Упругопластический изгиб прямоугольных в плане пластин в 3D-постановке / А.Е. Максеев, П.В. Дунченкин, Т.В. Яковлева, М.В. Жигалов, А.В. Крысько, В.А. Крысько. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.09 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 113–123.

Perm Polytech Style: Makseev A.E., Dunchenkin P.V., Yakovleva T.V., Zhigalov M.V., Krysko A.V., Krysko V.A. Elastic-Plastic Bending of Rectangular Plates in a 3D Setting. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 4, pp. 113-123. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.09

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.4.09
УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ПЛАСТИН В 3D-ПОСТАНОВКЕ

А.Е. Максеев, П.В. Дунченкин, Т.В. Яковлева, М.В. Жигалов, А.В. Крысько, В.А. Крысько

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 12 мая 2025 г.
Одобрена: 17 сентября 2025 г.
Принята к публикации: 25 сентября 2025 г.

Ключевые слова:

пластические деформации, метод конечных элементов, метод переменных параметров упругости И.А. Биргера, деформационная теория пластичности, трехмерная задача, напряженно-деформированное состояние.

АННОТАЦИЯ

Построены математические модели физически нелинейных пластин в трехмерной постановке. Математическая модель строится на основании трехмерных уравнений равновесия Коши. Уравнения состояния получены в перемещениях. Используется теория малых упругопластических деформаций. При определении пластических деформаций используется критерий пластичности Мизеса. Для решения полученной нелинейной задачи используется метод переменных параметров упругости И.А. Биргера, сводящий решение нелинейных уравнений к последовательному решению линейных уравнений на каждом шаге итерационной процедуры метода. Численное исследование проводится на основе метода конечных элементов с использованием пакета Comsol Multiphysics. Исследовалась сходимость решений в зависимости от количества конечных элементов. В работе анализируется напряженно-деформированное состояние квадратной пластинки, жестко заделанной по краям, в зависимости от отношения линейного размера к толщине. Для каждого из рассмотренных случаев получены зависимости «нагрузка–прогиб», распределение пластических зон по объему пластинки и значений перемещения *w* по толщине пластинки.

© **Максеев Антон Евгеньевич** – аспирант, кафедра «Математика и моделирование», e-mail: makseevv.anton@mail.ru.
Дунченкин Павел Владимирович – аспирант, кафедра «Математика и моделирование», e-mail: dunchenkin.pasha@yandex.ru.
Яковлева Татьяна Владимировна – к. ф.-м. н., доцент, e-mail: yan-tan1987@mail.ru.
Жигалов Максим Викторович – д. ф.-м. н., доцент, e-mail: zhigalovm@yandex.ru.
Крысько Антон Вадимович – д. ф.-м. н., проф., e-mail: anton.krysko@gmail.com.
Крысько Вадим Анатольевич – д. т. н., проф., e-mail: tak@san.ru.

Anton E. Makseev – Postgraduate student, Department of Mathematics and Modeling, e-mail: makseevv.anton@mail.ru.
Pavel V. Dunchenkin – Postgraduate student, Department of Mathematics and Modeling, e-mail: dunchenkin.pasha@yandex.ru.
Tatiana V. Yakovleva – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: yan-tan1987@mail.ru.
Maksim V. Zhigalov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: zhigalovm@yandex.ru.
Anton V. Krysko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: anton.krysko@gmail.com.
Vadim A. Krys'ko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, e-mail: tak@san.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ELASTIC-PLASTIC BENDING OF RECTANGULAR PLATES IN A 3D SETTING

A.E. Makseev, P.V. Dunchenkin, T.V. Yakovleva, M.V. Zhigalov, A.V. Krysko, V.A. Krysko

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 12 May 2025
Approved: 17 September 2025
Accepted for publication:
25 September 2025

Keywords:

plastic deformations, finite element method, Birger's method of variable elasticity parameters, deformation theory of plasticity, three-dimensional problem, stress-strain state.

ABSTRACT

This paper presents mathematical models of physically nonlinear plates in a three-dimensional setting. The mathematical model is constructed using three-dimensional Cauchy equilibrium equations. The equations of state are obtained in displacements. The theory of small elastic-plastic deformations is employed. The von Mises plasticity criterion is used to determine plastic deformations. Birger's method of variable elastic parameters is employed to solve the resulting nonlinear problem. This method reduces the solution of nonlinear equations to the sequential solution of linear equations at each step of the iterative procedure of the method. The numerical study is based on the finite element method using the Comsol Multiphysics package. The convergence of the solutions depending on the number of finite elements is studied. This paper analyzes the stress-strain state of a square plate, rigidly fixed at the edges, depending on the ratio of the linear size to the thickness. For each of the cases considered, the load-deflection relationships, the distribution of plastic zones by the plate volume, and the distribution of displacement values *w* by the plate thickness are obtained.

Введение

Исследование упругопластических задач пластин и оболочек обусловлено широким применением таких конструкций при проектировании корпусов ракетно-космической техники, самолето- и судостроении. Эти конструкции при воздействии больших механических и температурных нагрузок испытывают упругопластические деформации. Развитие фундаментальных соотношений теорий пластического течения и деформационной теории связано с именами А. Надаи [1], Ю.Н. Работнова [2], Р. Хилла [3], Л.М. Качанова [4] и др. Для данного рода задач широкое применение получил метод упругих решений А.А. Ильюшина [5]. В работе Н.И. Воровича и Ю.П. Красовского [6] доказана сходимость метода упругих решений. И.А. Биргером [7] для решения физически нелинейных задач теории пластичности и ползучести была предложена модификация метода упругих решений – метод переменных параметров упругости.

По инкрементной теории пластичности были исследованы задачи упругопластических пластин в работах [8–10] – задачи изгиба и пластической потери устойчивости. Для моделирования использовались модели пластин Миндлина – Рейсснера и Тимошенко. Для решения использовались метод конечных разностей и конечных элементов.

В рамках деформационной теории пластичности (ДТП) были исследованы математические модели упругопластических пластин в работах [7–14; 16–18]. В работе [11] было проанализировано напряженно-деформированное состояние (НДС) металлических образцов при проведении испытаний на растяжение. НДС нано- и макропластин Кирхгофа было исследовано с использованием различных методов, включая вариационные итерации (расширенный метод Канторовича), метод переменных параметров упругости, предложенный И.А. Биргером, и метод Ньютона в [13]. В [14] применялись методы Бубнова – Галеркина, Вайдинера, вариационных итераций, двойных тригонометрических рядов Навье и конечных разностей для анализа НДС. В работе [17] были рассмотрены асимптотические модели для нелокальных пластин, включая модели Кирхгофа – Лява и Уфлянда – Миндлина. В [18] представлена модифицированная градиентная упругая модель пластины Кирхгофа – Лява с двумя параметрами масштаба длины, а также проведен вариационный анализ для получения дифференциального уравнения шестого порядка.

В работах [19–21] было проведено исследование трехмерных пластин, балок и сэндвич-пластин с использованием бессеточных методов. В частности, изучалось термоупругопластическое изгибание скошенных сэндвич-пластин, опирающихся на основание Винклера/Пастернака, с применением нового трехмерного бессеточного метода. Пластические деформации моделировались в соответствии с правилом течения Прандтля – Рейсса, как указано в [19]. Для описания пластических деформаций в работе [20] были использованы теория фон-Мизеса и правило Прандтля – Рейсса. В исследовании [21] анализировалось влияние пористости на упругопластическую реакцию потери устойчивости трехмерных пластин с применением бессеточного метода TRIMP. В данных исследованиях не рассматриваются пластины и балки с различными толщинами, а также результаты не сопоставляются с различными кинематическими моделями.

