Князева, А.Г. Оценка напряжений, сопутствующих обработке подвижным источником энергии тонкого слоя, расположенного на плоской подложке / А.Г. Князева, И.Ю. Смолин. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.04 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 5. – С. 42–55.

Perm Polytech Style: Knyazeva A.G., Smolin I.Yu. Evaluation of stresses associated with the processing of a thin layer located on a flat substrate by a moving energy source. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 5, pp. 42-55. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.04
УДК 539.3

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕНИЙ, СОПУТСТВУЮЩИХ ОБРАБОТКЕ ПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ ТОНКОГО СЛОЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ПЛОСКОЙ ПОДЛОЖКЕ

А.Г. Князева, И.Ю. Смолин

Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, Томск, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 23 июля 2025 г.
Одобрена: 18 сентября 2025 г.
Принята к публикации:
25 сентября 2025 г.

Ключевые слова:

поле температуры, температурные напряжения, температурно-зависимые свойства, подвижный источник тепла, численное моделирование, лазерная обработка, аддитивные технологии, слой порошка, математическая модель, плоское напряженное состояние.

АННОТАЦИЯ

Взаимодействие полей разной природы (тепловых, химических и механических) в современных технологиях синтеза и обработки материалов привлекает все большее внимание. Это обусловлено необходимостью прогнозирования поведения и свойств новых материалов и изделий в зависимости от условий их создания. Настоящая работа посвящена постановке и решению плоских задач термохемоупругости, которые описывают, например, сплавление слоя порошка на тонкой подложке при лазерном или электронно-лучевом воздействии. В этом случае внешний источник тепла перемещается по поверхности с определенной скоростью и по заданной траектории, вызывая существенное повышение температуры и в общем случае химические реакции. Это приводит к необходимости учета температурной зависимости свойств материала, которые становятся в рассматриваемом случае функциями и координат. Двумерные уравнения модели получены осреднением трехмерных уравнений термохемоупругости по слоям реагирующего слоя порошка и подложки. При этом в результате осреднения получены и выражения для эффективных характеристик двумерной среды. Выведена новая формулировка механической части задачи в напряжениях для случая плоского напряженного состояния, обусловленная неоднородными характеристиками среды при объединении уравнений равновесия, условий совместности деформаций и соотношений Дюамеля – Неймана. Эволюция температурного поля описывается нелинейным уравнением теплопроводности. При численном решении задач использован неявный конечно-разностный метод с расщеплением по координатам для уравнения теплопроводности и конечно-разностный метод последовательной верхней релаксации с чебышевским ускорением для уравнений в напряжениях. Приведены результаты численного моделирования обработки лазерным лучом смеси порошков титана и алюминия на железной подложке. Показано, что свойства подложки в значительной степени определяют величину максимальной температуры и сопутствующих напряжений, что следует учитывать при моделировании явным образом.

© **Князева Анна Георгиевна** – д. ф.-м. н., профессор, г. н. с., e-mail: anna-knyazeva@mail.ru.
Смолин Игорь Юрьевич – д. ф.-м. н., профессор, г. н. с., e-mail: smolin@ispms.ru.

Anna G. Knyazeva – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science, e-mail: anna-knyazeva@mail.ru.
Igor Yu. Smolin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science, e-mail: smolin@ispms.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

EVALUATION OF STRESSES ASSOCIATED WITH THE PROCESSING OF A THIN LAYER LOCATED ON A FLAT SUBSTRATE BY A MOVING ENERGY SOURCE

A.G. Knyazeva, I.Yu. Smolin

Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 23 July 2025
Approved: 18 September 2025
Accepted for publication:
25 September 2025

Keywords:

temperature field, thermal stress, temperature-dependent properties, moving heat source, numerical simulation, laser processing, additive manufacturing, powder bed, mathematical modeling and simulation, plane stress state.

ABSTRACT

The interaction of fields of different natures (thermal, chemical, and mechanical) in modern technologies of synthesis and processing of materials attracts increasing attention. This is due to the need to predict the behavior and properties of new materials and products depending on the conditions of their creation. This paper is devoted to the formulation and solution of plane problems of thermochemoelasticity, which describe, for example, the fusion of a powder layer on a thin substrate under laser or electron-beam action. In this case, an external heat source moves along the surface at a certain speed and along a given trajectory, causing a significant increase in temperature and, in general, chemical reactions. This drives the need for taking into consideration the temperature dependence of the material properties, which in this case become functions of coordinates as well. Two-dimensional equations of the model are obtained by averaging three-dimensional equations of thermochemoelasticity over the reacting powder layer and the substrate. In this case, as a result of averaging, expressions for the effective characteristics of the two-dimensional medium are also obtained. A new stress-based formulation of the mechanical part of the problem for the case of a plane stress state is derived, caused by the inhomogeneous characteristics of the medium when combining the equilibrium equation, Duhamel – Neumann law, and the strain-compatibility equation. The evolution of the temperature field is described by the nonlinear heat conduction equation. An implicit finite-difference scheme with coordinate splitting for the heat conduction equation and a finite-difference method of successive over-relaxation with Chebyshev acceleration for the stress-based equations are used for the numerical solution of the problems. The results of numerical modeling of laser beam processing of a mixture of titanium and aluminum powders on an iron substrate are presented. It is shown that the properties of the substrate largely determine the magnitude of the maximum temperature and associated stresses, which should be taken into account when modeling explicitly.

Введение

В настоящее время для изготовления изделий сложной формы широкое распространение получили аддитивные технологии [1–5]. Среди различных типов аддитивного производства с применением лазера выделяют порошковые технологии SLS, DMLS, SLM. Первые (SLS – селективное лазерное сплавление) и вторые (DMLS – прямое лазерное спекание металлов) отличаются типом используемых порошков (преимущественно полимеров и металлов). Третий вид (SLM – селективное лазерное плавление) обеспечивает полное расплавление частиц порошка. DMLS является одной из ведущих коммерческих технологий для быстрого изготовления функциональных изделий [6] и находит широкое применение в разных отраслях [7–9]. Этот технологический процесс используется для создания трехмерных изделий с помощью высокоэнергетического источника тепла – концентрированного лазерного излучения. Основными преимуществами этого процесса являются гибкость в выборе материалов [10–12] и форм, огромный потенциал для создания сложных трехмерных деталей, минимизация отходов порошковых материалов [3; 6; 13; 14]. Как правило, в технологиях DMLS и SLM требуются опорные конструкции, чтобы минимизировать деформации и коробление, вызываемые высокими градиентами температур, которые необходимыми для сплавления металлических частиц.

Взаимодействие лазерного излучения с порошковым слоем сопровождается многочисленными механизмами переноса тепла и массы [15; 16], что оказывает существенное влияние на микроструктуру и, как результат, на механические свойства конечного компонента [17–20].

Несмотря на применение этой технологии к широкому спектру порошковых материалов [3; 10] и современных подходов к управлению процессами [21; 22], его научные и технические аспекты все еще недостаточно хорошо изучены, в частности, из-за явлений высокоскоростного плавления и спекания, сложных механизмов появления остаточных напряжений. Один из подходов к решению данной проблемы состоит в разработке и применении связанных моделей. Однако в настоящее время о масштабной реализации подобных моделей говорить рано. В лучшем случае речь идет о построении сложных итерационных алгоритмов, сходимость которых не изучена [23–26].

Во многих работах, например, [27–30] и др., сообщается о расчете остаточных напряжений в изделиях, полученных аддитивными технологиями. Их оценку чаще всего осуществляют с использованием коммерческих конечно-элементных пакетов [31]. Но можно ли такие напряжения называть остаточными? Мы исходим из того, что напряжения в детали можно отнести к остаточным, если для их оценки при моделировании пройден весь путь от создания до финишной обработки [32–34].

Поэтому в нашей работе мы придерживаемся термина «сопутствующие напряжения» или «напряжения, сопутствующие обработке», когда речь идет об оценке текущего напряженного состояния в процессе получения изделий под действием подвижного теплового источника.

Цель данной работы состоит в выводе основных уравнений в рамках теории термохемоупругости и в решении модельных двумерных задач при условии существенной неравномерности поля температуры и зависимости физико-механических свойств материала от температуры.

Постановка задачи

Предположим, что, как и в [35], слой порошка, расположенный на плоской тонкой подложке, подвергается воздействию внешнего источника тепла, перемещающегося вдоль слоя по заданной траектории. Повышение температуры в слое в области действия источника тепла может сопровождаться химическими реакциями, приводящими к изменению состава слоя. В условиях эксперимента слой порошка h_R является тонким (как правило, включает несколько порошинок), так что неоднородностью термических и химических процессов по его толщине можно пренебречь. Если подложка имеет форму тонкой пластины, т.е. ее толщина h_S в направлении оси OZ мала, а в двух других направлениях OX и OY размеры подложки L_X и L_Y намного превышают ее толщину $L_X >> h_S$ и $L_Y >> h_S$, то можем ограничиться двумерной постановкой задачи, соответствующей плоскому напряженному состоянию. По крайней мере это корректно в рамках макроскопической модели для всего образца, состоящего из слоя порошка вместе с подложкой.

