Лурье, С.А. Моделирование диссипативных термомеханических процессов / С.А. Лурье, П.А. Белов. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.05 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 5. – С. 56–68.

Perm Polytech Style: Lurie S.A., Belov P.A. Modeling of dissipative thermomechanical processes. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 5, pp. 56-68. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.5.05
УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

С.А. Лурье, П.А. Белов

Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 04 сентября 2025 г.
Одобрена: 10 октября 2025 г.
Принята к публикации:
25 октября 2025 г.

Ключевые слова:

пространственно-временной континуум, трансверсальная изотропия, вариационная модель, необратимые процессы, термический потенциал, динамическая термоупругость, теплообмен, обобщенные уравнения теплопроводности, волновые свойства тепла.

АННОТАЦИЯ

В работе для описания связных диссипативных термодинамических процессов деформирования вариационный метод моделирования обобщается на пространственно-временной континуум, где нормированное время является четвертой координатой. Формулируется кинематическая модель среды в 4D-пространстве Минковского и соответствующая силовая модель с интерпретацией всех компонент тензора деформации и тензора напряжении. Для формулировки силовой модели привлекается принцип возможных перемещений, справедливый для обратимых и для необратимых процессов. Показывается необходимость расширения пространственно-временного континуума на случай трансверсально-изотропного континуума в отношении координаты времени. Трехмерное подпространство, соответствующее трехмерной среде, остается изотропным. В общем случае полагается, что спектр внутренних сил определяется тензором второго ранга и вектором, внутренними усилиями пружинного типа. Формулируется обобщенная физическая модель среды, определяемая тензорами обобщенных модулей упругости третьего и четвертого ранга. При этом наличие тензоров третьего ранга не противоречит свойствам симметрии механических свойств изотропной среды, ибо тензоры третьего ранга затрагивают только эффекты, связанные с диссипативными процессами, а механические характеристики обратимых процессов определяются только тензорами четвертого ранга, как это имеет место в классической упругости. Показано, что система определяющих уравнений включает систему уравнений термоупругости, вектор импульсов, вектор тепловых потоков и скаляр – температуру. Примечательно, что уравнения теплопроводности, обобщающие уравнения Фурье и уравнения Дюамеля – Неймана, следуют из системы определяющих уравнений 4D-модели как прямое следствие, без дополнительных гипотез. Последовательно решается проблема идентификации физических постоянных в обобщенных определяющих уравнениях через известные физические константы термоупругости и теплопроводности.

© **Лурье Сергей Альбертович** – д. т. н., проф., член-корр. РАН, г. н. с., зав. лабораторией, e-mail: salurie@mail.ru
Белов Петр Анатольевич – д. ф.-м. н., в. н. с., e-mail: BelovPA@yandex.ru

Sergey A. Lurie – Doctor of Technical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Head of Laboratory, e-mail: salurie@mail.ru
Petr A. Belov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher at the Institute of Applied Mechanics, e-mail: BelovPA@yandex.ru

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MODELING OF DISSIPATIVE THERMOMECHANICAL PROCESSES

S.A. Lurie, P.A. Belov

Institute of Applied mechanics of RAS, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 September 2025
Approved: 10 October 2025
Accepted for publication:
25 October 2025

Keywords:

space-time continuum, transverse isotropy, variational model, irreversible processes, thermal potential, dynamic thermoelasticity, thermal conductivity, generalized heat conduction equations, wave properties of heat.

ABSTRACT

In this paper, the variational modeling method is generalized to a space-time continuum, where normalized time is the fourth coordinate, for describing coupled dissipative thermodynamic deformation processes. A kinematic model of the medium in 4D Minkowski space and a corresponding force model with interpretation of all components of the strain tensor and stress tensor are formulated. The principle of possible displacements, valid for both reversible and irreversible processes, is used to formulate the force model. The necessity of expanding the space-time continuum to the case of a transversely isotropic continuum with respect to the time coordinate is shown. The three-dimensional subspace corresponding to the three-dimensional medium remains isotropic. In the general case, it is assumed that the spectrum of internal forces is determined by a second-rank tensor and a vector, internal spring-type efforts. A generalized physical model of the medium is formulated, determined by tensors of generalized elastic moduli of the third and fourth ranks. In this case, the presence of third-rank tensors does not contradict the symmetry properties of the mechanical properties of an isotropic medium, since third-rank tensors affect only the connected effects of thermal conductivity associated with dissipative processes, and the mechanical characteristics are determined only by fourth-rank tensors, as is the case in classical elasticity. It is shown that the system of constitutive equations includes a system of thermoelasticity equations, a momentum vector, a heat flux vector, and a scalar – temperature. It is noteworthy that the heat equations generalizing the Fourier equations and the Diamel – Neumann equations are obtained from the system of constitutive equations of the 4D model as a direct consequence without additional hypotheses. The problem of identifying physical constants in generalized constitutive equations through known physical constants of thermoelasticity and thermal conductivity is consistently solved. An example of constructing a model of thermodynamic behavior of a rod under conditions of connectivity of thermomechanical loading and heat exchange processes is considered.

Введение

Классическая теория термоупругости, достаточно полно изложенная в известных работах [1–3], доказала свою физическую адекватность и широко применялась на практике для прогнозирования деформаций твердых тел и конструкций, сопровождающихся изменениями температуры. Классическая проблема теплопроводности также хорошо изучена, за исключением описания распространения тепла при низких температурах [4], моделирования термоупругих свойств низкоразмерных систем [5; 6], наноструктурированных микроэлектронных компонентов и различных термоэлектрических устройств [7]. Например, известно, что для нестационарного процесса теплопроводности закон Фурье приводит к бесконечной скорости распространения тепла в континууме, что явно противоречит теории относительности. Чтобы преодолеть это противоречие, разработана обобщенная модель теплопроводности Каттанео – Вернотта, в которой учитываются волновые свойства тепла. В работе [8] проведен обзор исследований недиффузионных моделей теплопроводности как варианта общего закона теплопроводности с учетом тепловых инерционных эффектов. Примечательно, что обобщение закона теплопроводности Фурье связывались с необратимыми термодинамическими процессами [9; 10]; показано, что время релаксации в законе теплопроводности Максвелла – Каттанео может быть определено вязкоупругими свойствами среды. Модели теплопроводности и теория теплообмена, таким образом, требуют уточнения и обобщения на случаи волнового характера передачи тепла и градиентных теорий повышенного порядка.

