Клементьев, П.Д. Мезоуровневый подход для вычисления диаграммы напряжение – деформация пористых материалов / П.Д. Клементьев, С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.03 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 5. – С. 30–41.

Perm Polytech Style: Klement'ev P.D., Sheshenin S.V., Artamonova N.B. Mesolevel approach to calculating the stress-strain diagram of porous materials. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 5, pp. 30-41. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.03
УДК 531.01

МЕЗОУРОВНЕВЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИАГРАММЫ НАПРЯЖЕНИЕ – ДЕФОРМАЦИЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

П.Д. Клементьев, С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 01 июля 2025 г.
Одобрена: 15 ноября 2025 г.
Принята к публикации:
20 ноября 2025 г.

Ключевые слова:

пористый материал, угловатые поры, классическая теория течения, представительная область, двухуровневый подход, мезоуровень, осреднение, теория Друкера – Прагера.

АННОТАЦИЯ

Свойство единой кривой зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций не выполняется для многих геоматериалов, содержащих поры и другие дефекты сплошности структуры, что приводит к зависимости упомянутой диаграммы для этих материалов от вида напряженного состояния и пути деформирования. В работе используется вычислительный способ нахождения зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций (или эквивалентного по Мизесу напряжения от эквивалентной деформации, которые отличаются от интенсивностей коэффициентами). Двухмасштабный подход заключается в явном учете структуры материала на мезоуровне и включает решение задач макрооднородного деформирования представительной области, последующее осреднение напряжений и деформаций и получение эффективных свойств на макроуровне.

В работе с помощью такого подхода проводятся вычисления диаграммы «эквивалентное напряжение – эквивалентная деформация» для модельных пористых материалов в рамках малых деформаций. Матрица материала подчиняется классической теории течения с изотропным упрочнением. В результате показана зависимость диаграммы от пути деформирования и вида напряженного состояния. Вид напряженного или деформированного состояния определяется первыми двумя инвариантами. Для исследования используется структура материала с эллипсоидальными и угловатыми порами.

Оценена погрешность, с которой осредненную кривую зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации можно считать единой для пористых материалов с пористостью до 20 %. Показано, что погрешность мала для эллипсоидальных пор и значительна для угловатых пор.

Результаты моделирования на мезоуровне применены для вычисления параметров поверхности текучести Друкера – Прагера на макроуровне. Осредненные диаграммы «эквивалентное напряжение – эквивалентная деформация», полученные с использованием найденных материальных параметров поверхности текучести Друкера – Прагера, с хорошей точностью совпали с соответствующими диаграммами, полученными в расчетах на мезоуровне.

© **Клементьев Петр Дмитриевич** – аспирант кафедры теории пластичности механико-математического факультета, e-mail: piter1997@gmail.com, iD: 0000-0003-1238-4833
Шешенин Сергей Владимирович – д. ф.-м. н., проф., проф. кафедры теории пластичности механико-математического факультета, e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru, iD: 0000-0001-8468-104X.
Артамонова Нина Брониславовна – к. ф.-м. н., к. геол.-минерал. н., с. н. с. кафедры инженерной и экологической геологии геологического факультета, e-mail: artamonovanb@mail.ru, iD: 0000-0003-0886-3460

Peter D. Klement'ev – post-graduate student, Department of Plasticity Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, e-mail: piter1997@gmail.com, iD: 0000-0003-1238-4833
Sergey V. Sheshenin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Plasticity Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru, iD: 0000-0001-8468-104X
Nina B. Artamonova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, CSc in Geological and Mineralogical Sciences, Senior Researcher, Department of Engineering and Ecological Geology, Faculty of Geology, e-mail: artamonovanb@mail.ru, iD: 0000-0003-0886-3460

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MESOLEVEL APPROACH TO CALCULATING THE STRESS-STRAIN DIAGRAM OF POROUS MATERIALS

P.D. Klement'ev, S.V. Sheshenin, N.B. Artamonova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 July 2025
Approved: 15 November 2025
Accepted for publication:
20 November 2025

Keywords:

porous material, angular pores, classical flow theory, representative volume element, two-level approach, mesolevel, averaging, Drucker-Prager theory.

ABSTRACT

The property of a single curve of the dependence of stress intensity on deformation intensity is not fulfilled for many geomaterials containing pores and other defects in the structure continuity, which leads to the dependence of the mentioned diagram for these materials on the stress state type and the deformation path. The work uses a computational method for finding the dependence of stress intensity on deformation intensity (or the von Mises equivalent stress on the equivalent deformation, which differ from the intensities by coefficients). The two-scale approach explicitly takes into account the structure of the material at the mesolevel and includes solving problems of macro-homogeneous deformation of a representative volume element (RVE), subsequent averaging of stresses and strains and obtaining effective properties at the macrolevel.

In the work, using this approach, the equivalent stress – equivalent strain diagram is calculated for model porous materials within small strains. The material matrix obeys the classical flow theory with isotropic hardening. As a result, the dependence of the diagram on the deformation path and the type of stress state is shown. The type of stress or strain state is determined by the first two invariants. The structure of the material with ellipsoidal and angular pores is used for the study.

The error with which the averaged curve of the dependence of equivalent stress on equivalent deformation can be considered uniform for porous materials with a porosity of up to 20 percent is estimated. It is shown that the error is small for ellipsoidal pores and significant for angular pores.

The results of mesoscale modeling are used to calculate the Drucker – Prager yield surface parameters at the macroscale. The averaged equivalent stress – equivalent strain diagrams obtained using the found material parameters of the Drucker – Prager yield surface coincided with good accuracy with the corresponding diagrams obtained in calculations at the mesolevel.

Введение

В работе рассматривается вопрос существования единой кривой, связывающей интенсивности напряжений и деформаций (или эквивалентное по Мизесу напряжение и эквивалентную деформацию). Для ряда материалов, например геоматериалов, гипотеза классических теорий пластичности о существовании единой кривой, связывающей интенсивности напряжений и деформаций, оказывается неверной или неточной. Так, гипотеза о единой кривой деформирования не выполняется для материалов, содержащих поры и включения, например для песков, пористых скальных грунтов и других геоматериалов [1–3], для которых наблюдается зависимость от первого инварианта тензора напряжений или деформаций. В работе [1] рассматриваются потенциальные определяющие соотношения, описывающие поведение материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния, определяемого отношением первых двух инвариантов. Демонстрируются экспериментальные кривые зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, различающиеся в случае различных путей деформирования для таких материалов, как белый мрамор, известняк и другие. Экспериментальные данные используются для идентификации параметров определяющих соотношений.

Для ряда композиционных материалов существует зависимость напряженно-деформированного состояния (НДС) от истории деформирования. Например, в работе [4] рассматривается влияние пропорциональных и непропорциональных путей деформирования на механические характеристики материала Ti-6Al-4V. Исследование показало, что непропорциональное нагружение может вызывать дополнительные эффекты упрочнения в образцах. Другим неклассическим свойством дисперсных композитов с металлической матрицей является зависимость пластических свойств материалов от величины среднего гидростатического напряжения [5; 6]. В работе [7] демонстрируется, что для композитного материала Al_2O_3/Al при величине среднего гидростатического напряжения 200 МПа диаграмма напряжение – деформация проходит выше аналогичной диаграммы, полученной при отсутствии среднего гидростатического напряжения.

