Кириков, С.В. Анализ трещин в полях упругих напряжений от клиновых дисклинаций / С.В. Кириков, А.С. Пупынин, В.Н. Перевезенцев. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.02 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 5. – С. 18–29.

Perm Polytech Style: Kirikov S.V., Pupynin A.S., Perevezentsev V.N. Analysis of cracks in the fields of elastic stresses from wedge disclinations. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 5, pp. 18-29. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.02
УДК 539.219.2

АНАЛИЗ ТРЕЩИН В ПОЛЯХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ КЛИНОВЫХ ДИСКЛИНАЦИЙ

С.В. Кириков, А.С. Пупынин, В.Н. Перевезенцев

Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 14 августа 2025 г.
Одобрена: 10 октября 2025 г.
Принята к публикации:
25 октября 2025 г.

Ключевые слова:

дисклинация, трещина, коэффициенты интенсивности напряжений, дислокация, поля упругих напряжений, большие пластические деформации, разрушение.

АННОТАЦИЯ

Разработаны математические методы анализа трещин, возникающих в поликристаллических твердых телах под действием полей напряжений, создаваемых клиновыми дисклинациями. Предложен метод расчета основных характеристик трещины, таких как плотность вектора Бюргерса виртуальных дислокаций, коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины и функция раскрытия берегов, при произвольном расположении дисклинации. Метод основан на замене решения для исходной дисклинации на суперпозицию решения для дисклинации с известным аналитическим выражением и решения для непрерывной стенки краевых дислокаций. В результате применения данного метода получены точные аналитические выражения для указанных параметров в случае, когда дисклинация находится на оси трещины, а также асимптотические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений трещины в упругом поле, создаваемом дисклинацией, расположенной вблизи вершины. Проведен сравнительный анализ дислокационной и дисклинационной трещин, выявивший их принципиальное различие: при попадании в трещину дислокация размазывается в виде распределения виртуальных дислокаций вдоль трещины и перестает существовать как локализованный дефект. В отличие от этого, дисклинация сохраняется как независимый источник напряжений, который лишь частично экранируется виртуальными дислокациями. Рассчитаны поля упругих напряжений от дисклинационной трещины, проанализировано влияние положения дисклинации на ее взаимодействие с решеточной дислокацией. Обнаружено, что зависимость силы взаимодействия от расстояния между решеточной дислокацией и вершиной трещины носит знакопеременный и немонотонный характер. Результаты исследования представляют ценность для разработки методов прогнозирования разрушения в материалах, полученных методами интенсивной пластической деформации.

© **Кириков Сергей Владимирович** – к. ф.-м. н., с. н. с. лаборатории физического материаловедения, e-mail: ksv.kirikov@yandex.ru
Пупынин Александр Сергеевич – к. ф.-м. н., с. н. с. лаборатории физического материаловедения, e-mail: pupynin.as@gmail.com
Перевезенцев Владимир Николаевич – д. ф.-м. н., профессор, заведующий лабораторией физического материаловедения, e-mail: v.n.perevezentsev@gmail.com

Sergey V. Kirikov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Physical Materials Science, Mechanical Engineering Research Institute, e-mail: ksv.kirikov@yandex.ru
Aleksandr S. Pupynin – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Physical Materials Science, Mechanical Engineering Research Institute, e-mail: pupynin.as@gmail.com
Vladimir N. Perevezentsev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Laboratory of Physical Materials Science, Mechanical Engineering Research Institute, e-mail: v.n.perevezentsev@gmail.com

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ANALYSIS OF CRACKS IN THE FIELDS OF ELASTIC STRESSES FROM WEDGE DISCLINATIONS

S.V. Kirikov, A.S. Pupynin, V.N. Perevezentsev

Mechanical Engineering Research Institute, Nizhni Novgorod, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 14 August 2025
Approved: 10 October 2025
Accepted for publication:
25 October 2025

Keywords:

disclination, crack, stress intensity factors, dislocation, elastic stress fields, severe plastic deformation, fracture.

ABSTRACT

The article is devoted to the development of mathematical methods for analyzing cracks that occur in polycrystalline solids under the action of stress fields created by wedge disclinations. A method is proposed for calculating the main crack characteristics, such as the density of the Burgers vector of virtual dislocations, stress intensity factors at the crack tips, and the crack faces opening function, for an arbitrary disclination location. The method is based on replacing the solution for the initial disclination with a superposition of the solution for the disclination with a known analytical expression and the solution for a continuous wall of edge dislocations. As a result of applying this method, exact analytical expressions are obtained for the specified parameters in the case where the disclination is located on the crack axis, as well as asymptotic expressions for the stress intensity factors of the crack in the elastic field created by the disclination located near the tip. A comparative analysis of dislocation and disclination cracks is carried out, revealing their fundamental difference: when entering a crack, a dislocation is spread out in the form of a distribution of virtual dislocations along the crack and ceases to exist as a localized defect. In contrast, the disclination remains as an independent source of stress, which is only partially screened by virtual dislocations. The fields of elastic stresses from a disclination crack are calculated, the influence of the disclination position on its interaction with the lattice dislocation is analyzed. It was found that the dependence of the interaction force on the distance between the lattice dislocation and the crack tip is alternating and non-monotonic nature. The results of the study are valuable for developing methods for predicting fracture in materials obtained by severe plastic deformation.

Введение

Современная микромеханика разрушения кристаллических материалов в значительной степени опирается на концепцию взаимодействия трещин с дискретными структурными дефектами, в частности, с решеточными дислокациями. В работах Виртмана [1] была заложена основа для моделирования процессов разрушения в рамках подхода динамики дискретных дислокаций. В этих работах трещины представлены как распределение виртуальных дислокаций в упругопластической среде и разработан математический аппарат на основе сингулярных интегральных уравнений для вычисления плотности вектора Бюргерса виртуальных дислокаций вдоль трещины. Это позволило вычислять коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) и определять создаваемые трещинами поля напряжений.

В последние десятилетия заметно возрос интерес к мезодефектам ротационного происхождения. Теоретически и экспериментально было доказано, что на стадии развитой пластической деформации поликристаллов в стыках межзеренных границ формируются дисклинации, а в объеме зерен происходит интенсивная фрагментация [2–5]. В процессе деформации первоначально однородно ориентированные зерна постепенно превращаются в конгломераты сплошно сопряженных разориентированных между собой микрообластей (фрагментов), разделенных границами деформационного происхождения. Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные свидетельствуют, что ключевую роль в процессе фрагментации играют ротационно-сдвиговые мезодефекты деформационного происхождения: а) неподвижные стыковые дисклинации и б) подвижные частичные дисклинации [2]. Первые совпадают с линиями стыков исходных большеугловых границ зерен, а вторые располагаются внутри зерен и имеют вид оборванных дислокационных границ. Мощность стыковых дисклинаций монотонно нарастает по мере увеличения величины деформации ε. При $\varepsilon \geq 0,2$ поля упругих напряжений, которые они генерируют, увеличиваются настолько, что начинают возмущать до того ламинарные потоки решеточных дислокаций и тем самым создают условия для формирования вблизи стыков (а) областей с повышенной плотностью распределенного дислокационного заряда и (б) зародышей оборванных дислокационных границ. Прямые электронно-микроскопические исследования подтверждают, что зарождение первых оборванных дислокационных границ деформационного происхождения действительно происходит в основном именно на стыках и изломах межзеренных границ.

Дисклинации играют ключевую роль не только в структурообразовании, но и в процессах вязкого разрушения поликристаллических твердых тел. Установлено, что имеется продолжительная стадия деформации, в ходе которой в определенных областях фрагментированной структуры, как правило, вблизи тройных стыков и изломов зерен и границ фрагментов накапливаются микротрещины и поры [6–21]. Классические модели разрушения, основанные на зарождении микротрещин

в голове скопления краевых дислокаций, в этом случае оказались неприменимы, поскольку размер таких скоплений, ограниченный размерами фрагментов (порядка 0,3 мкм), недостаточно велик для возникновения трещины. Причиной зарождения трещин в материалах с фрагментированной структурой могут являться клиновые дисклинации. Развитие этих представлений вызвало значительный рост числа теоретических исследований, посвященных анализу условий появления устойчивых трещин вблизи дисклинаций. Теоретические исследования, включая работы [22], а также [23], продемонстрировали, что дисклинации способны инициировать образование клиновидных трещин. В ряде работ [24–28] рассматривалось поведение микротрещин в окрестности одиночной отрицательной клиновой дисклинации внутри цилиндра, а также в поле двухосного диполя клиновых дисклинаций и в поле ансамбля дислокаций, экранирующих дисклинацию. В работах [29–31] описаны механизмы зарождения микротрещин в упругих полях напряжений стыковых дисклинаций. Были также проанализированы условия зарождения трещин в более сложных полях напряжений, создаваемых как внешними силами, так и диполем дисклинаций [32]. Кроме того, рассматривались возможности существования устойчивых равновесных трещин в поле комбинированного мезодефекта, представляющего собой суперпозицию диполя клиновых дисклинаций и планарного сдвигового мезодефекта [33; 34], а также клиновой дисклинации и супердислокации [35]. В некоторых работах показано, что присутствие отрицательной дисклинации достаточной мощности может существенно способствовать зарождению трещины в области зернограничного стыка по механизму атермического проскальзывания по границам зерен [36; 37]. Несмотря на важную роль дисклинаций в процессах разрушения, единый математический аппарат для описания трещин в полях напряжений, создаваемых дисклинациями, аналогичный подходу Виртмана для дислокаций, до настоящего времени отсутствует. Это ограничивает возможности прогнозирования разрушения в материалах с выраженной ротационной составляющей пластичности (нанокристаллы, ультрамелкозернистые материалы после интенсивной пластической деформации) и затрудняет моделирование подобных систем. Целью данной работы является разработка методов расчета основных характеристик микротрещин, зарождающихся в упругих полях дисклинаций.