Исследование трехмерных балок и пластин в работах на основе метода конечных элементов рассмотрено в [15; 22]. В [15] исследовались математические модели физически нелинейных пластин и балок в трехмерной постановке и на основе кинематических моделей Эйлера – Бернулли и С.П. Тимошенко. В [22] исследованы пластические деформации при температурном изгибе, на основе лазерного нагрева, предварительно нагруженных металлических пластин с помощью аналитического подхода и метода конечных элементов.

В работах [23; 24] проведено сравнение результатов инкрементной и деформационной теории пластичности.

В [23] представлено исследование упругопластических характеристик после выпучивания прямоугольных пластин, подвергающихся плоскостным нагрузкам. FSDT использовался для учета эффекта деформации поперечного сдвига. Использовались инкрементальная теория пластичности (с определяющим соотношением PR) и ее деформационный аналог (с определяющим соотношением Генки). Основным вкладом статьи было предложение применения эффективного численного метода, называемого VDQ. По результатам DT обычно обеспечивает более низкие напряжения продольного изгиба, чем IT. Расхождение между их результатами увеличивается с увеличением толщины пластины E/σ0, и уменьшается с увеличением безразмерной константы отношения RO. IT и DT для пластин SSSS и CCCC показывает, что осевая нагрузка DT после выпучивания пластины CCCC всегда меньше, чем у IT; но в случае пластины из нержавеющей стали осевая нагрузка после выпучивания, полученная с помощью DT, становится больше, чем рассчитанная на основе IT, поскольку становится выше. В [24] были разработаны новые аналитические решения для упругопластических деформаций прямоугольных пластин для типа «не-Леви», используя метод симплектической суперпозиции. В явном виде наблюдается парадокс пластического изгиба, который подчеркивает существенное различие между IT и DT в прогнозировании нагрузок на изгиб для относительно толстых пластин. Показано, что DT обеспечивает оптимальное соотношение нагрузки и сопротивления изгибу, в то время как в случае с IT такого результата не наблюдается. Кривые критерия устойчивости построены с использованием теории упругости и теории пластичности (IT и DT), чтобы еще больше показать важность учета эффекта пластичности.

В целом выбор между деформационной и инкрементной теориями пластичности зависит от конкретной задачи, требований к точности и доступных вычислительных ресурсов. Инкрементная теория может быть более подходящей для детального анализа динамических процессов, тогда как деформационная теория предпочтительнее в случаях, когда важна общая картина поведения материала и поэтому в данном исследовании применяется деформационная теория пластичности.

Обзор научной литературы демонстрирует, что исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) упругопластических пластин в основном сосредоточено на задачах в двумерной постановке, в то время как трехмерным аспектам уделяется значительно меньше внимания, и в исследованиях не рассматриваются пластины и балки с различными толщинами. В настоящей работе предложен новый подход к решению упругопластических задач для прямоугольных пластин в трехмерной постановке. Метод основан на деформационной теории пластичности и не требует привлечения традиционных гипотез, характерных для двумерных постановок (таких как гипотезы Тимошенко [27], Шереметьева – Пелеха [28; 29]). Разработанный алгоритм сочетает метод конечных элементов (МКЭ) с итерационной процедурой метода переменных параметров упругости, впервые предложенной И.А. Биргером [7]. Теоретическое обоснование сходимости данного метода, включая доказательство существования решения и оценку скорости сходимости, подробно изложено в работе Н.И. Воровича и Ю.П. Красовского [6]. Данный подход позволяет исследовать бимодульные упругопластические пластинки в трехмерной постановке. Для бимодульных пластин Кирхгофа идея использования метода переменных параметров упругости и метода вариационных итераций, доказательство которого сделано в работе В.А. Крысько [30], опубликована в докладах АН РФ [31].

В рамках численного исследования проведен анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) защемленных по контуру пластин, подверженных воздействию равномерно распределенной поперечной нагрузки.

Математическая модель трехмерной (пространственной) задачи теории упругости с учетом физической нелинейности

Рассмотрим трехмерную пластинку, занимающую в пространстве R^3 область Ω $\Omega = \{x \in [0,a], y \in [0,b], z \in [0,h]\} \in R^3$ (рис. 1). Грани пластинки обозначены: $S_1 = \{x = 0, y \in [0,b], z \in [0,h]\}$; $S_2 = \{x \in [0,a], y \in [0,b], z = h\}$; $S_3 = \{x = a, y \in [0,b], z \in [0,h]\}$; $S_4 = \{x \in [0,a], y = b, z \in [0,h]\}$; $S_5 = \{x \in [0,a], y = 0, z \in [0,h]\}$; $S_6 = \{x \in [0,a], y \in [0,b], z = 0\}$.

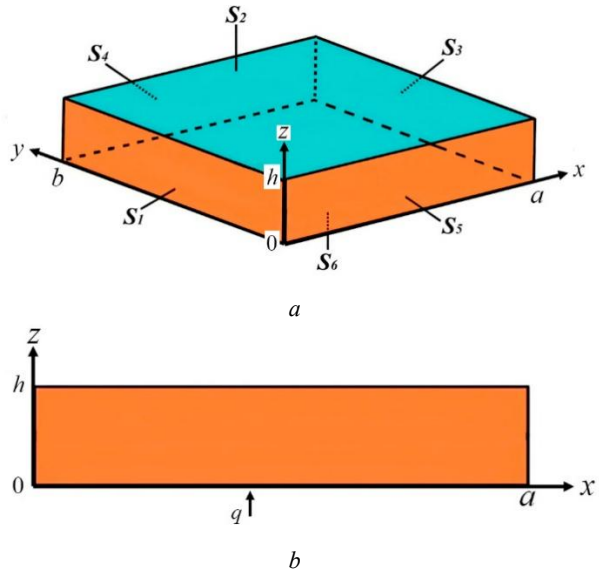


Рис. 1. Конструкция пластинки: *a* – трехмерный вид, *b* – вид сбоку

Fig. 1. The plate: *a* –3D; *b* – side view

Считаем, что материал пластинки упругий, но неоднородный. Его свойства зависят от координат и напряженно-деформированного состояния. Важно подчеркнуть, что под E и ν здесь понимаются не фиксиро-

ванные модуль упругости E_0 и коэффициент Пуассона ν_0 линейной теории, а функции, определенные нелинейным образом, связанные с деформированным состоянием, в рассматриваемой точке $E=E(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$ и $\nu=\nu(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$, где ε_0 – объемная деформация, e_i – интенсивность деформаций. Справедлива деформационная теория пластичности.