В нашей работе для определения свойств на макроуровне используется модель материала на мезоуровне. Идея заключается в том, чтобы спрогнозировать эффективные свойства неоднородного пористого материала, численно решая задачи на мезоуровне. Предполагается, что известны свойства матрицы и структура исследуемого материала – геометрические характеристики пор. Данный подход применяется для исследования эффективных упругих свойств пористых и композитных материалов [8; 9]. В работе [10] проводится вычисление эффективных диаграмм напряжение – деформация волокнистого композитного материала в предположении пластических свойств матрицы. Результаты вычислений совпадают с экспериментальными данными с хорошей точностью.

В нашем исследовании предполагается, что матрица материала подчиняется классической теории пластич-

ности. Рассматривается модельный пористый материал с угловатыми и эллипсоидальными порами. Также рассматривается композитный материал, полученный заполнением угловатых и эллипсоидальных пор упругим материалом.

Одним из методов построения моделей материала является метод послойного томографического сканирования с последующим объединением в специализированном программном обеспечении (ПО). В работах [11–14] приведены соответствующие вычисления на мезоуровне.

Другим методом является метод компьютерного моделирования. На основе модельных структур могут определяться эффективные упругие свойства материала [15]. В [16] для построения нелинейных определяющих соотношений на макроуровне используется искусственная структура с эллипсоидальными порами. В [17] для построения искусственных структур асфальтобетона и вычисления на их основе эффективных свойств материала используются данные рентгеновской томографии.

В нашей работе построены геометрические модели пористого материала с угловатыми и эллипсоидальными порами в представительном объеме. Угловатые поры моделировались в форме призм. Размеры угловатых пор приблизительно соответствуют размерам пор в форме эллипсоидов. Объемная концентрация пор в рассматриваемых задачах выбиралась приблизительно одинаковой и составляла около 10 %. Для численного решения задач применялся метод конечных элементов (МКЭ) с линейными трехмерными конечными элементами в форме гексаэдров и тетраэдров. Размер решаемых систем в среднем составлял около ста тысяч уравнений. Расчет на вдвое более мелкой сетке показал, что такое число степеней свободы достаточно для обеспечения достоверного анализа деформирования рассмотренных пористых структур с концентрацией пор до 10 %.

На основе численных экспериментов проведено сравнение эффективных диаграмм зависимости безразмерного эквивалентного напряжения от масштабированной эквивалентной деформации для различных путей деформирования. Показано, что гипотеза существования единой кривой может не выполняться для пористых материалов. Обнаружено различие диаграмм при разных путях деформирования и при изменении величины объемной деформации в пределах 30 %. В случае угловатых пор различие выражено более существенно. Для композитных материалов было замечено, что диаграммы слабо зависят от пути деформирования и величины объемной деформации. Максимальные различия в диаграммах не превышали 10 %.

Качественно схожий результат получен в работе [18], где показана зависимость свойств пористого материала (например, процесса роста пустот) от пути деформирования и среднего гидростатического напряжения. В [19] с использованием нейронных сетей предсказывались поля напряжений и деформаций в композитах. Продемонстрировано, что при фиксированной микроструктуре эффективные свойства материала остаются устойчивым при изменении пути деформирования. Другой подход к описанию определяющих соотношений осредненного композитного материала обсуждается в работе [20]. На основе результатов вычислений НДС в представительных областях при различных сложных траекториях деформирования при помощи нейронных сетей подбираются параметры определяющих соотношений на макроуровне.

В рамках нашего исследования были определены параметры поверхности текучести Друкера – Прагера на макроуровне на основе результатов мезоуровневого моделирования. Выполнены численные эксперименты с однородным материалом, для описания упругопластического поведения которого использовались вычисленные характеристики поверхности текучести Друкера – Прагера. Полученные кривые зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации продемонстрировали высокую степень согласования с аналогичными зависимостями, рассчитанными непосредственно на мезоуровне. Разница в рассматриваемых кривых не превышает 2 %.

Упругопластические свойства материала матрицы

В работе рассматривается модельный материал матрицы. Предполагается, что материал матрицы упругопластический, описывается классической теорией течения при малых деформациях. Учитывается изотропное упрочнение. Единая кривая зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для материала матрицы приведена на рис. 1.

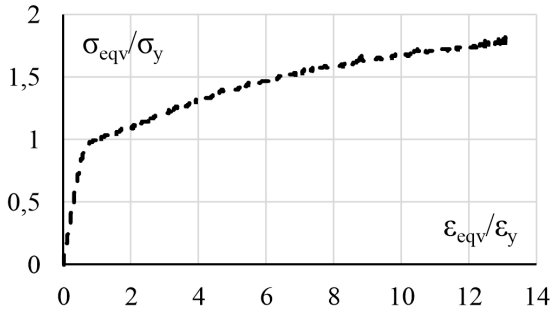


Рис. 1. Зависимость безразмерного эквивалентного напряжения от масштабированной эквивалентной деформации для материала матрицы

Fig. 1. Dependence of dimensionless equivalent stress on scaled equivalent strain for matrix material

Интенсивности напряжений и деформаций вычисляются по формулам $\sigma_{\text{и}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$, $\varepsilon_{\text{и}} = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ и отличаются коэффициентами от эквивалентных по Мизесу напряжений и деформаций: $\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_{\text{и}}$, $\varepsilon_{eqv} = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_{\text{и}}$. Безразмерные напряжения отнесены к пределу текучести по напряжениям в смысле эквивалентного напряже-

ния σ_{eqv}. Деформации отнесены к пределу текучести относительно ε_{eqv}. Упругие свойства матрицы задаются величиной безразмерного модуля сдвига, определяемой по диаграмме на рис. 1, и величиной коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Скорость деформации предполагается аддитивной и складывается из скоростей упругой деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ и пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$: $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$. Ассоциированный закон течения имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial f\left(\sigma_{ij},\chi\right)}{\partial \sigma_{ij}},$$

где $f\left(s_{ij},\chi\right)$ – уравнение поверхности текучести с изотропным упрочнением:

$$f\left(s_{ij},\chi\right) = s_{ij}s_{ij} - (k_0 + \chi(e_{ij}^{p})),$$

где k_0 – начальный предел текучести Мизеса, связанный с пределом текучести при одноосном растяжении σ_y: $k_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$, $\chi(e_{ij}^{p})$ – параметр расширения сферы поверхности текучести, e_{ij}^{p} – компоненты девиатора тензора пластических деформаций: $e_{ij}^{p} = \varepsilon_{ij}^{p}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$.

Моделирование представительного объема пористого материла

В этом разделе описана методика вычисления осредненных напряжений и деформаций в представительной области для случая пористого упругопластического материала. Для упругопластического материала напряжения и деформации зависят, вообще говоря, от пути деформирования. Рассмотрим двумерные пути деформирования в плоскости $\left(\varepsilon_{eqv},\theta\right)$. Пути деформирования задаются в виде комбинации простого сдвига и всестороннего сжатия:

$$\begin{cases} u_1 = \gamma_0(t)x_2, & \mathbf{x}\in\Sigma_{RVE}, \\ u_2 = u_3 = 0, & \mathbf{x}\in\Sigma_{RVE}, \end{cases} \quad u_i = \varepsilon_0(t)x_i, \ \mathbf{x}\in\Sigma_{RVE}, \ i = 1,2,3, \ (1)$$

где Σ_{RVE} – граница представительной области, t – параметр прослеживания пути деформирования. Граничные условия проиллюстрированы на рис. 2.

