Вильдеман, В.Э. Структурно-феноменологическая модель усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородных сред / В.Э. Вильдеман, А.И. Мугатаров. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.04 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 50–60.

Perm Polytech Style: Wildemann V.E., Mugatarov A.I. Structural-phenomenological model of fatigue damage accumulation and failure of inhomogeneous solids. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 4, pp. 50-60. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.04
УДК 539.4

СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В.Э. Вильдеман, А.И. Мугатаров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 01 сентября 2025 г.
Одобрена: 30 октября 2025 г.
Принята к публикации:
05 ноября 2025 г.

Ключевые слова:

структурно неоднородная среда, композит, усталость, накопление повреждений, многоуровневые модели.

АННОТАЦИЯ

На основе предложенного Ю.В. Соколкиным подхода к математическому моделированию процессов усталостного разрушения структурно неоднородных сред, в рамках концепции поврежденности Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова в данном исследовании разработана двухуровневая структурно-феноменологическая модель усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородного тела. Подробно рассмотрен переход от наиболее простых критериев и моделей усталости и моделей накопления повреждений к предложенной модели, учитывающей изменение деформационных и прочностных характеристик структурных элементов по мере роста числа циклов воздействия. Приведена постановка краевой задачи деформирования и разрушения структурно неоднородного тела с учетом усталостного накопления повреждений. Разработан алгоритм решения поставленной краевой задачи. Отмечена перспективность применения разработанной модели для прогнозирования долговечности конструкций, их механического поведения на макроуровне после предварительных циклических воздействий, а также рассмотрения кинетики процессов накопления повреждений и разрушения.

© **Вильдеман Валерий Эрвинович** – д. ф.-м. н., проф., зав. каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, e-mail: wildemann@pstu.ru
Мугатаров Артур Ильдарович – асс. каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, e-mail: cem_mugatarov@mail.ru

Valeriy E. Wildemann – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Experimental Mechanics and Structural Materials Science, e-mail: wildemann@pstu.ru
Artur I. Mugatarov – Assistant of the Department of Experimental Mechanics and Structural Materials Science, e-mail: cem_mugatarov@mail.ru

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

STRUCTURAL-PHENOMENOLOGICAL MODEL OF FATIGUE DAMAGE ACCUMULATION AND FAILURE OF INHOMOGENEOUS SOLIDS

V.E. Wildemann, A.I. Mugatarov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 September 2025
Approved: 30 October 2025
Accepted for publication:
05 November 2025

Keywords:

inhomogeneous solid, composite, fatigue, damage accumulation, multi-level models.

ABSTRACT

Based on the approach to mathematical modeling of the fatigue failure processes of structurally inhomogeneous media proposed by Yu. V. Sokolkin, within the framework of the damage concept of Yu. N. Rabotnov and L. M. Kachanov, a two-level structural-phenomenological model of fatigue damage accumulation and failure of an inhomogeneous body is developed in this paper. The transition from the simplest fatigue criteria, fatigue models, and models of damage accumulation to the proposed model that takes into account the change in deformation and strength characteristics of structural elements as the number of loading cycles increases is considered in detail. The statement of the boundary value problem of deformation and fracture of a structurally inhomogeneous body is presented, taking into account the fatigue damage accumulation. An algorithm for solving the stated boundary value problem is developed. The prospects of using the developed model for predicting the durability of structures, their mechanical behavior at the macrolevel after preliminary cyclic loading, as well as considering the kinetics of damage accumulation and fracture processes are noted.

В процессе эксплуатации многие элементы конструкций подвергаются действию циклических нагрузок, приводящих к усталостному разрушению [1–3]. Для традиционных сталей и сплавов на сегодняшний день разработано большое число критериев и моделей усталости, которые можно условно разделить на две группы: в первой долговечность прогнозируется на основе параметров напряженно-деформированного состояния (в некоторых моделях также определяется критическая плоскость) [4–6]; во второй рассматриваются процессы роста усталостных трещин и используются подходы механики разрушения [7–9]. Кроме этого, на основе использования концепции поврежденности Качанова – Работнова [10–11], получившей широкое развитие в механике материалов [12], рассматриваются вопросы накопления усталостных повреждений в структуре материала [13–14].

В настоящее время актуальными являются вопросы прогнозирования долговечности элементов конструкций, изготовленных из структурно неоднородных материалов [15–24]. Важной особенностью механического поведения композитов, отличающей их от традиционных металлов и сплавов, является снижение механических характеристик по мере циклического воздействия [25–28]. Для описания зависимостей остаточных деформационных и прочностных характеристик структурно неоднородных материалов предложено большое число феноменологических моделей [29–31], в которых используются скалярные функции поврежденности как поправка к некоторой механической характеристике.

Для описания механического поведения материалов широкое распространение получили многоуровневые модели [32–39], позволяющие исследовать в том числе процессы циклического нагружения [40]. Ю.В. Соколкиным [41] на основе подходов, предложенных С.Д. Волковым [42], разработаны двухуровневые структурно-феноменологические модели деформирования и разрушения структурно неоднородных сред, а также соответствующие постановки краевых задач [43; 44]. Кроме этого, на основе данных моделей была разработан подход к математическому моделированию процессов усталостного разрушения композитных тел, в рамках которого учитывается изменение прочностных и деформационных характеристик с течением времени [45]. Предложенные модели к описанию процессов деформирования структурно-неоднородных сред нашли применение в работах [46–52].

Целью данной работы является разработка двухуровневой структурно-феноменологической модели усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородных сред на основе подхода, предложенного Ю.В. Соколкиным. Для этого подробно рассмотрен переход от простейших критериев и моделей усталости до структурно-феноменологических моделей описания процессов накопления усталостных повреждений. Предложена постановка краевой задачи механики деформирования и разрушения структурно-неоднородного тела с учетом усталостного накопления повреждений. Разработан алгоритм решения поставленной краевой задачи.

Критерии и модели усталости

По результатам проведения одноосных усталостных испытаний при симметричном либо пульсирующем цикле нагружения проводится построение диаграммы Велера в виде зависимости амплитуды напряжений либо деформаций (в зависимости от вида циклического воздействия) от числа циклов до разрушения. На данной диаграмме выделяют области циклической ползу-

чести, малоцикловой, многоцикловой и, в некоторых случаях, гигацикловой усталости. Кроме этого, на диаграммах Велера выделяют предел усталостной выносливости – максимальное напряжение, при котором усталостное разрушение не произойдет на заданной базе циклов нагружения (чаще всего выбирается значение порядка 10^7 циклов). По аналогии с поверхностью прочности, в случае реализации многоосного нагружения по всем шести компонентам тензора напряжений в многомерном пространстве параметров циклического воздействия (постоянных составляющих напряжений, их амплитуд и т.д.) может быть построена поверхность, являющаяся геометрическим местом точек, соответствующих пределам усталостной выносливости, описываемая уравнением

$$y\left(\varphi_{(\alpha)},\omega_{(\beta)},\psi_{(\gamma)}\right)=1,\ \ \alpha=\overline{1,k},\ \ \beta=\overline{1,l},\ \ \gamma=\overline{1,m}, \quad (1)$$