Весьма перспективными в этом отношении являются модели среды, сформулированные для пространственно-временного 4D-континуума [11; 12]. В результате показано, что формально построенная теория упругости включает в себя традиционную термоупругость и модель теплообмена, где естественным образом определяются импульсы и тепловые потоки как компоненты 4D-напряжений, а энтропия и температура служат отдельными, не приводимыми диагональными компонентами тензоров 4D-дисторсий и напряжений соответственно. В работах [13–15] этот подход использовался при построении расширенной термодинамики деформирования для обратимых и необратимых процессов. Показано, что для корректного моделирования термоупругости и теплообмена требуется вводить расширенную модель 4D-среды, трансверсальную в направлении орта N_i времени t. В работах [14–16] представлены модели среды, в которых дается обоснование всех основных положений классической термоупругости, включая гипотезу Дюамеля – Неймана, уравнения равновесия для неравномерно нагретых твердых тел, а также некоторые варианты законов теплопроводности Фурье и Максвелла – Каттанео [17–19]

Теория упругости пространственно-временного континуума является более общей, чем классическая термоупругость, ибо расширенная система уравнения движения «4D-пространства – времени» включает уравнения распространения тепла, для которого явно моделируется волновой механизм распространения тепла.

Для адекватного описания теплообмена и внутреннего трения, связанного с динамической вязкостью, следует привлекать модели необратимых процессов деформирования, сопровождающиеся диссипацией энергии. Это достигается использованием обобщенного вариационного принципа Л.И. Седова [20–22] и связано с определением неинтегрируемых вариационных форм – каналов диссипации с соответствующими физическими постоянными – диссипативными модулями. Вариационный алгоритм построения моделей сред с привлечением обобщенной 4D-модели среды позволил сформулировать широкий спектр моделей теплообмена [23–25], которые активно исследуются в настоящее время и теоретически и экспериментально. Тем не менее построение полностью согласованной теории связных процессов термупругости и теплопроводности не реализовано полностью, что, вероятно, определяется связностью физических процессов, сложностью формулировок физических моделей и трудностью идентификации параметров обобщенных сред.

Новизна настоящего исследования связана с построением модели линейной изотропной среды с адекватным и наиболее полным описанием известных термомеханических физических эффектов термоупругостти и теплообмена, включая масштабные временные эффекты релаксации для процессов распространения тепла и деформирования с привлечением, по возможности, минимального числа параметров модели. В настоящей работе приводится идентификация всех модулей обобщенной 4D-среды в определяющих уравнениях через известные физические параметры термомеханики и теплопроводности. Предлагается использовать принцип возможных перемещений, не разделяя обратимые и необратимые динамические процессы, что позволяет ввести расширенную структуру определяющих уравнений в 4D и избавляет от необходимости введения требований положительной определенности для плотности потенциальной энергии (в случае обратимых процессов). В результате представлена связная модель динамической термоупругости, учитывающая вязкоупругие эффекты и теплообмен с диффузионным и волновым механизмами теплопередачи. Отмечается также возможность адаптации предлагаемой модели для описания процессов деформирования, конструктивных объектов (например, стержней, пластин и оболочек) со своими характерными кинематическими моделями и определяющими соотношениями. Это удается реализовать в силу того, что в рамках общей модели связной 4D-термомеханики модели для 3D-подпространства могут быть расширены и конкретизированы в значительной степени автономно. С другой стороны, использование полной постановки связной необратимой термодинамики позволяет идентифицировать физические постоянные связной термомеханики в рамках предлагаемой процедуры, а затем использовать эти результаты при моделировании конкретных конструктивных элементов, находящихся в условиях интенсивного термомеханического нагружения.

План работы включает формулировку кинематической модели, силовой и физической модели, процедуру идентификации параметров и пример.

Кинематическая модель

Определим базис в пространстве Минковского с ортами X_i, Y_i, Z_i, N_i, где X_i, Y_i, Z_i – пространственные орты, а N_i – орт времени. Введем 4D-вектор перемещений R_i как его разложение в выбранном базисе:

$$R_i = r_i + iv R N_i \quad r_k = R_i \delta^*_{ik} \quad R = R_i N_i / (iv). \tag{1}$$

Здесь первые три компоненты в равенствах (1) являются пространственными компонентами перемещений трехмерной среды r_i, четвертая компонента R – локальным (различным в различных точках тела) и неравномерным (в сравнении со временем стороннего наблюдателя) временем; δ_{ij} – тензор Кронекера в 4D, ($\delta_{ij}\delta_{ij} = 4$), $\delta^*_{ij} = \delta_{ij} - N_i N_j$ – тензор Кронекера в 3D, ($\delta^*_{ij}\delta^*_{ij} = 3$), i – мнимая единица, v – нормирующий множитель, размерности скорости, индексы пробегают значения от 1 до 4.