Описание трещин в рамках дислокационного подхода

Рассмотрим прямолинейную трещину длиной $2a$, ориентированную вдоль оси Ox с центром в начале координат. Указанную систему координат далее будем именовать локальной системой координат трещины (рис. 1).

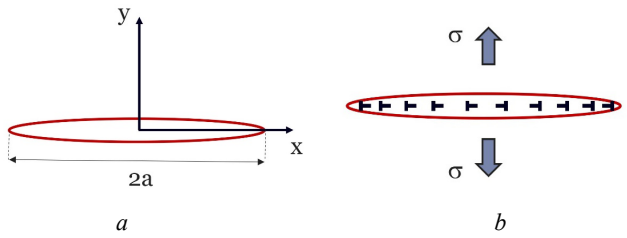


Рис. 1. Локальная система координат для трещины (*a*) и схематическое представление трещины во внешнем однородном поле через систему виртуальных дислокаций (*b*)

Fig. 1. The local coordinate system for crack (*a*) and a schematic representation of crack in an external homogeneous field through a system of virtual dislocations (*b*)

В задачах механики разрушения и теории дефектов трещины часто представляют эквивалентной системой континуально распределенных виртуальных дислокаций. Плотность вектора Бюргерса для такой системы имеет вид:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_{\mathrm{L}}(x) + \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}(x), \tag{1}$$

где $\mathbf{B}_{\mathrm{L}}(x)$ – компонента, связанная с коэффициентом интенсивности напряжений:

$$B_L^{(i)} = \frac{1}{\pi D}\left(\frac{\bar{\sigma}_A^{(i)} x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{\bar{\sigma}_B^{(i)} a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \tag{2}$$

$$\bar{\sigma}_A^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\sigma^{(i)}(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ \bar{\sigma}_B^{(i)} = \frac{1}{\pi a}\int_{-a}^{a} \frac{x\sigma^{(i)}(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \tag{3}$$

а $\mathbf{B}_{\mathrm{NL}}(x)$ – компонента, не влияющая на коэффициент интенсивности напряжений:

$$B_{\mathrm{NL}}^{(i)} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2 D}\int_{-a}^{a} \frac{\sigma^{(i)}(t)dt}{(x - t)\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{4}$$

В выражениях (2)–(4) индекс (i) для x-компоненты плотности соответствует $\sigma^{(i)} = \sigma_{xy}$, для y-компоненты – $\sigma^{(i)} = \sigma_{yy}$. Все интегралы понимаются в смысле главного значения.

Коэффициенты интенсивности напряжений для вершин трещины, расположенных в точках $(\pm a, 0)$, определяются интегральными выражениями [38]:

$$\begin{bmatrix} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}(\pm a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a} \begin{bmatrix} \sigma_{yy}(t,0) \\ \sigma_{xy}(t,0) \end{bmatrix} \sqrt{\frac{a \pm t}{a \mp t}}\, dt, \tag{5}$$

где σ_{xy} и σ_{yy} – компоненты тензора напряжений на берегах разреза трещины, индуцированные источником внутренних напряжений или внешней нагрузкой [39–41].

С практической точки зрения прямая оценка сингулярных интегралов в смысле главного значения оказывается вычислительно сложной, особенно при численном моделировании динамических систем, содержащих

большое количество дислокаций и трещин. Виртманом были получены аналитические выражения для плотности вектора Бюргерса виртуальных дислокаций в трещине [1], которые позволяют с высокой точностью вычислять параметры трещин для произвольных дислокационных конфигураций. Однако при внимательном анализе обнаруживается, что ряд этих выражений содержит опечатки, способные привести к некорректным результатам при прямом использовании. В связи с этим исправленные и уточненные выражения приведены ниже. Также следует подчеркнуть, что для обеспечения достоверности расчетов необходимо проводить перекрестную проверку (кросс-валидацию) результатов, полученных по этим формулам. Такая проверка может включать сравнение аналитических решений с независимыми численными расчетами. Согласованность результатов, полученных различными методами, служит важным критерием корректности как математического аппарата, так и его численной реализации.

Плотности вектора Бюргерса

Для упрощения расчетов Виртман ввел симметричные и антисимметричные конфигурации дислокаций относительно трещины. На рис. 2 приведены дополнительные обозначения, необходимые для расчета основных характеристик трещин в поле упругих напряжений от дислокации.

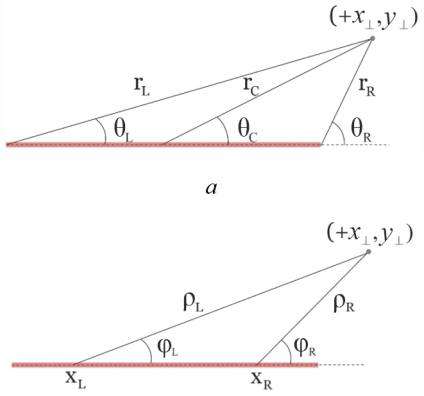


Рис. 2. Геометрические параметры, необходимые для вычисления базовых характеристик трещин для дислокационных конфигураций

Fig. 2. The geometric parameters necessary for calculating the basic characteristics of cracks for dislocation configurations

Параллельная составляющая:

$$L_{\text{ЮХ}}=\frac{k_x r_C}{r_S}\left(\sin\theta_L\cos\left(\theta_S+\theta_L-\theta_C\right)+\sin\theta_R\cos\left(\theta_S+\theta_R-\theta_C\right)-2\sin\theta_C\cos\theta_S\right);$$

$$L_{\text{ISX}}=\frac{k_x a}{r_S}\left(\sin\theta_L\cos\left(\theta_S+\theta_L\right)+\sin\theta_R\cos\left(\theta_S+\theta_R\right)\right);$$

$$L_{\text{ПОХ}}=\frac{k_x a}{r_S}\left(2\cos\theta_S-\sin\theta_L\sin\left(\theta_S+\theta_L\right)-\sin\theta_R\sin\left(\theta_S+\theta_R\right)\right);$$

$$L_{\text{ПSX}}=k_x\left[-2+\frac{r_C}{r_S}\left(\begin{array}{l}2\cos\left(\theta_S-\theta_C\right)+2\sin\theta_C\sin\theta_S-\sin\theta_L\sin\left(\theta_S+\theta_L-\theta_C\right)-\\-\sin\theta_R\sin\left(\theta_S+\theta_R-\theta_C\right)\end{array}\right)\right].$$

Перпендикулярная составляющая:

$$L_{\text{ЮY}}=\frac{k_y a}{r_S}\left(2\cos\theta_S+\sin\theta_L\sin\left(\theta_S+\theta_L\right)+\sin\theta_R\sin\left(\theta_S+\theta_R\right)\right);$$

$$L_{\text{ISY}}=k_y\left[-2+\frac{r_C}{r_S}\left(\begin{array}{l}2\cos\left(\theta_S-\theta_C\right)-2\sin\theta_C\sin\theta_S+\sin\theta_L\sin\left(\theta_S+\theta_L-\theta_C\right)+\\+\sin\theta_R\sin\left(\theta_S+\theta_R-\theta_C\right)\end{array}\right)\right];$$

$$L_{\text{ПОY}}=\frac{k_y r_C}{r_S}\left(\sin\theta_L\cos\left(\theta_S+\theta_L-\theta_C\right)+\sin\theta_R\cos\left(\theta_S+\theta_R-\theta_C\right)-2\sin\theta_C\cos\theta_S\right);$$

$$L_{\text{ПSY}}=\frac{k_y a}{r_S}\left(\sin\theta_L\cos\left(\theta_S+\theta_L\right)+\sin\theta_R\cos\left(\theta_S+\theta_R\right)\right),$$