Запишем уравнения равновесия Коши [25]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z}+\overline{X}=0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+\overline{Y}=0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\overline{Z}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где σ_x, σ_x, σ_z – нормальные напряжения, $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$, $\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$, $\sigma_{xz}=\sigma_{zx}$ – касательные напряжения, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ – составляющие массовых сил по x, y, z. Связь между деформациями и перемещениями записывается в виде [25]:

$$\begin{gathered} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}, \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \end{gathered} \tag{2}$$

где ε_x, ε_y, ε_z – линейные деформации относительно x, y, z, ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{zx} – деформации сдвига, u, v, w – перемещения по направлениям x, y, z. Связь между деформациями и напряжениями представляется в виде (3):

$$\begin{cases} \sigma_x=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_x, \sigma_{xy}=\mu\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_y=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_y, \sigma_{yz}=\mu\varepsilon_{yz}, \\ \sigma_z=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_z, \sigma_{zx}=\mu\varepsilon_{zx}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\theta=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$, $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ и $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – соотношения Ламе, которые совпадают лишь по виду с упругими постоянными для трехмерной задачи теории упругости, но λ, μ не константы, а функции от x, y, z, ε_0, e_i. На таком представлении базируется метод переменных параметров И.А. Биргера [7].

Подставляя в (1) выражения (2) и (3), после соответствующих преобразований уравнения равновесия (1) запишутся в перемещениях:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\theta_x+\mu\Delta u+\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\theta+2\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)+\overline{X}=0, \\ (\lambda+\mu)\theta_y+\mu\Delta v+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\theta+\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+2\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+\overline{Y}=0, \\ (\lambda+\mu)\theta_z+\mu\Delta w+\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\theta+\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+2\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z}+\overline{Z}=0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\Delta(\cdot)=\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, θ_x, θ_y, θ_z – частные производные θ по координатам x, y, z соответственно.

Полученные уравнения (4) линейные с переменными коэффициентами.

Граничные условия на поверхности могут быть разделены на две части: на части поверхности заданы внешние нагрузки, с учетом обобщенного закона Гука, условий Коши и поставленной задачи получаем [25]:

$$\begin{gathered} \overline{X}_v=\lambda\theta l+2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}l\right), \overline{Y}_v=\lambda\theta m+2G\left(\frac{\partial v}{\partial y}m\right), \\ \overline{Z}_v=\lambda\theta n+2G\left(\frac{\partial w}{\partial z}n\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где $l=\cos(x,\nu)$, $n=\cos(y,\nu)$, $m=\cos(z,\nu)$, – направляющие косинусы внешней нормали к поверхностям, $\overline{X}_v$, $\overline{Y}_v$, $\overline{Z}_v$ – компоненты поверхностных сил.

На другой части поверхности трехмерной пластины могут быть заданы перемещения:

$$u=\overline{u},\ v=\overline{v},\ w=\overline{w}. \tag{6}$$

Интенсивности деформаций в каждой точке объема пластинки вычисляются по формуле:

$$\begin{gathered} e_i=\sqrt{2}/3\times \\ \times\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+3/2(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций определяется экспериментально. Для построенного алгоритма $\sigma_i(e_i)$ может быть произвольной, полученной экспериментально в виде аналитической зависимости или численно.

Для определения появления пластических деформаций используется критерий пластичности Мизеса.

Согласно методу переменных параметров упругости И.И. Биргера [7] и теории малых упругопластических деформаций, модуль сдвига G, модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν могут быть вычислены по формулам:

$$G(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)=1/3\left(\sigma_i(e_i)/e_i\right), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} E(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)= \\ =9KG(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)/\left(3K+G(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)\right), \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \nu(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)= \\ =1/2\left(\left(3K-2G(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)\right)/\left(3K+G(x,y,z,\varepsilon_0,e_i)\right)\right), \end{gathered} \tag{10}$$

где $K=K_0=$const – фиксированный объемный модуль.

По заданной поперечной нагрузке и заданной диаграмме $\sigma_i(e_i)$ определяется напряженно-деформированное состояние пластинки при постоянных E, ν и G. Далее происходит пересчет модуля сдвига $G(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$, модуля Юнга $E(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$ и коэффициент Пуассона $\nu(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$ по формулам (8)–(10) и решается новая задача при прежней нагрузке. После определения НДС пластинки вновь пересчитываются $E(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$, $\nu(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$ и $G(x, y, z, \varepsilon_0, e_i)$ по формулам (8)–(10), и этот

итерационный процесс продолжается до определения НДС пластинки до достижения заданной точности. Следующий шаг по нагрузке делается, когда в качестве начального приближения НДС определено из предыдущего шага, и т. д. Следует отметить, что используемый в работе итерационный метод переменных параметров упругости, разработанный И.А. Биргером, сводит решение нелинейной упругопластической задачи к последовательности линейных задач теории упругости на каждой итерации. В этом случае выполнение соотношений (3) гарантируется самой структурой алгоритма.

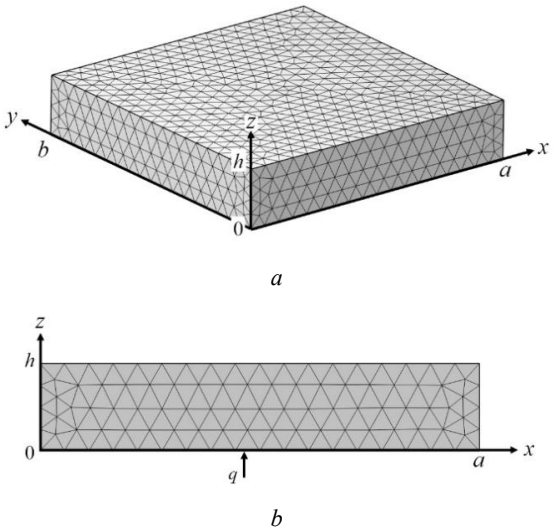
Численные результаты

Рассмотрим пластинку в трехмерной постановке (рис. 2) при отношениях a/h=10, 20, 50, 100. На пластинку действует равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности пластинки S_6, т.е. $\bar{Z}_v = q = \text{const}$. Были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния для граничных условий: на гранях S_1, S_3, S_4 и S_5 заданы условия: $\{u=v=w=0\}$. S_2 – свободна от нагрузок. Материал для всех рассмотренных задач – чистый алюминий. Модуль сдвига $G_0=25\cdot10^9$ [Па] и модуль Юнга $E_0=66{,}6\cdot10^9$[Па], объемный модуль $K=1{,}94G_0$ [32]. Коэффициент Пуассона $v=0{,}35$. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций примем в виде диаграммы по Y. Ohashi [26] для чистого алюминия:

$$\sigma_i = \sigma_s \left[1 - \exp\left(-\frac{e_i}{e_s} \right) \right], \qquad (11)$$

где σ_s и e_s имеют значения $\sigma_s=1023\cdot10^5$[Па], $e_s=0{,}98\cdot10^{-3}$.

Расчеты проводились методом конечных элементов в виде тетраэдров с использованием пакета COMSOL Multiphysics.



a

b

Рис. 2. Разбиения конечными элементами: *a* – 3D; *b* – срез по плоскости OXZ

Fig. 2. Finite element partitions: *a* – 3D; *b* – slice along the OXZ plane

Исследовалась сходимость решения по методу конечных элементов. В табл. 1 приведены значения максимальных перемещений пластинок в угловой точке $w(0.9,\ 0.9,\ 0)$. Результаты получены для соотношений a/h=10, 20, 50, 100 с различным количеством конечных элементов $N_{КЭ}$ по всему объему пластинок, число которых приведено в первом, третьем, пятом и седьмом столбцах таблицы. Во втором, четвертом, шестом и восьмом столбцах – значения максимальных перемещений при равномерно распределенной нагрузке для a/h=10, q=350; a/h=20, q=80; a/h=50, q=17; a/h=100, q=4.