Наряду с 4D-вектором перемещений (1), кинематическая модель содержит 4D-тензор дисторсии второго ранга $R_{i,j}$:

$$\begin{aligned} &R_{i,j} = r_{i,j} + (iv) R_{,j} N_i + \dot{r}_i N_j / (iv) + \dot{R} N_i N_j \\ &r_{i,j} = \gamma_{ij} + \theta \delta^*_{ij}/3 - \omega_p \Im_{ijpq} N_q, \\ &\begin{cases} \gamma_{mn} = (\delta^*_{im}\delta^*_{jn}/2 + \delta^*_{in}\delta^*_{jm}/2 - \delta^*_{ij}\delta^*_{mn}/3) r_{i,j} \\ \theta = r_{i,j}\delta^*_{ij} = r_{m,m}, \\ \omega_p = -r_{i,j}\Im_{ijps} N_s / 2, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

где $r_{i,j}$ – 3D-тензор дисторсии, представленный как разложение на 3D-тензор девиатор γ_{ij}, шаровой 3D-тензор $\theta\delta^*_{ij}/3$ и 3D-псевдовектор локальных пространственных вращений $\omega_p \Im_{ijpq} N_q$, $\Im_{ijpq}$ – 4D-тензор Леви – Чивиты, $R_{,j} = R_{,i}\delta^*_{ij}$ ($\delta^*_{ij} = \delta_{ij} - N_i N_j$) – пространственный градиент локального неравномерного времени, $\dot{r}_i$ – вектор 3D-скорости, $\dot{R} = R_{,i} N_i$ – энтропия.

Силовая модель

Положим, что силовая сторона модели определяется векторным σ_i и тензорным σ_{ij} силовыми факторами, совершающими возможную работу, соответственно на вариации вектора перемещений $\sigma_i \delta R_i$ и на вариации тензора дисторсий $\sigma_{ij}\delta R_{i,j}$:

$$\overline{\delta U} = \int_V (\sigma_i \delta R_i + \sigma_{ij} \delta R_{i,j}) dV. \tag{3}$$

Рассмотрим подробнее работу напряжений σ_{ij} на тензоре дисторсий $R_{i,j}$ в (3) и запишем ее с учетом (2):

$$\begin{aligned}
&\overline{\delta U} = \int_V \sigma_{ij}\delta R_{i,j}dV = \\
&= \int_V \sigma_{ij}\delta[r_{i,j} + (iv)R_{,j}N_i + \dot{r}_i N_j / (iv) + \dot{R}N_i N_j]dV = \\
&= \int_V [\sigma_{ij}\delta^*_{pi}\delta^*_{qj}\delta r_{p,q} + (iv)\sigma_{ij}N_i\delta^*_{kj}\delta R_{,k} + \\
&+ (\sigma_{ij}\delta^*_{ki}N_j / (iv))\delta\dot{r}_k + \sigma_{ij}N_iN_j\delta\dot{R}]dV = \\
&= \int_V [\sigma^*_{pq}\delta r_{p,q} + q_k\delta R_{,k} - p_k\delta\dot{r}_k + T\delta\dot{R}]dV,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma^*_{ij} = \sigma_{pq}\delta^*_{ip}\delta^*_{jq}$ – 3D-тензор пространственных напряжений (шесть компонент для симметричной теории упругости), $\sigma^*_{ij} = \tau_{ij} + p\delta^*_{ij}$, $\tau_{pq} = \sigma_{ij}(\delta^*_{pi}\delta^*_{qj}/2 + \delta^*_{pj}\delta^*_{qi}/2 - \delta^*_{pq}\delta^*_{ij}/3)$, $p_k = -\sigma_{ij}\delta^*_{ik}N_j/(iv)$ – 3D-вектор импульсов (в общем случае три компоненты), $q_k = (iv)\sigma_{ij}N_i\delta^*_{jk}$ – 3D-вектор теплового потока (в общем случае три компоненты), $T = \sigma_{ij}N_iN_j$ – приращение температуры (в общем случае одна компонента).

Равенство (4) позволяет определить следующее разложение 4D-тензора напряжений и указать список силовых факторов как проекций в ортогональном базисе $\delta^*_{pi}\delta^*_{qj}$, $(iv)N_i\delta^*_{kj}$, $(iv)^{-1}\delta^*_{ki}N_j$, N_iN_j:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \sigma^*_{ij} - (iv)p_iN_j + q_jN_i/(iv) + TN_iN_j \\
&\begin{cases}
\sigma^*_{pq} = \sigma_{ij}\delta^*_{pi}\delta^*_{qj} \\
q_k = (iv)\sigma_{ij}N_i\delta^*_{kj} \\
p_k = -(iv)^{-1}\sigma_{ij}\delta^*_{ki}N_j \\
T = \sigma_{ij}N_iN_j.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{5}$$

Воспользуемся принципом возможных перемещений, чтобы записать уравнения «равновесия» статические краевые условия в 4D-напряжениях:

$$\begin{aligned}
&\delta A - \overline{\delta U} = \\
&= (\int_V P^V_i\delta R_i dV + \int_F P^F_i\delta R_i dF) - \int_V (\sigma_i\delta R_i + \sigma_{ij}\delta R_{i,j})dV = \\
&= \int_V (\sigma_{ij,j} - \sigma_i + P^V_i)\delta R_i dV + \int_F (P^F_i - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из вариационного равенства (6) следуют уравнения Эйлера для связанной задачи термоупругости/термогидродинамики и баланса тепла:

$$\sigma_{ij,j} + P^V_i = 0. \tag{7}$$

Трехмерные традиционные уравнения движения являются пространственной проекцией уравнений (7):

$$(\sigma_{ij,j} - \sigma_i + P^V_i)\delta^*_{ik} = 0. \tag{8}$$

Учитывая (5), уравнение (8) перепишем в следующем виде:

$$\sigma^*_{ka,a} - \dot{p}_k - \sigma_i\delta^*_{ik} + P^V_i\delta^*_{ik} = 0. \tag{9}$$

