задач.

Заключение

Проведено исследование оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты для круглой неоднородной пластины с переменной жесткостью (модулем Юнга). Предложено несколько схем исследования, которые позволяют получить оптимальное распределение жесткости в классе полиномов. Предложенные схемы апробированы на модельных задачах для жесткой закрепленной и шарнирно опертой по краю пластинки с учетом и без учета затухания. В случае вязкоупругой пластины с возрастанием времени релаксации наблюдается увеличение оптимальной собственной частоты. Вид закрепления края пластики также влияет на значение спектрального параметра: так, при жесткой заделке наблюдается увеличение первой собственной частоты по сравнению со случаем шарнирного опирания. Сравнительный анализ результатов решений задач, полученных разными способами, свидетельствует о работоспособности предлагаемых подходов.

Библиографический список

1. Баничук, Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.

2. Ольхофф, Н. Оптимальное проектирование конструкций / Н. Ольхофф. – М.: Наука, 1981. – 280 с.

3. Niordson, I.F. On the optimal design of a vibrating beam / I.F. Niordson // Quarterly of Applied Mathematics. – 1965. – Vol. 23. – P. 47–53.

4. Братусь, А.С. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций / А.С. Братусь, В.М. Картелишвили // Механика твердого тела. – 1981. – № 6. – С. 119–139.

5. Sarkisyan, V.S. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy / V.S. Sarkisyan, G.M. Gukasyan, A.A. Grigoryan // Journal of Mathematical Sciences. – 2001. – Vol. 104, no. 5. – P. 1569–1574.

6. Bratus', A.S. The optimum shape of a bending beam / A.S. Bratus', V.P. Posvyanskii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2000. – Vol. 64, iss. 6. – P. 993–1004. DOI: 10.1016/S0021-8928(00)00131-3

7. Гринев, В.Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам / В.Б. Гринев, А.П. Филипов. – К.: Наукова думка, 1975. – 290 с.

8. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures / X. Jiang, W. Zhang, C. Liu, Z. Du, X. Guo // Appl. Math. Model. – 2023. Vol. 113. – P. 613–639. DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.028

9. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures / Y. Zhou, T. Nomura, E.M. Dede, K. Saitou // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2022. – Vol. 65, no 8. – P. 118. DOI: 10.1007/s00158-022-03219-8.A

10. Kamiya, A. Microstructural shape optimization method for natural vibration design of laminated porous shell structures / Ayu Kamiya, Masatoshi Shimoda, Musaddiq Al Ali // Composite Structures. – 2025. – Vol. 367. – 119184. DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.119184

11. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization / V.G. Belardi, S. Trupiano, P. Fanelli, F. Vivio // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2024. – Vol. 103. – 105189. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2023.105189

12. Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material's structural inhomogeneity / V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin, P.A. Vasilyev // Chebyshevskii Sbornik. – 2022. – Vol. 23, no. 4. – P. 308–326. (In Russ.) DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326

13. Башин, К.А. Методы топологической оптимизации конструкций, применяющиеся в аэрокосмической отрасли / К.А. Башин, Р.А. Торсунов, С.В. Семенов // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. – 2017. – № 4 (51). – С. 51–61. DOI: 10.15593/2224-9982/2017.51.05

14. Density-based topology optimization of thin plate structure with geometric nonlinearity using a three-dimensional corotational triangle element formulation / T. Otani, W. Sumihira, Y. Kobayashi, M. Tanaka // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2022. – Vol. 65, no. 10. – 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-022-03399-3

15. Ватульян, А.О. Об одной задаче оптимизации для преднапряженной пластины с переменной жесткостью / А.О. Ватульян, Р.Д. Недин // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 2. – С. 202–214. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214

16. Ватульян, А.О. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций / А.О. Ватульян, О.В. Явруян // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 4. – С. 552–566. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566

17. Vatulyan, A.O. Some analytical solutions in problems of optimization of variable thermal conductivity coefficient / A.O. Vatulyan, S.A. Nesterov // Vladikavkaz. Mat. Zh. – 2024. – Vol. 26, no 3. – P. 33–46. DOI: 10.46698/v9056-4395-2233-f