В работе рассматриваются пропорциональные и сложные пути деформирования. Пропорциональное деформирование заключается в одновременном приложении обоих граничных условий (1), когда $\gamma_0(t)/\varepsilon_0(t) = \text{const}$. Сложное деформирование моделируется поочередным приложением сдвига и объемного сжатия в разном порядке. Удобно представить рассматриваемые пути деформирования схематично на плоскости $\left(\gamma = 2\varepsilon_{12},\theta\right)$ (рис. 3).

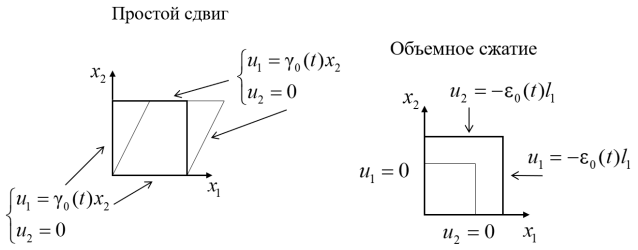


Рис. 2. Граничные условия на границе представительной области

Fig. 2. Boundary conditions at the boundary of the representative volume element (RVE)

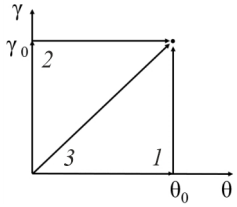


Рис. 3. Пути деформирования: *1*, *2* – сложное деформирование в виде комбинации сдвига и всестороннего сжатия, *3* – пропорциональное деформирование

Fig. 3. Deformation paths: *1*, *2* – complex deformation in the form of a combination of shear and all-around compression, *3* – proportional deformation

Рассмотрим подробнее пути деформирования, представленные на рис. 3. Путь *1* соответствует последовательному приложению объемной деформации до фиксированного уровня θ_0 и затем деформации сдвига до значения γ_0. Путь *2* отличается порядком приложения деформаций: сначала достигается сдвиговая деформация γ_0, потом объемная деформация θ_0. Путь *3* соответствует пропорциональному деформированию, при котором объемная деформация и деформация сдвига прикладываются одновременно. Задачи с граничными условиями (1) решались методом конечных элементов (МКЭ). Для анализа напряженно-деформированного состояния, рассчитанного в результате численного решения задач в процессе деформирования, были построены диаграммы зависимости осредненного эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации. Для сплошного материала вычисление средней величины по объему производится, как обычно, по следующей формуле:

$$\langle g\rangle = \frac{1}{V}\int_{V} g\left(\vec{x}\right) dV, \quad V \geq V_{RVE}\,. \qquad (2)$$

Здесь V_{RVE} – объем представительной области (RVE – representative volume element).

Однако в случае пористого материала осреднение, вообще говоря, не может осуществляться по формуле (2). Развитие методов вычисления эффективных свойств дисперсных неоднородных материалов через свойства компонентов началось с работ Хилла [21; 22] и Кренера [23].

Для сплошного материала в случае линейной упругости известны два варианта осреднения [22; 24–26]. Оба варианта обобщаются на случай квазистатической задачи для склерономного материала [25; 27]. Первый вариант заключается в решении краевой задачи в V_{RVE} при заданных на границе перемещениях в виде линейных функций координат (при задании макрооднородного поля деформаций):

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ u_i = \varepsilon_{ij}^0(t) x_j, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}. \end{cases} \tag{3}$$

Выражение $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ означает, что напряжения представлены через перемещения с помощью определяющего соотношения и формул Коши, в которых малые деформации выражаются через компоненты перемещений. Если определяющее соотношение задается в виде связи скоростей напряжений и деформаций, то уравнение равновесия формулируется относительно производной от напряжений по времени. Для задачи (3) известны два свойства:

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \varepsilon_{ij}^0 \tag{4}$$

и

$$\left\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right\rangle = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle. \tag{5}$$

Первое свойство (4) означает, что средняя деформация равна заданной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^0$. Второе свойство (5) выражает эквивалентность энергий неоднородного и гомогенизированного материала и является обоснованием осреднения материала на основе задачи (3): для макрооднородного состояния энергии совпадают. Поэтому получает смысл осредненное определяющее соотношение, которое для физически нелинейной среды записывается в виде [25]:

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = F_{ij}\left(\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle\right). \tag{6}$$

В (6) напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} вычисляются по перемещениям, которые являются решениями краевой задачи (3). Следует отметить, что, в отличие от случая линейной упругости, для физически нелинейного материала сложность гомогенизации состоит в выяснении вида функций F_{ij} в осредненном определяющем соотношении (6). В случае линейной теории упругости соотношения (6) и (4) приводят к конструктивному способу вычисления эффективных модулей жесткости. Действительно, задавая ненулевые компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$, получаем $C_{ij\alpha\beta} = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle / \varepsilon_{\alpha\beta}^0$.

Аналогично можно определить эффективные свойства податливости, если сформулировать краевую задачу:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \mathrm{n}_j = \sigma_{ij}^0(\mathbf{u})\, \mathrm{n}_j, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда эффективные функции податливости задаются выражением:

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = G_{ij}\left(\left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle\right).$$

Для задачи (7) выполняется равенство энергий (5) и

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \sigma_{ij}^0. \tag{8}$$

В случае линейной упругости эффективные податливости находятся как $S_{ij\alpha\beta} = \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle / \sigma_{\alpha\beta}^0$. Описанные методы получения эффективных свойств в [26] названы прямыми, хотя в силу выполнения равенства энергий (5) эти методы могут называться энергетическими. Известные методы вычисления эффективных упругих модулей или податливостей используют точное или приближенное решение задач (3) или (7).

В [12; 27; 28] описано применение задачи (3) для вычисления эффективных упругих модулей и тензорного параметра Био пористых геоматериалов – скальных грунтов.