Для перехода к двумерной постановке задачи, как и в [36], используется осреднение трехмерных уравнений (интегрирование по толщинам покрытия и подложки), что приводит к осредненным по толщине пластины (включающей тонкую подложку и слой порошка) значениям таких физических величин, как температура, напряжения, деформации (компоненты соответствующих тензоров). В этом случае не нужно отдельно осреднять свойства материалов: в результате уравнения для расчета эффективных или эквивалентных свойств получаются автоматически и включают свойства как подложки, так и покрытия, а также их толщины.

Модель в общем случае будет включать [36] уравнение теплопроводности с эффективными свойствами, полученное в результате осреднения трехмерного уравнения теплопроводности по толщине образца:

$$\begin{aligned}\left(c_\varepsilon\rho\right)_{eff}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\lambda_T\right)_{eff}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\lambda_T\right)_{eff}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\\ &+\frac{h_R W_{ch}-H}{h_S+h_R}+\frac{\left(W_{ext}\right)_{eff}}{h_S+h_R}-3\left(K\alpha_T\right)_{eff}T\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t},\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\left(c_\varepsilon\rho\right)_{eff}=\frac{\left(c_\varepsilon\rho\right)_S h_S+\left(c_\varepsilon\rho\right)_R h_R}{h_S+h_R},\ \lambda_{T,eff}=\frac{\lambda_{T,S}h_S+\lambda_{T,R}h_R}{h_S+h_R},$$

$$\left(K\alpha_T\right)_{eff}=\frac{K_S\alpha_{T,S}h_S+K_R\alpha_{T,R}h_R}{h_S+h_R}.$$

Слагаемое

$$H=\alpha_{eff}\left(T-T_0\right)+\sigma_0\varepsilon_{eff}\left(T^4-T_w^{\,4}\right) \tag{2}$$

в уравнении (1) учитывает потери тепла конвекцией и излучением (появляется в уравнении теплопроводности после осреднения по толщине образца).

Внешний источник тепла, связанный с лазерным лучом, представим в виде

$$\left(W_{ext}\right)_{eff}=\left(1-f_L\right)\frac{W_0'}{kS_L}\exp\left[-\frac{\left(x-x_0-V_{L,x}t\right)^2+\left(y-y_0-V_{L,y}t\right)^2}{R_0^{\,2}}\right]. \tag{3}$$

В (1) – (3) и далее приняты следующие обозначения: T – температура; x, y – пространственные координаты, t – время; ρ – плотность; c_ε – теплоемкость при постоянной деформации; λ_T – коэффициент теплопроводности; W_{ch} – химический источник тепла (если учитывается изменение состава и тепловыделение вследствие химических реакций); K – изотермический модуль всестороннего сжатия; E – модуль Юнга; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; δ_{ij} – символ Кронекера; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; индекс «R» у свойств соответствует слою порошка, а индекс «S» – инертной подложке, в качестве которой в 3D-технологии можно рассматривать предыдущие наплавленные слои; α_{eff} – эффективный коэффициент теплоотдачи в законе Ньютона (характеризует суммарные потери тепла с поверхностей подложки и покрытия); σ_0 – постоянная Стефана – Больцмана; ε_{eff} – характеризует суммарные свойства поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене; $W_0' = W_0\left(1-\exp\left(-\sigma_L h_R\right)\right)$; W_0 – мощность лазерного излучения; f_L – коэффициент отражения лазерного излучения; k – коэффициент сосредоточенности; S_L – эффективная площадь пятна нагрева, определяемая формой луча лазера с радиусом кривизны R_0; $V_{L,x}$, $V_{L,y}$ – компоненты вектора скорости луча лазера (в реальной ситуации луч сканирует относительно заданного положения, а движется манипулятор или подложка с расположенным на ней реагентом); x_0, y_0 – начальное положение источника на поверхности реагента; σ_L – показатель поглощения в законе Ламберта – Бугера.

При оценке напряжений, сопутствующих обработке, последним слагаемым в уравнении (1) в первом приближении можем пренебречь.

Компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} также будут удовлетворять уравнениям, которые получаются осреднением уравнений равновесия, соотношений Дюамеля – Неймана и совместности деформаций. Для образца принятой формы вполне логично ограничиться плоским напряженным состоянием, в соответствии с которым

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0\,,\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \tag{4}$$

Проинтегрируем уравнения равновесия для плоского напряженного состояния

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

соотношения Дюамеля – Неймана

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \delta_{ij}\left[\frac{\nu}{E}\sigma_{kk} - \frac{w}{3}\right], \tag{6}$$

где

$$w = 3\left[\alpha_T\left(T - T_0\right) + \sum_k \alpha_k\left(\eta_k - \eta_{k0}\right)\right], \tag{7}$$

и соотношения совместности деформаций (для плоского напряженного состояния достаточно одного уравнения)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{8}$$

вдоль оси координат z по толщинам подложки h_S и покрытия h_R.

Здесь α_k – коэффициенты концентрационного расширения, η_k – массовые концентрации компонентов, индекс «0» относится к недеформированному состоянию.

Уравнения равновесия для средних по толщине пластины напряжений будут иметь такой же вид (5), но для усредненных величин напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$, которые определяются по формулам

$$\int_0^{h_s+h_R} \sigma_{ij}\,dz = \int_0^{h_s} \sigma_{ij}\,dz + \int_{h_s}^{h_s+h_R} \sigma_{ij}\,dz =$$
$$= \left(\sigma_{ij}\right)_S \int_0^{h_s} dz + \left(\sigma_{ij}\right)_R \int_{h_s}^{h_s+h_R} dz = \left(\sigma_{ij}\right)_S h_S + \left(\sigma_{ij}\right)_R h_R$$

или

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \left(h_S + h_R\right) = \left(\sigma_{ij}\right)_S h_S + \left(\sigma_{ij}\right)_R h_R\,. \tag{9}$$

При этом усредненные напряжения по толщинам подложки и покрытия отдельно обозначены в круглых скобках, а среднее напряжение по всей пластинке – в угловых скобках. Аналогичные величины вводятся для усредненных деформаций в соотношениях совместности, а сами эти уравнения также не изменят свой вид, поскольку операторы дифференцирования по осям x и y можно менять местами с оператором интегрирования по оси z.

При интегрировании соотношений Дюамеля – Неймана (6) по толщине пластинки будем иметь без учета фазовых и химических превращений, например, для ε_{xx}:

$$\int_0^{h_s+h_R} \varepsilon_{xx}\,dz = \int_0^{h_s+h_R} \frac{\sigma_{xx}}{2\mu}\,dz - \int_0^{h_s+h_R}\left[\frac{\nu}{E}\sigma_{kk} - \alpha_T\left(T - T_0\right)\right]dz$$

или

$$\left(\varepsilon_{xx}\right)_S h_S + \left(\varepsilon_{xx}\right)_R h_R = \left(\frac{\sigma_{xx}}{2\mu}\right)_S h_S + \left(\frac{\sigma_{xx}}{2\mu}\right)_R -$$
$$-\left(\frac{\nu}{E}\sigma_{kk} - \alpha_T\left(T - T_0\right)\right)_S h_S - \left(\frac{\nu}{E}\sigma_{kk} - \alpha_T\left(T - T_0\right)\right)_R h_R.$$

То есть, строго говоря, в правой части имеем усредненные по толщине величины напряжений, умноженные (или разделенные) на упругие модули. Тем не менее запишем для усредненных напряжений и деформаций по всей толщине пластины следующее приближенное соотношение

$$\langle \varepsilon_{xx} \rangle \left(h_S + h_R\right) \approx$$
$$\approx \langle \sigma_{xx} \rangle \left[\left(\frac{1}{2\mu}\right)_S h_S + \left(\frac{1}{2\mu}\right)_R h_R\right] - \langle \sigma_{kk} \rangle \left[\left(\frac{\nu}{E}\right)_S h_S + \left(\frac{\nu}{E}\right)_R h_R\right] +$$
$$+\left[\left(\alpha_T\right)_S h_S + \left(\alpha_T\right)_R h_R\right] \langle \left(T - T_0\right) \rangle.$$

Далее можем записать

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle \approx \left(\frac{1}{2\mu}\right)_{eff} \langle \sigma_{ij} \rangle - \delta_{ij}\left[\left(\frac{\nu}{E}\right)_{eff} \langle \sigma_{kk} \rangle + \left(\alpha_T\right)_{eff} \langle \left(T - T_0\right) \rangle\right]. \tag{10}$$

Для эффективных характеристик (свойств) пластины будут справедливы формулы

$$\left(\frac{1}{2\mu}\right)_{eff} = \frac{\left(\frac{1}{2\mu}\right)_S h_S + \left(\frac{1}{2\mu}\right)_R h_R}{h_S + h_R},$$
$$\left(\frac{\nu}{E}\right)_{eff} = \frac{\left(\frac{\nu}{E}\right)_S h_S + \left(\frac{\nu}{E}\right)_R h_R}{h_S + h_R}, \tag{11}$$
$$\left(\alpha_T\right)_{eff} = \frac{\left(\alpha_T\right)_S h_S + \left(\alpha_T\right)_R h_R}{h_S + h_R}.$$

Если учитывается изменение состава в порошковом слое, то соотношение (10) становится более сложным. В этом случае имеем

$$w_S = 3\left(\alpha_T\right)_S \left(T - T_0\right),$$
$$w_R = 3\left[\left(\alpha_T\right)_R \left(T - T_0\right) + \sum_k \alpha_k\left(\eta_k - \eta_{k0}\right)\right]$$

и

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle \approx \left(\frac{1}{2\mu}\right)_{eff} \langle \sigma_{ij} \rangle -$$
$$-\delta_{ij}\left[\left(\frac{\nu}{E}\right)_{eff} \langle \sigma_{kk} \rangle - \left(\alpha_T\right)_{eff} \langle \left(T - T_0\right) \rangle - \sum_k \left(\alpha_k\right)_{eff} \langle \left(\eta_k - \eta_{k0}\right) \rangle\right]. \tag{12}$$

Здесь

$$\left(\alpha_k\right)_{eff} = \frac{h_R}{h_R + h_S}\alpha_k .$$

Заметим, что термокинетические модели позволяют учесть явно изменение толщины порошкового слоя вследствие усадки. В этом случае процедура осреднения, аналогичная описанной в [35; 36], приведет к уравнениям, отличным от представленных в данной статье.