где

$$k_i=-\frac{\pi b_i D}{\sqrt{\pi a}};\ r_C=\sqrt{x_\perp^2+y_\perp^2};\ r_R=\sqrt{(x_\perp-a)^2+y_\perp^2};$$

$$r_L=\sqrt{(x_\perp+a)^2+y_\perp^2};\ r_S=\sqrt{r_L r_R};$$

$$\theta_C=\arctan\left(\frac{y_\perp}{x_\perp}\right);\ \theta_R=\arctan\left(\frac{y_\perp}{x_\perp-a}\right);$$

$$\theta_L=\arctan\left(\frac{y_\perp}{x_\perp+a}\right);\ \theta_S=\frac{\theta_L+\theta_R}{2}.$$

Ниже приведены выражения для компонент плотности вектора Бюргерса виртуальных дислокаций для трещины в упругом поле напряжений дислокации. Здесь используются следующие дополнительные обозначения:

$$k_f=\frac{1}{\pi D\sqrt{\pi a}};\ \rho_C=\sqrt{a^2-x^2};\ k=\frac{\rho_C}{\pi r_L r_R};$$

$$\rho_L=\sqrt{(x_\perp+|x|)^2+y_\perp^2};\ \rho_R=\sqrt{(x_\perp-|x|)^2+y_\perp^2};$$

$$\varphi_L=\arctan\left(\frac{y_\perp}{x_\perp+|x|}\right);\ \varphi_R=\arctan\left(\frac{y_\perp}{x_\perp-|x|}\right);$$

$$c=\begin{cases}-1 & \text{для несимметричной конфигурации,}\\ +1 & \text{для симметричной конфигурации.}\end{cases}$$

Дислокация с параллельной составляющей вектора Бюргерса:

$$\begin{bmatrix}B_{x\text{LX}}\\ B_{y\text{LX}}\end{bmatrix}=\frac{k_f}{2\rho_C}\begin{bmatrix}L_{\text{ПОХ}}\cdot x+L_{\text{ПSX}}\cdot a\\ L_{\text{ISX}}\cdot x+L_{\text{ЮХ}}\cdot a\end{bmatrix};$$

$$B_{x\text{NLX}}=kb_x\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\rho_R}\cos\left(\varphi_R+\theta_S\right)+\dfrac{c}{\rho_L}\cos\left(\varphi_R+\theta_S\right)-\\-\sin\varphi_R\left\{\dfrac{1}{\rho_R}\sin\left(2\varphi_R+\theta_S\right)+\dfrac{r_C}{r_L r_R}\sin\left(\varphi_R-\theta_C+3\theta_S\right)\right\}-\\-c\sin\varphi_L\left\{\dfrac{1}{\rho_L}\sin\left(2\varphi_L+\theta_S\right)+\dfrac{r_C}{r_L r_R}\sin\left(\varphi_L-\theta_C+3\theta_S\right)\right\}\end{array}\right];$$

$$B_{y\text{NLX}}=kb_x\left[\begin{array}{l}\sin\varphi_R\left\{\dfrac{1}{\rho_R}\cos\left(2\varphi_R+\theta_S\right)+\dfrac{r_C}{r_L r_R}\cos\left(\varphi_R-\theta_C+3\theta_S\right)\right\}+\\+c\sin\varphi_L\left\{\dfrac{1}{\rho_L}\cos\left(2\varphi_L+\theta_S\right)+\dfrac{r_C}{r_L r_R}\cos\left(\varphi_L-\theta_C+3\theta_S\right)\right\}\end{array}\right].$$

Дислокация с перпендикулярной составляющей вектора Бюргерса:

$$\begin{bmatrix} B_{x\mathrm{LY}} \\ B_{y\mathrm{LY}} \end{bmatrix} = \frac{k_f}{2\rho_C} \begin{bmatrix} L_{\mathrm{IISY}} \cdot x + L_{\mathrm{IIOY}} \cdot a \\ L_{\mathrm{IOY}} \cdot x + L_{\mathrm{ISY}} \cdot a \end{bmatrix};$$

$$B_{x\mathrm{NLY}} = kb_y \begin{bmatrix} \sin\varphi_R \left\{ \frac{1}{\rho_R} \cos\left(2\varphi_R + \theta_S\right) + \frac{r_C}{r_L r_R} \cos\left(\varphi_R - \theta_C + 3\theta_S\right) \right\} + \\ + c \sin\varphi_L \left\{ \frac{1}{\rho_L} \cos\left(2\varphi_L + \theta_S\right) + \frac{r_C}{r_L r_R} \cos\left(\varphi_L - \theta_C + 3\theta_S\right) \right\} \end{bmatrix};$$

$$B_{y\mathrm{NLY}} = kb_y \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_R} \cos\left(\varphi_R + \theta_S\right) + \frac{c}{\rho_L} \cos\left(\varphi_L + \theta_S\right) + \\ + \sin\varphi_R \left\{ \frac{1}{\rho_R} \sin\left(2\varphi_R + \theta_S\right) + \frac{r_C}{r_L r_R} \sin\left(\varphi_L - \theta_C + 3\theta_S\right) \right\} + \\ + c \sin\varphi_L \left\{ \frac{1}{\rho_L} \sin\left(2\varphi_L + \theta_S\right) + \frac{r_C}{r_L r_R} \sin\left(\varphi_L - \theta_C + 3\theta_S\right) \right\} \end{bmatrix}.$$

Аналитические решения и метод переноса

Рассмотрим трещину, формирующуюся в упругом поле клиновой дисклинации. В отличие от дислокационных трещин, для которых существуют точные аналитические решения, в случае дисклинаций такие выражения, как правило, не могут быть получены из-за отличающейся асимптотики полей упругих напряжений $\sim \ln r$ (в то время как для дислокаций $\sim 1/r$). Тем не менее ниже представлен подход, позволяющий рассчитывать ключевые характеристики дисклинационных трещин без необходимости прямого вычисления сингулярных интегралов в смысле главного значения.

Описание метода переноса

Согласно работам [39; 42], поле упругих напряжений, создаваемое континуальной стенкой дислокаций, эквивалентно полю напряжений от диполя клиновых дисклинаций, расположенных на краях этой стенки:

$$\sigma^w(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \sigma^\Delta(\boldsymbol{\omega}_a, \mathbf{r}_a) + \sigma^\Delta(\boldsymbol{\omega}_b, \mathbf{r}_b),$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – плотность вектора Бюргерса континуальных дислокаций в стенке, $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$ – радиус-векторы концов стенки, $\boldsymbol{\omega}_a$ и $\boldsymbol{\omega}_b$ – мощности соответствующих дисклинаций, определяемые как:

$$\boldsymbol{\omega}_a = \frac{\boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}, \quad \boldsymbol{\omega}_b = \frac{\boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|}.$$

Из данного соответствия следует, что все физические характеристики, линейно зависящие от полей упругих напряжений, также допускают аналогичное разложение. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать представление вида

$$\sigma^\Delta(\boldsymbol{\omega}_b, \mathbf{r}_b) = \sigma^w(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) - \sigma^\Delta(\boldsymbol{\omega}_a, \mathbf{r}_a) = \\ = \sigma^w(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + \sigma^\Delta(-\boldsymbol{\omega}_a, \mathbf{r}_a).$$

Указанный подход позволяет эффективно решать сложные задачи. Например, для определения ключевых характеристик трещины, таких как плотность вектора Бюргерса, функция раскрытия ее берегов или коэффициенты интенсивности напряжений – которые все линейно связаны с полями напряжений, – можно применить метод суперпозиции (метод переноса). Решение для произвольной дисклинации в этом случае строится как сумма двух компонент:

1) известного аналитического решения для одиночной дисклинации;

2) решения для задачи о континуальной стенке краевых дислокаций, которая формируется в результате переноса исходной дисклинации (рис. 3).

Например, для плотности вектора Бюргерса трещины, находящейся в полях упругих напряжений произвольной дисклинации, имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}^\Delta(x) + \mathbf{B}^w(x), \tag{6}$$

где $\mathbf{B}(x)$ – искомая плотность виртуальных дислокаций, генерируемых дисклинацией, $\mathbf{B}^\Delta(x)$ – плотность виртуальных дислокаций, генерируемых дисклинацией, для которой известно аналитическое решение, $\mathbf{B}^w(x)$ – плотность виртуальных дислокаций, генерируемых дислокационной стенкой, получаемая путем интегрирования выражений, приведенных в параграфе «**Плотности вектора Бюргерса**».