Соответственно, уравнение баланса тепла является временной проекцией уравнений (7):

$$(\sigma_{ij,j} - \sigma_i - P^V_i)N_i = 0.$$

Последнее уравнение можно с учетом (5) записать в терминах компонент напряжений:

$$\begin{aligned}
&q_{k,k} + \dot{T} - \sigma + P^V_i(iv)N_i = 0, \\
&\sigma = \sigma_iN_i.
\end{aligned} \tag{10}$$

Спектр краевых задач для системы уравнений (9), (10) определяется четырьмя парами альтернативных граничных условий в каждой неособенной точке гиперповерхности, ограничивающей соответствующий 4D-объем пространства событий:

$$\int_F (P^F_i - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0. \tag{11}$$

С учетом (1), граничные условия (11) на замкнутой гиперповерхности, ограничивающей область пространства событий, можно переписать в проекциях:

$$\begin{cases}
\int_F (P^F_i\delta^*_{ik} - \sigma_{ij}\delta^*_{ik}n_j)\delta r_k dF = 0, \\
\int_F (P^F_iN_i - \sigma_{ij}N_in_j)\delta R dF = 0.
\end{cases}$$

На пространственном гиперцилиндре, на котором $N_in_i = 0$, граничные условия в проекциях напряжений записываются в виде:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}
\int_F (P^F_i\delta^*_{ik} - \sigma^*_{kj}n_j)\delta r_k dF^3 = 0, \\
\int_F (P^F_i(iv)N_i - q_jn_j)\delta R dF^3 = 0,
\end{cases} \\
&F^4(x_i,\ i = 1\div 4) = F^3 \cup F^t, \\
&F^t = F^{t=t_1} \cup F^{t=t_2},\ \ F^3 = F^3(x_i,\ t_1 < t < t_2).
\end{aligned} \tag{12}$$

Верхний индекс в выражении F^3 означает, что эта величина является поверхностью трехмерного тела, а, соответственно, F^t определяет поверхность и объем тела при фиксированном времени.

На временных сечениях $F^{t=t_1}$, $F^{t=t_2}$ ($F^t = F^{t=t_1} \cup F^{t=t_2}$), на которых $N_in_i = \pm 1$, ($N_in_i = -1$, $t = t_1$ и $N_in_i = 1$, $t = t_2$) имеем соответственно начально-краевые условия

$$\begin{cases}
\{\int_F (P^F_i\delta^*_{ik} \pm (iv)p_k)\delta r_k dF^t\}\,|^{t=t_1}_{t-t_0} = 0, \\
\{\int_F (P^F_iN_i \mp T)\delta R dF^t\}\,|^{t=t_1}_{t-t_0} = 0.
\end{cases} \tag{13}$$

Физическая модель

Рассмотрим снова возможную работу внутренних силовых факторов в следующем обобщенном виде:

$$\overline{\delta U} = \int_V (\sigma_i \delta R_i + \sigma_{ij} \delta R_{i,j}) dV. \tag{14}$$

Для обратимых процессов линейная вариационная форма (14) по определению должна быть вариацией некоторого потенциала, который является объемной плотностью потенциальной энергии U^V.

Достаточным условием существования плотности потенциальной энергии являются формулы Грина:

$$\begin{cases} \sigma_i = \dfrac{\partial U^V}{\partial R_i}, \\ \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U^V}{\partial R_{i,j}}. \end{cases} \tag{15}$$

Действительно, полагая, что имеют место соотношения (15), получим:

$$\overline{\delta U} = \int_V (\sigma_i \delta R_i + \sigma_{ij} \delta R_{i,j}) dV = \int_V (\frac{\partial U^V}{\partial R_i} \delta R_i + \frac{\partial U^V}{\partial R_{i,j}} \delta R_{i,j}) dV +$$
$$= \int_V \delta U^V dV = \delta(\int_V U^V dV) = \delta U.$$

В общем случае линейная вариационная форма (14) может оставаться неинтегрируемой. Поэтому в общем случае запишем:

$$\begin{aligned} &\overline{\delta U} = \int_V (\sigma_i \delta R_i + \sigma_{ij} \delta R_{i,j}) dV = \\ &= \int_V [(\sigma_i \delta R_i + R_i \delta \sigma_i)/2 + \\ &+ (\sigma_i \delta R_i - R_i \delta \sigma_i)/2] dV + \\ &+ \int_V [(\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + R_{i,j} \delta \sigma_{ij})/2 + \\ &+ (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} - R_{i,j} \delta \sigma_{ij})/2] dV = \\ &= \delta[\frac{1}{2} \int_V (\sigma_i R_i + \sigma_{ij} R_{i,j}) dV] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [(\sigma_i \delta R_i - R_i \delta \sigma_i) + (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} - R_{i,j} \delta \sigma_{ij})] dV. \end{aligned} \tag{16}$$

Вариационное равенство (16) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема

Для физически линейных моделей возможная работа внутренних сил может быть разделена на обратимую и диссипативную части.

Представим тензоры обобщенных модулей второго, третьего и четвертого рангов в виде разложений по соответствующим ортогональным базисным тезорам для трансверсально-изотропного 4D-пространства. Тогда они имеют следующую структуру:

$$\begin{cases} E_{im} = E_1^2 \delta_{im}^* + E_2^2 N_i N_m \\ D_{im} = D_1^2 \delta_{im}^* + D_2^2 N_i N_m \end{cases}$$
$$\begin{cases} E_{imn} = E_1^3 \delta_{mn}^* N_i + E_2^3 \delta_{ni}^* N_m + E_3^3 \delta_{im}^* N_n + E_4^3 N_i N_m N_n \\ D_{imn} = D_1^3 \delta_{mn}^* N_i + D_2^3 \delta_{ni}^* N_m + D_3^3 \delta_{im}^* N_n + D_4^3 N_i N_m N_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} E_{ijmn} = E_1^4 \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + E_2^4 \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + E_3^4 \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \\ + E_4^4 \delta_{ij}^* N_m N_n + E_5^4 \delta_{im}^* N_j N_n + E_6^4 \delta_{in}^* N_m N_j + \\ + E_7^4 \delta_{jm}^* N_i N_n + E_8^4 \delta_{jn}^* N_i N_m + E_9^4 \delta_{mn}^* N_i N_j + \\ + E_{10}^4 N_i N_j N_m N_n \\ D_{ijmn} = D_1^4 \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + D_2^4 \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + D_3^4 \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \\ + D_4^4 \delta_{ij}^* N_m N_n + D_5^4 \delta_{im}^* N_j N_n + D_6^4 \delta_{in}^* N_m N_j + \\ + D_7^4 \delta_{jm}^* N_i N_n + D_8^4 \delta_{jn}^* N_i N_m + D_9^4 \delta_{mn}^* N_i N_j + \\ + D_{10}^4 N_i N_j N_m N_n, \end{cases} \tag{17}$$

где тензоры, обозначаемые буквой E: E_{im}, E_{imm} и E_{ijmn} являются тензорами обратимых свойств и участвуют при описании обратимых процессов. Соответственно, тензоры, характеризующие необратимые процессы, будем называть тензорами диссипативных свойств и обозначать буквой D: D_{im}, D_{imm} и D_{ijmn}. Модули, определяющие структуру тензоров обратимых и диссипативных свойств, имеют верхний и нижний индексы. Верхний индекс указывает на ранг соответствующего тензора, а нижний обозначает номер базисного тензора, соответствующего разложения (17).

Замечание.

Доказано [24; 25], что необходимым условием неинтегрируемости вариационных форм, включающих тензора модулей упругости четного порядка, является антисимметричность этих тензоров при перестановке соседних групп индексов (соседних индексов для тензоров второго ранга, пар индексов для тензоров четвертого ранга, троек индексов для тензоров шестого ранга и т.д.). В связи с этим тензор D_{im} следует принять равным нулю, так как в трансверсально-изотропном 4D-пространстве не существует базисных тензоров второго ранга, антисимметричных при перестановке индексов. Кроме того, из условия существования однородных деформированных состояний следует принять, что $E_{im} = 0$.

Поэтому, в силу сделанного замечания, определяющие уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_i = (E_{imn} + D_{imn}) R_{m,n} \\ \sigma_{ij} = (E_{mij} - D_{mij}) R_m + (E_{ijmn} + D_{ijmn}) R_{m,n}, \end{cases} \tag{18}$$

здесь $E_{ijmn} = E_{mnij}$, $D_{ijmn} = -D_{mnij}$, а тензора D_{imn}, D_{mij} третьего, нечетного ранга имеют произвольную симметрию [24; 25].

Справедливость обобщенных уравнений закона Гука (18) следует из последовательного анализа условий

интегрируемости и неинтегрируемости соответствующих вариационных форм в (16). Реализуя прямую подстановку соотношений (18) в условия, определяющие признаки интегрируемости и неинтегрируемости, докажем, что именно тензоры D_{imn}, D_{mij}, D_{ijmn} являются диссипативными модулями и определяют диссипативные процессы. Получим

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial R_{m,n}} - \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial R_i} = (E_{mij} + D_{mij}) - (E_{mij} - D_{mij}) = 2D_{mij} \neq 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_m} - \frac{\partial \sigma_m}{\partial R_{i,j}} = (E_{mij} - D_{mij}) - (E_{mij} + D_{mij}) = -2D_{mij} \neq 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} - \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial R_{i,j}} = (E_{ijmn} - E_{mnij}) + (D_{ijmn} - D_{mnij}) = 2D_{ijmn} \neq 0.$$

С другой стороны, для обратимых процессов плотность потенциальной энергии в соответствии с (16) имеет вид:

$$2U^V = 2E_{imn}R_iR_{m,n} + E_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n}. \tag{19}$$

Таким образом, доказано, что интегрируемая часть возможной работы внутренних силовых факторов (16) имеет вид (19) и содержит только тензоры обратимых свойств $E_{imn}; E_{ijmn}$. Тензоры диссипативных свойств $D_{imn}; D_{ijmn}$ в этой форме ожидаемо отсутствуют.

Отметим, что, так как квадратичная форма (19) сформулирована для 4D-модели среды и записана для динамических в общем случае процессов, то нет необходимости требовать положительную определенность правой части в (19).

Неинтегрируемая часть соотношения (16) соответствует совокупности каналов диссипации и имеет структуру:

$$\begin{aligned}\overline{\delta U} &= (\sigma_i \delta R_i - R_i \delta \sigma_i) + (\sigma_{ij}\delta R_{i,j} - R_{i,j}\delta\sigma_{ij}) = \\ &= 2D_{imn}(R_{m,n}\delta R_i - R_i \delta R_{m,n}) + D_{ijmn}(R_{m,n}\delta R_{i,j} - R_{i,j}\delta R_{m,n}).\end{aligned} \tag{20}$$