где $\varphi_{(\alpha)}$ – k параметров напряженно-деформированного состояния в цикле нагружения (амплитуды, постоянные составляющие и т.д.); $\omega_{(\beta)}$ – l упругих и прочностных констант материала (в том числе пределы усталостной выносливости); $\psi_{(\gamma)}$ – m прочих физических параметров материала (плотность, размер зерна и т.д.). Параметры напряженно-деформированного состояния $\varphi_{(\alpha)}$ определяются по зависимостям компонент тензора напряжений σ_{ij} и тензора деформаций ε_{ij} от времени t в цикле нагружения:

$$\varphi_{(\alpha)}=v_{(\alpha)}\left(\sigma_{ij}\left(t\right),\varepsilon_{ij}\left(t\right)\right),\ \ \alpha=\overline{1,k},\ \ t\in\left[0,\tau\right], \quad (2)$$

где τ – период цикла нагружения.

Поверхность (1) ограничивает область значений параметров циклического нагружения, в которой усталостное разрушение материала не произойдет на заданной базе циклов воздействия. Назовем выражение

$$y\left(\varphi_{(\alpha)},\omega_{(\beta)},\psi_{(\gamma)}\right)\le 1,\ \ \alpha=\overline{1,k},\ \ \beta=\overline{1,l},\ \ \gamma=\overline{1,m}, \quad (3)$$

критерием усталости – неравенством, с помощью которого можно определить, произойдет ли усталостное разрушение для заданного материала при заданных условиях нагружения. В общем случае использование критерия усталости не позволяет определить количество циклов, которое способно выдержать тело до усталостного разрушения, для заданного режима нагружения. Однако путем замены пределов усталостной выносливости на параметры диаграмм Велера критерии (3) могут быть преобразованы к виду

$$y\left(N,\varphi_{(\alpha)},\omega_{(\beta)},\psi_{(\gamma)}\right)\le 1,\ \ \alpha=\overline{1,k},\ \ \beta=\overline{1,l},\ \ \gamma=\overline{1,m}, \quad (4)$$

где N – число циклов воздействия, $N\ge 0$, $N\in\mathbb{Z}$. Выражение (4) называют моделью усталости и используют для прогнозирования долговечности элементов конструкций.

Отметим, что в вышеизложенном виде критерии и модели усталости применимы при неизменных параметрах циклов нагружения (постоянных во времени амплитудах напряжений, их постоянных составляющих и т.д.). При работе в условиях меняющихся циклов нагружения необходимым является применение моделей суммирования повреждений.

Описание процессов накопления усталостных повреждений

Модели накопления усталостных повреждений вводятся в рамках концепции поврежденности Качанова – Работнова [4; 5] на основе использования функций поврежденности D. В общем виде данные модели могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered} D^{(b)}=w\left(N^{(b)},N_f^{(b)}\left(\varphi_{(\alpha)}^{(b)},\omega_{(\beta)},\psi_{(\gamma)}\right),D^{(b-1)}\right),\\ D^{(0)}=0;\quad D^{(b)}\ge D^{(b-1)},\ \ \alpha=\overline{1,k},\ \ \beta=\overline{1,l},\ \ \gamma=\overline{1,m}, \end{gathered} \quad (5)$$

где b – текущий этап циклического нагружения; $D^{(b)}$ – поврежденность материала после $N^{(b)}$ циклов воздействия на данном этапе; $N_f^{(b)}$ – долговечность при режиме нагружения b, определяемая с применением моделей усталости (4). Здесь поврежденность D – безразмерная величина, условно отражающая внутреннее состояние материала, но не связанная с какими-либо механическими характеристиками; $D^{(b)}\ge 1$ соответствует усталостному разрушению. Применение моделей (5) позволяет определить число циклов до разрушения тела при комбинациях различных режимов циклического нагружения. Известны различные модели накопления усталостных повреждений, наиболее широко применяемой является линейная модель суммирования повреждений Пальмгрена – Майнера [1].

Отметим, что в выражениях (4) и (5) не учитывается возможность изменения механических характеристик материалов по мере накопления усталостных повреждений. Для традиционных металлов и сплавов данное допущение обосновывается экспериментально подтвержденным слабым влиянием предварительных циклических воздействий на остаточные значения упругих и прочностных характеристик. Однако для ряда структурно неоднородных материалов экспериментально выявлено существование значительной зависимости остаточных механических характеристик от числа циклов воздействия, что сильно ограничивает применение вышеизложенных моделей.

Феноменологическое описание зависимостей остаточных механических характеристик структурно неоднородных материалов от числа циклов воздействия

Рассмотрим характерный объем структурно неоднородного материала (много больший межатомных расстояний, но много меньший размеров тела) в условиях циклического нагружения при неизменных параметрах

цикла воздействия (задается циклически изменяющееся напряженное состояние либо деформированное состояние). Для данных условий зависимость какой-либо механической характеристики материала от числа циклов воздействия может быть представлена в виде

$$\omega_{(\beta)} = x_{(\beta)}\left(N, \varphi_{(\alpha)}\right), \quad \alpha = \overline{1,k}, \quad \beta = \overline{1,l}, \tag{6}$$

где $\omega_{(\beta)}$ – текущее значение механической характеристики материала; $\omega_{(\beta)}(N = 0) = \omega_{0(\beta)}$ – значение механической характеристики материала без накопленных усталостных повреждений. Выражение (6) часто представляют в виде зависимости относительной величины механической характеристики от числа циклов воздействия, что позволяет ввести функции поврежденности $D_{(\beta)}$, отражающие изменение свойств материала в условиях усталостного накопления повреждений:

$$D_{(\beta)} = 1 - \frac{\omega_{(\beta)}}{\omega_{0(\beta)}} = g_{(\beta)}\left(N, \varphi_{(\alpha)}\right), \quad \alpha = \overline{1,k}, \quad \beta = \overline{1,l}. \tag{7}$$

Экспериментальные исследования демонстрируют, что с ростом числа циклов воздействия N упругие и прочностные характеристики материала снижаются, т.е. $\Delta D_{(\beta)}/\Delta N > 0$. В таких условиях усталостное разрушение характерного объема может рассматриваться как следствие уменьшения поверхности прочности (построенной в пространстве напряжений либо пространстве деформаций, в зависимости от реализуемого режима нагружения) до пересечения с траекторией циклического нагружения. На сегодняшний день предложено большое число феноменологических моделей прогнозирования остаточной жесткости и прочности [30] композитов.