Рассмотрим модификацию задачи (3) для пористой среды по сравнению со сплошным неоднородным материалом в виде

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ u_i = \varepsilon_{ij}^0(t) x_j, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \mathrm{n}_j = 0, \ \mathbf{x} \in \Sigma_p. \end{cases} \tag{9}$$

В задаче (9) представительная область состоит из области материала (скелета пористой среды) и пор: $V_{RVE} = V_s \cup V_p$, где V_s – объем скелета пористой среды, V_p – объем пор. Полная поверхность скелета включает поверхность представительной области и поверхности пор: $\Sigma_s = \Sigma_{RVE} \cup V_p$. Проверим выполнимость равенств (4), (5) для пористой среды. Для проверки условия (4) имеем цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} &\int_{V_s} u_{i,j}\, dV = \int_{\Sigma_s} u_i n_j\, dV = \int_{\Sigma_{RVE}} u_i n_j\, dV + \int_{\Sigma_p} u_i n_j\, dV = \\ &= \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k n_j\, dV + \int_{\Sigma_p} u_i n_j\, dV = \varepsilon_{ij}^0 V_{RVE} + \int_{\Sigma_p} u_i n_j\, dV, \\ &\int_{V_s} \varepsilon_{ij}\, dV = \varepsilon_{ij}^0 V_{RVE} - \Delta_{ij}, \end{aligned}$$

где $\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} \left(u_i n_j^p + u_j n_i^p \right) dV$, а $\mathbf{n}^p = -\mathbf{n}$, $\mathbf{n}^p$ – нормаль к границе пор, направленная в область твердой фазы. Следовательно, равенство (4), вообще говоря, не

выполняется. В отличие от сплошного материала, в пористой среде средние по представительной области деформации не равны заданным на границе деформациям ε_{ij}^0:

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \int\limits_{V_{RVE}} \varepsilon_{ij}\, dV = \varepsilon_{ij}^0 - \frac{\Delta_{ij}}{V_{RVE}}. \qquad (10)$$

Таким образом, показано, что если граничные условия (3) не удовлетворяются на части поверхности представительной области, то это приводит к замене равенства (4) формулой (10). Невыполнение равенств (4) было отмечено еще в работах [29; 30] при анализе жесткостей гофрированных пластин, лицевые поверхности которых свободны от нагрузки. Как отмечено в [31], ключевым условием для определения эффективных свойств является равенство энергий (5).

Проверим выполнение условия (5). Для этого запишем преобразования, используя уравнения равновесия из (3):

$$\int\limits_{V_s} \sigma_{ij} u_{i,j}\, dV = \int\limits_{\Sigma_{RVE}} \sigma_{ij} u_i n_j\, d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_p} \left(\sigma_{ij} n_j\right) u_i\, d\Sigma =$$
$$= \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} x_k \left(\sigma_{ij} n_j\right) d\Sigma = \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} x_k S_i^{(n)} d\Sigma,$$

где $\mathbf{S}^{(n)}$ – вектор поверхностных сил (реакций) на границе представительной области Σ_{RVE}, где заданы перемещения в виде (10). Следовательно,

$$\left\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} x_k S_i^{(n)} d\Sigma + \varepsilon_{jk}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} x_k S_j^{(n)} d\Sigma \right). \qquad (11)$$

Формула (11) может использоваться для вычисления средней энергии деформаций после решения задачи (9). Покажем явную связь этой энергии со средним напряжением.

$$\left\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right\rangle V_{RVE} = \int\limits_{V_s} \sigma_{ij} u_{i,j}\, dV = \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} x_k \left(\sigma_{ij} n_j\right) d\Sigma =$$
$$= \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} \left(\sigma_{ij} x_k\right) n_j\, d\Sigma + \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_p} x_k \left(\sigma_{ij} n_j\right) d\Sigma =$$
$$= \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{V_s} \left(\sigma_{ij} x_k\right)_{,j} dV = \varepsilon_{ik}^0 \int\limits_{V_s} \sigma_{ij} x_{k,j}\, dV = \varepsilon_{ij}^0 \int\limits_{V_s} \sigma_{ij}\, dV.$$

В итоге получаем равенство энергий в виде

$$\left\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right\rangle = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle \varepsilon_{ij}^0. \qquad (12)$$

Таким образом, для пористой среды за среднюю деформацию в представительной области следует принять $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, а равенство энергий понимать в виде соотношения (12). Тогда задача (9) и соотношения $\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = F_{ij}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0\right)$ могут служить для определения и вычисления эффективных нелинейных свойств пористого материала. Для линейно упругой среды эффективные упругие модули вычисляются по формуле $C_{ij\alpha\beta} = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle / \varepsilon_{\alpha\beta}^0$.

Обобщением задачи (3) на случай пористой среды служит краевая задача

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \mathrm{n}_j = \sigma_{ij}^0(\mathbf{u})\, \mathrm{n}_j, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})\, \mathrm{n}_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_p. \end{cases} \qquad (13)$$

Сначала выясним, чему равняется среднее напряжение, т.е. выполняется ли равенство (8). Для этого проведем следующие выкладки.

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle V_{RVE} = \int\limits_{V_s} \sigma_{ij}\, dV = \int\limits_{V_s} \sigma_{ik} \delta_{jk}\, dV =$$
$$= \int\limits_{V_s} \sigma_{ik} x_{j,k}\, dV = \int\limits_{\Sigma_s} \left(\sigma_{ik} n_k\right) x_j\, d\Sigma =$$
$$= \sigma_{ik}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} x_j n_k\, d\Sigma = \sigma_{ik}^0 \int\limits_{V_{RVE}} x_{j,k}\, dV = \sigma_{ij}^0 V_{RVE}.$$

Полученное равенство означает выполнение условия (8) для пористой среды. Проверим выполнение равенства энергий.

$$\left\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right\rangle V_{RVE} = \int\limits_{V_s} \sigma_{ij} u_{i,j}\, dV = \int\limits_{\Sigma_s} \sigma_{ij} u_i n_j\, d\Sigma =$$
$$= \sigma_{ij}^0 \int\limits_{\Sigma_{RVE}} u_i n_j\, d\Sigma = \sigma_{ij}^0 \int\limits_{\Sigma_s} u_i n_j\, d\Sigma + \sigma_{ij}^0 \int\limits_{\Sigma_p} u_i n_j^p\, d\Sigma =$$
$$= \sigma_{ij}^0 \int\limits_{V_s} u_{i,j}\, dV + \sigma_{ij}^0 \Delta_{ij} = \sigma_{ij}^0 \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle V_{RVE} + \sigma_{ij}^0 \Delta_{ij}.$$

Таким образом, для задачи (13) равенство энергий не выполняется, поэтому задача (13) не может использоваться для вычисления эффективных свойств пористой среды.

Далее приведем расчеты, которые подтверждают теоретические выводы. В этих расчетах напряжения отнесены к пределу текучести σ_y. Масштабированные деформации получены делением деформаций на предел текучести ε_y. При вычислении осредненных диаграмм $\left\langle \sigma_{eqv} \right\rangle \sim \varepsilon_{eqv}^0$ для путей деформирования, описанных выше, использовалась задача (9). При применении метода конечных элементов (МКЭ) интегрирование заменено на суммирование средних по элементу. Обозначим среднее напряжение и средние деформации в *i*-м элементе с объемом V_i как $\sigma_{\alpha\beta}^i$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^i$ соответственно. Тогда расчетные формулы осредненных напряжений и деформаций можно записать следующим образом:

$$\left\langle \sigma_{\alpha\beta} \right\rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\alpha\beta}^i V_i, \quad \left\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \right\rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{\alpha\beta}^i V_i.$$

На примере задачи одноосного растяжения опишем разницу между вычисленной средней деформацией $\left\langle \varepsilon_{11} \right\rangle$ и заданной деформацией ε_{11}^0. Поры были выбраны в форме правильного тетраэдра с объемной концентрацией $n = 0{,}15$ (рис. 4).