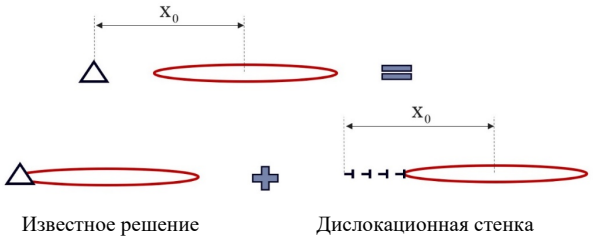


Рис. 3. Схематичное представление идеи метода переноса

Fig. 3. Schematic view of the idea of the transfer method

Аналогичным образом можно получить выражения для любых параметров трещины (коэффициентов интенсивности напряжений, функции раскрытия трещины, напряжения от трещины), линейных относительно напряжений.

Очевидно, что результаты интегрирования $\mathbf{B}^w(x)$ допускают простое аналитическое представление лишь в ограниченном числе симметричных случаев – например, когда дисклинация лежит на прямой, проходящей через вершины трещины. В общей постановке задачи интегрирование проводится численно. Однако важно подчеркнуть, что как в частных, так и в общих конфигурациях соответствующие интегралы не являются сингулярными, что существенно упрощает их численную реализацию и значительно повышает как точность, так и скорость вычислений по сравнению с задачами, содержащими интегралы в смысле главного значения. Для

применения метода «переноса» необходимо получить хотя бы одно решение для наиболее простой конфигурации трещины, находящейся в полях упругих напряжений от дисклинации. В качестве базовой конфигурации рассмотрим расположение дисклинации непосредственно в вершине трещины $x_0 = -a$. Используя выражения (1) – (5) и вычислив соответствующие интегралы, получим аналитические выражения для плотности вектора Бюргерса:

$$B_x = 0,\ B_y = \frac{\omega}{\pi}\left(\frac{x\left(1+\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right]\right)+a}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arccos\left[\frac{x}{a}\right] \right),$$

и коэффициентов интенсивности напряжений трещины:

$$(-a,0):\ K_{\text{I}} = D\omega\sqrt{\pi a}\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right],\ K_{\text{II}} = 0.$$

$$(+a,0):\ K_{\text{I}} = D\omega\sqrt{\pi a}\left(\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right]+2\right),\ K_{\text{II}} = 0.$$

Далее проанализируем наиболее важные случаи расположения дисклинации относительно трещины и получим аналитические выражения основных ее характеристик, воспользовавшись методом «переноса».

Дисклинация внутри трещины

Предположим, что дисклинация с координатами $(x_0,\ y_0)$ расположена внутри трещины, то есть в системе координат, связанной с трещиной, имеют место соотношения:

$$\begin{cases} -a \le x_0 \le a, \\ y_0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Такую трещину будем называть дисклинационной. Учитывая тот факт, что сдвиговые напряжения от дисклинации в плоскости трещины ($y = 0$) равны нулю, из интегральных выражений для этих величин получаем следующие выражения. Плотность вектора Бюргерса виртуальных дислокаций с учетом выражений (1)–(4) имеет компоненты:

$$B_x = 0,\ B_y = \frac{\omega}{\pi}\left(\frac{x\left(1+\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right]\right)-x_0}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arccos\left[\frac{x}{a}\right] + \pi\mathbf{I}\left(x<x_0\right) \right), \tag{8}$$

где $\mathbf{I}$ – индикаторная функция:

$$\mathbf{I}\left(x<x_0\right) = \begin{cases} 1,\ x<x_0, \\ 0,\ x>x_0. \end{cases}$$

Коэффициенты интенсивности напряжений:

$$\begin{gathered} (-a,0):\ K_{\text{I}} = D\omega\sqrt{\pi a}\left(\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right]+\frac{a+x_0}{a}\right),\ K_{\text{II}} = 0; \\ (+a,0):\ K_{\text{I}} = D\omega\sqrt{\pi a}\left(\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right]+\frac{a-x_0}{a}\right),\ K_{\text{II}} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Профиль дисклинационной трещины в данном случае определяется как интеграл от плотности вектора Бюргерса:

$$\begin{gathered} u_x\left(x\right) = 0,\ u_y\left(x\right) = \\ = \frac{\omega}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\left|x_0-x\right| + \left(x_0-x\right)\arcsin\left[\frac{x}{a}\right] + \sqrt{a^2-x^2}\ln\left[\frac{a}{2R_a}\right] \right). \end{gathered} \tag{10}$$

Важно отметить, что данные аналитические выражения для указанных характеристик (КИН, плотность вектора Бюргерса, функция раскрытия) работают только в том случае, когда дисклинация находится внутри трещины, что, в свою очередь, позволяет проводить моделирование зарождения и распространения дисклинационных трещин.

Дисклинация, расположенная на прямой, проходящей через вершины трещины

В данном параграфе прямую, проходящую через вершины трещины, будем называть осью симметрии трещины. Ниже приведены аналитические выражения для плотности виртуальных дислокаций $B(x)$ и коэффициента интенсивности напряжений K_{I} в вершине $(+a,\ 0)$, индуцированных дисклинацией, расположенной на данной оси:

$$B\left(x\right) = \frac{\omega}{\pi}\left(\begin{array}{l} \arcsin\left[\frac{x}{a}\right] - \text{sgn}\cdot\arctan\left[\frac{x_0 x - a^2}{r_X \cdot r_S}\right] \\ -\frac{x_0-\text{sgn}\cdot r_S}{r_X} - \frac{x}{r_X}\ln\left[\frac{2R_a\left(\left|x_0\right|-r_S\right)}{ea^2}\right] \end{array} \right), \tag{11}$$

$$K_I = D\omega\sqrt{\pi a}\left(\ln\left[\frac{r_S+\left|x_0\right|}{2R_a}\right]+\frac{\text{sgn}\cdot\left(r_S-r_R\right)}{a}\right),\ K_{\text{II}} = 0, \tag{12}$$

где

$$r_R = \sqrt{\left(x_0-a\right)^2+y_0^2};\ r_L = \sqrt{\left(x_0+a\right)^2+y_0^2};$$

$$r_S = \sqrt{r_L\cdot r_R};\ r_X = \sqrt{a^2-x^2};\ \text{sgn} = \text{sgn}\left(x_0\right).$$

Данные выражения могут быть полезны в случае переноса дисклинации не в саму трещину, а на определенное расстояние от нее, что в конечном счете улучшает точность расчета.

Дисклинация вблизи вершины трещины

Особый интерес представляет случай, когда дисклинация расположена вблизи вершины трещины. Для анализа этой конфигурации получим асимптотические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений, возникающих в окрестности вершины. Аналогичным образом можно получить и аналитические выражения для остальных параметров трещины.

Введем полярную систему координат (r, φ), центрированную в вершине трещины, как показано на рис. 4.

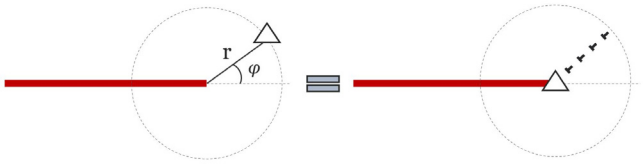


Рис. 4. Система координат, связанная с вершиной трещины

Fig. 4. Coordinate system associated with the crack tip

Для начала рассмотрим задачу о трещине, находящейся в поле упругих напряжений, создаваемых одиночной дислокацией с компонентами вектора Бюргерса (b_x, b_y). Производя асимптотические разложения выражений для КИН, получаем следующие формулы:

$$K_{\mathrm{I}}^{\perp} \approx D\left(b_y\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\sqrt{\frac{\pi}{2r}}f_{\mathrm{I}}(\varphi)\right),$$
$$K_{\mathrm{II}}^{\perp} \approx D\left(b_x\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\sqrt{\frac{\pi}{2r}}f_{\mathrm{II}}(\varphi)\right), \qquad (13)$$

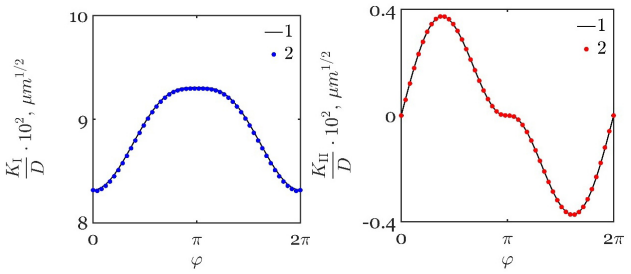
здесь (r, φ) – полярные координаты дислокации, $f_{\mathrm{I}}(\varphi)$, $f_{II}(\varphi)$ – угловые функции, определяемые как:

$$f_{\mathrm{I}}(\varphi)=\mathrm{sgn}(\varphi-\pi)\left[b_x\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\sin\varphi+2b_y\cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)(3-2\cos\varphi)\right],$$
$$f_{\mathrm{II}}(\varphi)=\mathrm{sgn}(\varphi-\pi)\left[b_y\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\sin\varphi-b_x\left(\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\sin\varphi-2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right].$$