При реализации переменных режимов циклического нагружения зависимость свойств материала представительного объема от числа циклов воздействия по аналогии с выражением (5) может быть представлена в виде

$$\begin{gathered} D_{(\beta)}^{(b)} = g_{(\beta)}\left(N^{(b)}, \varphi_{(\alpha)}^{(b)}, D_{(\beta)}^{(b-1)}\right); \quad D_{(\beta)}^{(0)} = 0; \\ D_{(\beta)}^{(b)} \geq D_{(\beta)}^{(b-1)}, \quad \alpha = \overline{1,k}, \quad \beta = \overline{1,l}. \end{gathered} \tag{8}$$

Выражения (7)–(8) и соответствующие им феноменологические модели применимы для описания поведения конструкций только при условиях реализации однородного напряженно-деформированного состояния и равенства механических характеристик материала во всех точках тела. При неоднородном НДС либо неоднородном распределении свойств материала в теле процессы накопления усталостных повреждений будут происходить в различных точках материала по-разному. Данная особенность требует разработки специальных моделей и учета в постановках краевых задач. Целесообразным для этого представляется применение предложенного Ю.В. Соколкиным подхода к моделированию процессов усталостного разрушения структурно неоднородных тел [45].

Структурно-феноменологическая модель накопления усталостных повреждений и разрушения

Разделим тело V с границей Γ на H непересекающихся подобластей (структурных элементов, микрообъемов), прочно соединенных по границам раздела. Примем, что механические характеристики в каждой из подобластей всегда распределены однородно и могут быть описаны с использованием скалярных функций поврежденности $D_{(\beta)}$, вычисленных с помощью выражений (7)–(8). В таком случае объем $V^{(z)}$ каждой из подобластей не может быть выбран произвольным образом, а должен соответствовать некоторому характерному объему $\sim d_1 d_2 d_3$, где $d_{(i)}$ – характерные линейные размеры области повреждения, являющиеся параметрами материала (одни из параметров $\psi_{(\gamma)}$) [53–56].

Для описания структуры и распределения механических характеристик будем использовать индикаторные функции $\chi^{(z)}$,

$$\chi^{(z)}\left(\overline{r}\right) = \begin{cases} 1, & \overline{r} \in V^{(z)}; \\ 0, & \overline{r} \notin V^{(z)}; \end{cases} \quad z = \overline{1,H}, \tag{9}$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор. В таком случае зависимость механических характеристик $\omega_{(\beta)}$ от координат и числа циклов может быть выражена следующим образом:

$$\omega_{(\beta)}\left(\overline{r}, N\right) = \sum_{z=1}^{H} \chi^{(z)}\left(\overline{r}\right) \omega_{(\beta)}^{(z)}\left(N\right), \quad z = \overline{1,H}, \quad \beta = \overline{1,l}, \tag{10}$$

где $\omega_{(\beta)}^{(z)}$ – механические характеристики подобласти z, которые вводятся через функции поврежденности

$$\begin{gathered} \omega_{(\beta)}^{(z)}\left(N\right) = \omega_{0(\beta)}^{(z)}\left[1 - D_{(\beta)}^{(z)}\left(N, \varphi_{(\alpha)}^{(z)}\left(N\right), D_{(\beta)}^{(z)}\left(N-1\right)\right)\right], \\ z = \overline{1,H}, \ \alpha = \overline{1,k}, \ \beta = \overline{1,l}. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $D_{(\beta)}^{(z)}$ – функция поврежденности, отражающая изменение механической характеристики β в подобласти z. Начальные свойства структурных элементов являются случайными:

$$P\left(\omega_{0(\beta)}^{(z)} < \lambda\right) = F_{(\beta)}\left(\lambda\right), \quad z = \overline{1,H}, \quad \beta = \overline{1,l}, \tag{12}$$

где $P()$ – вероятность; $F_{(\beta)}$ – интегральные функции распределения вероятности, значения параметров которых также характеризуют структурные элементы.

Поскольку рассматривается микрообъем $V^{(z)}$ с характерным размером области повреждения, то параметры напряженно-деформированного состояния $\varphi_{(\alpha)}^{(z)}$ могут быть определены осреднением по микрообъему:

$$\varphi_{(\alpha)}^{(z)}\left(N\right) = \frac{1}{V^{(z)}} \int\limits_{V^{(z)}} \varphi_{(\alpha)}\left(\overline{r}, N\right) dV, \quad z = \overline{1,H}, \quad \alpha = \overline{1,k}, \tag{13}$$

где $\varphi_{(\alpha)}$ – параметры напряженно-деформированного состояния, определяемые с учетом зависимости напряженно-деформированного состояния от времени в текущем цикле нагружения:

$$\varphi_{(\alpha)}\left(\overline{r},N\right)=v_{(\alpha)}\left(\sigma_{ij}\left(\overline{r},N,t\right),\varepsilon_{pq}\left(\overline{r},N,t\right)\right),\quad \alpha=\overline{1,k},\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right). \tag{14}$$

Поскольку разрушение может рассматриваться как следствие уменьшения поверхности прочности до пересечения с траекторией нагружения в пространстве напряжений, то совокупность критериев разрушения может быть записана в виде

$$C_{(\delta)}\left(\omega_{(\beta)}\left(\overline{r},N\right),\sigma_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)\right)\geq 1,\quad \beta=\overline{1,l},\ \ \delta=\overline{1,a},\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right); \tag{15}$$

выполнение критерия $C_{(\delta)}$ в точке $\overline{r}$ в момент времени t соответствует одному из a механизмов разрушения типа δ и приводит к скачкообразному изменению некоторых (соответствующих данному механизму разрушения) функций поврежденности $D_{(\beta)}^{(z)}$ до единицы при $\overline{r}\in V^{(z)}$. Поскольку процессы разрушения происходят со скоростями, многократно превышающими характерные скорости циклического воздействия, то выполнение критериев разрушения приведет к практически мгновенному изменению напряженно-деформированного состояния и необходимости проверки выполнения критериев разрушения в иных структурных элементах при неизменном t.

На структурном уровне выполняются уравнения равновесия (без учета массовых сил):

$$\sigma_{ij,j}\left(\overline{r},N,t\right)=0,\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right), \tag{16}$$

динамические эффекты не учитываются (принимается, что для любого момента времени t тело находится в равновесии). Используются геометрические соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}\left(\overline{r},N,t\right)+u_{j,i}\left(\overline{r},N,t\right)\right),\quad t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right), \tag{17}$$

где u_i – вектор перемещений. Принимается, что, несмотря на изменение механических характеристик, материал деформируется линейно-упруго:

$$\sigma_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)=C_{ijpq}\left(\overline{r},N\right)\varepsilon_{pq}\left(\overline{r},N,t\right),\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right), \tag{18}$$

где C_{ijpq} – тензор упругих констант, состоящий из части параметров $\omega_{(\beta)}$ и задаваемый уравнением (9).