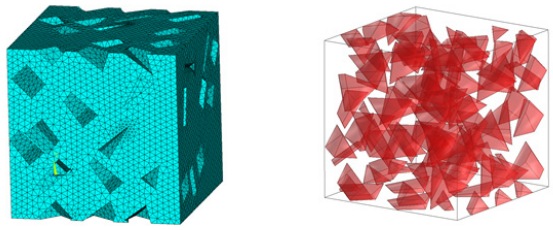


Рис. 4. Представительная область с угловатыми порами и изображением конечно-элементной сетки (слева) и угловатые поры в представительной области (справа)

Fig. 4. Representative volume element (RVE) with angular pores and finite element mesh image (left) and angular pores in the RVE (right)

Решалась задача линейной упругости типа (9) с граничными условиями на поверхности Σ_{RVE} :

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_{11}^0 x_1, \\ u_2 = u_3 = 0. \end{cases}$$

Вычислялись средние деформации в материале матрицы $\langle \varepsilon_{11} \rangle$, соответствующие деформации ε_{11}^0, и рассчитывалась относительная разница между заданной и средней деформацией:

$$\delta = \frac{\left| \langle \varepsilon_{11} \rangle - \varepsilon_{11}^0 \right|}{\varepsilon_{11}^0} \cdot 100\,\%.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1. Видно, что осредненная осевая деформация не совпадает с заданной деформацией.

Таблица 1

Сравнение осредненной деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ с ε_{11}^0 $(n = 0.15)$

Table 1

Comparison of averaged strain $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ with ε_{11}^0 $(n = 0.15)$

ε_{11}^0	$\langle \varepsilon_{11} \rangle$	δ, %
0,005	0,00419	16,23

Результаты расчетов для различных концентраций пор представлены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение осредненной деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ с ε_{11}^0 для различных концентраций пор n

Table 2

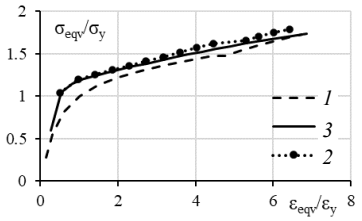
Comparison of averaged strain $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ with ε_{11}^0 for different pore concentrations n

n, %	ε_{11}^0	$\langle \varepsilon_{11} \rangle$	δ, %
5	0,010	0,00945	5,47
10		0,00894	10,61
15		0,00838	16,23

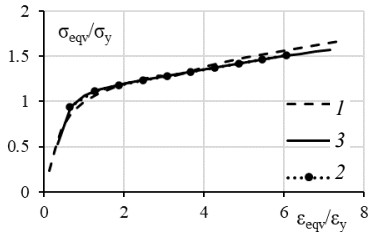
Как видно из табл. 2, в рассмотренном диапазоне концентраций пор относительная разница между заданной и осредненной деформацией приблизительно пропорциональна величине объемной концентрации пор.

Зависимость осредненных диаграмм пористого материала и дисперсного композита от пути деформирования и объемной деформации

На рис. 5 приведены вычисленные осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ для путей деформирования, показанных на рис. 3. Для угловатых пор заметна разница в диаграммах, полученных при сложном пути деформирования в порядке объемное сжатие – сдвиг, по сравнению с диаграммами при других путях деформирования. Для угловатых пор диаграмма, соответствующая первому пути деформирования, идет ниже остальных, предел текучести снижается. При этом диаграммы отличаются не только в момент перехода из упругой в пластичную зону, но и при дальнейшем деформировании. Разница диаграмм для структуры с угловатыми порами составляет 29 %, с эллипсоидальными порами – около 7 %. В последнем случае зависимостью от пути деформирования можно пренебречь.



a



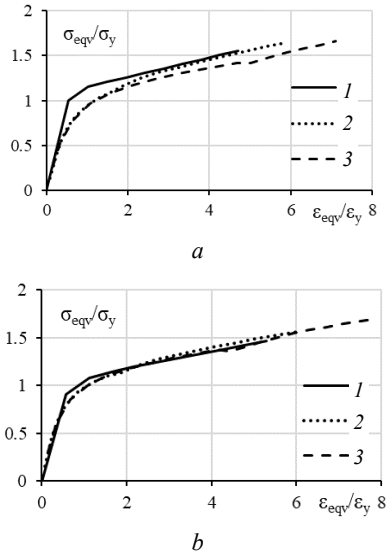
b

Рис. 5. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ пористого материала с угловатыми (*a*) и эллипсоидальными (*b*) порами для разных путей деформирования: *1* – последовательные объемное сжатие, сдвиг, *2* – последовательные сдвиг, объемное сжатие, *3* – пропорциональное деформирование

Fig. 5. Averaged diagrams $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ of a porous material with angular (*a*) and ellipsoidal (*b*) pores for different deformation paths: *1* – successive volumetric compression, shear, *2* – successive shear, volumetric compression, *3* – proportional deformation

Проведены серии расчетов, определяющие зависимость безразмерных диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ от величины объемного сжатия при сложном пути деформирования. Во

всех численных экспериментах применялось деформирование с последовательным приложением деформаций: сначала объемное сжатие, потом сдвиг. Рассматривались следующие величины объемной деформации, отнесенной к пределу текучести: $\theta_0/\varepsilon_y = 0$, $\theta_0/\varepsilon_y = 1{,}82$, $\theta_0/\varepsilon_y = 3{,}64$. На рис. 6 представлены результаты численных экспериментов для этих трех случаев.



a

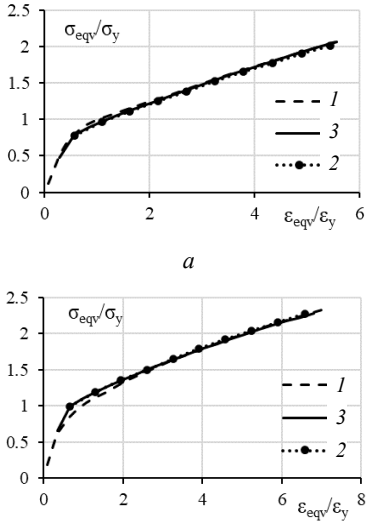
b

Рис. 6. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ пористого материала с угловатыми (*a*) и эллипсоидальными (*b*) порами: *1* – $\theta_0/\varepsilon_y = 0$; *2* – $\theta_0/\varepsilon_y = 1{,}82$; *3* – $\theta_0/\varepsilon_y = 3{,}64$

Fig. 6. Averaged diagrams $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ of a porous material with angular (*a*) and ellipsoidal (*b*) pores: *1* – $\theta_0/\varepsilon_y = 0$; *2* – $\theta_0/\varepsilon_y = 1.82$; *3* – $\theta_0/\varepsilon_y = 3.64$

Обнаружена следующая тенденция: с увеличением объемной деформации пластичность наступает при меньшем эквивалентном напряжении. Осредненные диаграммы для угловатой пористой структуры отличаются не только в момент перехода из упругой в пластическую область, но и при дальнейшем деформировании. Для величины $\theta_0/\varepsilon_y = 1{,}82$ диаграмма $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ в начале деформирования в пластической области совпадает с диаграммой для величины $\theta_0/\varepsilon_y = 3{,}64$, но по мере увеличения деформации приближается к диаграмме для величины $\theta_0/\varepsilon_y = 0$. Максимальная разница диаграмм для структуры с угловатыми порами составляет около 30 %, для эллипсоидальных пор – 8 %.