Формально из (20) вытекает существование каналов диссипации, третьего и четвертого рангов в соответствии с рангами тензоров диссипативных модулей $D_{imn}; D_{ijmn}$. Воспользуемся структурой этих модулей (17) и приведем (20) к виду суммы произведений отдельных диссипативных модулей на простейшие скалярные линейные вариационные формы:

$$\begin{aligned}\overline{\delta U} &= (\sigma_i \delta R_i - R_i \delta \sigma_i) + (\sigma_{ij}\delta R_{i,j} - R_{i,j}\delta\sigma_{ij}) = \\ &= D_1^2 \delta^*_{im}(R_m \delta R_i - R_i \delta R_m) + D_2^2 N_i N_m (R_m \delta R_i - R_i \delta R_m) + \\ &+ D_1^3(iv)(R\delta r_{m,m} - r_{m,m}\delta R) + D_2^3(iv)(r_j \delta R_{,j} - R_{,j}\delta r_j) + \\ &+ D_3^3(iv)^{-1}(r_i \delta \dot{r}_i - \dot{r}_i \delta r_i) + D_4^3(iv)(R\delta\dot{R} - \dot{R}\delta R) + \\ &+ (D_4^4 - D_9^4)(r_{m,m}\delta\dot{R} - \dot{R}\delta r_{m,m}) + (D_6^4 - D_7^4)(\dot{r}_i \delta R_{,i} - R_{,i}\delta \dot{r}_i).\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение**.**

Теорема

Из линейной вариационной формы (16) может быть выделена интегрируемая (обратимая) часть (19) и неинтегрируемая часть в виде суммы каналов диссипации (20). Неинтегрируемая составляющая в вариационном равенстве (16) представляется в виде простейших неинтегрируемых линейных вариационных форм (21) с диссипативными модулям упругости.

В дальнейшем будем вводить в определяющих уравнениях единую запись тензоров физических свойств C_{mij}, C_{ijmn}, полагая, что обратимые и необратимые составляющие модулей упругости не будут рассматриваться отдельно, т.е. считая, что оба эти процесса моделируются одновременно. После построения решения всегда можно будет выделить диссипативные модули упругости, чтобы рассмотреть все механизмы диссипации для конкретных задач. Кроме того, положим в $(E_{imn} + D_{imn}) = 0$, так что в (18) отсутствуют силовые факторы векторной размерности $\sigma_i = (E_{imn} + D_{imn})R_{m,n} = 0.$ То есть внутренние силовые факторы определяются тензором напряжений второго ранга, как это принято в классической механике твердого деформируемого тела.

Следовательно, определяющие соотношения обобщенной модели термомеханики (17) имеют вид:

$$\begin{cases}\sigma_i = 0, \\ \sigma_{ij} = C_{mij}R_m + C_{ijmn}R_{m,n}, \\ C_{mij} = (E_{mij} - D_{mij}), \quad C_{ijmn} = (E_{ijmn} + D_{ijmn}).\end{cases} \tag{22}$$

Физические соотношения классической модели упругости с симметричным тензором напряжений являются формальным частным случаем (22) и имеют вид $\sigma_{ij} = C_{ijmn}R_{m,n}$.

Обобщенная модель термомеханики. Идентификация параметров модели

Тензоры модулей упругости в 4D определяют физическую модель и для рассматриваемой связной проблемы термомеханики и теплообмена являются обобщенными тензорами модулей упругости. С другой стороны, тензоры модулей упругости могут быть представлены в виде формальных разложений по соответствующим базисам в 4D-трансверсально-изотропном пространстве (17). Коэффициенты, входящие в эти разложения, и определяют физические свойства модели. Проблема идентификации формальных коэффициентов в разложениях тензоров модулей упругости по известным термомеханическим характеристикам является одной из основных для окончательного построения физической модели. Решение этой ключевой проблемы является замыканием модели в целом, придавая ей фундаментальный характер. В формулировку модели входят тензоры разной размерности, отличающиеся друг от друга на размерность длины. Их отношение определяет характерную длину масштабных эффектов. Поэтому, даже если пренебрегать существованием внутренних сил σ_i векторной природы, модели (5), (9), (10), (22)

все равно будут содержать свойства, порождающие масштабные эффекты. Тем не менее уместно заметить, что более общие физические модели (18), где внутренние усилия определяются и вектором σ_i внутренних усилий пружинного типа и тензором второго ранга σ_{ij}, могут быть предметом дополнительного рассмотрения, ибо расширяют пространство физических свойств среды.

Рассмотрим вариант обобщенной модели среды (22), в которой тензоры модулей обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases}(E_{imn}+D_{imn})=0,\\(E_{mij}-D_{mij})=C_{mij},\\(E_{ijmn}+D_{ijmn})=C_{ijmn}.\end{cases}$$

Установим общую структуру тензоров модулей третьего C_{mij} и четвертого C_{ijmn} рангов, используя разложение этих тензоров в 4D по соответствующим ортогональным базисным тензорам:

$$\begin{aligned}&C_{mij}=C_1^3\delta^*_{mi}N_j+C_2^3\delta^*_{ij}N_m+C_3^3\delta^*_{ji}N_i+C_4^3N_iN_mN_n\\&C_{ijmn}=C_1^4\delta^*_{ij}\delta^*_{mn}+C_2^4\delta^*_{im}\delta^*_{jn}+C_3^4\delta^*_{in}\delta^*_{jm}+\\&+C_4^4\delta^*_{ij}N_mN_n+C_5^4\delta^*_{im}N_jN_n+C_6^4\delta^*_{in}N_mN_j+\\&+C_7^4\delta^*_{jm}N_iN_n+C_8^4\delta^*_{jn}N_iN_m+C_9^4\delta^*_{mn}N_iN_j+\\&+C_{10}^4N_iN_jN_mN_n.\end{aligned}\qquad(23)$$

Верхние индексы в выражениях для постоянных коэффициентов-физических постоянных в разложениях (23) указывают на принадлежность в разложении (23) к тензорам третьего и четвертого рангов соответственно. Запишем уравнения закона Гука для 4D-тензора напряжений (22) в терминах модулей упругости C_j^i. С учетом (23) получим:

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij}=C_1^3N_jr_i+C_3^3N_ir_j+C_2^3\delta^*_{ij}(iv)R+C_4^3(iv)N_iN_jR+\\&+(C_1^4\delta^*_{ij}+C_9^4N_iN_j)r_{m,m}+C_2^4r_{i,j}+C_3^4r_{j,i}+\\&+(C_4^4\delta^*_{ij}+C_{10}^4N_iN_j)\dot R+C_5^4(iv)^{-1}N_j\dot r_i+\\&+C_7^4(iv)^{-1}N_i\dot r_j+C_6^4(iv)N_jR_{,i}+C_8^4(iv)N_iR_{,j}.\end{aligned}\qquad(24)$$

Уравнения (24) содержат четырнадцать модулей C_j^i: четыре в тензоре модулей третьего ранга C_j^3 и десять в тензоре модулей четвертого ранга C_j^4.