Поскольку решение краевой задачи для тела при его делении на совокупность большого числа микрообъемов является чрезвычайно сложным, выделим в теле ряд макрообъемов V^*, размеры которых существенно меньше габаритов тела, но существенно больше микрообъемов $V^{(z)}$. Граничные и начальные условия для структурного уровня могут быть записаны в виде:

$$\left[\sigma_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)n_j\left(\overline{r}\right)\right]\Big|_{\Gamma_S^*}=S_i^*\left(\overline{r},N,t\right)=\sigma_{ij}^*\left(\overline{r},N,t\right)n_j\left(\overline{r}\right);$$
$$u_i\left(\overline{r},N,t\right)\Big|_{\Gamma_u^*}=u_i^*\left(\overline{r},N,t\right)=\varepsilon_{ij}^*\left(\overline{r},N,t\right)r_j; \tag{19}$$
$$D_{(\beta)}^{(z)}\left(N=0\right)=0,\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right),$$

где n_j – вектор нормали к поверхности макрообъема V^*; Γ_S^*, Γ_u^* – части поверхности макрообъема с заданными векторами сил S_i^* и u_i^* соответственно; σ_{ij}^*, ε_{ij}^* – макронапряжения и макродеформации внутри макрообъема, которые считаются однородно распределенными и равными

$$\sigma_{ij}^*\left(\overline{r},N,t\right)=\frac{1}{V^*}\int_{V^*}\sigma_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)dV,$$
$$\varepsilon_{ij}^*\left(\overline{r},N,t\right)=\frac{1}{V^*}\int_{V^*}\varepsilon_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)dV,\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right). \tag{20}$$

Начальное напряженно-деформированное состояние на структурном уровне определяется макронапряжениями и макродеформациями в момент времени $t=0$, $N=0$.

Макроскопические уравнения равновесия, геометрические соотношения и физические соотношения имеют вид

$$\sigma_{ij,j}^*\left(\overline{r},N,t\right)=0,$$
$$\varepsilon_{ij}^*\left(\overline{r},N,t\right)=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^*\left(\overline{r},N,t\right)+u_{j,i}^*\left(\overline{r},N,t\right)\right), \tag{21}$$
$$\sigma_{ij}^*\left(\overline{r},N,t\right)=C_{ijpq}^*\left(\overline{r},N\right)\varepsilon_{pq}^*\left(\overline{r},N,t\right),\ \ t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right),$$

где u_i^* – перемещения на макроуровне; C_{ijpq}^* – тензор эффективных упругих свойств макрообъемов, определяемых известными методами и подходами механики композитов [43]. Граничные условия на макроуровне, учитывающие свойства нагружающих систем [44], имеют вид:

$$\left[\sigma_{ij}\left(\overline{r},N,t\right)n_j\left(\overline{r}\right)+R_{ij}\left(\overline{r}\right)u_j\left(\overline{r},N,t\right)\right]\Big|_{\Gamma_S}=S_i^0\left(\overline{r},N,t\right),$$
$$\left[u_i\left(\overline{r},N,t\right)+Q_{ij}\left(\overline{r}\right)\sigma_{jp}\left(\overline{r},N,t\right)n_p\left(\overline{r}\right)\right]\Big|_{\Gamma_u}=u_i^0\left(\overline{r},N,t\right), \tag{22}$$
$$t\in\left[N\tau,\left(N+1\right)\tau\right).$$

Здесь R_{ij}, Q_{ij} – коэффициенты, отражающие жесткость и податливость нагружающей системы в точке $\overline{r}$ на границе тела; Γ_S, Γ_u – части поверхности Γ тела V с заданными номинальными усилиями S_i^0 и перемещениями u_i^0. Начальное напряженно-деформированное состояние тела определяется условиями на границе тела Γ при $N=0$, $t=0$.

Совокупность уравнений (9)–(22) представляет собой постановку краевой задачи механики деформирова-

ния и разрушения структурно неоднородного тела с учетом усталостного накопления повреждений. Данная постановка соответствует двухуровневой структурно-феноменологической модели усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородных сред, где уравнения (9)–(19) соответствуют структурному уровню (микроуровню), уравнения (20)–(22) – макроуровню. Далее рассмотрим алгоритм решения поставленной краевой задачи.

Алгоритм решения краевой задачи механики деформирования и разрушения структурно неоднородного тела с учетом усталостного накопления повреждений

Исходными параметрами задачи являются данные о структуре тела (задается уравнениями (9)), механические характеристики структурных элементов (задаются уравнениями (10)–(12)), а также геометрия тела и условия циклического нагружения (задаются уравнениями (22)). Решение краевой задачи осуществляется в несколько этапов:

1. Построение макроскопической модели:

1.1. Построение геометрии тела.

1.2. Деление тела на макрообъемы.

1.3. Деление макрообъемов на элементы структурного уровня с характерными размерами (уравнения (8)).

1.4. Генерация начальных механических характеристик структурных элементов (уравнения (12)).

1.5. $N = 0$.

1.6. Определение эффективных упругих характеристик макрообъемов.

2. Определение макроскопического напряженно-деформированного состояния в цикле нагружения:

2.1. Решение краевых задач теории упругости (21)–(22) для различных моментов времени $t \in [N\tau; (N+1)\tau)$ с определением полей макронапряжений и макродеформаций.

2.2. Проверка выполнения условий макроразрушения конструкции (существенное снижение жесткости, несущей способности и т.д.), в случае их выполнения моделирование процесса прекращается.

3. Определение полей микронапряжений и микродеформаций в цикле нагружения:

3.1. Решение краевых задач теории упругости (16)–(19) для различных моментов времени $t \in [N\tau; (N+1)\tau)$ с определением полей макронапряжений и макродеформаций.

4. Определение разрушенных в цикле структурных элементов:

4.1. Проверка выполнения критериев разрушения (15) в структурных элементах:

4.1.1. Если в момент времени $\hat{t} < (N+1)\tau$ имеется структурный элемент с выполненным критерием разрушения, то изменение соответствующих функций поврежденности структурного элемента, переход к п. 1.6 (пересчет НДС в цикле проводится с момента времени $\hat{t}$).

4.1.2. В ином случае переход к этапу 5.

5. Учет усталостного накопления повреждений в структурных элементах:

5.1. Определение для структурных элементов параметров напряженно-деформированного состояния в цикле нагружения (уравнения (13), (14)).

5.2. Определение значений функций поврежденности и текущих значений механических характеристик структурных элементов (уравнения (10), (11)).

5.3. Увеличение числа циклов нагружения, $N \to N+1$, переход к п. 1.6.

Использование данного алгоритма для решения краевых задач механики деформирования и разрушения структурно неоднородных тел с учетом усталостного накопления повреждений может позволить прогнозировать долговечность конструкции, ее поведение на макроуровне после предварительного циклического воздействия, а также изучать кинетику процессов изменения механических характеристик структурных элементов при циклических воздействиях. Отметим, что в общем случае использование предложенной модели сопряжено с необходимостью получения большого числа решений краевых задач теории упругости для различных моментов времени. Однако в случае реализации пропорциональных режимов циклического нагружения (т.е. пропорционального изменения номинально задаваемых векторов сил и перемещений на границе тела) достаточным является решение одной краевой задачи теории упругости на каждый цикл нагружения для наиболее нагруженного состояния. Представляет интерес реализация предложенного алгоритма методом конечных элементов.