Аналогичные численные эксперименты проведены с материалами, у которых поры заполнены упругим материалом. Другими словами, рассмотрены дисперсные композитные материалы с угловатыми и эллипсоидальными включениями. Модуль упругости включений принимался на порядок больше модуля упругости матрицы. Осредненные диаграммы, вычисленные при деформировании по рассмотренным выше путям деформирования, приведены на рис. 7. Относительная разница в соответствующих диаграммах незначительна, особенно если сравнивать со случаем пористого материала.

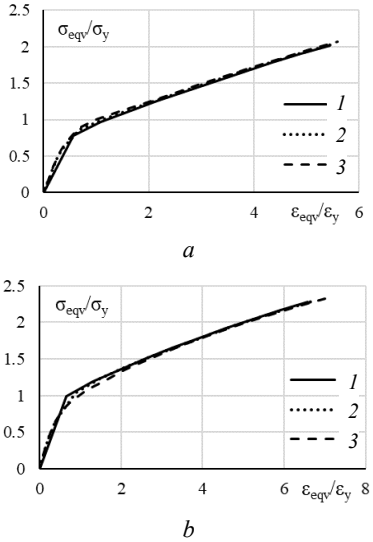


a

b

Рис. 7. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ дисперсного композита с угловатыми (*a*) и эллипсоидальными (*b*) включениями для разных путей деформирования: *1* – последовательные объемное сжатие, сдвиг; *2* – последовательные сдвиг, объемное сжатие; *3* – пропорциональное деформирование

Fig. 7. Averaged diagrams $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ of a dispersed composite with angular (*a*) and ellipsoidal (*b*) inclusions for different deformation paths: *1* – successive volumetric compression, shear; *2* – successive shear, volumetric compression; *3* – proportional deformation



a

b

Рис. 8. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ дисперсного композита с угловатыми (*a*) и эллипсоидальными (*b*) включениями: *1* – $\theta_0/\varepsilon_y = 0$; *2* – $\theta_0/\varepsilon_y = 1{,}82$; *3* – $\theta_0/\varepsilon_y = 3{,}64$

Fig. 8. Averaged diagrams $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ of a dispersed composite with angular (*a*) and ellipsoidal (*b*) inclusions: *1* – $\theta_0/\varepsilon_y = 0$; *2* – $\theta_0/\varepsilon_y = 1.82$; *3* – $\theta_0/\varepsilon_y = 3.64$

Результаты серии расчетов, определяющих зависимость диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ от величины объемного сжатия при сложном пути деформирования (последовательные объемное сжатие, сдвиг), приведены на рис. 8.

На рис. 7 и 8 видно, что для дисперсного композита разница в осредненных диаграммах практически отсутствует как для различных путей деформирования, так и для разных значений объемной деформации.

Идентификация параметров макромодели Друкера – Прагера с помощью вычислительных экспериментов на мезоуровне

Для описания эффекта снижения предела текучести с увеличением объемной деформации на макроуровне применена теория течения с критерием текучести Друкера – Прагера, для которой функция текучести имеет вид:

$$f = \sigma_{eqv} + \alpha\sigma - \sigma_y = 0.$$

Здесь коэффициент α определяет чувствительность к среднему гидростатическому напряжению, σ_y – предел текучести при одноосном сжатии, σ – среднее гидростатическое напряжение. Закон течения предполагается ассоциированным.

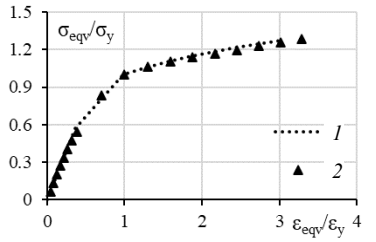
Использована модель степенного нелинейного изотропного упрочнения:

$$\frac{\sigma_y^{current}}{\sigma_y} = \left(\frac{\sigma_y^{current}}{\sigma_y} + \frac{3G}{\sigma_y} \varepsilon^p_{eqv} \right)^N, \qquad (14)$$

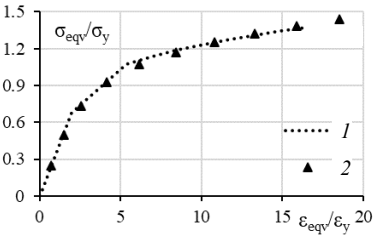
где N – параметр модели, G – модуль сдвига материала, $\sigma_y^{current}$ – значение текущего предела текучести, соответствующее накопленной эквивалентной пластической деформации ε^p_{eqv}, σ_y – начальный предел текучести на диаграмме $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ (см. рис. 1). Текущий предел текучести $\sigma_y^{current}$ на каждом этапе нагружения находится путем решения нелинейного уравнения (14) относительно $\sigma_y^{current}$.

С помощью подбора параметров макромодели удалось добиться совпадения результатов вычислений на мезоуровне (уровне структуры материала) с результатами вычислений однородного сплошного материала с применением модели Друкера – Прагера (на макроуровне). Для подбора параметров были использованы диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ для материала с угловатой пористой структурой, соответствующие сложному пути деформирования в порядке объемное сжатие, сдвиг (см. рис. 6, *а*).

На рис. 9 приведены графики зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для материала с пористой угловатой структурой и его макромодели при различных величинах объемной деформации: $\theta_0 / \varepsilon_y = 0,91$ и $\theta_0 / \varepsilon_y = 2,73$. Совпадение результатов расчетов макромодели и модели, учитывающей внутреннюю пористую структуру материала, имеет погрешность около 2 %.



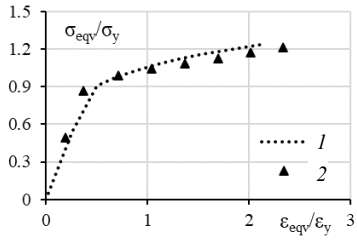
a



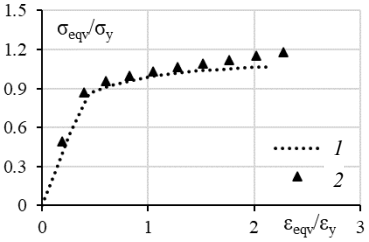
b

Рис. 9. Сравнение диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ макромодели (*1*) и структурной модели пористого материала с угловатыми порами (*2*): *а*) $\theta_0 / \varepsilon_y = 0,91$; *б*) $\theta_0 / \varepsilon_y = 2,73$

Fig. 9. Comparison of diagrams of the macromodel (*1*) and the structural model of a porous material with angular pores (*2*): *a*) $\theta_0 / \varepsilon_y = 0.91$; *б*) $\theta_0 / \varepsilon_y = 2.73$



a



b

Рис. 10. Сравнение диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$ макромодели (*1*) и структурной модели пористого материала с угловатыми порами (*2*) для разных путей деформирования: *а*) последовательные сдвиг, объемное сжатие; *b*) пропорциональное деформирование

Fig. 10. Comparison of diagrams of the macromodel (*1*) and the structural model of a porous material with angular pores (*2*) for different deformation paths: *a*) successive shear, volumetric compression; *b*) proportional deformation

Используя найденные материальные параметры модели Друкера – Прагера для материала с угловатыми порами, проведено сравнение диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon^0_{eqv}$, полученных на макро- и мезоуровне (рис. 10). Как видно на рис. 10, разница между диаграммами осредненного материала и исходного пористого материала не превышает 10 %.