Таблица 1

Значения максимальных перемещений пластинки w для различного количества конечных элементов, значениях отношений a/h=10, 20, 50 и 100, при нагрузках q=350, 80, 17, 4

Table 1

Values of maximum plate displacements w for different numbers of finite elements, values of ratios a/h = 10, 20, 50, and 100 under loads q = 350, 80, 17, and 4

a/h=10, q=350		a/h=20, q=80		a/h=50, q=17		a/h=100, q=4	
1	2	3	4	5	6	7	8
$N_{КЭ}$	w(0.9,0.9,0)	$N_{КЭ}$	w(0.9,0.9,0)	$N_{КЭ}$	w(0.9,0.9,0)	$N_{КЭ}$	w(0.9,0.9,0)
203611	1,23E-04	95694	1,37E-04	32018	5,06E-04	106300	9,30E-04
34690	1,20E-04	13666	1,31E-04	14473	4,81E-04	53411	9,18E-04
6667	1,12E-04	3257	1,19E-04	9184	4,73E-04	35860	9,11E-04
1651	1,06E-04	792	1,12E-04	4756	4,44E-04	18257	8,65E-04
264	9,00E-05	309	9,13E-05	1716	3,90E-04	4651	7,65E-04
42	4,78E-05	42	5,72E-06	211	1,79E-04	592	6,17E-04
Δ=2,68		Δ=4,87		Δ=4,93		Δ=5,11	

Относительная погрешность определяется как $\Delta = \frac{|w_{n-1} - w_n|}{|w_{n-1}|} 100\,\%$. Значения перемещений для каждого разбиения в точке $w(0{,}9,\ 0{,}9,\ 0)$ находится в районе 5 %, что показывает сходимость результатов. Дальнейшее увеличение разбиений не приводило к существенному изменению перемещений, поэтому в качестве предельного значения было выбрано количество элементов для пластинок a/h=10, $N_{КЭ}$=203611; a/h=20, $N_{КЭ}$=95694; a/h=50, $N_{КЭ}$=32018; a/h=100, $N_{КЭ}$=106300.

Для оценки влияния типа конечных элементов на точность решения задачи проводилось исследование моделирования пластических деформаций пластины с соотношением сторон a/h=20. Расчеты проведены для двух видов дискретизации: сетки из шестигранных и тетраэдральных элементов приведены в табл. 2.

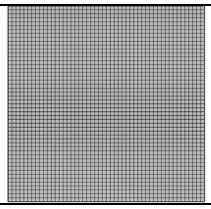
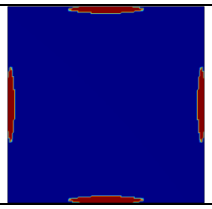
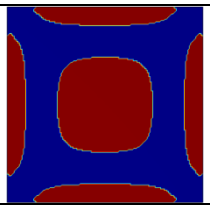
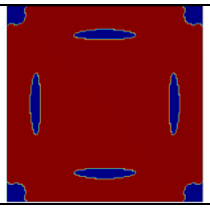
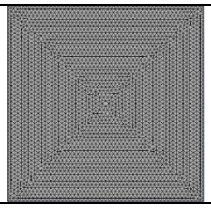
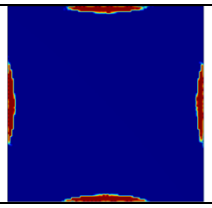
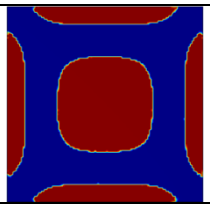
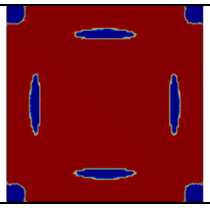
Согласно результатам табл. 2, точность решений наилучшим образом достигается при разбиении на КЭ в форме шестигранников, и для получения хороших результатов требуется меньшее число КЭ. Однако тетраэдральные элементы являются симплексами минимальной размерности в 3D, что обеспечивает устойчивость расчетов даже для сильно искривленных областей, где шестигранные элементы могут требовать дополнительных модификаций. Таким образом, несмотря на потенциально большую вычислительную эффективность шестигранных КЭ, тетраэдральные элементы остаются незаменимыми для задач со сложной геометрией и в случаях, где важна автоматизация процессов построения и адаптации сетки.

Таблица 2

Сравнение результатов для различных типов конечных элементов

Table 2

Comparison of results for different types of finite elements

Шестигранные КЭ			
$N_{КЭ}$ = 7500	q=35	q=80	q=120
			
Тетраэдальные КЭ			
$N_{КЭ}$ = 95694	q=35	q=80	q=120
			

НДС пластинки с соотношением *a/h*=10

Для пластинки с соотношением a/h=10 построен график зависимости максимальных перемещений w от распределенной нагрузки q при заданных краевых условиях {u=v=w=0}, который показан на рис. 3.

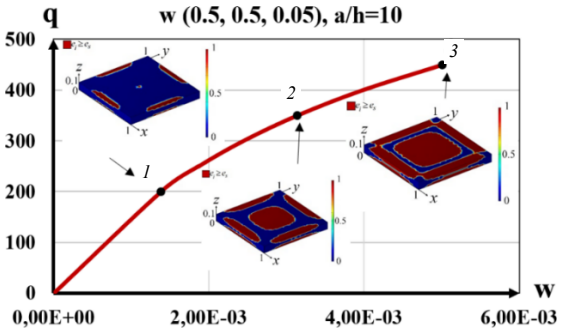


Рис. 3. Зависимости максимальных прогибов от интенсивности нагрузки

Fig. 3. Dependence of maximum deflections on load intensity

При нагрузках q=200, 350, 450 в точках *1*, *2* и *3*, приведенных на рис. 3, соответственно показаны зоны пластических деформаций, которые распределяются по всем граням пластинки при ее деформации. Цветовая шкала отношения e_i/e_s визуализирует распределение зон пластического и упругого деформирования, где красный цвет соответствует областям с развитой пластической деформацией ($e_i \geq e_s$), синий цвет указывает на упругую деформацию ($e_i \leq e_s$). Зоны пластических деформаций появляются в центре пластины и на середине граней. При увеличении нагрузки зоны пластических деформаций растут, зоны упругих деформаций расположены в углах пластины и в виде квадрата, на некотором расстоянии от граней.

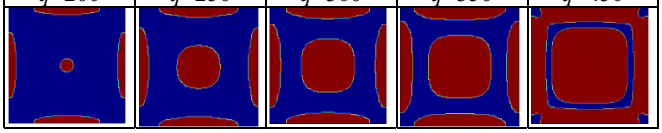
Сделан анализ изменения упругопластических деформаций и напряжений на верхней грани пластины по мере увеличения нагрузки q, результаты для пластинки с отношением a/h=10 приведены в табл. 3.

Таблица 3

Распределение упругопластических деформаций для пластинки a/h=10

Table 3

Distribution of elastic-plastic deformations for a plate a/h=10

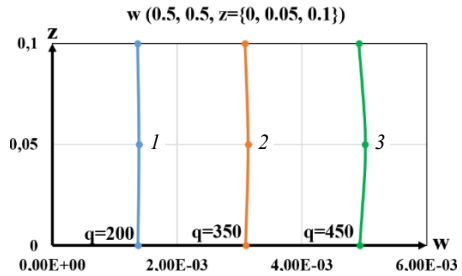
a/h=10				
q=200	q=250	q=300	q=350	q=450
				

Пластические деформации в середине пластинки и в середине краев появляются одновременно. При увеличении нагрузки зоны пластических деформаций растут, и при максимальной показанной нагрузке q=450 упругие зоны остаются только в углах пластины и в квадратной области на некотором расстоянии от краев.