Заключение

В работе предложена двухуровневая структурно-феноменологическая модель усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородных сред. Рассмотрена постановка краевой задачи деформирования и разрушения структурно неоднородного тела с учетом усталостного накопления повреждений, разработан алгоритм ее решения. Отмечена возможность рассмотрения кинетики процессов разрушения вследствие усталостного накопления повреждений в процессе решения краевой задачи. Новизна модели заключается в объединении представлений о многоуровневости процессов накопления повреждений, об изменении деформационных и прочностных характеристик материала при циклическом воздействии, о существовании характерных размеров области повреждения (т.е. о нелокальности процессов накопления повреждений), о разрушении вследствие пересечения траектории нагружения с поверхностью прочности, о стохастичности распределения механических характеристик по объему тела, о необходимости пересчета напряженно-деформированного состояния при неизменных граничных условиях при разрушении единицы объема материала, о влиянии нагружающих систем. Применимость предложенной модели ограничена скле-

рономными средами, для которых поведение на мезоуровне может быть принято упругохрупким, а также характерными числами циклов, на которых имеет место снижение механических характеристик материала (в противном случае в рамках данной модели разрушение не произойдет при любом числе циклов). Для дальнейшей реализации рассмотренной модели необходимым является определение диапазона требуемых параметров и необходимых установочных экспериментов. Планируется применение поставленной краевой задачи для решения задач прогнозирования долговечности композитных конструкций.

Библиографический список

1. Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Дж. Коллинз. – М.: Мир, 1984. – 624 с.

2. Махутов, Н.А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Часть 1: Критерии прочности и ресурса / Н.А. Махутов. – Новосибирск: Наука, 2005. – 494 с.

3. Шанявский, А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов: синергетика в авиации / А.А. Шанявский. – Уфа: Монография, 2007. – 498 с.

4. Salifu, S. A Review of Fatigue Failure and Life Estimation Models: From Classical Methods to Innovative Approaches / S. Salifu, P.A. Olubambi // Science, Engineering and Technology. – 2024. – Vol. 4, no. 2. – P. 123–151. DOI: 10.54327/set2024/v4.i2.140

5. Бураго, Н.Г. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций / Н.Г. Бураго, А.Б. Журавлев, И.С. Никитин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 6. – С. 22–33. DOI: 10.3103/S0025654411060033

6. Ibrahim, A.U. Review of the Techniques for Life Prediction and Cumulative Damage of Multiaxial Fatigue Loading / A.U. Ibrahim, D.E. Woldemichael // International Journal of Engineering Trends and Technology. – 2024. – Vol. 72, iss. 2. – P. 203–221. DOI: 10.14445/22315381/IJETT-V72I2P122

7. A review on phase field models for fracture and fatigue / P. Li [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 289, no. 109419. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109419

8. Автомодельные закономерности стадийности разрушения и степенные законы роста усталостных трещин / О.Б. Наймарк [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024 – № 5 – С. 69–81. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.5.06

9. Шлянников В.Н. Имитационное моделирование в задачах оценки остаточной долговечности элементов конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 5. – С. 132–149. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.5.11

10. Работнов, Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Издательство АН СССР, 1959. – С. 5–7.

11. Качанов, Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л.М. Качанов // Известия АН СССР. Отделение технических наук – 1958. – № 8. – С. 26–31.

12. Саитова, Р.Р. Развитие концепции поврежденности в механике материалов / Р.Р. Саитова, Ф.М. Бородич, А.Р. Арутюнян // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 2. – С. 271–298. DOI: 10.31857/S0032823524020084

13. Численное моделирование усталостного разрушения на основе нелокальной теории циклической повреждаемости / Н.Г. Бураго [и др.] // Математическое моделирование. – 2024. – Т. 36, № 3. – С. 3–19. DOI: 10.20948/mm-2024-03-01

14. Арутюнян, А.Р. Формулировка критерия усталости, основанного на концепции скрытой энергии деформации / А.Р. Арутюнян, Р.А. Арутюнян // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 31–39. DOI: 10.24411/1683-805X-2010-00054

15. Нихамкин, М.Ш. Экспресс-оценка усталостной прочности композитных фланцев методом инфракрасной термографии / М.Ш. Нихамкин, Д.Г. Соломонов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 4. – С. 26–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.03

16. Закономерности усталостного разрушения типового композитного фланца // Д.Г. Соломонов [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. – С. 137–145. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.12

17. Усталостная прочность при высокочастотном нагружении материалов, полученных методом селективного лазерного плавления / И.С. Никитин [и др.] // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 210–234. DOI: 10.31857/S1026351924050122

18. Циклическая долговечность титанового сплава ВТ6, полученного аддитивной технологией холодного переноса металла / А.В. Ильиных [и др.] // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2025. – № 3. – С. 161–177. DOI: 10.31857/S1026351925030099

19. Ильиных, А.В. Многоцикловая усталость при растяжении и кручении алюминиевого сплава AlSi10Mg, полученного методом селективного лазерного сплавления / А.В. Ильиных, А.М. Паньков, А.В. Лыкова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 4. – С. 14–25. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.02

20. Yankin, A. Investigation and prediction of fatigue performance of SLM 316 L stainless steel based on small build orientation variations and heat treatment effects / A. Yankin, A. Perveen, D. Talamona // Scientific Reports. – 2025. – Vol. 15, iss. 1, no. 4583. DOI: 10.1038/s41598-025-89003-2

21. The Analysis of Stress Raisers Affecting the GFRP Strength at Quasi-Static and Cyclic Loads by the Theory of Critical Distances, Digital Image Correlation, and Acoustic Emission / D. Lobanov [et al.] // Polymers. – 2023. – Vol. 15, iss. 9, no. 2087. DOI: 10.3390/polym15092087

22. Effect of Internal Technological Defects and Loading Waveform on Structural Composite Fatigue Life / A. Lykova [et al.] // Fracture and Structural Integrity. – 2025. – Vol. 19, no. 71. – P. 1–10. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.71.01

23. Aspect of Fatigue Analysis of Composite Materials: A Review / M.J. Suriani [et al.] // Pertanika Journal of Science and Technology. – 2013. – Vol. 21, iss. 1. – P. 1–14.