Далее применим метод переноса таким образом, как показано на рис. 4. Интегрируя выражения для КИН от дислокационной стенки по r, получим асимптотические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в случае близкорасположенной дисклинации:

$$K_{\mathrm{I}}^{\Delta} \approx K_{\mathrm{I}}^{0}-D\left(\omega\cos\varphi\sqrt{\frac{\pi}{a}}r-\sqrt{2\pi r}f_{\mathrm{I}}(\varphi)\right),$$
$$K_{\mathrm{II}}^{\Delta} \approx K_{\mathrm{II}}^{0}+D\left(\omega\sin\varphi\sqrt{\frac{\pi}{a}}r+\sqrt{2\pi r}f_{\mathrm{II}}(\varphi)\right), \qquad (14)$$

где K_{I}^{0}, K_{II}^{0} – выражения коэффициентов интенсивности напряжений в случае, когда дисклинация находится в рассматриваемой вершине трещины, а в функции $f_{\mathrm{I}}(\varphi)$, $f_{II}(\varphi)$ подставлены значения $b_x=\omega\sin\varphi$ и $b_y=-\omega\cos\varphi$. На рис. 5 представлены результаты сравнения угловых зависимостей коэффициентов интенсивности напряжений K_{I}^{Δ} и K_{II}^{Δ} от трещины с расположенной вблизи ее вершины отрицательной клиновой дисклинации, полученных методом численного интегрирования и с помощью асимптотических приближений. Видно, что при достаточно близком расположении дисклинации наблюдается хорошее соответствие между результатами численных расчетов и аналитическими выражениями.



a *b*

Рис. 5. Зависимости $K_{\mathrm{I}}^{\Delta}(\varphi)$ (*a*) и $K_{\mathrm{II}}^{\Delta}(\varphi)$ (*b*) для клиновой дисклинации мощностью $\omega=-3\cdot10^{-2}$, расположенной на расстоянии $r=a/100$ от вершины трещины: *1* – аналитическое выражение, 2 – результаты численного расчета ($a=0{,}5$ мкм, $R_a=3$ мкм)

Fig. 5. Dependencies $K_{\mathrm{I}}^{\Delta}(\varphi)$ (*a*) and $K_{\mathrm{II}}^{\Delta}(\varphi)$ (*b*) for a wedge disclination with a strength of $\omega=-3\cdot10^{-2}$, located at a distance of $r=a/100$ from the crack tip: *1* – analytical expression, *2* – results of numerical calculation ($a=0.5$ μm, $R_a=3$ μm)

Следует отметить, что, в отличие от случая с дислокациями, где в выражениях для КИН при $r\to0$ наблюдается скачок второго рода, в случае дисклинации зависимость остается непрерывной. Этот факт имеет особое значение, например, для моделирования процессов затупления трещин, так как позволяет избежать сингулярного поведения полей при помощи замены дислокаций на эквивалентные дипольные дисклинационные конфигурации.

Анализ полей напряжений, генерируемых дисклинационной трещиной и ее взаимодействия с решеточными дислокациями

Рассмотрим детальнее дисклинационную трещину, акцентируя внимание на ее дислокационном представлении. С этой целью проведем ее сравнение с дислокационной трещиной. В случае дислокационной трещины исходная дислокация не сохраняется как локализованный дефект, а «размазывается» в виде непрерывного распределения виртуальных дислокаций вдоль трещины (рис. 6). Этот процесс можно проиллюстрировать сле-

дующим образом: предположим, что дислокация постепенно приближается к вершине трещины вдоль ее оси. Вблизи вершины формируется зона размером h, содержащая виртуальные дислокации противоположного знака. С уменьшением расстояния между дислокацией и вершиной трещины эта зона становится меньше, но плотность виртуальных дислокаций в ней увеличивается. В предельном случае, когда расстояние между дислокацией и вершиной стремится к нулю, плотность вектора Бюргерса приближается к дельта-функции, что приводит к образованию виртуальной дислокации противоположного знака в самой вершине трещины, которая аннигилирует с исходной дислокацией. Математически это означает, что исходная дислокация исчезает.

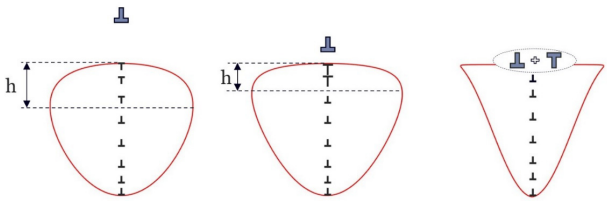


Рис. 6. Схематичное представление распределения плотности вектора Бюргерса вдоль трещины в зависимости от положения решеточной дислокации

Fig. 6. Schematic representation of the distribution of the Burgers vector density along a crack depending on the position of the lattice dislocation

В случае же дисклинационной трещины ситуация принципиально иная. Плотность виртуальных дислокаций частично экранирует поле напряжений, создаваемое исходной дисклинацией, но полного исчезновения здесь не происходит, и дисклинация сохраняется как независимый источник напряжений. В результате напряженное состояние дисклинационной трещины рассчитывается как суперпозиция двух компонент: поля напряжений, создаваемого самой дисклинацией, и поля, индуцированного распределением виртуальных дислокаций вдоль трещины. Для сравнения на рис. 7 представлена характерная картина распределения полей упругих напряжений от дислокационной трещины с суммарным вектором Бюргерса $\mathbf{b}_T = (10b, 0)$, где $b = 3 \cdot 10^{-4}$ мкм – вектор Бюргерса решеточной дислокации, и симметричной дисклинационной трещины с отрицательной дисклинацией мощностью $\omega = -3 \cdot 10^{-2}$, расположенной в точке $(0, 0)$. Данные распределения полей напряжений получены с использованием выражения:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \int_{-a}^{a} G_{ij}(x, y - y') B(y') dy' + \sigma_{ij}^{\Delta},$$

где $G_{ij}(x, y - y')$ – функция напряжений от дислокации с вектором Бюргерса $(B(y')dy', 0)$, находящейся в точке $(0, y')$ [1]. Длины трещин в обоих случаях одинаковы – $2a = 0,2$ мкм, радиус экранирования упругого поля дисклинации $R_a = 3$ мкм.

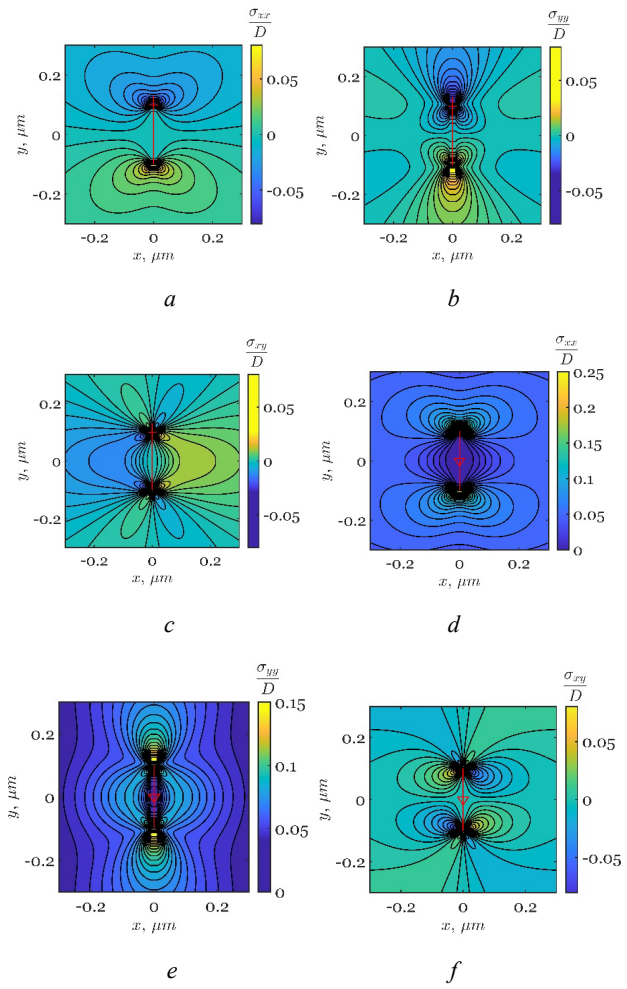


Рис. 7. Изолинии компонент тензора полей упругих напряжений от дислокационной (*a–c*) и симметричной дисклинационной (*d–f*) трещины: *a, d)* $\sigma_{xx}(x, y)$; *b, e)* $\sigma_{yy}(x, y)$; *c, f)* $\sigma_{xy}(x, y)$

Fig 7. The isoline components of the tensor of elastic stress fields from the dislocation (*a-c*) and symmetric disclination (*d-f*) cracks: *a, d)* $\sigma_{xx}(x, y)$; *b, e)* $\sigma_{yy}(x, y)$; *c, f)* $\sigma_{xy}(x, y)$

Анализ графиков показывает, что поля напряжений в окрестности дислокационной трещины обладают выраженной антисимметрией: вблизи самой дислокации преобладают сжимающие напряжения, тогда как в противоположной вершине трещины наблюдаются растягивающие напряжения. Такая конфигурация способствует одностороннему (направленному) распространению трещины. В противоположность этому, поля напряжений, возникающие вблизи дисклинационной трещины, имеют симметричный характер, что обусловливает возможность ее распространения в обе стороны.