18. Lei Duan Vibration optimization of composite plates with multiple circular holes using two-dimensional sampling optimization method / Lei Duan, Zhao Jing // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2023. – Vol. 155. – P. 1131–1148. DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.07.028

19. Eisenberger, M. Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness / M. Eisenberger, M. Jabareen // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2001. – Vol. 1, no. 2. – P. 195–206. DOI: 10.1142/S0219455401000196

20. Singh, B. Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness / B. Singh, S. Chakraverty // J. Sound Vibrat. – 1994. – Vol. 73, no. 3. – P. 289–299. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1231

21. Васильев, Г.П. Частоты свободных колебаний круглой тонкой пластины с переменными параметрами / Г.П. Васильев, А.Л. Смирнов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2020. – Т. 7, № 65 (3). – С. 518–526. DOI: 10.21638/spbu01.2020.314

22. Anikina, T.A. On the calculation of variable stiffness for a circular plate / T.A. Anikina, A.O. Vatulyan, P.S. Uglich // Computational Technologies. – 2012. – Vol. 17, no. 6. – P. 26–35.

23. Идентификация неоднородных свойств вязкоупругой круглой пластины / Т.А. Аникина, И.В. Богачев, А.О. Ватульян, В.В. Дударев // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2016. – № 2. – С. 10–18.

24. Asymptotic methods in mechanics of solids / S.M. Bauer, S.B. Filippov, A.L. Smirnov, P.E. Tovstik, R. Vaillancourt. – Birkh¨auser, Basel, 2015. DOI: 10.1007/978-3-319-18311-4

25. Smirnov, A.L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates / A.L. Smirnov // COMPDYN Proceedings. – 2019. – Vol. 2. – P. 3547–3555.

26. Jafari, N. Free vibration analysis of viscoelastic plates with simultaneous calculation of natural frequency and viscous damping / N. Jafari, M. Azhari // Mathematics and Computers in Simulation. – 2021. – Vol. 185. – P. 646–659. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.01.0

27. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

28. Кристенсен, Р.М. Введение в механику композитов / Р.М. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 336 с.

References

1. Banichuk N.V. Optimizatsiya form uprugikh tel [Optimization of Forms of Elastic Bodies]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 256 p. (In Russian).

2. Olkhoff N. Optimalnoe proektirovanie konstruktsiy: Voprosy vibratsii i poteri ustoychivosti [Optimal design of structures. Issues of vibration and loss of stability]. *In: Mekhanika.Novoe v zarubezhnoy nauke* (Mechanics. New in Foreign Science). Iss. 27. Moscow. MirPubl. 1981. 277 p. (In Russian).

3. Niordson I. F. On the optimal design of a vibrating beam. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1965, Vol. 23, pp. 47-53.

4. Bratus A.S., Kartelishvili V.M. Priblizhennie analiticheskie resheniya v zadachakh optimizatsii ustoichivosti i chastot kolebanii uprugikh tonkostennikh konstruktsii [Approximate analytical solutions for optimization problems of stability and vibration frequencies of elastic thin-walled structures] *Mechanics of Solids*, 1981, No.6, pp. 119-139

5. Sarkisyan, V. S., Gukasyan, G. M., Grigoryan, A. A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy. *Journal of Mathematical Sciences,* 2001, Vol.104, No. 5, pp.1569-1574.

6. Bratus', A.S., Posvyanskii, V.P. The optimum shape of a bending beam. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, Vol. 64, No. 6, pp. 993-1004. doi: 10.1016/S0021-8928(00)00131-3

7. Grinev V. B., Filippov A. P. Optimizatsiya elementov konstruktsiy po mekhanicheskim kharakteristikam [Optimization of structural elements by mechanical characteristics]. Kiev, Naukova dumka, 1975. 290 p. (in Russian)

8. Jiang X., Zhang W., Liu C., Du Z., Guo X. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Appl. Math. Model.,* 2023, Vol. 113, pp. 613–639. doi:10.1016/j.apm.2022.09.028

9. Zhou Y., Nomura T., Dede E.M., Saitou K. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization,* 2022, Vol. 65. No. 8, P. 118. doi: 10.1007/s00158-022-03219-8.A

10. Ayu Kamiya, Masatoshi Shimoda, Musaddiq Al Ali Microstructural shape optimization method for natural vibration design of laminated porous shell structures. *Composite Structures*. 2025, Vol. 367, 119184. doi: 10.1016/j.compstruct.2025.119184.