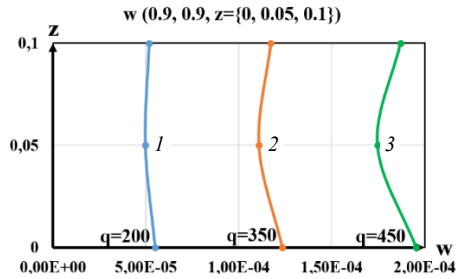
Исследованы распределения значений перемещений w по толщине пластинки с отношением a/h=10 в центральной (0,5; 0,5, z = {0, 0,05, 0,1}) и угловой (0,9; 0,9, z = {-0,5, -0,5, 0,1}) точках, которые представлены на рис. 4.

Анализ (рис. 4, *a* и *b*) показывает, что рост нагрузки приводит к увеличению разницы значений прогибов в в центральной (0,5; 0,5, z = {0, 0,05, 0,1}) и угловой (0,9; 0,9, z = {-0,5, -0,5, 0,1}) точках пластинки. Особенно сильно

это заметно для угловой точки (рис. 4, *b*). Следует также отметить несимметричность значений *w* для верхней и нижней грани, появляющуюся при значениях нагрузки, приводящих к пластическим деформациям (рис. 4, *b*). При *q*=450 разница между значениями *w* на верхней и нижней грани составляет 4,33 %, а разница между значениями *w* на верхней и центральной грани составляет 10,1 %.



a



b

Рис. 4. Распределение значений *w* по толщине пластинки *z* в точках пластинки: *a*) (0,5; 0,5, *z* = {0, 0,05, 0,1}); *b*) (0,9; 0,9, *z* = {0, 0,05, 0,1})

Fig. 4. Distribution of *w* values by plate thickness *z* at points of the plate: *a*) (0,5; 0,5, *z* = {0, 0,05, 0,1}); *b*) (0,9; 0,9, *z* = {0, 0,05, 0,1})

НДС пластинки с соотношением *a/h*=20

Для пластинки с соотношением *a/h*=20 построен график зависимости максимальных перемещений *w* от распределенной нагрузки *q* при заданных краевых условиях, который показан на рис. 5.

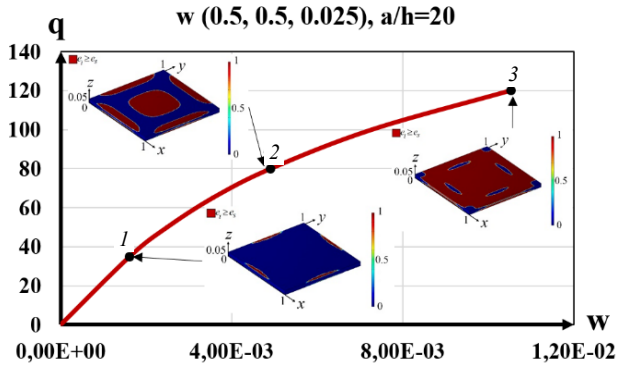


Рис. 5. Зависимости максимальных прогибов от интенсивности нагрузки

Fig. 5. Dependence of maximum deflections on load intensity

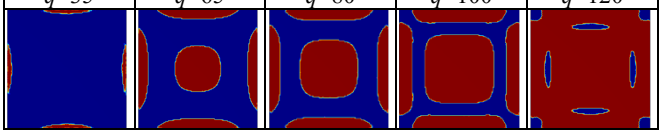
При нагрузках *q*=35, 80, 120 – в точках *1*, *2* и *3* (рис. 5) соответственно показаны зоны пластических деформаций, которые возникают в объеме пластинки. Цветовая шкала отношения e_i/e_s визуализирует распределение зон пластического и упругого деформирования, где красный цвет соответствует областям с пластической деформацией ($e_i \geq e_s$), синий цвет указывает на упругую деформацию ($e_i \leq e_s$).

Таблица 4

Распределение упругопластических деформаций для пластинки *a/h*=20

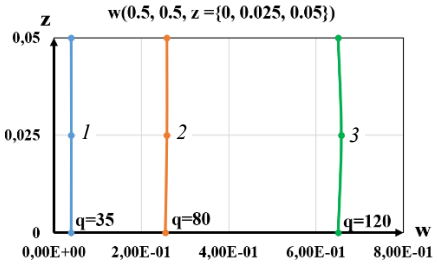
Table 4

Distribution of elastic-plastic deformations for a plate *a/h*=20

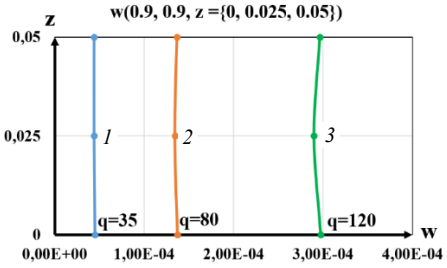
a/h=20				
q=35	*q*=65	*q*=80	*q*=100	*q*=120
				

В табл. 4 показано, как изменяются зоны упругопластических деформаций на верхней грани пластины по мере увеличения нагрузки *q*. Результаты качественно схожи с результатами пластинки *a/h*=10.

Исследованы распределения значений *w* по высоте пластинки *z*, в центральной (0,5; 0,5, *z* = {0, 0,025, 0,05}) и угловой (0,9; 0,9, *z* = {0, 0,025, 0,05}) точках, которые представлены на рис. 6.



a



b

Рис. 6. Распределение значений *w* по высоте пластинки *z* в точках пластинки: *a*) (0,5; 0,5, *z* = {0, 0,0255, 0,05}), *b*) (0,9; 0,9, *z* = {0, 0,025, 0,05})

Fig. 6. Distribution of *w* values by the height of the plate *z* at the points of the plate: *a*) (0,5; 0,5, *z* = {0, 0,0255, 0,05}), *b*) (0,9; 0,9, *z* = {0, 0,025, 0,05})

По сравнению с результатами, приведенными на рис. 4, распределение перемещений w по толщине для упругой зоны имеет вид вертикальной прямой – отличий между значениями в точке (0,9; 0,9, z = {0, 0,025, 0,05}) и в точке (0,5; 0,5, z = {0, 0,0255, 0,05}) нет. При появлении пластических деформаций (q=80) отличия есть, но они минимальны, при дальнейшем увеличении нагрузки они увеличиваются. Также на рис. 4 отсутствует «несимметрия» для верхней и нижней границ пластинки.