Таким образом, имеем двумерную задачу, включающую уравнения теплопроводности (1), равновесия (5), совместности деформаций (8) и соотношения Дюамеля – Неймана (10) или (12) для усредненных по толщине образца температуры, напряжений и деформаций, в которые входят в качестве физико-механических параметров среды соответствующие эффективные характеристики, определяемые формулами типа (11). В качестве граничных условий следует принять отсутствие на торцах пластины источников и стоков тепла, а также напряжений и деформаций. В начальный момент времени температура равна начальной, задан химический состав исходных компонентов, напряжения и деформации отсутствуют.

Далее химическая часть задачи здесь не рассматривается. В качестве примеров ее постановки и решения можно обратиться к публикациям [37–39].

Алгоритм решения задачи

Переформулируем механическую часть задачи в напряжениях, избавившись от деформаций. Для удобства введем обозначения

$$A = \left(\frac{1}{2\mu}\right)_{eff} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)_{eff} = \frac{A_S h_S + A_R h_R}{h_S + h_R} \text{ и}$$

$$B = \left(\frac{\nu}{E}\right)_{eff} = \frac{B_S h_S + D_R h_R}{h_S + h_R}$$

для эффективных податливостей и функцию

$$w_{eff} = 3\left[\left(\alpha_T\right)_{eff}\left\langle\left(T - T_0\right)\right\rangle - \sum_k \alpha_{k,eff}\left\langle\left(\eta_k - \eta_{k0}\right)\right\rangle\right].$$

Тогда, подставляя выражения для деформаций из соотношений Дюамеля – Неймана

$$\varepsilon_{ij} = A\sigma_{ij} - \delta_{ij}\left[B\sigma_{kk} - \frac{w_{eff}}{3}\right]$$

в соотношения совместности деформаций (8), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A\sigma_{xx} - B\sigma_{kk} + \frac{w_{eff}}{3}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\sigma_{yy} - B\sigma_{kk} + \frac{w_{eff}}{3}\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(A\sigma_{xy}\right).$$

Заметим, что в условиях лазерных и электронно-лучевых технологий температура повышается на несколько сотен градусов, поэтому в модели необходимо учитывать зависимость механических свойств от температуры. Кроме этого, вследствие химических реакций меняется и состав. Локальные изменения температуры и химического состава при прохождении источника тепла приводят к тому, что эффективные механические характеристики образца становятся функциями координат и подлежат дифференцированию в полученном выше уравнении.

Беря производные по частям, найдем

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + A\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \\
&-\left(\sigma_{kk}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial y}\right) + \\
&+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{w_{eff}}{3} + \sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \\
&-\left(\sigma_{kk}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{w_{eff}}{3} = \\
&= 2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + 2A\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + 2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Чтобы упростить это выражение, исключим вторые производные от сдвигового напряжения, используя уравнения равновесия (5), продифференцированные по координатам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Первые производные от сдвиговых напряжений исключим, используя уравнения равновесия. Также собираем слагаемые. Получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + A\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2}\right) + \\
&+2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \sigma_{kk}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right) - \\
&-B\left(\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x^2}\right) - 2\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial y} + \sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \\
&-2\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 w_{eff}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_{eff}}{\partial x^2}\right) = \\
&= 2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - A\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - 2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Собирая слагаемые в левой части и проводя упрощения, получим

$$\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\left(A-B\right)\left(\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x^2}\right)+$$
$$+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial y}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial y}+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial x}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial x}-$$
$$-\sigma_{kk}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 w_{eff}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_{eff}}{\partial x^2}\right)=$$
$$=2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}.$$

Далее, вводя оператор Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2 ..}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 ..}{\partial x^2}$, запишем

$$\left(A-B\right)\Delta\sigma_{kk}+\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+$$
$$+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial y}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial y}+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial x}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial x}-$$
$$-\sigma_{kk}\Delta B+\frac{1}{3}\Delta w_{eff}=2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}.$$

Для удобства добавим и отнимем слагаемые, соответствующие произведению диагональных компонент тензора напряжений на вторые производные от A, получим

$$\left(A-B\right)\Delta\sigma_{kk}+\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+$$
$$+\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+$$
$$+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial y}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial y}+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial x}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial x}-$$
$$-\sigma_{kk}\Delta B+\frac{1}{3}\Delta w_{eff}=2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}.$$

Собираем слагаемые:

$$\left(A-B\right)\Delta\sigma_{kk}-\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+$$
$$+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial y}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial y}+2\frac{\partial\left(A-B\right)}{\partial x}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial x}+$$
$$+\sigma_{kk}\Delta\left(A-B\right)+\frac{1}{3}\Delta w_{eff}=2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}.$$

Вводя новое обозначение $C=A-B$, окончательно получим уравнение

$$C\Delta\sigma_{kk}+\sigma_{kk}\Delta C+2\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial x}+2\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial y}-$$
$$-\sigma_{xx}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\sigma_{yy}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-2\sigma_{xy}\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}+\frac{1}{3}\Delta w_{eff}=0,\qquad(15)$$

подобное внешне тому, которое получено в [40; 41] без учета подложки. Отличие состоит в том, что в рассматриваемом здесь случае напряжения и эффективные механически характеристики в точках образца являются осредненными по слоям порошка и подложки.

Вычитая второе уравнение (14) из первого и добавляя к обеим частям получившегося уравнения $\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial x^2}$, придем к уравнению

$$\Delta\sigma_{yy}=\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x^2}.\qquad(16)$$

Дифференцируя первое из уравнений равновесия (5) по y, а второе по x и складывая их, получим

$$\Delta\sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x\partial y}.\qquad(17)$$

Можно исключить σ_{xx} из уравнения (15), используя очевидное равенство

$$\sigma_{xx}=\sigma_{kk}-\sigma_{yy}.\qquad(18)$$

В результате для нахождения $\sigma_{kk},\sigma_{yy},\sigma_{xy}$ имеем систему уравнений (15)–(17). Можно показать, что, несмотря на связанность этой системы уравнений, она остается параболической. Поэтому для ее решения был применен конечно-разностный метод последовательной верхней релаксации с чебышевским ускорением [42]. Для численного решения уравнения теплопроводности использовалась неявная конечно-разностная схема с расщеплением по координатам [43].

Пример численного решения задачи. Определение параметров

Рассмотрим для примера смесь порошков титана и алюминия на железной подложке. Образец имеет размеры 1×1 см. Толщина подложки составляет 0,1 см, а покрытия – 0,02 см. Химические реакции учитывать не будем.

Свойства верхнего слоя смеси порошков титана и алюминия определим без учета пористости. Плотность, изобарную теплоемкость, коэффициент теплопроводности, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения порошковой смеси рассчитываем по формуле $\Phi=\Phi_{\mathrm{Al}}\eta+\Phi_{\mathrm{Ti}}\left(1-\eta\right)$, где Φ_{Al} и Φ_{Ti} – свойства алюминия и титана, η – объемная доля алюминия.

Нужные для расчетов свойства исходных веществ приведены в таблице.

Температуры плавления T_m равны 933 (Al); 1974 (Ti) и 1810 (Fe) K [44; 45].

Заметим, что в точках фазовых переходов формулы для теплоемкости и коэффициентов теплопроводности дают разрыв, что может быть источником ошибок в расчетах. Поэтому в небольшой окрестности точек перехода проводилось сглаживание, что приводило к непрерывным зависимостям.

Для пересчета свойств монокристаллов алюминия и титана [46; 50] в свойства поликристаллов был применен метод усреднения Фойгта – Рейсса – Хилла. Зависимости податливостей $A(T)$ и $B(T)$ для смеси алюминия и титана аппроксимированы кубическими полиномами, а для железа – полиномами четвертого порядка.