Для широкого круга задач механики разрушения, рассматриваемых в рамках дислокационного подхода, особое значение имеет взаимодействие трещины с решеточными дислокациями. В связи с этим рассмотрим поведение тангенциальной компоненты силы Пича –

Келера F_x, действующей на решеточную дислокацию, расположенную в плоскости $y=0$, со стороны дисклинационной трещины длиной $2a=0{,}2$ мкм и вершинами, расположенными в точках $(0,\,0)$ и $(0,\,-2a)$, в зависимости от расстояния x между дислокацией и вершиной трещины. Зависимости $F_x(x)/b$ при различных положениях отрицательной дисклинации мощностью $\omega=-3\cdot10^{-2}$, а также форма поверхности силы взаимодействия $F_x(x)/b$ приведены на рис. 8.

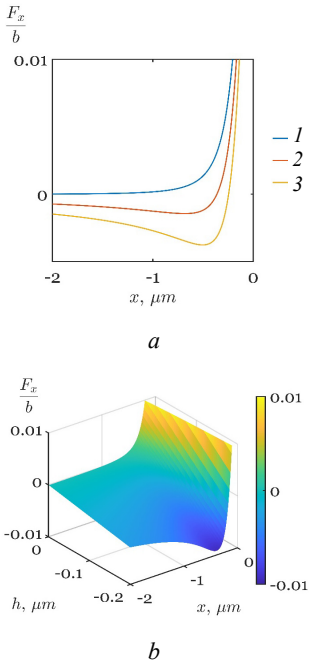


Рис. 8. Характерный вид зависимости $F_x(x)$ при различных значениях h: *a*) *1* – $h=0$, *2* – $h=-a/2$, *3* – $h=-a$; *b*) поверхность $F_x(x,h)/b$

Fig. 8. A characteristic type of dependence $F_x(x)$ at various values of h: *a*) *1* – $h=0$, *2* – $h=-a/2$, *3* – $h=-a$; *b*) the surface $F_x(x,h)/b$

Из приведенных графиков видно, что вблизи вершины трещины сила взаимодействия возрастает по закону $\sim 1/\sqrt{r}$, тогда как с увеличением расстояния от вершины она убывает и стремится к нулю. Для клиновой дисклинации, расположенной непосредственно в вершине трещины (кривая *1*), сила взаимодействия остается положительной при любых значениях x, что указывает на притяжение дислокации (см. рис. 8, *a*). Смещение дисклинации внутри трещины относительно ее вершины приводит к изменению характера взаимодействия: сила становится знакопеременной (см. рис. 8, *b*). На больших расстояниях компоненты силы стремятся к нулю с отрицательных значений, что соответствует отталкиванию дислокаций трещиной. При приближении к вершине (на расстояниях порядка $\sim 2a$) сила возрастает и стремится к бесконечности, демонстрируя ту же асимптотику, что и для кривой *1*. Чем дальше смещена дисклинация от вершины, тем более выраженным становится экстремум функции силы взаимодействия.

Заключение

1. Предложен математический подход для описания характеристик трещин, возникающих в полях напряжений, создаваемых клиновыми дисклинациями

2. Разработан метод расчета характеристик трещины при произвольном положении дисклинации, в котором исходная дисклинация заменяется на суперпозицию: 1) дисклинации с известным аналитическим решением, и 2) непрерывной стенки виртуальных дислокаций.

3. Получены точные аналитические выражения плотности вектора Бюргерса виртуальных дислокаций, коэффициентов интенсивности напряжений, функции раскрытия берегов для случая дисклинации, расположенной внутри и на оси трещины.

4. Получены асимптотические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в случае, когда дисклинация расположена вблизи вершины трещины.

5. Проведен сравнительный анализ характеристик дислокационных и дисклинационных трещин, выявивший принципиальные различия, а именно: при попадании в трещину дислокация «размазывается» в виде виртуальных дислокаций и исчезает как локализованный дефект. В свою очередь дисклинация сохраняется как независимый источник напряжений, лишь частично экранированный виртуальными дислокациями.

6. Проведен анализ полей упругих напряжений дисклинационной трещины и ее взаимодействия с решеточными дислокациями.

Библиографический список

1. Weertman, J. Dislocation based fracture mechanics / J. Weertman. – World Scientific, 1996. – 524 p.

2. Рыбин, В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов / В.В. Рыбин. – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.

3. Zisman, A.A. Basic configurations of interfacial and junction defects induced in a polycrystal by deformation of grains / A.A. Zisman, V.V. Rybin // Acta Mater. – 1996. – Vol. 44. – P. 403–407. DOI: 10.1016/1359-6454(95)00155-8

4. Romanov, A.E. Application of disclination concept to solid structures / A.E. Romanov, A.L. Kolesnikova // Progr. Mater. Sci. – 2009. – Vol. 54. – P. 740–769. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2009.03.002

5. Romanov, A.E. Elasticity boundary-value problems for straight wedge disclinations. A review on methods and results / A.E. Romanov, A.L. Kolesnikova // Rev. Adv. Mater. Tech. – 2021. – Vol. 3. – P. 55–95. DOI: 10.17586/2687-0568-2021-3-1-55-95

6. Gardner, R.N. Crack initiation at dislocation cell boundaries in the ductile fracture of metals / R.N. Gardner, T.C. Pollock, H.G.F. Wilsdorf // Mater. Sci. Eng. – 1977. – Vol. 29. – P. 169–174. DOI: 10.1016/0025-5416(77)90123-9

7. Gardner, R.N. Ductile fracture initiation in pure α-Fe: Part I. Macroscopic observations of the deformation history and failure of crystals / R.N. Gardner, H.G.F. Wilsdorf // Metall. Trans. A. – 1980. – Vol. 11. – P. 653–658. DOI: 10.1007/BF02670703

8. Gardner, R.N. Ductile fracture initiation in pure α-Fe: Part II. Microscopic observations of an initiation mechanism / R.N. Gardner, H.G.F. Wilsdorf // Metall. Trans. A. – 1980. – Vol. 11. – P. 659–669. DOI: 10.1007/BF02670704

9. Pollock, T.C. Beryllium fracture observed by in situ high voltage electron microscopy / T.C. Pollock, H.G.F. Wilsdorf // Mater. Sci. Eng. – 1983. – Vol. 61. – P. 7–15. DOI: 10.1016/0025-5416(83)90120-9

10. Wilsdorf, H.G.F. The role of glide and twinning in the final separation of ruptured gold crystals / H.G.F. Wilsdorf // Acta Metall. – 1982. – Vol. 30. – P. 1247–1258. DOI: 10.1016/0001-6160(82)90021-9

11. Wilsdorf, H.G.F. The ductile fracture of metals: a microstructural viewpoint / H.G.F. Wilsdorf // Mater. Sci. Eng. – 1983. – Vol. 59. – P. 1–39. DOI: 10.1016/0025-5416(83)90085-X

12. Void nucleation behavior of single-crystal high-purity iron specimens subjected to tensile deformation / O. Furukimi, C. Kiattisaksri, Y. Takeda [et al.] // Mater. Sci. Eng. – 2017. – Vol. 701. – P. 221–225. DOI: 10.1016/j.msea.2017.06.084

13. Lim, H. Crystallographic orientation dependent fracture behavior in tantalum single crystals / H. Lim, P.J. Noell, J.D. Carroll // Scr. Mater. – 2021. – Vol. 191. – P. 76–80. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2020.09.017

14. Do voids nucleate at grain boundaries during ductile rupture? / P.J. Noell, J.D. Carroll, K. Hattar [et al.] // Acta Mater. – 2017. – Vol. 137. – P. 103–114. DOI: 10.1016/j.actamat.2017.07.004

15. Noell, P.J. Suppression of Void Nucleation in High-Purity Aluminum via Dynamic Recrystallization / P.J. Noell, R.B. Sills, B.L. Boyce // Metall. Mater. Trans. A. – 2020. – Vol. 51. – P. 154–166. DOI: 10.1007/s11661-019-05457-w

16. Wciślik, W. Void-induced ductile fracture of metals: experimental observations / W. Wciślik, S. Lipiec // Materials. – 2022. – Vol. 15, no. 18. – P. 6473. DOI: 10.3390/ma15186473