Учитывая (24), можно записать 4D-уравнения «равновесия» в перемещениях:

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij,j}+P_i^V=C_2^4\Delta r_i+(C_1^4+C_3^4)r_{m,mi}+C_5^4(iv)^{-2}\ddot r_i+\\&+C_1^3(iv)^{-1}\dot r_i+C_3^3N_ir_{m,m}+(C_7^4+C_9^4)(iv)^{-1}N_i\dot r_{m,m}+\\&+C_8^4(iv)N_i\Delta R+C_2^3(iv)R_{,i}+(C_4^4+C_6^4)\dot R_{,i}+\\&+C_{10}^4(iv)^{-1}N_i\ddot R+C_4^3N_i\dot R+P_i^V=0.\end{aligned}\qquad(25)$$

Имея в виду (25), не трудно получить пространственные проекции 4D-уравнений «равновесия»:

$$\begin{aligned}&(\sigma_{ij,j}+P_i^V)\delta^*_{ik}=\\&=C_2^4\Delta r_k+(C_1^4+C_3^4)r_{m,mk}+C_5^4(iv)^{-2}\ddot r_k+C_1^3(iv)^{-1}\dot r_k+\\&+(C_4^4+C_6^4)\dot R_{,k}+C_2^3(iv)R_{,k}+P_i^V\delta^*_{ik}=0.\end{aligned}\qquad(26)$$

Нетрудно записать и временную проекцию 4D-уравнения (25), которая дает уравнение баланса тепла:

$$\begin{aligned}&(\sigma_{ij,j}+P_i^V)N_i=C_8^4(iv)\Delta R+C_{10}^4(iv)^{-1}\ddot R+\\&+C_4^3\dot R+(C_7^4+C_9^4)(iv)^{-1}\dot r_{m,m}+C_3^3r_{m,m}+P_i^VN_i=0.\end{aligned}\qquad(27)$$

Наконец, используя разложение силовых факторов для тензора второго ранга по базису в пространственно-временном континууме (5) и представление этого тензора в терминах перемещений в 4D (25), получим следующую систему определяющих уравнений (обобщенных уравнений закона Гука) для всех компонент обобщенных напряжений:

$$\tau_{pq}=(C_2^4+C_3^4)(r_{p,q}/2+r_{q,p}/2-r_{k,k}\delta^*_{pq}/3),\qquad(28)$$

$$p=(C_1^4+(C_2^4+C_3^4)/3)r_{m,m}+C_4^4\dot R+C_2^3(iv)R,\qquad(29)$$

$$T=C_9^4r_{m,m}+C_{10}^4\dot R+C_4^3(iv)R,\qquad(30)$$

$$q_k=(iv)[C_3^3r_k+C_7^4(iv)^{-1}\dot r_k+C_8^4(iv)R_{,k}],\qquad(31)$$

$$p_k=-(iv)^{-1}[C_1^3r_k+C_5^4(iv)^{-1}\dot r_k+C_6^4(iv)R_{,k}].\qquad(32)$$

В уравнения закона Гука (28)–(32) входят линейные дифференциальные операторы по времени, которые позволяют моделировать переходные процессы. Поэтому четыре исходных модуля $C_4^4;C_{10}^4;C_7^4;C_5^4$, стоящие при производных по времени, можно переписать через характерные времена затухания (времена релаксации) соответствующих переходных процессов:

$$\begin{cases}C_4^4=C_2^3(iv)t_T,\\C_5^4=C_1^3(iv)t_{p_k},\\C_7^4=C_3^3(iv)t_{q_k},\\C_{10}^4=C_4^3(iv)t_p.\end{cases}\qquad(33)$$

Величины τ_{pq} и p в уравнениях (28) и (29) определяют тензор классических напряжений в трехмерном изотропном подпространстве, поэтому естественно дать физическую интерпретацию исходным модулям $C_1^4;C_2^4;C_3^4$, определив их через коэффициенты Ламе:

$$\begin{cases}C_1^4=\lambda,\\C_2^4=\mu,\\C_3^4=\mu,\end{cases}\qquad(34)$$

здесь μ и λ коэффициенты Ламе: модуль сдвига μ (первый коэффициент Ламе) и λ (второй, адиабатический, коэффициент Ламе).

При таком определении модулей $C_1^4; C_2^4; C_3^4$ выражение для давления приобретает вид классического определяющего уравнения теории упругости, если $\dot{R} = R = 0$, что соответствует адиабатическому процессу. Поэтому λ действительно является вторым, адиабатическим коэффициентом Ламе.

Рассмотрим уравнение закона Гука для температуры (30). Учитывая (33), получим уравнение, связывающее термический потенциал с температурой и изменением объема:

$$(R + t_p\dot{R}) = \frac{(T - C_9^4 r_{m,m})}{C_4^3(iv)} = L^T(R). \tag{35}$$

В дальнейшем удобно использовать равенство (35) как определение оператора температуры для формального исключения из уравнений термического потенциала R и для записи рассматриваемых уравнений через термин температуры T.