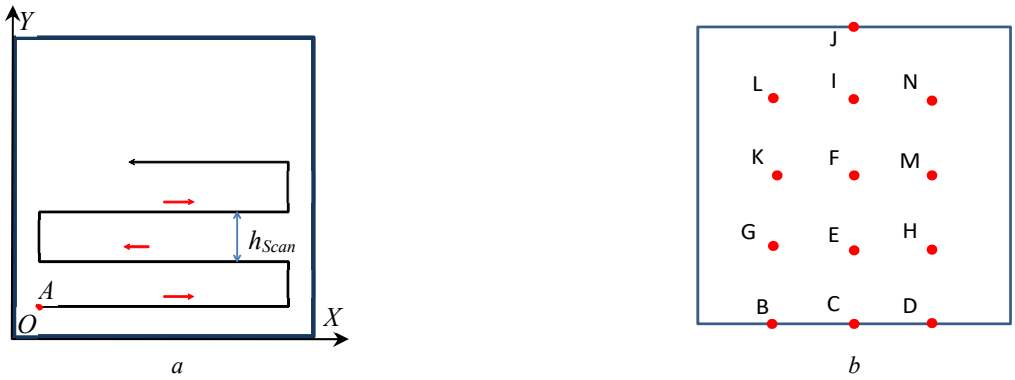
В расчетах принято: $T_0 = 293$ K; $R_0 = 0{,}01$ см; $V_{L,x} = V_{L,y} = V_L = 8{,}0$ см/с. Плотность мощности лазерного воздействия $q_{eq} = (1 - f_L) W_0 \,'/kS_L$ была принята равной $q_{eq} = 0{,}4 \cdot 10^6$ Вт/(см^2), что обеспечивает для сплава алюминия и титана не очень высокие температуры, позволяющие при оценке механических напряжений оставаться в рамках теории упругости. Режим сканирования показан на рис. 1, *a*.

Точка A соответствует началу движения луча $(x, y) = (0{,}02,\ 0{,}02)$ см. Шаг сканирования $h_{Scan} = 0{,}05$ см. Для слежения за процессом в динамике на поверхности пластины выбраны отдельные точки, расположение и обозначения для которых дано на рис. 1, *b*.

Теплофизические и упругие свойства веществ, использованные в расчетах

Thermophysical and elastic properties of substances used in calculations

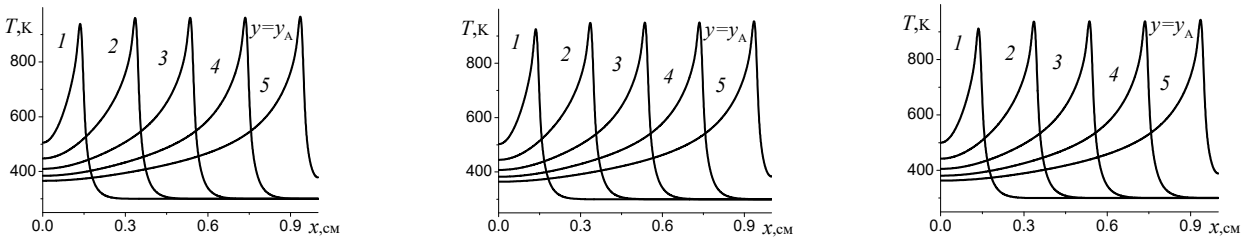
Обозначение	Плотность, г/см^3	Источник
Al	$\rho = \begin{cases} 2{,}779 - 0{,}251 \cdot 10^{-3} T, & 293 \le T \le 933; \\ 2{,}689 - 0{,}329 \cdot 10^{-3} T, & 933 < T \le 2720 \end{cases}$	[44]
Ti	$\rho = \begin{cases} 4{,}561 - 0{,}191 \cdot 10^{-3} T + 0{,}162 \cdot 10^{-6} T^2 - 4 \cdot 10^{-11} T^3, & 293 \le T \le 1155; \\ 4{,}499 - 0{,}155 \cdot 10^{-3} T, & 1155 < T \le 1941 \end{cases}$	[44]
Fe	$\rho = 7{,}98298 - 3{,}5819 \cdot 10^{-4} T$	[45]
	Теплоемкость, Дж/(кг·K)	
Al	$c_p = \begin{cases} 757{,}2 + 0{,}473T, & 293 \le T \le 933; \\ 1086, & 933 < T \le 2720 \end{cases}$	[44]
Ti	$c_p = \begin{cases} 363{,}8 + 0{,}759T - 866{,}84 \cdot 10^{-6} T^2 + 414{,}46 \cdot 10^{-9} T^3, & 293 \le T \le 1155; \\ -421{,}12 + 2{,}067T + 1375{,}63 \cdot 10^{-6} T^2 + 323{,}63 \cdot 10^{-9} T^3, & 1155 < T \le 1941; \\ 742, & 1941 < T \le 3533 \end{cases}$	[44]
Fe	$c_p = \begin{cases} -0{,}422 + 0{,}005 \cdot T - 8{,}651 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 + 5{,}159 \cdot 10^{-9} \cdot T^3; T < 1042\,' \\ 115{,}636 - 0{,}312 \cdot T + 3{,}158 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - 1{,}409 \cdot 10^{-7} \cdot T^3 + \\ 2{,}342 \cdot 10^{-11} \cdot T^4; T \ge 1042 \end{cases}$	[46; 47]
	Коэффициент теплопроводности, Вт/(м·K)	
Al	$\lambda_T = 297{,}0317 - 0{,}2278 \cdot T + 2{,}03 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - 2{,}1627 \cdot 10^{-7} \cdot T^3$	[45]
Ti	$\lambda_T = 25{,}79244 - 0{,}01645 \cdot T + 1{,}061 \cdot 10^{-5} \cdot T^2$	[45]
Fe	$\lambda_T = 1{,}22231 - 0{,}00161 \cdot T + 8{,}36118 \cdot 10^{-7} \cdot T^2 - 1{,}13993 \cdot 10^{-10} \cdot T^3$	[45]
	Коэффициент теплового расширения, K^{-1}	
Al	$\alpha_T = \left(10{,}87 + 45{,}42 \cdot 10^{-3} T - 23{,}2 \cdot 10^{-6} T^2\right) \cdot 10^{-6}, \quad 293 \le T \le 933$	[44]
Ti	$\alpha_T = \left(10{,}02 - 14{,}195 \cdot 10^{-3} T + 33{,}24 \cdot 10^{-6} T^2 + 19{,}01 \cdot 10^{-9} T^3\right) \cdot 10^{-6}, \quad T \le 1100$	[44]
Fe	$\alpha_T = \left(8{,}79 + 1{,}06 \cdot 10^{-2} T - 4{,}61 \cdot 10^{-6} T^2\right) \cdot 10^{-6}, \quad 293 \le T \le 1100$	[48]
	Модуль Юнга, ГПа	
Al	$E(T) = 83{,}6 - 4{,}37 \cdot 10^{-2} \cdot T$, 273 ≤ T ≤ 913 K	[49]
Ti	$E(T) = 134 - 6{,}66 \cdot 10^{-2} \cdot T$, 273 ≤ T ≤ 1153 K	[50]
Fe	$E(T) = 183 + 1{,}09 \cdot 10^{-1} \cdot T - 1{,}61 \cdot 10^{-4} \cdot T^2$, 300 ≤ T ≤ 1300 K	[45]
	Коэффициент Пуассона	
Al	$\nu(T) = 0{,}319 + 8{,}46 \cdot 10^{-5} \cdot T$, 273 ≤ T ≤ 913 K	[49]
Ti	$\nu(T) = 0{,}295 + 9{,}12 \cdot 10^{-5} \cdot T$, 273 ≤ T ≤ 1153 K	[50]
Fe	$\nu(T) = 0{,}286 + 2{,}16 \cdot 10^{-4} \cdot T - 4{,}49 \cdot 10^{-7} \cdot T^2 + 3{,}49 \cdot 10^{-10} \cdot T^3$, 300 ≤ T ≤ 1300 K	[45]



a *b*

Рис. 1. Режим сканирования (*a*) и выбранные для иллюстраций точки (*b*) на поверхности образца

Fig. 1. Scanning mode (*a*) and points on the sample surface selected for illustration (*b*)



a *b* *c*

Рис. 2. Распределения температуры вдоль оси *OX* в сечении обраца *y*=*y*(*A*) в разные последовательные моменты времени при первом проходе при содержании алюминия: 0,4 (*a*); 0,5 (*b*) и 0,6 (*c*)

Fig. 2. Temperature distributions along the *OX* axis in the sample cross-section *y* = *y*(*A*) at different successive moments of time during the first pass with an aluminum content of: (*a*) 0.4; (*b*) 0.5; (*c*) 0.6

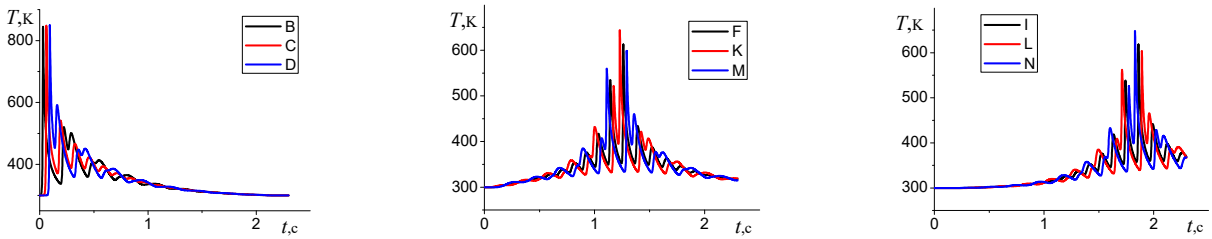


Рис. 3. Типичные термические циклы для выделенных точек на поверхности образца

Fig. 3. Typical thermal cycles for some points on the specimen surface

Результаты расчетов. Инертная задача

Далее представлены примеры расчетов температуры, температурно-зависимых свойств и характеристик напряженно-деформированного состояния для разного содержания алюминия в смеси 0,4; 0,5 и 0,6.