17. Void nucleation during ductile rupture of metals: A review / P.J. Noell [et al.] // Progr. Mater. Sci. – 2023. – Vol. 135. – P. 101085. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2023.101085

18. Vasilev, E. Experimental characterization of voids and surrounding microstructures developed under tension of Mg, Mg–3Zn, and Ti: A statistical study / E. Vasilev, M. Knezevic // Mater. Sci. Eng. A. – 2023. – Vol. 862. – P. 144411. DOI: 10.1016/j.msea.2022.144411

19. Damage evolution and ductile fracture of commercially-pure titanium sheets subjected to simple tension and cyclic bending under tension / N. Pitkin [et al.] // J. Mater. Res. Tech. – 2024. – Vol. 32. – P. 124–139. DOI: 10.1016/j.jmrt.2024.07.149

20. Multiscale characterization of dislocation development during cyclic bending under tension in commercially pure titanium / N. Miller [et al.] // J. Mater. Res. Tech. – 2024. – Vol. 32. – P. 2513–2527. DOI: 10.1016/j.jmrt.2024.08.012

21. Evolution of damage in grade 2 and grade 4 titanium sheets during cyclic bending under tension and simple tension / N. Pitkin [et al.] // Mater. Char. – 2025. – Vol. 219. – P. 114624. DOI: 10.1016/j.matchar.2024.114624

22. Wu, M.S. Analysis of a crack in a disclinated cylinder / M.S. Wu, H. Zhou // Int. J. Fract. – 1996. – Vol. 82. – P. 381–399. DOI: 10.1007/BF00013240

23. Romanov, A.E. Disclinations in Crystals / A.E. Romanov, V.I. Vladimirov; F.R.N. Nabarro, editor. Dislocation in Solids. – Amsterdam: Elsevier; 1992. – P. 191–402.

24. Luo, J. Stress investigation on a Griffith crack initiated from an eccentric disclination in a cylinder / J. Luo, K. Zhou, Z.M. Xiao // Acta Mech. – 2009. – Vol. 202. – P. 65–77. DOI: 10.1007/s00707-008-0010-1

25. Luo, J. Stress analysis on a Zener crack nucleation from an eccentric wedge disclination in a cylinder / J. Luo, Z.M. Xiao, K. Zhou // Int. J. Eng. Sci. – 2009. – Vol. 47. – P. 811–820. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.05.006

26. Wu, M.S. Characteristics of a Zener crack wedged open by a disclination dipole / M.S. Wu // Solid State Phen. – 2002. – Vol. 87. – P. 277–300. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.87.277

27. Сарафанов, Г.Ф. Критерий зарождения микротрещины в упругом поле дисклинации, экранированном ансамблем дислокаций / Г.Ф. Сарафанов, В.Н. Перевезенцев // Письма в ЖТФ. – 2015. – Т. 41, № 19. – С. 105–110.

28. Сарафанов, Г.Ф. Условия возникновения стабильной микротрещины в упругом поле экранированной дисклинации / Г.Ф. Сарафанов, В.Н. Перевезенцев // Деформация и разрушение материалов. – 2016. – № 2. – С. 2–7.

29. Gutkin, M.Y. Disclinations, amorphization and microcrack generation at grain boundary junctions in polycrystalline solids / M.Y. Gutkin, I.A. Ovid'ko // Phil. Mag. A. – 1994. – Vol. 70. – P. 561–575. DOI: 10.1080/01418619408242248

30. Zhou, K. Continuum and atomistic studies of a disclinated crack in a bicrystalline nanowire / K. Zhou, A.A. Nazarov, M.S. Wu // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – P. 045410. DOI: 10.1103/PhysRevB.73.045410

31. Wu, M.S. Crack nucleation at disclinated triple junctions / M.S. Wu, K. Zhou, A.A. Nazarov // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 76. – P. 134105. DOI: 10.1103/PhysRevB.76.134105

32. Кириков, С.В. О влиянии внешнего напряжения на устойчивость трещины, расположенной вблизи диполя клиновых дисклинаций / С.В. Кириков, В.Н. Перевезенцев, А.С. Пупынин // ФММ. – 2021. – Т. 122, № 8. – С. 880–885. DOI: 10.31857/S0015323021070032.

33. Кириков, С.В. Анализ условий существования стабильных микротрещин в упругом поле напряжений от ротационно-сдвигового мезодефекта / С.В. Кириков, В.Н. Перевезенцев // Письма о материалах. – 2021. – Т. 11, № 1(41). – С. 50–54. DOI: 10.22226/2410-3535-2021-1-50-54

34. Кириков, С.В. О зарождении трещин вблизи источников напряжений со слабыми расходимостями / С.В. Кириков, В.Н. Перевезенцев, А.С. Пупынин // ФММ. – 2023. – Т. 124, № 8. – С. 763–770. DOI: 10.31857/S0015323023600193

35. Kirikov, S.V. Features of crack propagation in the elastic field of wedge disclination combined with edge superdislocation / S.V. Kirikov, V.N. Perevezentsev, A.S. Pupynin // Letters on Materials. – 2024. – Vol. 14, no. 4(56). – P. 394–398. DOI: 10.48612/letters/2024-4-394-398

36. Perevezentsev, V.N. The role of a shear planar mesodefect in the nucleation of a crack at a grain junction due to athermal grain boundary sliding / V.N. Perevezentsev, S.V. Kirikov, Ju.V. Svirina // Letters on Materials. – 2021. – Vol. 11, no. 4(44). – P. 467–472. DOI: 10.22226/2410-3535-2021-4-467-472

37. Кириков С.В., Перевезенцев В.Н., Пупынин А.С., Влияние стыковых дисклинаций на зарождение трещины при наведенном зернограничном проскальзывании // Деформация и разрушение материалов. – 2023. – № 2. – С. 2–11. DOI: 10.31044/1814-4632-2023-2-2-11

38. Kachanov, M.L. Handbook of elasticity solutions / M.L. Kachanov, B. Shafiro, I. Tsukrov. – Springer Science & Business Media, 2003. DOI: 10.1007/978-94-017-0169-3

39. Лихачев, В.А. Введение в теорию дисклинаций / В.А. Лихачев, Р.Ю. Хайров. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – 183 с.

40. Wu, M.S. A revisit of the elastic fields of straight disclinations with new solutions for a rigid core / M.S. Wu // Acta Mech. – 2019. – Vol. 230. – P. 2505–2520. DOI: 10.1007/s00707-019-02411-0

41. Wu, M.S. Elastic fields of a wedge disclination in a functionally graded cylinder / M.S. Wu // Mech. Mater. – 2021. – Vol. 157. – P. 103835. DOI: 10.1016/j.mechmat.2021.103835

42. Kobayashi, S. Revisiting Volterra defects: geometrical relation between edge dislocations and wedge disclinations / S. Kobayashi, K. Takemasa, R. Tarumi // R. Soc. Open Sci. – 2025. – Vol. 12, no. 7. – P. 242213. DOI: 10.1098/rsos.242213

References

1. Weertman J. Dislocation based fracture mechanics. – World Scientific, 1996. – 524 p.

2. Rybin V.V. Bol'shie plasticheskie deformacii i razrushenie metallov [Large plastic deformations and fracture of metals]. – M.: Metallurgiya, 1986. – 224 s.

3. Zisman A. A., Rybin V. V. Basic configurations of interfacial and junction defects induced in a polycrystal by deformation of grains // Acta Mater. – 1996. – V. 44. – pp. 403-407. doi: 10.1016/1359-6454(95)00155-8

4. Romanov A.E., Kolesnikova A.L. Application of disclination concept to solid structures // Progr. Mater. Sci. – 2009. – V. 54. – pp. 740-769. doi: 10.1016/j.pmatsci.2009.03.002

5. Romanov A.E., Kolesnikova A. L. Elasticity boundary-value problems for straight wedge disclinations. A review on methods and results // Rev. Adv. Mater. Tech. – 2021. – V. 3. – pp. 55-95. doi: 10.17586/2687-0568-2021-3-1-55-95

6. Gardner R. N., Pollock T. C., Wilsdorf H. G. F. Crack initiation at dislocation cell boundaries in the ductile fracture of metals // Mater. Sci. Eng. – 1977. – V. 29. – pp. 169-174. doi: 10.1016/0025-5416(77)90123-9

7. Gardner R. N., Wilsdorf H. G. F. Ductile fracture initiation in pure α-Fe: Part I. Macroscopic observations of the deformation history and failure of crystals // Metall. Trans. A. – 1980. – V. 11. – pp. 653-658. doi: 10.1007/BF02670703

8. Gardner R. N., Wilsdorf H. G. F. Ductile fracture initiation in pure α-Fe: Part II. Microscopic observations of an initiation mechanism // Metall. Trans. A. – 1980. – V. 11. – pp. 659-669. doi: 10.1007/BF02670704