11. Belardi V.G., Trupiano S., Fanelli P., Vivio F. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization. *European Journal of Mechanics – A/Solids,* 2024, Vol. 103, 105189. doi: 10.1016/j.euromechsol.2023.105189

12. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Vasilyev P.A. Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material's structural inhomogeneity. *Chebyshevskii Sbornik,* 2022, Vol. 23. No. 4, pp. 308-326. (In Russ.) doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326

13. Bashin K.A., Torsunov R.A., Semenov S.V. Metodi topologicheskoi optimizatsii konstruktsii, primenyayushchiesya v aerokosmicheskoi otrasli [Topology optimization methods in aerospace industry]. *Perm National Research Polytechnic University Aerospace Engineering Bulletin,* 2017, No. 51, pp. 51-61. doi: 10.15593/2224-9982/2017.51.05

14. Otani T., Sumihira W., Kobayashi Y., Tanaka M. Density-based topology optimization of thin plate structure with geometric nonlinearity using a three-dimensional corotational triangle element formulation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, Vol. 65, No. 10, 1615-147X doi: 10.1007/s00158-022-03399-3

15. Vatulyan, A.O., Nedin, R.D. On an optimization problem for a prestressed plate with variable stiffness. *Problems of Strength and Plasticity*, 2024, No. 86, pp. 202-214. 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214.

16. Vatulyan1 A. O., Yavruyan O. V. Optimisation of mechanical properties of viscoelastic structures. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, Vol. 24, iss. 4, pp. 552–566. doi:10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566

17. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Some analytical solutions in problems of optimization of variable thermal conductivity coefficient. *Vladikavkaz. Mat. Zh*., 2024, Vol. 26, No 3, pp. 33-46. doi:10.46698/v9056-4395-2233-f

18. Lei Duan, Zhao Jing, Vibration optimization of composite plates with multiple circular holes using two-dimensional sampling optimization method. *Engineering Analysis with Boundary Elements,* 2023, Vol. 155, pp. 1131-1148. doi: 10.1016/j.enganabound.2023.07.028

19. Eisenberger M., Jabareen M., Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness. *International Journal of Structural Stability and Dynamics,* 2001, Vol. 1, No.2, pp. 195–206. doi: 10.1142/S0219455401000196

20. Singh B., Chakraverty S. Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness. *J. Sound Vibrat*., 1994, Vol.73, No. 3, pp. 289–299. doi: 10.1006/jsvi.1994.1231

21. Vasiliev G.P., Smirnov A.L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, Vol.7, No. 3, pp. 518–526. doi: 10.21638/spbu01.2020.314

22. Anikina T.A., Vatulyan A.O., Uglich P. S., On the calculation of variable stiffness for a circular plate. *Computational Technologies*. 2012, Vol.17, No. 6, pp.26–35.

23. Anikina T.A., Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V. Identifikatsiya neodnorodnikh svoistv vyazkouprugoi krugloi plastini [Identification of inhomogeneous properties of a viscoelastic circular plate] *Ekologicheskii vestnik nauchnikh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2016, No. 2, pp. 10-18.

24. Bauer S.M., Filippov S.B., Smirnov A. L., Tovstik P.E., Vaillancourt R., Asymptotic methods in mechanics of solids. *Birkh¨auser, Basel*, 2015. Doi: 10.1007/978-3-319-18311-4

25. Smirnov A. L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates. *COMPDYN Proceedings*, 2019, Vol. 2, pp. 3547–3555.

26. Jafari N., Azhari M. Free vibration analysis of viscoelastic plates with simultaneous calculation of natural frequency and viscous damping. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, Vol. 185, pp. 646–659. doi:10.1016/j.matcom.2021.01.0

27. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York. McGraw-Hill. 1959. 581 p.

28. Kristensen R. M. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. Moscow: Mir, 1982. 336 p. (in Russian).

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, https://rscf.ru/project/22-11-00265/, в Южном федеральном университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00265-P, https://rscf.ru/project/22-11-00265/, at the Southern Federal University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The authors' contributions are equal.