Заключение

Путем решения задач в представительной области получены осредненные диаграммы зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для пористых материалов и дисперсного композита. Исследовано влияние пути деформирования на вид осредненной диаграммы. Также проведены серии расчетов для определения зависимости осредненных диаграмм от величины объемной деформации. Материал матрицы описывается классической теорией течения с изотропным упрочнением. Результаты численных экспериментов показали, что в случае материала с угловатыми порами на макроуровне возникает зависимость осредненной диаграммы как от пути деформирования, так и от величины объемной деформации. Осредненная диаграмма для пути деформирования, состоящего из объемного деформирования и последующего сдвига, заметно отличается от диаграмм для других путей деформирования. Такой тип деформирования характерен для грунтовых массивов. Обнаружено, что во всех численных экспериментах с увеличением объемной деформации происходит уменьшение предела текучести. Для дисперсного композита заметного влияния пути деформирования и объемной деформации не обнаружено.

Вычисленные для пористого материала с угловатыми порами на мезоуровне осредненные диаграммы описаны на макроуровне с помощью модели Друкера – Прагера. Получено совпадение моделей макро- и мезоуровня: графики зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации различаются не более чем на 10 %.

Библиографический список

1. Ломакин, Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред / Е.В. Ломакин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1991. – № 6. – С. 66–75.

2. Ломакин, Е.В. Определяющие соотношения для материалов со свойствами, зависящими от вида деформированного состояния / Е.В. Ломакин, П.В. Тишин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 52–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.06

3. Зарецкий, Ю.К. Лекции по современной механике грунтов / Ю.К. Зарецкий. – Ростов-н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1989. – 607 с.

4. Bressan, S. Low cycle fatigue behavior of additively manufactured Ti-6Al-4V under non-proportional and proportional loading / S. Bressan, F. Ogawa, T. Itoh, F. Berto // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2019. – Vol. 13, no. 48. – P. 18–25. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.48.03

5. Liu, D.S. The effects of superimposed hydrostatic pressure on deformation and fracture: Part II. Particulate-reinforced 6061 composites / D.S. Liu, J.J. Lewandowski // Metallurgical Transactions A. – 1993. – Vol. 24. – P. 609–615. DOI: 10.1007/BF02656630

6. Kwon, Y.W. Effect of hydrostatic pressure on damage in particulate composites / Y.W. Kwon, C.T. Liu // Proceedings of the ASME 2001 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Recent Advances in Solids and Structures. – New York, USA, 2001. – P. 11–15. DOI: 10.1115/IMECE2001/PVP-25201

7. González, C. An analysis of the effect of hydrostatic pressure on the tensile deformation of aluminum-matrix composites / C. González, J. Llorca // Materials Science and Engineering: A. – 2003. – Vol. 341, iss. 1–2. – P. 256–263. DOI: 10.1016/S0921-5093(02)00244-7

8. Chen, K. Establishment of the microstructure of porous materials and its relationship with effective mechanical properties / K. Chen, H. Qin, Z. Ren // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13. DOI: 10.1038/s41598-023-43439-6

9. Carr, J. Quantitative characterization of porosity and determination of elastic modulus for sintered micro-silver joints / J. Carr, X. Milhet, P. Gadaud, S.A.E. Boyer, G.E. Thompson, P. Lee // Journal of Materials Processing Technology. – 2015. – Vol. 225. – P. 19–23. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2015.03.037

10. Stier, B. Comparing experimental results to a numerical meso-scale approach for woven fiber reinforced plastics / B. Stier, J.-W. Simon, S. Reese // Composite Structures. – 2015. – Vol. 122. – P. 553–560. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.12.015

11. Dastgerdi, J.N. Fatigue damage process of additively manufactured 316 L steel using X-ray computed tomography imaging / J.N. Dastgerdi, O. Jaberi, H. Remes, P. Lehto, H.H. Toudeshky, J. Kuva // Additive Manufacturing. – 2023. – Vol. 70. – P. 1–18. DOI: 10.1016/j.addma.2023.103559

12. Артамонова, Н.Б. Вычисление эффективных свойств геокомпозитов на основе изображений компьютерной томографии / Н.Б. Артамонова, С.В. Шешенин, Е.А. Орлов, Б. Чжоу, Ю.В. Фролова, И.Р. Хамидуллин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 83–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.09

13. Герасимов, О.В. Определение напряженно-деформированного состояния костей по данным компьютерной томографии / О.В. Герасимов, Р.Р. Рахматулин, Т.В. Балтина, О.А. Саченков // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2023. – № 8. – С. 3–15. DOI: 10.18698/0536-1044-2023-8-3-15

14. Шешенин, С.В. Исследование упругих и упругопластических свойств дисперсного композита на основе численных экспериментов / С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова, П.Д. Клементьев, Ф.Б. Киселев, Р.Р. Мурадханов, Е.А. Орлов, Чжан Цян // Механика композитных материалов. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 27–44.

15. Trofimov, A. Effective elastic properties of composites with particles of polyhedral shapes / A. Trofimov, B. Drach, I. Sevostianov // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 120. – P. 157–170. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.04.037

16. Fritzen, F. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals / F. Fritzen, S. Forest, T. Böhlke, D. Kondo, T. Kanit // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol. 29. – P. 102–119. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.08.005

17. Schüler, T. Nonlinear modeling and computational homogenization of asphalt concrete on the basis of XRCT scans /

T. Schüler, R. Jänicke, H. Steeb // Construction and Building Materials. – 2016. – Vol. 109. – P. 96–108. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.02.012

18. Becker, R. Void growth dependence on loading path and mean stress from large-scale numerical simulations / R. Becker, K. Callaghan // International Journal of Plasticity. – 2020. – Vol. 134. DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102780

19. Maurizi, M. Predicting stress, strain and deformation fields in materials and structures with graph neural networks / M. Maurizi, C. Gao, F. Berto // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12. DOI: 10.1038/s41598-022-26424-3

20. Ge, W. A computational framework to establish data-driven constitutive models for time- or path-dependent heterogeneous solids / W. Ge, V.L. Tagarielli // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11. DOI: 10.1038/s41598-021-94957-0

21. Hill, R.W. The elastic behavior of a crystalline aggregate / R.W. Hill // Proceedings of the Physical Society. Section A. – 1952. – Vol. 65, no. 5. – P. 349–354. DOI: 10.1088/0370-1298/65/5/307

22. Hill, R.W. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles / R.W. Hill // Journal of Mechanics Physics of Solids. – 1963. – Vol. 11. – P. 357–372. DOI: 10.1016/0022-5096(63)90036-X

23. Kröner, E. Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen / E. Kröner // Zeitschrift für Physik. – 1953. – Vol. 136. – P. 402–410. DOI: 10.1007/BF01343450

24. Hashin, Z. Analysis of composite materials – a survey / Z. Hashin // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50, no. 3. – P. 481–505. DOI: 10.1115/1.3167081

25. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

26. Benveniste, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials / Y. Benveniste // Mechanics of Materials. – 1987. – Vol. 6, iss. 2. – P. 147–157. DOI: 10.1016/0167-6636(87)90005-6

27. Шешенин, С.В. Численный анализ задач механики композитов / С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова. – М.: Издательство Московского университета, 2025. – 541 с.