24. A Multiaxial Fatigue Damage Model Based on Constant Life Diagrams for Polymer Fiber-Reinforced Laminates / A. Elkin [et al.] // Polymers. – 2022. – Vol. 14, iss. 22, no. 4985. DOI: 10.3390/polym14224985

25. Bogdanov, A.A. Fatigue Damage Assessment and Lifetime Prediction of Short Fiber Reinforced Polymer Composites – A Review / A.A. Bogdanov, S.V. Panin, P.V. Kosmachev // Journal of Composites Science. – 2023. – Vol. 7, iss. 12, no. 484. DOI: 10.3390/jcs7120484

26. Estimating degradation of strength of neat PEEK and PEEK-CF laminates under cyclic loading by mechanical hysteresis loops / A. Bogdanov [et al.] // Fracture and Structural Integrity. – 2023. – Vol. 17, no. 66. – P. 152–163. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.66.09

27. Fatigue behavior of pultruded fiberglass tubes under tension, compression and torsion / O. Staroverov [et al.] // Fracture and Structural Integrity. – 2024. – Vol. 18, no. 69. – P. 115–128. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.69.09

28. Influence of Proportional Multiaxial Fatigue Loading on the Residual Mechanical Properties of Glass-Reinforced Plastic Pipes / O. Staroverov [et al.] // Engineering Failure Analysis. – 2024. – Vol. 163, no. 108586. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2024.108586

29. Degrieck, J. Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: Review / J. Degrieck, W. Van Paepegem // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54, iss. 4. – P. 279–300. DOI: 10.1115/1.1381395

30. Sevenois, R.D.B. Fatigue Damage Modeling Techniques for Textile Composites: Review and Comparison with Unidirectional Composite Modeling Techniques / R.D.B. Sevenois, W. Van Paepegem // Applied Mechanics Reviews. – 2015. – Vol. 67, iss. 2, no. 020802. DOI: 10.1115/1.4029691

31. Description of Fatigue Sensitivity Curves and Transition to Critical States of Polymer Composites by Cumulative Distribution Functions / O. Staroverov [et al.] // Fracture and Structural Integrity. – 2022. – Vol. 17, no. 63. – P. 91–99. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.63.09

32. Лихачев, В.А. Структурно-аналитическая теория прочности / В.А. Лихачев, В.Г. Малинин. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.

33. Панин, В.Е. Основы физической мезомеханики / В.Е. Панин // Физическая мезомеханика. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 5–22.

34. Панин, В.Е. Основы физической мезомеханики пластической деформации и разрушения твердых тел как нелинейных иерархически организованных систем / В.Е. Панин, В.Е. Егорушкин // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 5. – С. 100–113. DOI: 10.24411/1683-805X-2015-00058

35. Трусов, П.В. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения / П.В. Трусов, А.И. Швейкин. – Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения Российской академии наук, 2019. – 605 с.

36. Трусов, П.В. О двухуровневых моделях типа Тейлора – Бишопа – Хилла для описания упругопластического деформирования поликристаллических тел: один вариант решения проблемы неопределенности выбора активных систем скольжения / П.В. Трусов, П.А. Гладких // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 4. – С. 56–69. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.06

37. Трусов, П.В. Методы и результаты исследования эффекта Портевена – Ле Шателье: физически-ориентированные континуальные и многоуровневые модели / П.В. Трусов, Р.М. Герасимов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. – С. 132–158. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.10

38. Многоуровневая модель описания мартенситного превращения: формирование полиэдрической структуры мартенсита / А.Н. Подседерцев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 2. – С. 79–96. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.09

39. Роговой, А.А. Микроструктурная модель процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы в сплавах с памятью формы / А.А. Роговой // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2024. – № 3. – С. 516–542. DOI: 10.14498/vsgtu2089

40. Трусов, П.В. Трехуровневая модель, основанная на физических теориях пластичности: формулировка, алгоритмы реализации, результаты применения для исследования циклического нагружения / П.В. Трусов, Д.С. Грибов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 274–287. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.21

41. Ташкинов, А.А. Научное наследие профессора Ю.В. Соколкина / А.А. Ташкинов, А.А. Чекалкин // Вестник Пермского федерального исследовательского центра – 2024. – № 1. – С. 72–81. DOI: 10.7242/2658-705X/2024.1.9

42. Волков, С.Д. Статистическая механика композитных материалов / С.Д. Волков, В.П. Ставров. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 208 с.

43. Соколкин, Ю.В. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел / Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. – М.: Наука, 1984. – 115 с.

44. Вильдеман, В.Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов; под ред. Ю.В. Соколкина. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.

45. Соколкин, Ю.В. Усталость композитов: особенности процесса разрушения и математическое моделирование / Ю.В. Соколкин, Ю.П. Сирин // Деформирование и разрушение композитов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 97–103.

46. Ташкинов, А.А. Экстремальные кластеры зерен в случайных микроструктурах поликристаллических материалов / А.А. Ташкинов, В.Е. Шавшуков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. – С. 153–166. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.14

47. Разумовский, Е.С. Локальные повреждения в эндопротезе тазобедренного сустава из углерод-углеродного композиционного материала при перегрузках / Е.С. Разумовский, В.Е. Шавшуков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. – С. 104–114. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.10

48. Паньков, А.А. Пьезокомпозиты и датчики: Часть 1: Статистическая механика пьезокомпозитов / А.А. Паньков. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022. – 234 с.

49. Паньков, А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов / А.А. Паньков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.

50. Феклистова, Е.В. Численное исследование процессов разрушения деформируемых тел с концентраторами напряжений с учетом статистического распределения прочности структурных элементов / Е.В. Феклистова, А.И. Мугатаров, В.Э. Вильдеман // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 4. – С. 70–83. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.07

51. Feklistova, E.V. Numerical modeling of fracture processes of bodies with stress concentrators under conditions of proportional loading, taking into consideration the statistical distribution of ultimate strength and partial loss of load bearing capacity / E.V. Feklistova, A.I. Mugatarov, V.E. Wildemann // Fracture and Structural Integrity. – 2025. – Vol. 19, no. 74. – P. 55–72. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.74.05

52. Соколкин, Ю.В. Многоуровневые модели прогнозирования пределов выносливости структурно-неоднородных порошковых материалов при сложном напряженном состоянии / Ю.В. Соколкин, М.М. Шобей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – № 3(24). – С. 171–175. DOI: 10.14498/vsgtu958

53. Новожилов, В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В.В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 212–222. DOI: 10.1016/0021-8928(69)90025-2

54. Новожилов, В.В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах / В.В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 797–812. DOI: 10.1016/0021-8928(69)90082-3

55. Морозов, Н.Ф. Динамическая вязкость разрушения в задачах инициирования роста трещин / Н.Ф. Морозов, Ю.В. Петров // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 108–111.

56. Васильев, В.В. Нелокальные решения задач теории упругости о нагружении неограниченного пространства сосредоточенными силами / В.В. Васильев, С.А. Лурье, В.А. Салов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 3–14. DOI: 10.31857/S1026351924040014

References

1. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design. New York, John Wiley & Sons, 1981, 628 p.

2. Makhutov N.A. Konstruktsionnaia prochnost', resurs i tekhnogennaia bezopasnost'. Chast' 1: Kriterii prochnosti i resursa [Structural strength, service life and technological safety. Part 1: Strength and service life criteria]. Novosibirsk, Nauka, 2005, 494 p.

3. Shanyavskiy A.A. Modelirovanie ustalostnykh razrushenii metallov: sinergetika v aviatsii [Modeling of metal fatigue failures: synergetics in aviation]. Ufa, Monografiia, 2007, 498 p.