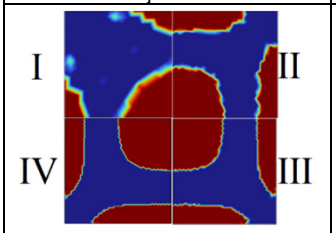
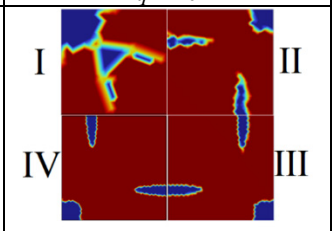
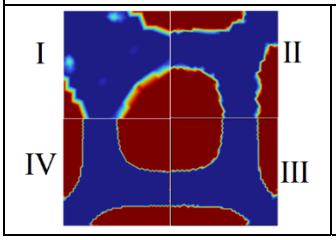
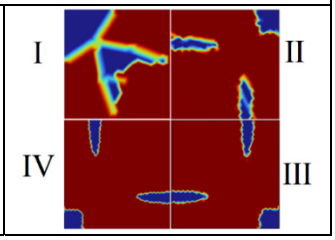
В табл. 5 приведены результаты расчетов пластических деформаций для пластинки с заданным соотношением параметров a/h=20. Расчеты выполнены с использованием условий симметрии для четырех различных вариантов разбиения.

Таблица 5

Сравнение результатов при разном количестве КЭ при условиях сшивания

Table 5

Comparison of results with different numbers of FE under crosslinking conditions

$\{z=0,05, x\in[0,1], y\in[0,1]\}$			
I = 42 КЭ	II = 814 КЭ	III = 13554 КЭ	IV = 203961 КЭ
q=80		q=120	
			
$\{z=0, x\in[0,1], y\in[0,1]\}$			
			

Используемый авторами общий алгоритм предполагает расчеты проводить при несимметричных локальных нагрузках с несимметричными краевыми условиями, меняющимися по стороне пластины. Поэтому основные результаты, полученные в работе, приведены для разбиений по всему объему пластинки, без учета симметрии. В случае симметричной задачи разработанный алгоритм позволяет учесть этот фактор и производить расчет или для четверти пластинки, используя две оси симметрии, или восьмой части, используя четыре оси симметрии. Это позволяет существенно уменьшить количество элементов при решении задачи. В качестве примера, используя две оси симметрии, результаты расчета приведены в табл. 5, при отношении a/h=20 и значения нагрузки q=80, 120.

НДС пластинки с соотношением a/h=100

Для пластинки с соотношением a/h=100 построен график зависимости максимальных перемещений w от распределенной нагрузки q при заданных краевых условиях, который показан на рис. 7.

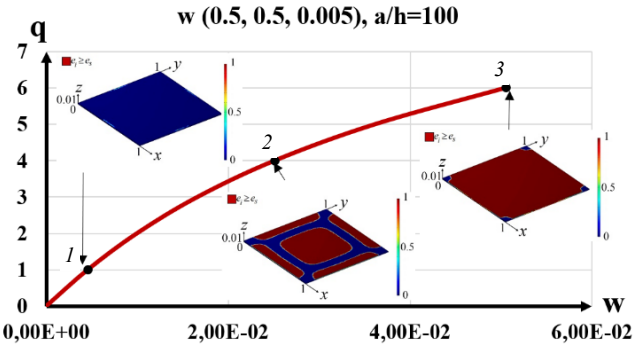


Рис. 7. Зависимости максимальных прогибов от интенсивности нагрузки

Fig. 7. Dependence of maximum deflections on load intensity

При нагрузках q=1, 4, 6 в точках *1*, *2* и *3* на рис. 7 соответственно показаны зоны пластических деформаций, которые возникают на всех плоскостях при деформации пластинки. Упругопластические зоны появляются при меньших нагрузках, чем для предыдущих отношений a/h, но их вид качественно совпадает. Цветовая шкала отношения e_i/e_s визуализирует распределение зон пластического и упругого деформирования, где красный цвет соответствует областям с развитой пластической деформацией ($e_i \geq e_s$), синий цвет указывает на упругую деформацию ($e_i \leq e_s$).

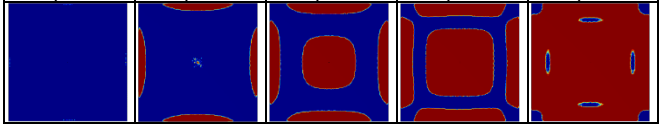
В табл. 6 показано, как изменяются зоны упругопластических деформаций на верхней грани пластины по мере увеличения нагрузки q. Результаты качественно схожи с таковыми, полученными для предыдущих значений отношения a/h.

Таблица 6

Распределение пластических деформаций пластинки a/h=100

Table 6

Distribution of plastic deformation of the plate a/h=100

a/h=100				
q=1	q=2	q=3	q=4	q=5
				

Исследованы распределения значений w по высоте пластинки z, в центральной (0,5; 0,5, z = {0, 0,005, 0,01}) и угловой (0,9; 0,9, z = {0, 0,005, 0,01}) точках, которые представлены на рис. 8.

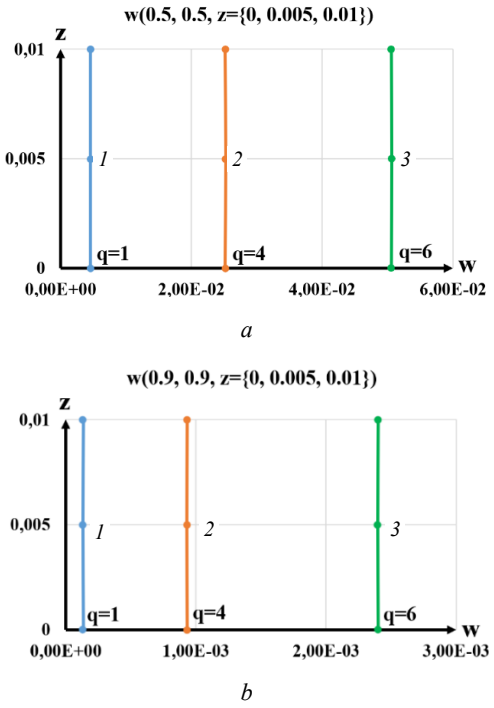


Рис. 8. Распределение значений w по высоте пластинки z в точках пластинки: *a*) (0,5; 0,5, z = {0, 0,005, 0,01}) и *b*) (0,9; 0,9, z = {0, 0,005, 0,01})

Fig.8. Distribution of w values by the height of the plate z at the points of the plate: *a*) (0,5; 0,5, z = {0, 0,005, 0,01}) and *b*) (0,9; 0,9, z = {0, 0,005, 0,01})

Результаты, приведенные на рис. 8, *a*, показывают, что для отношения a/h=100 в центре пластинки как для упругой зоны, так и для пластических зон

Для угловой точки (рис. 8, *b*) при q=6 отличие центральной грани от верхней и нижней есть, но оно очень мало и составляет 0,17 %.

Исследования расположения пластических зон в зависимости от разных значений a/h (см. рис. 3, 5, 7) показали, что в заданных граничных условиях защемления торцов пластинки S_1, S_3, S_4, S_5 зоны расположены одинаково. Таким образом, изменение параметра a/h не оказывает существенного влияния на качественный вид упругопластических зон.

Анализ распределения перемещений w по толщине пластины (см. рис. 4, 6, 8) показывает, что для толстых пластин (a/h=10,20) наблюдается различие между значениями в центральной и угловых зонах. При этом имеется также «несимметрия» между значениями на верхней и нижней гранях пластины. Для отношения a/h=50 отличия между значениями в центральной и угловой зонах пластины имеются только при пластических деформациях и практически отсутствует «несимметрия». Для a/h=100 результаты везде одинаковы. Таким образом, тонкие пластинки в упругой и пластической зонах ведут себя как мембраны.