9. Pollock T. C., Wilsdorf H. G. F. Beryllium fracture observed by in situ high voltage electron microscopy // Mater. Sci. Eng. – 1983. – V. 61. – pp. 7-15. doi: 10.1016/0025-5416(83)90120-9

10. Wilsdorf H. G. F. The role of glide and twinning in the final separation of ruptured gold crystals // Acta Metall. – 1982. – V. 30. – pp. 1247–1258. doi: 10.1016/0001-6160(82)90021-9

11. Wilsdorf H.G. F. The ductile fracture of metals: a microstructural viewpoint // Mater. Sci. Eng. – 1983. – V. 59. – pp. 1-39. doi: 10.1016/0025-5416(83)90085-X

12. Furukimi O., Kiattisaksri C., Takeda Y. et al. Void nucleation behavior of single-crystal high-purity iron specimens subjected to tensile deformation // Mater. Sci. Eng. – 2017. – V. 701. – pp. 221-225. doi: 10.1016/j.msea.2017.06.084

13. Lim H., Noell P. J., Carroll J. D. Crystallographic orientation dependent fracture behavior in tantalum single crystals // Scr. Mater. – 2021. – V. 191. – pp. 76-80. doi: 10.1016/j.scriptamat.2020.09.017

14. Noell P. J., Carroll J. D., Hattar K. et al. Do voids nucleate at grain boundaries during ductile rupture? // Acta Mater. – 2017. – V. 137. – pp. 103-114. doi: 10.1016/j.actamat.2017.07.004

15. Noell P. J., Sills R. B., Boyce B. L. Suppression of Void Nucleation in High-Purity Aluminum via Dynamic Recrystallization // Metall. Mater. Trans. A. – 2020. – V. 51. – pp. 154-166. doi: 10.1007/s11661-019-05457-w

16. Wciślik W., Lipiec S. Void-induced ductile fracture of metals: experimental observations // Materials. – 2022. – V. 15. – №. 18. – p. 6473. doi: 10.3390/ma15186473

17. Noell P. J. et al. Void nucleation during ductile rupture of metals: A review // Progr. Mater. Sci. – 2023. – V. 135. – p. 101085. doi: 10.1016/j.pmatsci.2023.101085

18. Vasilev E., Knezevic M. Experimental characterization of voids and surrounding microstructures developed under tension of Mg, Mg–3Zn, and Ti: A statistical study // Mater. Sci. Eng. A. – 2023. – V. 862. – p. 144411. doi: 10.1016/j.msea.2022.144411

19. Pitkin N. et al. Damage evolution and ductile fracture of commercially-pure titanium sheets subjected to simple tension and cyclic bending under tension // J. Mater. Res. Tech. – 2024. – V. 32. – pp. 124-139. doi: 10.1016/j.jmrt.2024.07.149

20. Miller N. et al. Multiscale characterization of dislocation development during cyclic bending under tension in commercially pure titanium // J. Mater. Res. Tech. – 2024. – V. 32. – pp. 2513-2527. doi: 10.1016/j.jmrt.2024.08.012

21. Pitkin N. et al. Evolution of damage in grade 2 and grade 4 titanium sheets during cyclic bending under tension and simple tension // Mater. Char. – 2025. – V. 219. – p. 114624. doi: 10.1016/j.matchar.2024.114624

22. Wu M. S., Zhou H. Analysis of a crack in a disclinated cylinder // Int. J. Fract. – 1996. – V. 82. – pp. 381-399. doi: 10.1007/BF00013240

23. Romanov A. E., Vladimirov V. I. Disclinations in Crystals. In: F. R. N. Nabarro, editor. Dislocation in Solids. – Amsterdam: Elsevier; 1992. – pp. 191-402.

24. Luo J., Zhou K., Xiao Z. M. Stress investigation on a Griffith crack initiated from an eccentric disclination in a cylinder // Acta Mech. – 2009. –V. 202. – pp. 65-77. doi: 10.1007/s00707-008-0010-1

25. Luo J., Xiao Z. M., Zhou K. Stress analysis on a Zener crack nucleation from an eccentric wedge disclination in a cylinder // Int. J. Eng. Sci. – 2009. – V. 47. – pp. 811-820. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.05.006

26. Wu M. S. Characteristics of a Zener crack wedged open by a disclination dipole // Solid State Phen. – 2002. – V. 87. – pp. 277-300. doi: 10.4028/www.scientific.net/SSP.87.277

27. Sarafanov G.F., Perevezentsev V.N. A criterion of nucleation of a microcrack in an elastic disclination field screened by an ensemble of dislocations. // Tech. Phys. Lett. – 2015**.** – V. 41. – pp. 968-970. doi: 10.1134/S1063785015100144

28. Sarafanov G. F., Perevezentsev V. N. Conditions for the appearance of a stable microcrack in the elastic field of a screened disclination // Russian Metallurgy (Metally). – 2016. – Vol. 2016, No. 10. – P. 889-894.doi: 10.1134/S0036029516100189

29. Gutkin M. Y., Ovid'ko I. A. Disclinations, amorphization and microcrack generation at grain boundary junctions in polycrystalline solids // Phil. Mag. A. – 1994. – V. 70. – pp. 561-575. doi: 10.1080/01418619408242248

30. Zhou K., Nazarov A. A., Wu M. S. Continuum and atomistic studies of a disclinated crack in a bicrystalline nan-

owire // Phys. Rev. B. – 2006. – V. 73. – p. 045410. doi: 10.1103/PhysRevB.73.045410

31. Wu M. S., Zhou K., Nazarov A. A. Crack nucleation at disclinated triple junctions // Phys. Rev. B. – 2007. – V. 76. – p. 134105. doi: 10.1103/PhysRevB.76.134105

32. Kirikov S. V., Perevezentsev V. N., Pupynin A. S. On the Effect of External Stress on the Stability of a Crack Located near a Wedge Disclination Dipole // Phys. Metals and Metall. – 2021. – Vol. 122, No. 8. – pp. 820-824. doi: DOI 10.1134/S0031918X21070036

33. Kirikov S.V., Perevezentsev V.N. Analysis of the conditions for the existence of stable microcracks in an elastic stress field from a rotational-shear mesodefect // Lett. Mater. – 2021. – V. 11(1). – pp. 50-54. doi:10.22226/2410-3535-2021-1-50-54

34. Kirikov S. V., Perevezentsev V. N., Pupynin A. S. On Crack Initiation Near Stress Sources with Weak Divergences // Phys. Metals and Metall. – 2023. – V. 124. – №. 8. – pp. 831-838. doi: 10.1134/S0031918X23601257

35. Kirikov S. V., Perevezentsev V. N., Pupynin A. S. Features of crack propagation in the elastic field of wedge disclination combined with edge superdislocation // Letters on Materials. – 2024. – Vol. 14, No. 4(56). – P. 394-398. doi: 10.48612/letters/2024-4-394-398

36. Perevezentsev V. N., Kirikov S. V., Svirina Ju. V. The role of a shear planar mesodefect in the nucleation of a crack at a grain junction due to athermal grain boundary sliding // Letters on Materials. – 2021. – Vol. 11, No. 4(44). – pp. 467-472. doi: 10.22226/2410-3535-2021-4-467-472

37. Kirikov S. V., Perevezentsev V. N., Pupynin A. S. Effect of Junction Disclinations on the Crack Initiation during Induced Grain-Boundary Sliding // Russian Metallurgy (Metally). – 2023. – V. 2023. – №. 4. – pp. 375-382. doi: 10.1134/S0036029523040110

38. Kachanov M. L., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of elasticity solutions. – Springer Science & Business Media, 2003. doi: 10.1007/978-94-017-0169-3

39. Likhachev V. A., Khajrov R. Yu. Vvedenie v teoriyu disklinacij [Introduction to the theory of disclination]. – L.: Izd-vo LGU, 1975. – 183 s.

40. Wu M. S. A revisit of the elastic fields of straight disclinations with new solutions for a rigid core // Acta Mech. – 2019. – V. 230. – pp. 2505-2520. doi: 10.1007/s00707-019-02411-0

41. Wu M. S. Elastic fields of a wedge disclination in a functionally graded cylinder // Mech. Mater. – 2021. – V. 157. – pp. 103835. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103835

42. Kobayashi S., Takemasa K., Tarumi R. Revisiting Volterra defects: geometrical relation between edge dislocations and wedge disclinations // R. Soc. Open Sci. – 2025. – V. 12. – №. 7. – P. 242213. doi: 10.1098/rsos.242213

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF -2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out within the state assignment to IAP RAS for fundamental scientific research for 2024–2026 (topic FFUF-2024-0031, No 1023032800130-3-2.3.2).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The authors' contributions are equal.