4. Salifu S., Olubambi P.A. A Review of Fatigue Failure and Life Estimation Models: From Classical Methods to Innovative Approaches. *Science, Engineering and Technology*, 2024, Vol. 4 (2), pp. 123–151. doi: 10.54327/set2024/v4.i2.140

5. Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements. *Mechanics of Solids*, 2011, Vol. 46, pp. 828–838. doi: 10.3103/S0025654411060033

6. Ibrahim A.U., Woldemichael D.E. Review of the Techniques for Life Prediction and Cumulative Damage of Multiaxial Fatigue Loading. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 2024, Vol. 72 (2), pp. 203–221. doi: 10.14445/22315381/IJETT-V72I2P122

7. Li P., Li W., Li B., Yang S., Shen Y., Wang Q., Zhou K. A review on phase field models for fracture and fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 2023, Vol. 289, No. 109419. doi: 10.1016/j.engfracmech.2023.109419

8. Naimark O.B., Oborin V.A., Bannikov M.V., Bayandin Y.V. Self-Similar Regularities of Failure Staging and Power Laws of Fatigue-Crack Growth. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 5, pp. 69–81. doi: 10.15593/perm.mech/2024.5.06

9. Shlyannikov V.N. Simulations for Problems of Estimating Structural Residual Life. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 5, pp. 132–149. doi: 10.15593/perm.mech/2024.5.11

10. Rabotnov Y.N. O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniia [On the mechanism of long-term fracture]. Voprosy prochnosti materialov i konstruktsii [Questions of the Strength of Materials and Structures]. Moscow, Izdatel'stvo AN SSSR, 1959, pp. 5–7.

11. Kachanov L.M. O vremeni razrusheniia v usloviiakh polzuchesti [On the fracture time under creep conditions]. *Izvestiia AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1958, No. 8, pp. 26–31.

12. Saitova R.R., Borodich F.M., Arutyunyan A.R. Development of the Damage Concept in Mechanics of Materials. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2024, Vol. 88 (2), pp. 271–298. doi: 10.31857/S0032823524020084

13. Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Numerical modeling of fatigue fracture based on the nonlocal theory of cyclic damage. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2024, Vol. 36 (3), pp. 3–19. doi: 10.20948/mm-2024-03-01

14. Arutyunyan A.R., Aratyunyan R.A. Fatigue criterion based on the concept of latent strain energy. *Physical Mesomechanics*, 2010, Vol. 13 (2), pp. 31–39. doi: 10.24411/1683-805X-2010-00054

15. Nihamkin M.S., Solomonov D.G. An Express Estimation of Fatigue Strength of Composite Flanges by Infrared Thermography. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 4, pp. 26–35. doi: 10.15593/perm.mech/2024.4.03

16. Solomonov D.G., Sazhenkov N.A., Konev I.P., Toropicina A.V., Nikhamkin M.S. Regularities of fatigue failure typical composite flange. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, No. 3, pp. 137–145. doi: 10.15593/perm.mech/2023.3.12

17. Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A. Fatigue Strength under High Frequency Loading of Materials Produced by Selective Laser Melting // *Mechanics of Solids*, 2024, Vol. 59 (5), pp. 2789–2805. doi: 10.1134/S0025654424604762

18. Ilinykh A.V., Pankov A.M., Lykova A.V., Permyakov G.L., Simonov M.Yu., Trushnikov D.N. Fatigue Life of Titanium Alloy Ti–6Al–4V Obtained by Additive Cold Metal Transfer Technology // *Mechanics of Solids*, 2025, Vol. 60 (3), pp. 1595–1604. doi: 10.1134/S002565442460627X

19. Ilinykh A.V., Pankov A.M., Lykova A.V. High-Cycle Tensile and Torsional Fatigue of AlSi10Mg Aluminum Alloy Produced by Selective Laser Alloying // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 4, pp. 14–25. doi: 10.15593/perm.mech/2024.4.02

20. Yankin A., Perveen A., Talamona D. Investigation and prediction of fatigue performance of SLM 316 L stainless steel based on small build orientation variations and heat treatment effects // *Scientific Reports*, 2025, Vol. 15 (1), No. 4583. doi: 10.1038/s41598-025-89003-2

21. Lobanov D., Yankin A., Mullahmetov M., Chebotareva E., Melnikova V. The Analysis of Stress Raisers Affecting the GFRP Strength at Quasi-Static and Cyclic Loads by the Theory of Critical Distances, Digital Image Correlation, and Acoustic Emission // *Polymers*, 2023, Vol. 15 (9), No. 2087. doi: 10.3390/polym15092087

22. Lykova A., Lobanov D., Pankov A., Ugolnikov M. Effect of Internal Technological Defects and Loading Waveform on Structural Composite Fatigue Life // *Fracture and Structural Integrity*, 2025, Vol. 19 (71), pp. 1–10. doi: 10.3221/IGF-ESIS.71.01

23. Suriani M.J., Ali A., Sapuan S.M., Khalina A. Aspect of Fatigue Analysis of Composite Materials: A Review // *Pertanika Journal of Science and Technology*, 2013, Vol. 21 (1), pp. 1–14.

24. Elkin A., Gaibel V., Dzhurinskiy D., Sergeichev I. A Multiaxial Fatigue Damage Model Based on Constant Life Diagrams for Polymer Fiber-Reinforced Laminates // *Polymers*, 2022, Vol. 14 (22), No. 4985. doi: 10.3390/polym14224985

25. Bogdanov A.A., Panin S.V., Kosmachev P.V. Fatigue Damage Assessment and Lifetime Prediction of Short Fiber Rein-

forced Polymer Composites – A Review // *Journal of Composites Science*, 2023, Vol. 7 (12), No. 484. doi: 10.3390/jcs7120484

26. Bogdanov A., Eremin A., Burkov M., Panin S. Estimating degradation of strength of neat PEEK and PEEK-CF laminates under cyclic loading by mechanical hysteresis loops // *Fracture and Structural Integrity*, 2023, Vol. 17 (66), pp. 152–163. doi: 10.3221/IGF-ESIS.66.09

27. Staroverov O., Mugatarov A., Sivtseva A., Strungar E., Wildemann V., Elkin A., Sergeichev I. Fatigue behavior of pultruded fiberglass tubes under tension, compression and torsion // *Fracture and Structural Integrity*, 2024, Vol. 18 (69), pp. 115–128. doi: 10.3221/IGF-ESIS.69.09

28. Staroverov O., Mugatarov A., Kuchukov A., Strungar E., Chebotareva E., Sivtseva A., Wildemann V. Influence of Proportional Multiaxial Fatigue Loading on the Residual Mechanical Properties of Glass-Reinforced Plastic Pipes // *Engineering Failure Analysis*, 2024, Vol. 163, No. 108586. doi: 10.1016/j.engfailanal.2024.108586

29. Degrieck J., Van Paepegem W. Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: Review // *Applied Mechanics Reviews*, 2001, Vol. 54 (4), pp. 279–300. doi: 10.1115/1.1381395

30. Sevenois R.D.B., Van Paepegem W. Fatigue Damage Modeling Techniques for Textile Composites: Review and Comparison with Unidirectional Composite Modeling Techniques // *Applied Mechanics Reviews*, 2015, Vol. 67 (2), No. 020802. doi: 10.1115/1.4029691

31. Staroverov O.A., Mugatarov A.I., Yankin A.S., Wildemann V.E. Description of Fatigue Sensitivity Curves and Transition to Critical States of Polymer Composites by Cumulative Distribution Functions // *Fracture and Structural Integrity*, 2022, Vol. 17 (63), pp. 91–99. doi: 10.3221/IGF-ESIS.63.09

32. Likhachev V.A., Malinin V.G. Strukturno-analiticheskaia teoriia prochnosti [Structural and Analytical Theory of Strength]. St. Petersburg, Nauka, 1993, 471 pp.