Представленные на рис. 2 распределения температуры (цифры от *1* до *5* у кривых соответствуют разным последовательным моментам времени) показывают, что различия в максимальных значениях температуры при варьировании содержания алюминия в смеси от 0,4 до 0,6 не превышают 2,5 %. Для трех выбранных составов, например, для кривых *3*, имеем максимальную температуру 961 K; 949,5 K; 937, 9 K. Эти данные соответствуют первому проходу, в последующие проходы температура понижается и не достигает температуры плавления.

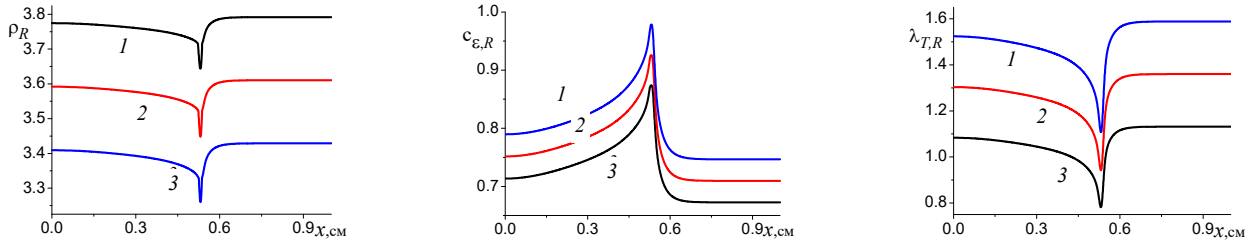
Об этом говорят и термические циклы в выбранных точках (рис. 3) для состава с долей алюминия 0,5, вид которых также свидетельствует о нестационарной картине процесса, не позволяющей выделить типичную квазистационарную область прогрева в окрестности подвижного источника тепла. Вследствие слабого различия в величине температуры для разных составов термические циклы для них подобны представленным на рис. 3.

На рис. 4 изображены распределения температурно-зависимых свойств порошковой смеси в один и тот же момент времени, соответствующий кривым *3* на рис. 2. Наглядно видно различие в осредненных свойствах при варьировании содержания алюминия, а также их существенное изменение с ростом температуры, поскольку теплопроводности титана и алюминия различаются на порядок.

Отличия двухмерных распределений температур в разные моменты времени при изменении доли алюминия показаны на рис. 5. Видно, что меняются не только максимальные значения температур, но и расположение изолиний, соответствующих одинаковым значениям.

Качественно распределения напряжений, подобно распределениям температур, меняются незначительно с изменением содержания алюминия в исследованном диапазоне, хотя различия в максимальных значениях больше – 18–20 %. Заметим, что доля алюминия меняется незначительно, и это изменение происходит в слое порошка, который в 5 раз тоньше подложки. Поэтому при осреднении по толщине образца эти изменения нивелируются. Однако если речь идет об оценке температуры в слое, который наносится на предварительно сформированную часть детали (ее свойства будут близки к свойствам порошкового слоя), различия могут оказаться более значительными.

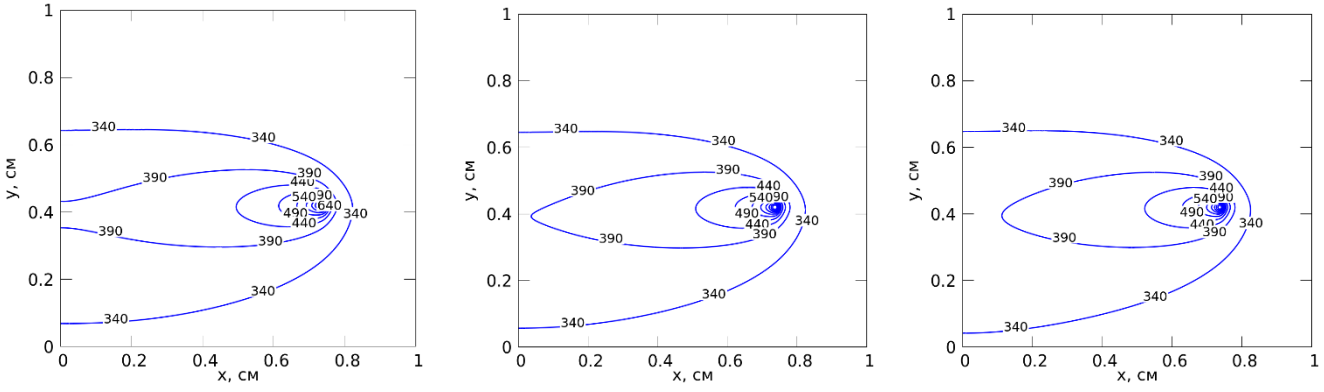
По изменению поля температур со временем можно отследить квазистатический процесс изменения сопутствующего напряженного состояния. На рис. 6 показаны распределения интенсивности напряжений в разные моменты времени при доле алюминия 0,5.



a *b* *c*

Рис. 4. Распределения плотности, г/см^3 (*a*), теплоемкости, Дж/(г·К) (*b*) и коэффициента теплопроводности, Дж/(см·с·К) (*c*) порошковой смеси (индекс *R*) вдоль оси *OX* в сечении обраца *y*=*y*(*A*) в одинаковый момент времени при первом проходе при содержании алюминия: 0,4 (кривая *1*); 0,5 (кривая *2*) и 0,6 (кривая *3*)

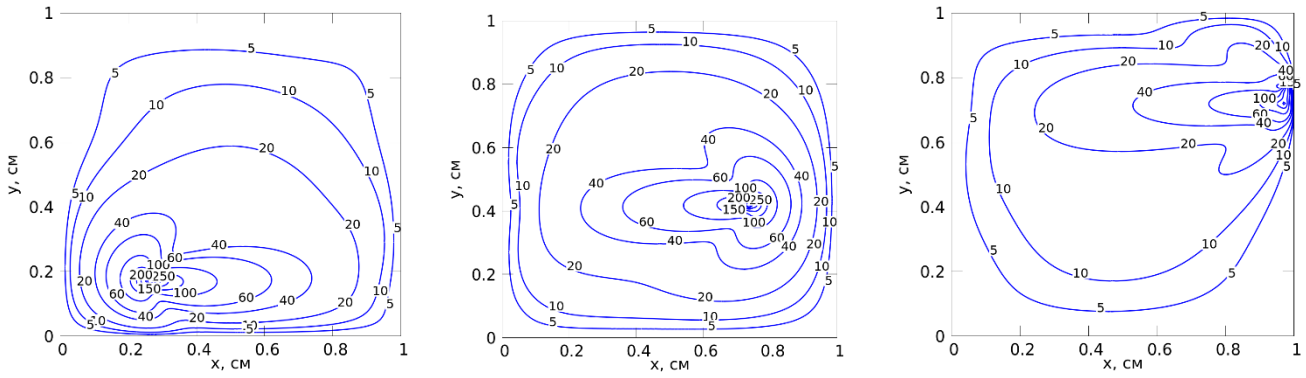
Fig. 4. Distributions of (*a*) density, g/cm^3, (*b*) heat capacity, J/(g·K), and (*c*) thermal conductivity coefficient, J/(cm·s·K), of the powder mixture (index *R*) along the *OX* axis in the sample section $y = y(A)$ at the same time during the first pass with an aluminum content of: 0.4 (curve *1*); 0.5 (curve *2*) and 0.6 (curve *3*)



a *b* *c*

Рис. 5. Влияние доли алюминия 0,4 (*a*); 0,5 (*b*); 0,6 (*c*) на распределения средних по толщине образца температур в Кельвинах в момент времени *t* = 1,05 с

Fig. 5. The influence of the proportion of aluminum (*a*) 0.4; (*b*) 0.5; (*c*) 0.6 on the distribution of average temperatures in Kelvin over the thickness of the sample at time instant *t* = 1.05 s



a *b* *c*

Рис. 6. Распределения средних по толщине образца интенсивности напряжений (в МПа) в разные моменты времени t = 0,45 (*a*); 1,05 (*b*) и 1,8 (*c*) с

Fig. 6. Distributions of equivalent stresses (in MPa) averaged across the specimen thickness at different time instants (*a*) t = 0.45; (*b*) 1.05; and (*c*) 1.8 s

Заключение

В работе предложена двумерная термомеханическая модель тонкого плоского образца, состоящего из двух слоев (порошкового слоя и подложки), подверженного тепловому воздействию подвижным источником (лазером). Двумерная модель получена из трехмерной постановки задачи осреднением уравнений по толщине образца. Важной особенностью модели, отличающей ее от классических моделей термоупругости, является учет зависимости свойств обоих слоев от температуры. Построенная модель позволяет осуществлять в динамике не только расчеты температуры, но и квазистационарного изменения напряженно-деформированного состояния. В качестве примера использования модели рассмотрена задача о прямом лазерном спекании порошков алюминия и титана на железной подложке.