Заключение

1. В работе построены математические модели пластинок в трехмерной постановке с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности. В качестве метода решений приняты метод конечных элементов и итерационная процедура метода переменных параметров упругости И.А. Биргера, для которой И.И. Воровичем и Ю.П. Красовским доказана теорема сходимости.

2. Создан авторский алгоритм метода переменных параметров упругости Биргера, который был запрограммирован и внедрен в программный пакет COMSOL. Достоверность полученных результатов обеспечивается исследованием сходимости метода конечных элементов типа элементов в форме тетраэдра.

3. Проведено исследование зон упругопластической деформации. В качестве критерия пластичности принят критерий Мизеса. Исследованы зоны пластической деформации при равномерной нагрузке и симметричных граничных условиях в трехмерной пластинке от разных значений a/h={10, 20, 50, 100}. Проведенные исследования показали, что при отношении $a/h \le 20$ необходимо использовать трехмерную модель, при большем отношении a/h можно ограничиться и двумерной моделью.

Библиографический список

1. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел: в 2 т. / А. Надаи; пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954–1969.

2. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 753 с.

3. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл; пер. с англ. Э.И. Григолюка. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.

4. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 421 с.

5. Ильюшин, А.А. Сопротивление материалов / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский. – М.: Физматлит, 1959. – 371 с.

6. Ворович, И.И. О методе упругих решений / И.И. Ворович, Ю.П. Красовский // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 126, № 4. – С. 740–743.

7. Биргер, И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности / И.А. Биргер // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. 15, вып. 6. – С. 765–770.

8. Савенков, В.Н. Напряженно-деформированное состояние образца при упругопластическом растяжении / В.Н. Савенков, Ю.В. Тимохин, В.Ю. Тимохина // Сборник научных трудов Донецкого института железнодорожного транспорта. – 2019. – № 53. – С. 55–63.

9. Численное моделирование упругопластического динамического и статического сжатия пакетов металлических плетеных сеток / А.В. Кочетков [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80, № 4. – С. 533–542.

10. Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) / А.Д. Тебякин [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, вып. 4. – С. 494–505. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505

11. Mathematical model of physically non-linear Kirchhoff plates: Investigation and analysis of effective computational iterative methods / A. Krysko-jr. [et al.] // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – Vol. 150. – P. 104346. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104346

12. Soltani, H.M. Plastic Buckling and Postbuckling Analysis of Plates Using 3D Incompatible and Standard Elements / H.M. Soltani, M. Kharazi // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering. – 2020. – Vol. 44. – P. 881–903. DOI: 10.1007/s40997-019-00316-w

13. Fallah, N. A novel finite volume based formulation for the elasto-plastic analysis of plates / N. Fallah, A. Parayandeh-Shahrestany // Thin-Walled Structures. – 2014. – No. 77. – P. 153–164.

14. Physical nonlinearity in porous functionally graded Kirchhoff nano-plates: Modeling and numerical experiment / V.A. Krysko-jr. [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2023. – Vol. 123. – P. 39–74. DOI: 10.1016/j.apm.2023.06.026

15. On 3D and 1D mathematical modeling of physically nonlinear beams / A.V. Krysko [et al.] // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2021. – Vol. 134. – P. 103734. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103734

16. Application of Variational Iterations Method for Studying Physically and Geometrically Nonlinear Kirchhoff Nanoplates: A Mathematical Justification / A.D. Tebyakin [et al.] // Axioms. – 2023. – Vol. 12, № 4. – P. 355. DOI: 10.3390/axioms12040355

17. Hache, F. Asymptotic derivation of nonlocal plate models from three-dimensional stress gradient elasticity / F. Hache, N. Challamel, I. Elishakoff // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Vol. 31. – P. 47–70. DOI: 10.1007/s00161-018-0622-1

18. Zho, Y. On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff-Love plate / Y. Zho, K. Huang // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2023. – Vol. 100. P. 105014. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2023.105014

19. Vaghefi, R. Analysis of thermo-elastoplastic bending behavior of FG skew sandwich plates on elastic foundation using an enhanced meshless radial basis reproducing kernel particle approach / R. Vaghefi // Archive of Applied Mechanics. – 2024. – Vol. 94. – P. 3195–3227. DOI: 10.1007/s00419-024-02666-7

20. Vaghefi, R. Three-dimensional temperature-dependent thermo-elastoplastic bending analysis of functionally graded skew plates using a novel meshless approach / R. Vaghefi // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 104. – P. 105916. DOI: 10.1016/j.ast.2020.105916

21. Vaghefi, R. Assessing the effect of porosity on elasto-plastic buckling behavior of functionally graded plates using meshfree Tchebychev-RPIM / R. Vaghefi // Acta Mechanica. – 2024. – Vol. 235. – P. 5621–5642. DOI: 10.1007/s00707-024-04003-z

22. Plastic deformation behavior in laser bending of elastic pre-loaded metal plate / L. Xu [et al.] // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2017. – Vol. 90. – P. 3397-3406. DOI: 10.1007/s00170-016-9643-8

23. Hasrati, E. Elastoplastic postbuckling analysis of moderately thick rectangular plates using the variational differential quadrature method / E. Hasrati, R. Ansari, H. Rouhi // Aerospace Science and Technology. – 2019. – Vol. 91. – P. 479–493. DOI: 10.1016/j.ast.2019.05.043

24. New Analytical Solutions for Elastoplastic Buckling of Non-Lévy-Type Rectangular Plates / Z. Hu [et al.] // AIAA Journal. – 2023. – Vol. 61, no. 11. – P. 5147–5163. DOI: 10.2514/1.J063147

25. Washizu, K. Variational methods in the theory of elasticity and plasticity / K. Washizu. – 3rd ed. – Oxford: Pergamon Press, 1982. – 540 p.

26. Ohashi, Y. The elastoplastic bending of a clamped thin circular plate / Y. Ohashi, S. Murakami // Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics. – Munich, 1964. – P. 212–223.

27. Timoshenko, S.P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibration of prismatie bar / S.P. Timoshenko // Philosofical Magazin. – 1921. – Vol. 41, no. 6. – P. 744–746.

28. Шереметьев, М.П. К построению уточненной теории пластин / М.П. Шереметьев, Б.Л. Пелех // Инженерный журнал. – 1964. – Т. 4, вып. 3. – С. 34–41.

29. Chaotic dynamics of the size-dependent non-linear microbeam model / A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, S.P. Pavlov, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2017. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.02.015

30. Кириченко, В.Ф. Обоснование вариационно-итерационного метода в теории пластин / В.Ф. Кириченко, В.А. Крысько // Прикладная механика. – 1981. – Т. 17, № 4. – С. 71–76.

31. Моделирование пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций / Д.А. Губайдуллин, А.В. Крысько, А.Д. Тебякин, Т.В. Яковлева, В.А. Крысько // Доклады Российской Академии Наук. Физика, технические науки. – Т. 518. – С. 43–50.

32. Tamarin, Y. Atlas of Stress-Strain Curves / Y. Tamarin // Asm Intl. 2nd ed. – 2002. – 816 p.

References

1. Nadai A. Plastichnost′ i razrushenie tverdykh tel : v 2 t. : per. s angl. [Plasticity and fracture of solids: in 2 t.] Transl. from Eng. Ed. G.S. SHapiro. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1954-1969.

2. Rabotnov IU. N. Polzuchest′ ėlementov konstrukt͡siĭ [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka, 1966, 753 p.