33. Panin V.E. Foundations of physical mesomechanics // *Physical Mesomechanics*, 1998, Vol. 1 (1), pp. 5–22.

34. Panin V.E., Egorushkin V.E. Basic Physical Mesomechanics of Plastic Deformation and Fracture of Solids as Hierarchically Organized Nonlinear Systems // *Physical Mesomechanics*, 2015, Vol. 18 (4), pp. 377–390. doi: 10.1134/S1029959915040104

35. Trusov P.V., Shveikin A.I. Mnogourovnevye modeli mono- i polikristallicheskikh materialov: teoriia, algoritmy, primery primeneniia [Multilevel Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, Application Examples]. Novosibirsk, Sibirsk. Otd. RAN, 2019, 605 pp.

36. Trusov P.V., Gladkikh P.A. On Two-Level Models of the Taylor–Bishop–Hill Type for Describing the Elastoplastic Deformation of Polycrystalline Bodies: One Option for Solving the Problem of Uncertainty in the Choice of Active Slip Systems // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 4, pp. 56–69 doi: 10.15593/perm.mech/2024.4.06

37. Trusov P.V., Gerasimov R.M. Methods and Results of Studying the Portevin – Le Chatelier Effect: Physically-Oriented Continuous and Multilevel Models // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, No. 5, pp. 132–158 doi: 10.15593/perm.mech/2023.5.10

38. Podsedertsev A.N., Kondratev N.S., Trusov P.V., Makarevich E.S. Multilevel Model for Describing Martensitic Transformation: Formation of the Polyhedral Martensite Structure // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 2, pp. 79–96 doi: 10.15593/perm.mech/2024.2.09

39. Rogovoy A.A. Microstructural model of twinning and detwinning processes of the martensitic phase in shape memory alloys // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [*J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*], 2024, Vol. 28 (3), pp. 516–542. doi: 10.14498/vsgtu2089

40. Trusov P.V., Gribov D.S. Three-level model based on physical theories of plasticity: Formulation, implementation algorithms, results of application to the study of cyclic loading // *Computational Continuum Mechanics*, 2022, Vol. 15 (3), pp. 274–287. doi: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.21

41. Tashkinov A., Chekalkin A. Scientific heritage of Yu.V. Sokolkin // *Perm Federal Research Centre Journal*, 2024, No. 1, pp. 72–81. doi: 10.7242/2658-705X/2024.1.9

42. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statisticheskaia mekhanika kompozitnykh materialov [Statistical mechanics of composite materials]. Minsk, Izdatel'stvo BGU, 1978, 208 p.

43. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika deformirovaniia i razrusheniia strukturno neodnorodnykh tel [Mechanics of deformation and fracture of structurally heterogeneous bodies]. Moscow, Nauka, 1984, 115 p.

44. Wildemann V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov [Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials]. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1997, 288 p.

45. Sokolkin Yu.V., Sirin Yu.P. Ustalost' kompozitov: osobennosti protsessa razrusheniia i matematicheskoe modelirovanie [Fatigue of composites: features of the destruction process and mathematical modeling] // Deformirovanie i razrushenie kompozitov [Deformation and destruction of composites]. Sverdlovsk: UNTs AN SSSR, 1985, pp. 97–103.

46. Tashkinov A.A., Shavshukov V.E. Extreme clusters of grains in random microstructure of polycrystals // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, No. 2, pp. 153–166. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.14

47. Razumovskii E.S., Shavshukov V.E. Local damages in the hip joint endoprosthesis from the C/C composite during overloads // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, No. 6, pp. 104–114. doi: 10.15593/perm.mech/2023.6.10

48. Pan'kov A.A. P'ezokompozity i datchiki: Chast' 1: Statisticheskaia mekhanika p'ezokompozitov [Piezocomposites and Sensors: Part 1: Statistical Mechanics of Piezocomposites]. Perm, Izdatel'stvo Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta, 2022, 234 p.

49. Pan'kov A.A. Statisticheskaia mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezoelectric composites]. Perm, Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2009, 480 p.

50. Feklistova E.V., Mugatarov A.I., Wildemann V.E. Simulation of Fracture in Deformable Bodies with Stress Concentrators Taking into Account the Statistical Distribution of Ultimate Strength in Structural Elements // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 4, pp. 70–83. doi: 10.15593/perm.mech/2024.4.07

51. Feklistova E.V., Mugatarov A.I., Wildemann V.E. Numerical modeling of fracture processes of bodies with stress concentrators under conditions of proportional loading, taking into consideration the statistical distribution of ultimate strength and partial loss of load bearing capacity // *Fracture and Structural Integrity*, 2025, Vol. 19 (74), pp. 55–72. doi: 10.3221/IGF-ESIS.74.05

52. Sokolkin Yu.V., Shobey M.M. Multilevel models of endurance limits prediction for heterogeneous materials under complex stress state // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [*J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*], 2011, No. 3(24), pp. 171–175. doi: 10.14498/vsgtu958

53. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, Vol. 33 (2), pp. 201–210. doi: 10.1016/0021-8928(69)90025-2

54. Novozhilov V.V. On the foundations of a theory of equilibrium cracks in elastic solids // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, Vol. 33 (5), pp. 777–790. doi: 10.1016/0021-8928(69)90082-3

55. Morozov N.F., Petrov Yu.V. Dynamic fracture toughness in problems of crack-growth initiation // *Mechanics of Solids*, 1990, No. 6, pp. 109–112.

56. Vasiliev V.V., Lurie S.A., Salov V.A. Nonlocal Solutions of the Theory of Elasticity Problems for an Infinite Space Loaded with Concentrated Forces // *Mechanics of Solids*, 2024, Vol. 59 (4), pp. 1833-1840. doi: 10.1134/S0025654424700328

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00765-П (https://rscf.ru/project/22-19-00765/) в Пермском национальном исследовательском политехническом университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with support of the Russian Science Foundation (Project No. 22-19-00765-P, https://rscf.ru/project/22-19-00765/) in Perm National Research Polytechnic University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The authors' contributions are equal.