Ранее в наших работах [40; 41] для порошкового слоя без подложки было показано, что учет зависимостей свойств от температуры существенно сказывается на результатах. Так, некоторые компоненты напряжений могут до 3,5 раза превышать значения, полученные в расчетах с температурно-независимыми свойствами материалов при локальном повышении температуры на 500°. В данном исследовании показано, что при варьировании состава порошкового слоя результат оказывается не столь впечатляющим. Максимальные температуры меняются до 2,5 %, а напряжения – до 20 % при изменении доли алюминия от 0,4 до 0,6.

Свойства подложки в значительной степени определяют величину максимальной температуры и сопутствующих напряжений, что следует учитывать при моделировании явным образом. Вместо подложки могут быть рассмотрены предыдущие наплавленные слои, у которых различия в свойствах с порошковым слоем меньше, что также окажет существенное влияние на средние по толщине образца напряжения.

Логичным обобщением модели является учет в ней химических реакций, которые вносят вклад в температурное поле через выделение/поглощение тепла и поля напряжений и деформаций через изменение химического состава и концентрационное расширение.

Библиографический список

1. Frazier, W.E. Metal additive manufacturing: a review / W.E. Frazier // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2014. – Vol. 23. – P. 1917–1928. DOI: 10.1007/s11665-014-0958-z

2. Научные подходы к микро-, мезо- и макроструктурному дизайну объемных металлических и полиметаллических материалов с использованием метода электронно-лучевого аддитивного производства / Е.А. Колубаев [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2022. – Т. 25, № 4. – С. 5–18. DOI: 10.55652/1683-805X_2022_25_4_5

3. A current state of metal additive manufacturing methods: A review / P. Durai Murugan [et al.] // Materials Today: Proceedings. – 2022. – Vol. 59. – P. 1277–1283. DOI: 10.1016/j.matpr.2021.11.503

4. A Review on metal additive manufacturing – types, applications and future trends / M.Q. Zafar [et al.] // Recent Progress in Materials. – 2025. – Vol. 7, no. 1. – P. 006. DOI: 10.21926/rpm.2501006

5. Hybrid metal additive manufacturing: A state–of–the-art review / J.P.M. Pragana [et al.] // Advances in Industrial and Manufacturing Engineering. – 2021. – Vol. 2. – P. 100032. DOI: 10.1016/j.aime.2021.100032

6. Khaing, M.W. Direct metal laser sintering for rapid tooling: processing and characterization of EOS parts / M.W. Khaing, J.Y.H. Fuh, L. Lu // Journal of Materials Processing Technology. – 2001. – Vol. 113. – P. 269–272. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)00584-2

7. Dobrzańska-Danikiewicz, A.D. A review of additive manufacturing technologies / A.D. Dobrzańska-Danikiewicz, A. Bączyk // Archives of Materials Science and Engineering. – 2024. – Vol. 128, iss. 2. – P. 68–85. DOI: 10.5604/01.3001.0054.8755

8. Kumar, P. Additive manufacturing – A literature review / P. Kumar, A. Mahamani, B. Durga Prasad // Materials Science Forum. – 2020. – Vol. 979. – P. 74–83. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.979.74

9. Additive manufacturing of titanium-based alloys – A review of methods, properties, challenges, and prospects / T.S. Tshephe [et al.] // Heliyon. – 2022. – Vol. 8. – P. e09041. DOI: 10.1016/j.heliyon.2022.e09041

10. Bhuvanesh Kumar, M. Methods and materials for additive manufacturing: A critical review on advancements and challenges / M. Bhuvanesh Kumar, P. Sathiya // Thin–Walled Structures. – 2021. – Vol. 159. – P. 107228. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107228

11. Gade, S. A review on additive manufacturing – methods, materials, and its associated failures / S. Gade, S. Vagge, M. Rathod // Advances in Science and Technology Research Journal. – 2023. – Vol. 17, no. 3. – P. 40–63. DOI: 10.12913/22998624/163001

12. A review of various materials for additive manufacturing: Recent trends and processing issues / M. Srivastava [et al.] // Journal of Materials Research and Technology. – 2022. – Vol. 21. – P. 2612–2641. DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.10.015

13. Samantaray, M. Computational modeling of heat transfer and sintering behavior during direct metal laser sintering of AlSi10Mg alloy powder / M. Samantaray, S. Sahoo, D. Thatoi // Comptes Rendus Mecanique. – 2018. – Vol. 346. – P. 1043–1054. DOI: 10.1016/j.crme.2018.08.006

14. Nandy, J. Microstructure evolution of Al–Si–10Mg in direct metal laser sintering using phase field modeling / J. Nandy, H. Sarangi, S. Sahoo // Additive Manufacturing. – 2018. – Vol. 6. – P. 107–117. DOI: 10.1007/s40436-018-0213-1

15. Sahoo, S. Phase-field simulation of microstructure evolution of Ti–6Al–4V in electron beam additive manufacturing process / S. Sahoo, K. Chou // Additive Manufacturing. – 2016. – Vol. 9. – P. 14–24. DOI: 10.1016/j.addma.2015.12.005

16. Romano, J. Thermal modeling of laser based additive manufacturing processes within common materials / J. Romano, L. Ladani, M. Sadowski // Procedia Manufacturing. – 2015. – Vol. 1. – P. 238–250. DOI: 10.1016/j.promfg.2015.09.012

17. Влияние температурно-скоростных параметров обработки на структурно-фазовое состояние и свойства сплава на основе алюминида титана Ti2AlNb / С.Л. Демаков [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 2024. – Т. 125, № 1. – С. 108–118. DOI: 10.31857/S0015323024010142

18. Влияние термической обработки на структуру и свойства TiAl-сплава системы Ti-Al-V-Nb-Cr-Gd, синтезированного методом селективного электронно-лучевого сплавления / П.В. Панин [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2023. – Т. 26, № 6. – С. 61–74. – DOI: 10.55652/1683-805X_2023_26_6_61

19. Lewandowski, J.J. Metal additive manufacturing: A review of mechanical properties / J.J. Lewandowski, M. Seifi // Annual Review of Materials Research. – 2016. – Vol. 46. – P. 151–186. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070115-032024

20. Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties / T. DebRoy [et al.] // Progress in Materials Sciencею – 2018. – Vol. 92. – P. 112–224. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001

21. Hybrid thermal modeling of additive manufacturing processes using physics-informed neural networks for temperature prediction and parameter identification / S. Liao [et al.] // Computational Mechanics. – 2023. – Vol. 72. – P. 499–512. DOI: 10.1007/s00466-022-02257-9

22. Artificial intelligence meets laser technology: A review of recent advances / S. Elhamali [et al.] // Results in Surfaces and Interfaces. – 2025. – Vol. 19. – P. 100484. DOI: 10.1016/j.rsurfi.2025.100484

23. Gatzhammer, B. A coupling environment for partitioned multiphysics simulations applied to fluid-structure interaction scenarios / B. Gatzhammer, M. Mehl, T. Neckel // Procedia Computer Science. – 2010. – Vol. 1, no. 1. – P. 681–689. DOI: 10.1016/j.procs.2010.04.073

24. Multi-Physics Coupling Approaches for Aerospace Numerical Simulations / M. Errera [et al.] // Aerospace Lab. – 2011. – No. 2. – P. 1–16. (https://hal.science/hal-01182439v1). Проверено 15.07.2025.

25. Sheldon, J.P. Methodology for comparing coupling algorithms for fluid-structure interaction problems / J.P. Sheldon, S.T. Miller, J.S. Pitt // World Journal of Mechanics. – 2014. – Vol. 4. – P. 54–70. DOI: 10.4236/wjm.2014.42007

26. A review on distortion and residual stress in additive manufacturing / D. Xie [et al.] // Chinese Journal of Mechanical Engineering: Additive Manufacturing Frontiers. – 2022. – Vol. 1. – P. 100039. DOI: 10.1016/j.cjmeam.2022.100039

27. Numerical analysis of residual stresses in parts produced by selective laser melting process / B.M. Marques [et al.] // Procedia Manufacturing. – 2020. – Vol. 47. – P. 1170–1177. DOI: 10.1016/j.promfg.2020.04.167

28. Hodge, N.E. Implementation of a thermomechanical model for the simulation of selective laser melting / N.E. Hodge, R.M. Ferencz, J.M. Solberg // Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 54, no. 1. – P. 33–51. DOI: 10.1007/s00466-014-1024-2

29. Microscale residual stresses in additively manufactured stainless steel: Computational simulation / D. Hu [et al.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2022. – Vol. 161. – P. 104822. DOI: 10.1016/j.jmps.2022.104822

30. A thermo – Mechanical modelling approach on the residual stress prediction of SLM processed HPNGV aeroengine part / B.K. Nagesha [et al.] // Materials Today: Proceedings. –2021. – Vol. 44. – P. 4990–4996. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.940