3. KHill R. Matematicheskaia teoriia plastichnosti [Mathematical theory of plasticity] Transl. from Eng. E. I. Grigoliuk. Moskva, Gostekhizdat, 1956, 407 p.

4. Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of plasticity theory]. Moscow, Nauka, 1969, 421 p.

5. Il`yushin A.A., Lenskij V.S. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatlit, 1959, 371 p.

6. Vorovich I.I., Krasovskij Yu.P. O metode uprugix reshenij [On the method of elastic solutions]. *Doklady` AN SSSR*, 1959, no. 126 (4), pp. 740-743.

7. Birger I.A. Nekotory`e obshhie metody` resheniya zadach teorii plastichnosti [Some general methods for solving problems of the theory of plasticity]. *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, 1951, vol. 15, iss. 6, pp. 765-770.

8. Savenkov V.N., Timoxin Yu.V., Timoxina V.Yu. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie obrazcza pri uprugoplasticheskom rastyazhenii [Stress-strain state of the sample under elastic-plastic tension]. *Sbornik nauchny`x trudov Doneczkogo instituta zheleznodorozhnogo transporta*, 2019, no. 53, pp. 55-63.

9. Kochetkov A.V., Leont`ev N.V., Modin I.A., Poverennov E.Yu. Chislennoe modelirovanie uprugoplasticheskogo dinamicheskogo i staticheskogo szhatiya paketov metallicheskix pleteny`x setok [Numerical modeling of elastic-plastic dynamic and static compression of packages of metal braided nets]. *Problemy` prochnosti i plastichnosti*, 2018, vol. 80, no. 4, pp. S. 533-542.

10. Tebyakin A.D., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Uprugoplasticheskoe deformirovanie nanoplastin. Metod variacionny`x iteracij (rasshirenny`j metod Kantorovicha) [Elasto-plastic deformation of nanoplastics. The method of variational iterations (Kantorovich's extended method)]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 494-505. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505

11. Krysko-jr. A., Tebyakin A.D., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Awrejcewicz J. Mathematical model of physically non-linear Kirchhoff plates: Investigation and analysis of effective computational iterative methods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2023, vol. 150, p. 104346. DOI: org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104346

12. Soltani H.M., Kharazi M. Plastic Buckling and Postbuckling Analysis of Plates Using 3D Incompatible and Standard Elements. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 2020, vol. 44, pp. 881-903. DOI: org/10.1007/s40997-019-00316-w

13. Fallah N., Parayandeh-Shahrestany A. A novel finite volume based formulation for the elasto-plastic analysis of plates. *Thin-Walled Structures*, 2014, no. 77, pp. 153-164.

14. Krysko-jr V.A., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Tebyakin A.D., Krysko V.A. Physical nonlinearity in porous functionally graded Kirchhoff nano-plates: Modeling and numerical experiment. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, vol. 123, pp. 39-74. DOI: org/10.1016/j.apm.2023.06.026

15. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A. On 3D and 1D mathematical modeling of physically nonlinear beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 2021, vol. 134, p.103734. DOI: org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103734

16. Tebyakin A.D., Kalutsky L.A., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Application of Variational Iterations Method for Studying Physically and Geometrically Nonlinear Kirchhoff Nanoplates: A Mathematical Justification. *Axioms,* 2023, vol. 12 (4), p. 355. DOI: org/10.3390/axioms12040355

17. Hache F., Challamel N., Elishakoff I. Asymptotic derivation of nonlocal plate models from three-dimensional stress gradient elasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2019, vol. 31, pp. 47-70. DOI: org/10.1007/s00161-018-0622-1

18. Yucheng Zhou, Kefu Huang, On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff–Love plate. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2023, vol. 100, p. 105014. DOI: org/10.1016/j.euromechsol.2023.105014

19. Vaghefi R. Analysis of thermo-elastoplastic bending behavior of FG skew sandwich plates on elastic foundation using an enhanced meshless radial basis reproducing kernel particle approach. *Archive of Applied Mechanics*, 2024, vol. 94, pp. 3195-3227. DOI: 10.1007/s00419-024-02666-7

20. Vaghefi R. Three-dimensional temperature-dependent thermo-elastoplastic bending analysis of functionally graded skew plates using a novel meshless approach. *Aerospace Science and Technology*, 2020, vol. 104, p. 105916. DOI: org/10.1016/j.ast.2020.105916

21. Vaghefi R. Assessing the effect of porosity on elasto-plastic buckling behavior of functionally graded plates using meshfree Tchebychev-RPIM. *Acta Mechanica*, 2024, vol. 235, pp. 5621-5642. DOI: org/10.1007/s00707-024-04003-z

22. Xu, L., Li, W., Wang, X. et al. Plastic deformation behavior in laser bending of elastic pre-loaded metal plate. *International Journal Advanced Manufacturing Technology*, 2017, vol. 90, pp. 3397–3406. DOI: org/10.1007/s00170-016-9643-8

23. Hasrati E., Ansari R., Rouhi H., Elastoplastic postbuckling analysis of moderately thick rectangular plates using the variational differential quadrature method. *Aerospace Science and Technology,* 2019, vol. 91, pp. 479-493. DOI: org/10.1016/j.ast.2019.05.043

24. New Analytical Solutions for Elastoplastic Buckling of Non-Lévy-Type Rectangular Plates Zhaoyang Hu, Chao Zhou, Zhuofan Ni, Xinran Zheng, Zixuan Wang, Dian Xu, Bo Wang, and Rui Li. *AIAA Journal*, 2023, vol. 61, no. 11, pp. 5147-5163. DOI: org/10.2514/1.J063147

25. Washizu K. Variational methods in the theory of elasticity and plasticity. 3rd ed. Oxford, Pergamon Pr., 1982, 540 p.

26. Ohashi Y., Murakami S. The elastoplastic bending of a clamped thin circular plate. *Proc. Eleventh Int. Cong. App. Mech., Munich,* 1964, pp. 212-223.

27. Timoshenko S.P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibration of prismatie bar // Philosofical Magazin. 1921. Vol. 41. № 6. p. 744-746.

28. Sheremetyev M.P., Pelekh B.L. K postroyeniyu utochnennoy teorii plastin [On the construction of a refined theory of plates] // Engineering journal. Vol. 4. 1964. Issue 3. – pp. 34-41.

29. A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, S.P. Pavlov, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko Chaotic dynamics of the size-dependent non-linear micro-beam model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017, doi: 10.1016/j.cnsns.2017.02.015

30. V.F. Kirichenko, V.A. Krysko Obosnovaniye variatsionno-iteratsionnogo metoda v teorii plastin [Justification of the variational-iterative method in the theory of plates]. Applied Mechanics, 1981, 17, 4, pp. 71-76.

31. D.A. Gubaydullin, A.V. Krysko, A.D. Tebyakin, T.V. Yakovleva, V.A. Krysko Modelirovaniye plastinok iz bimodulnogo materiala s uchetom uprugoplasticheskikh deformatsiy [Modeling of plates made of bimodular material taking into account elastic-plastic deformations]. Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, Engineering Sciences. 2025, 518, pp. 43-50.

32. Tamarin Y. Atlas of Stress-Strain Curves. Asm Intl. 2nd ed. 2002. 816 p.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 22-11-00160-П).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 22-11-00160P).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The authors' contributions are equal.