28. Артамонова, Н.Б. Асимптотический анализ уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды методом осреднения / Н.Б. Артамонова, А.Ж. Мукатова, С.В. Шешенин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – № 2. – С. 115–129.

29. Муравлева, Л.В. Об осреднении тонкостенных тел / Л.В. Муравлева, С.В. Шешенин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 129–138.

30. Шешенин, С.В. Эффективные жесткости гофрированной пластины / С.В. Шешенин, О.А. Ходос // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 128–139.

31. Hazanov, S. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume / S. Hazanov, C. Huet // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1994. – Vol. 42, iss. 12. – P. 1995–2011. DOI: 10.1016/0022-5096(94)90022-1

References

1. Lomakin E.V. Constitutive relations of deformation theory for dilatant media. *Mechanics of Solids*, 1991, vol. 26, no. 6, pp. 66–75.

2. Lomakin E.V., Tishin P.V. Constitutive relations for mate rials with strain state dependent properties. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 1, pp. 52–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.06

3. Zaretskiy Y.K. Lektsii po sovremennoy mekhanike gruntov [Lectures on modern soil mechanics]. Rostov-on-Don, Rostov University Press, 1989, 607 p.

4. Bressan S., Ogawa F., Itoh T., Berto F. Low cycle fatigue behavior of additively manufactured Ti-6Al-4V under non-proportional and proportional loading. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 13, no. 48, pp. 18–25. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.48.03

5. Liu D.S., Lewandowski J.J. The effects of superimposed hydrostatic pressure on deformation and fracture: Part II. Particulate-reinforced 6061 composites. *Metallurgical Transactions A*, 1993, vol. 24, pp. 609–615. DOI: 10.1007/BF02656630

6. Kwon Y.W., Liu C.T. Effect of hydrostatic pressure on damage in particulate composites. *Proceedings of the ASME 2001 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Recent Advances in Solids and Structures*, New York, USA, 2001, pp. 11–15. DOI: 10.1115/IMECE2001/PVP-25201

7. González C., Llorca J. An analysis of the effect of hydrostatic pressure on the tensile deformation of aluminum-matrix composites. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, vol. 341, no. 1–2, pp. 256–263. DOI: 10.1016/S0921-5093(02)00244-7

8. Chen K., Qin H., Ren Z. Establishment of the microstructure of porous materials and its relationship with effective mechanical properties. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13. DOI: 10.1038/s41598-023-43439-6

9. Carr J., Milhet X., Gadaud P., Boyer S.A.E., Thompson G.E., Lee P. Quantitative characterization of porosity and determination of elastic modulus for sintered micro-silver joints. *Journal of Materials Processing Technology*, 2015, vol. 225, pp. 19–23. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2015.03.037

10. Stier B., Simon J.-W., Reese S. Comparing experimental results to a numerical meso-scale approach for woven fiber reinforced plastics. *Composite Structures*, 2015, vol. 122, pp. 553–560. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.12.015

11. Dastgerdi J.N., Jaberi O., Remes H., Lehto P., Toudeshky H.H., Kuva J. Fatigue damage process of additively manufactured 316 L steel using X-ray computed tomography imaging. *Additive Manufacturing*, 2023, vol. 70, pp. 1–18. DOI: 10.1016/j.addma.2023.103559

12. Artamonova N.B., Sheshenin S.V., Orlov E.A., Zhou B., Frolova J.V., Khamidullin I.R. Calculation of effective properties of geocomposites based on computed tomography images. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 3, pp. 83–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.09

13. Gerasimov O.V., Rakhmatulin R.R., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Opredeleniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kostey po dannym komp'yuternoy tomografii [Determination of the bones stress-strain state by the computer tomography data]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye*, 2023, no. 8, pp. 3–15. DOI: 10.18698/0536-1044-2023-8-3-15

14. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D., Kiselev F.B., Muradkhanov R.R., Orlov E.A., Qiang Zhang. Study of elastic and elastoplastic properties of a dispersed composite based on computational experiments. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 19–30. DOI: 10.1007/s11029-021-09930-9

15. Trofimov A., Drach B., Sevostianov I. Effective elastic properties of composites with particles of polyhedral shapes. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 120, pp. 157–170. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.04.037

16. Fritzen F., Forest S., Böhlke T., Kondo D., Kanit T. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, 2012, vol. 29, pp. 102–119. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.08.005

17. Schüler T., Jänicke R., Steeb H. Nonlinear modeling and computational homogenization of asphalt concrete on the basis of XRCT scans. *Construction and Building Materials*, 2016, vol. 109, pp. 96–108. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.02.012

18. Becker R., Callaghan K. Void growth dependence on loading path and mean stress from large-scale numerical simulations. *International Journal of Plasticity*, 2020, vol. 134. DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102780

19. Maurizi M., Gao C., Berto F. Predicting stress, strain and deformation fields in materials and structures with graph neural networks. *Scientific Reports*, 2022, vol. 12. DOI: 10.1038/s41598-022-26424-3

20. Ge W., Tagarielli V.L. A computational framework to establish data-driven constitutive models for time- or path-dependent heterogeneous solids. *Scientific Reports*, 2021, vol. 11. DOI: 10.1038/s41598-021-94957-0

21. Hill R.W. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 1952, vol. 65, no. 5, pp. 349–354. DOI: 10.1088/0370-1298/65/5/307

22. Hill R.W. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 1963, vol. 11, pp. 357–372. DOI: 10.1016/0022-5096(63)90036-X

23. Kröner E. Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen. *Zeitschrift für Physik*, 1953, vol. 136, pp. 402–410. DOI: 10.1007/BF01343450

24. Hashin Z. Analysis of composite materials – a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, vol. 50, no. 3, pp. 481–505. DOI: 10.1115/1.3167081

25. Pobedrya B.E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Moscow University Press, 1984, 336 p.

26. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 1987, vol. 6, iss. 2, pp. 147–157. DOI: 10.1016/0167-6636(87)90005-6

27. Sheshenin S.V., Artamonova N.B. Chislennyy analiz zadach mekhaniki kompozitov [Numerical analysis of composite mechanics problems]. Moscow, Moscow University Press, 2025, 541 p.

28. Artamonova N.B., Mukatova A.Zh., Sheshenin S.V. Asymptotic analysis of the equilibrium equation of a fluid-saturated porous medium by the homogenization method. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 212–223. DOI: 10.3103/S002565441702011X

29. Muravleva L.V., Sheshenin S.V. Averaging for thin-walled bodies. *Mechanics of Solids*, 2004, vol. 39, iss. 4, pp. 102–109.

30. Sheshenin S.V., Khodos O.A. Effektivnyye zhestkosti gofrirovannoy plastiny [Effective stiffnesses of a corrugated plate]. *Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139.

31. Hazanov S., Huet C. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1994, vol. 42, iss. 12, pp. 1995–2011. DOI: 10.1016/0022-5096(94)90022-1

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 25-21-00111).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. This work was supported by the Russian Science Foundation (Project 25-21-00111).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The authors' contributions are equal.