31. Schoinochoritis, B. Simulation of metallic powder bed additive manufacturing processes with the finite element method: A critical review / B. Schoinochoritis, D. Chantzis, K. Salonitis // Proc IMechE Part B: J Engineering Manufacture. – 2017. – Vol. 231, no. 1. – P. 96–117. DOI: 10.1177/0954405414567522

32. Effect of DED process parameters on distortion and residual stress state of additively manufactured Ti-6Al-4V components during machining / D. Romanenko [et al.] // Procedia CIRP. – 2022. – Vol. 111. – P. 271–276. DOI: 10.1016/j.procir.2022.08.020

33. Review on residual stresses in metal additive manufacturing: formation mechanisms, parameter dependencies, prediction and control approaches / S. Chen [et al.] // Journal of Materials Research and Technology. – 2022. – Vol. 17. – P. 2950–2974. DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.02.054

34. Additive manufacturing of Ni-based superalloys: Residual stress, mechanisms of crack formation and strategies for crack inhibition / C. Guo [et al.] // Nano Materials Science. – 2023. – Vol. 5. – P. 53–77. DOI: 10.1016/j.nanoms.2022.08.001

35. Князева, А.Г. Особенности инициирования подвижным источником энергии реакций в плоском слое, расположенном на подложке / А.Г. Князева, О.Н. Крюкова // Химическая физика и мезоскопия. – 2024. – Т. 26, № 1. – С. 5–21. DOI: 10.62669/17270227.2024.1.1

36. Князева, А.Г. Термомеханическая связанная модель синтеза покрытия на подложке / А.Г. Князева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 1. – С. 58–74. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.1.06

37. Electron beam assisted deposition of Ni–Al coatings onto steel substrate / A.A. Bakinovskii, A.G. Knyazeva [et al.] // International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis – 2019. – Vol. 28. – P. 245–255. DOI: 10.3103/S1061386219040034

38. Knyazeva, A. Modeling Ti-Al-C-composite synthesis on a substrate under control of electron beam / A. Knyazeva, O. Kryukova // Journal of Crystal Growth. – 2020. – Vol. 531. – P. 125349. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2019.125349

39. Knyazeva, A.G. Reaction initiation by laser in Ti–Al–CuO powder mixture / A.G. Knyazeva, M.G. Krinitcyn // International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis. – 2025. – Vol. 34, no. 1. – P. 1–9. DOI: 10.3103/S1061386224700365

40. Ахметшин, Л.Р. О расчете остаточных напряжений в условиях лазерного сплавления / Л.Р. Ахметшин, И.Ю. Смолин, А.Г. Князева // Математическое моделирование в естественных науках. – 2022. – Т. 1. – С. 16–19.

41. Knyazeva, A.G. Solution of the plane thermoelasticity problems based on a new set of equations / A.G. Knyazeva, L.R. Akhmetshin, I.Yu. Smolin // Applied Mathematical Modelling. – 2025. – Vol. 137, Part A, Art. Num. 115652. – P. 1–22. DOI: 10.1016/j.apm.2024.115652

42. Самарский, А.А. Методы решений разностных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

43. Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

44. Столович, Н.Н. Температурные зависимости теплофизических свойств некоторых металлов / Н.Н. Столович, Н.С. Миницкая. – Минск: Наука и техника,1975. – 160 с.

45. Зиновьев, В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.

46. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: справочник / под ред. Б.Е. Неймарка. – М.-Л.: Энергия, 1967. – 240 с.

47. Физические величины: справочник / под. ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

48. Казанцев, Е.И. Промышленные печи. Справочное руководство для расчетов и проектирования / Е.И. Казанцев. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.

49. Tallon, J.L. Temperature dependence of the elastic constants of aluminum / J.L. Tallon, A. Wolfenden // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 1979. – Vol. 40, no. 11. – P. 831–837. DOI: 10.1016/0022-3697(79)90037-4

50. Fisher, E.S. Single-crystal elastic moduli and the hcp → bcc transformation in Ti, Zr, and Hf / E.S. Fisher, C.J. Renken // Physical Review. – 1964. – Vol. 135, no. 2A. – P. A482–A494. DOI: 10.1103/PhysRev.135.A482

References

1. Frazier W.E. Metal additive manufacturing: A review. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2014, Vol. 23, pp. 1917–1928. doi: 10.1007/s11665-014-0958-z

2. Kolubaev E.A., Rubtsov V.E., Chumaevsky A.V., Astafurova E.G. Micro-, meso- and macrostructural design of bulk metallic and polymetallic materials by wire-feed electron-beam additive manufacturing. *Physical Mesomechanics*, 2022, Vol. 25, pp. 479–491. doi: 10.1134/S1029959922060017

3. Durai Murugan P., Vijayananth S, Natarajan M.P., Jayabalakrishnan D., Arul K., Jayaseelan V., Elanchezhian J. A current state of metal additive manufacturing methods: A review. *Materials Today: Proceedings*, 2022, Vol. 59, pp. 1277–1283. doi: 10.1016/j.matpr.2021.11.503

4. Zafar M.Q., Sajjad R., Anwar M.T., Mustafa M.S., Husnain N., Aqeel A.B., Khan M.B. A review on metal additive manufacturing – types, applications and future trends. *Recent Progress in Materials*, 2025, Vol. 7, No. 1, 006. doi: 10.21926/rpm.2501006

5. Pragana J.P.M., Sampaio R.F.V., Bragança I.M.F., Silva C.M.A., Martins P.A.F. Hybrid metal additive manufacturing: A state–of–the-art review. *Advances in Industrial and Manufacturing Engineering*, 2021, Vol. 2, Art. 100032. doi: 10.1016/j.aime.2021.100032

6. Khaing M.W., Fuh J.Y.H., Lu L. Direct metal laser sintering for rapid tooling: processing and characterization of EOS parts. *Journal of Materials Processing Technology*, 2001, Vol. 113, pp. 269–272. doi: 10.1016/S0924-0136(01)00584-2

7. Dobrzańska-Danikiewicz A.D., Bączyk A. A review of additive manufacturing technologies. *Archives of Materials Science and Engineering*, 2024, Vol. 128, Is 2, pp. 68–85 doi: 10.5604/01.3001.0054.8755

8. Kumar P., Mahamani A., Durga Prasad B. Additive manufacturing – A literature review. *Materials Science Forum*, 2020, Vol. 979, pp. 74–83. doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.979.74

9. Tshephe T.S., Akinwamide S.O., Olevsky E., Olubambi P.A. Additive manufacturing of titanium-based alloys – A review of methods, properties, challenges, and prospects. *Heliyon*, 2022, Vol. 8, Art. e09041. doi: 10.1016/j.heliyon.2022.e09041

10. Bhuvanesh Kumar M., Sathiya P. Methods and materials for additive manufacturing: A critical review on advancements and challenges. *Thin–Walled Structures*, 2021, Vol. 159, Art. 107228. doi: 10.1016/j.tws.2020.107228

11. Gade S., Vagge S., Rathod M. A review on additive manufacturing – methods, materials, and its associated failures. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 2023, Vol. 17, No. 3, pp. 40–63. doi: 10.12913/22998624/163001

12. Srivastava M., Rathee S., Patel V., Kumar A., Koppad P.G. A review of various materials for additive manufacturing: Recent trends and processing issues. *Journal of Materials Research and Technology*, 2022, Vol. 21, pp. 2612–2641. doi: 10.1016/j.jmrt.2022.10.015

13. Samantaray M., Sahoo S., Thatoi D. Computational modeling of heat transfer and sintering behavior during direct metal laser sintering of AlSi10Mg alloy powder. *Comptes Rendus Mecanique*, 2018, Vol. 346, pp. 1043–1054. doi: 10.1016/j.crme.2018.08.006

14. Nandy J., Sarangi H., Sahoo S. Microstructure evolution of Al–Si–10Mg in direct metal laser sintering using phase field modeling. *Additive Manufacturing*, 2018, Vol. 6, pp. 107–117. doi: 10.1007/s40436-018-0213-1

15. Sahoo S., Chou K. Phase-field simulation of microstructure evolution of Ti–6Al–4V in electron beam additive manufacturing process. *Additive Manufacturing*, 2016, Vol. 9, pp. 14–24. doi: 10.1016/j.addma.2015.12.005

16. Romano J., Ladani L., Sadowski M. Thermal modeling of laser based additive manufacturing processes within common materials. *Procedia Manufacturing*, 2015, Vol. 1, pp. 238–250. doi: 10.1016/j.promfg.2015.09.012

17. Demakov S.L., Vodolazskii F. V., Illarionov A.G., Shabanov M.A., Karabanalov M.S. Effect of temperature and rate treatment parameters on the structural phase state and properties of Ti2AlNb titanium aluminide-based alloy. *Physics of Metals and Metallography*, 2024, Vol. 125, No. 1, pp. 100–110. doi: 10.1134/S0031918X2360238X

18. Panin P.V., Lukina E.A., Naprienko S.A., Alekseev E.B. Effect of heat treatment on the structure and properties of titanium aluminide alloy Ti–Al–V–Nb–Cr–Gd produced by selective electron beam melting. *Physical Mesomechanics*, 2024, Vol. 27, pp. 163–174. doi: 10.1134/S102995992402005X

19. Lewandowski J.J., Seifi M. Metal additive manufacturing: A review of mechanical properties. *Annual Review of Materials Research*, 2016, Vol. 46, pp. 151–186. doi: 10.1146/annurev-matsci-070115-032024

20. DebRoy T., Wei H.L., Zuback J.S., Mukherjee T., Elmer J.W., Milewski J.O., Beese A.M., Wilson-Heid A., Ded A., Zhang W. Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties. *Progress in Materials Science*, 2018, Vol. 92, pp. 112–224. doi: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001

21. Liao S., Xue T., Jeong J., Webster S., Ehmann K., Cao J. Hybrid thermal modeling of additive manufacturing processes using physics-informed neural networks for temperature prediction and parameter identification. *Computational Mechanics*, 2023, Vol. 72, pp. 499–512. doi: 10.1007/s00466-022-02257-9

22. Elhamali S., Musbah H., Zawi L., Shuwehdi A., Faris H., Mahdawe A. Artificial intelligence meets laser technology: A review of recent advances. *Results in Surfaces and Interfaces*, 2025, Vol. 19, Art. 100484. doi: 10.1016/j.rsurfi.2025.100484

23. Gatzhammer B., Mehl M., Neckel T. A coupling environment for partitioned multiphysics simulations applied to fluid-structure interaction scenarios. *Procedia Computer Science*, 2010, Vol. 1, No. 1, P. 681–689. doi: 10.1016/j.procs.2010.04.073

24. Errera M., Dugeai A., Girodroux-Lavigne P., Garaud J.D., Poinot M., Cerqueira S., Chaineray G. Multi-physics coupling approaches for aerospace numerical simulations. *Aerospace Lab*, 2011, No. 2, pp. 1–16. available at: https://hal.science/hal-01182439v1

25. Sheldon J.P., Miller S.T., Pitt J.S. Methodology for comparing coupling algorithms for fluid-structure interaction problems. *World Journal of Mechanics*, 2014, Vol. 4, pp. 54–70. doi: 10.4236/wjm.2014.42007

26. Xie D., Lv F., Yang Y., Shen L., Tian Z., Shuai C., Chen B., Zhao J. A review on distortion and residual stress in additive manufacturing. *Chinese Journal of Mechanical Engineering: Additive Manufacturing Frontiers*, 2022, Vol. 1, Art. 100039. doi: 10.1016/j.cjmeam.2022.100039

27. Marques B.M., Andrade C.M., Neto D.M., Oliveira M.C., Alves J.L., Menezes L.F. Numerical analysis of residual stresses in parts produced by selective laser melting process. *Procedia Manufacturing*, 2020, Vol. 47, pp. 1170–1177. doi: 10.1016/j.promfg.2020.04.167

28. Hodge N.E., Ferencz R.M., Solberg J.M. Implementation of a thermomechanical model for the simulation of selective laser melting. *Computational Mechanics*, 2014, Vol. 54, No. 1, pp. 33–51. doi: 10.1007/s00466-014-1024-2

29. Hu D., Grilli N., Wang L., Yang M., Yan W. Microscale residual stresses in additively manufactured stainless steel: Computational simulation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2022, Vol. 161, Art. 104822. doi:10.1016/j.jmps.2022.104822

30. Nagesha B.K., Anand Kumar S., Vinodh K., Pathania A., Barad S. A thermo – mechanical modelling approach on the residual stress prediction of SLM processed HPNGV aeroengine part. *Materials Today: Proceedings*, 2021, Vol. 44, pp. 4990–4996. doi: 10.1016/j.matpr.2020.12.940

31. Schoinochoritis B., Chantzis D., Salonitis K. Simulation of metallic powder bed additive manufacturing processes with the finite element method: A critical review. *Proc. IMechE Part B: J Engineering Manufacture*, 2017, Vol. 231, No. 1, pp. 96–117. doi: 10.1177/0954405414567522

32. Romanenko D., Prakash V.J., Kuhn T., Moeller C., Hintze W., Emmelmann C. Effect of DED process parameters on distortion and residual stress state of additively manufactured Ti-6Al-4V components during machining. *Procedia CIRP*, 2022, Vol. 111, pp. 271–276. doi: 10.1016/j.procir.2022.08.020

33. Chen S., Gao H., Zhang Y., Wu Q., Gao Z., Zhou X. Review on residual stresses in metal additive manufacturing: formation mechanisms, parameter dependencies, prediction and control approaches. *Journal of Materials Research and Technology*, 2022, Vol. 17, pp. 2950–2974. doi: 10.1016/j.jmrt.2022.02.054

34. Guo C., Li G., Li S., Hu X., Lu H., Li X., Xu Z., Chen Y., Li Q., Lu J., Zhu Q. Additive manufacturing of Ni-based superalloys: Residual stress, mechanisms of crack formation and strategies for crack inhibition. *Nano Materials Science*, 2023, Vol. 5, pp. 53–77. doi: 10.1016/j.nanoms.2022.08.001

35. Knyazeva A.G., Kryukova O.N. Osobennosti initsiirovaniia podvizhnym istochnikom energii reaktsii v ploskom sloe, raspolozhennom na podlozhke [Peculiarities of the reaction initiation by a moving energy source in a thin layer located on a substrate]. *Khimicheskaia fizika i mezoskopiia* [*Chemical Physics and Mesoscopy*], 2024, Vol. 26, № 1, pp. 5–21. doi: 10.62669/17270227.2024.1.1

36. Knyazeva A.G. Termomekhanicheskaia sviazannaia model' sinteza pokrytiia na podlozhke [Thermomechanical coupled model of coating synthesis on a substrate]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, No. 1, pp. 58–74. doi: 10.15593/perm.mech/2024.1.06

37. Bakinovskii A.A., Knyazeva A.G., Krinitcyn M.G., Kryukova O.N., Pobol I.L., Fedorov V.V., Rajczyk J. Electron beam assisted deposition of Ni–Al coatings onto steel substrate. *International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis*, 2019, Vol.28, pp. 245–255. doi: 10.3103/S1061386219040034

38. Knyazeva A., Kryukova O. Modeling Ti-Al-C-composite synthesis on a substrate under control of electron beam. *Journal of Crystal Growth*, 2020, Vol. 531, Art. 125349. doi: 10.1016/j.jcrysgro.2019.125349

39. Knyazeva A.G., Krinitcyn M.G. Reaction initiation by laser in Ti–Al–CuO powder mixture. *International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis*, 2025, Vol. 34, No. 1, pp. 1–9. doi: 10.3103/S1061386224700365

40. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu., Knyazeva A.G. O raschete ostatochnykh napriazhenii v usloviiakh lazernogo splavleniia [On the calculation of residual stresses under laser melting conditions]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh* [Mathematical modeling in natural sciences]. 2022, Vol. 1. pp. 16–19.

41. Knyazeva A.G., Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. Solution of the plane thermoelasticity problems based on a new set of equations. *Applied Mathematical Modelling*, 2025, Vol. 137, Part A, Art. 115652, pp. 1–22. doi: 10.1016/j.apm.2024.115652

42. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Numerical methods for grid equations, Basel, Birkhäuser Basel, 1989, 502 p. doi: 10.1007/978-3-0348-9142-4

43. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. *Moscow, Nauka*, 1984, 288 p.

44. Stolovich N.N., Minitskaya N.S. Temperaturnye zavisimosti teplofizicheskikh svoistv nekotorykh metallov [Temperature dependences of thermophysical properties of some metals]. *Minsk, Nauka i technika*, 1975, 160 p.

45. Zinoviev V.E. Teplofizicheskie svoistva metallov pri vysokikh temperaturakh. Spravochnik [Thermophysical properties of metals at high temperatures. Reference book]. *Moscow, Metallurgy*, 1989, 384 p.

46. Fizicheskie svoistva stalei i splavov, primeniaemykh v energetike: Spravochnik [Physical properties of steels and alloys used in power engineering: Handbook]. Ed. by B.E. Neimark. *Moscow, Leningrad, Energiya*, 1967, 240 p.

47. Fizicheskie velichiny: Spravochnik [Physical quantities: Handbook]. Ed. by I.S. Grigor'ev, E.Z. Meilikhov. *Moscow, Energoatomizdat*, 1991, 1232 p.

48. Kazantsev E.I. Promyshlennye pechi. Spravochnoe rukovodstvo dlia raschetov i proektirovaniia [Industrial Furnaces. Reference Manual for Calculations and Design]. *Moscow, Metallurgiia*, 1975. 368 p.

49. Tallon J.L., Wolfenden A. Temperature dependence of the elastic constants of aluminum. *Journal of Physics and Chemistry of Solids,* 1979, Vol. 40, No. 11, pp. 831–837. doi: 10.1016/0022-3697(79)90037-4

50. Fisher E.S., Renken C.J. Single-crystal elastic moduli and the hcp → bcc transformation in Ti, Zr, and Hf. *Physical Review*, 1964, Vol. 135, No. 2A, pp. A482–A494. doi: 10.1103/PhysRev.135.A482

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, topic number FWRW-2022-0003.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The authors' contributions are equal.