Рассмотрим уравнение закона Гука для давления (29). Подействуем оператором температуры (35) на это уравнение, чтобы исключить термический потенциал R и получить обобщение закона Дюамеля – Неймана. Учитывая (33), (34). Найдем:

$$\begin{aligned} p + t_p\dot{p} = (K - \frac{C_2^3}{C_4^3}C_9^4)r_{m,m} + \frac{C_2^3}{C_4^3}T + \\ + (Kt_p - \frac{C_2^3}{C_4^3}t_T C_9^4)\dot{r}_{m,m} + \frac{C_2^3}{C_4^3}t_T\dot{T}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $K = 2\mu/3 + \lambda.$

Выразим модули C_9^4 и C_2^3 в (36) через известные термомеханические параметры: $K_T = 2\mu/3 + \lambda_T$ – изотермический модуль объемного сжатия и λ_T – изотермический коэффициент Ламе, α – коэффициент температурного расширения:

$$\begin{cases} (K - \frac{C_2^3}{C_4^3}C_9^4) = K_T, \\ \frac{C_2^3}{C_4^3} = -K_T\alpha. \end{cases}$$

Последнее равенство позволяет идентифицировать еще две постоянные в (24);

$$\begin{cases} C_9^4 = -\frac{(K - K_T)}{K_T\alpha} \\ C_2^3 = -K_T\alpha C_4^3 \end{cases} \tag{37}$$

С учетом (37) обобщенный закон Дюамеля – Неймана (35) приобретает вид закона релаксации-ползучести:

$$\begin{aligned} p - K_T(r_{m,m} - \alpha T) = \\ = -t_p\dot{p} + (Kt_p - (K - K_T)t_T)\dot{r}_{m,m} - K_T\alpha t_T\dot{T}. \end{aligned} \tag{38}$$

Уравнение (38) совпадает с классическим уравнением закона Дюамеля – Неймана, если равны нулю времена релаксации $t_p = t_p = t_T = 0$:

$$p = K_T(r_{m,m} - \alpha T).$$

Полученный результат, вероятно, впервые позволяет указать на то, что классическую формулировку закона Дюамеля – Неймана следует понимать в предельном смысле, когда переходными процессами температуры и давления можно пренебречь, т.е. считать, что для них производные по времени являются относительно малыми.

При постоянном во времени давлении $\dot{p} = 0$ и неизменной температуре $\dot{T} = 0$ (38) принимает вид уравнения ползучести:

$$r_{m,m} + t_\theta\dot{r}_{m,m} = p/K_T + \alpha T, \tag{39}$$

где $t_\theta = \frac{K}{K_T}t_p - (\frac{K}{K_T} - 1)t_T.$

При постоянном по времени изменении объема $\dot{r}_{m,m} = 0$ и неизменной во времени температуре $\dot{T} = 0$ уравнение (38) принимает вид уравнения релаксации давления:

$$p + t_p\dot{p} = K_T(r_{m,m} - \alpha T). \tag{40}$$

Аналогично при постоянном по времени изменении объема $\dot{r}_{m,m} = 0$ и давлении $\dot{p} = 0$ равенство (38) принимает вид уравнения релаксации температуры:

$$K_T\alpha(T + t_T\dot{T}) = -(p - K_T r_{m,m}). \tag{41}$$

Обратим внимание, что характерное время ползучести t_θ в (39) не является независимым термомеханическим параметром, а выражается через характерные времена релаксации давления t_p и температуры t_T.

Параметры релаксации давления и температуры в (39)–(41) могут быть предметом экспериментальных исследований.

Продолжим процедуру идентификации параметров модели. Подействуем оператором температуры (34) на уравнение закона Гука для теплового потока (31), чтобы исключить термический потенциал R. Учтем (34) и получим обобщение закона теплопроводности Фурье в терминах температуры:

$$\begin{aligned} q_k + t_p\dot{q}_k = C_3^3(iv)(r_k + (t_p + t_{q_k})\dot{r}_k + \\ + t_p t_{q_k}\ddot{r}_k) + \frac{C_8^4}{C_4^3}(iv)(T_{,k} + \frac{(K - K_T)}{K_T\alpha}r_{m,mk}). \end{aligned} \tag{42}$$

Если модуль C_3^3 отличен от нуля, то тепловой поток допускает вихри, так как перемещения, скорости и

ускорения могут иметь вихревые составляющие. Известные в литературе экспериментальные данные, однако, позволяют утверждать, что тепловой поток является потенциальным. Следовательно, следует потребовать, что $C_3^3 = 0$. Дополнительно введем теплопроводность k_V при постоянном объеме и теплоемкость c_V при постоянном объеме и положим, что $C_8^4 = -\dfrac{k_V}{c_V} C_4^3 (iv)^{-1}$. При таком определении постоянных C_3^3 и C_4^8 уравнение обобщенного закона Гука для теплового потока (38) даст обобщенный закон Максвелла – Каттанео, который допускает дополнительно учет градиента изменения объема:

$$q_k + t_p \dot{q}_k = -\frac{k_V}{c_V}(T_{,k} + \frac{(K - K_T)}{K_T \alpha} r_{m,mk}). \tag{43}$$

Заметим, что характерное время релаксации теплового потока в уравнении (43) совпадает с характерным временем релаксации давления t_p в обобщенном законе Дюамеля – Неймана (40). Напомним, что модуль C_8^4 выражен через отношение известных термомеханических параметров k_V (теплопроводность при постоянном объеме) и c_V (теплоемкость при постоянном объеме), чтобы уравнение теплообмена имело в частном случае традиционный вид.

Таким образом списки формальных параметров модели с разложениях тензоров модулей упругости (32), (33), которые определены через известные термомеханические характеристики, дополнились равенствами

$$\begin{cases} C_3^3 = 0, \\ C_8^4 = -\dfrac{k_V}{c_V} C_4^3 (iv)^{-1}. \end{cases} \tag{44}$$

Рассмотрим теперь выражение для импульса (32). Полагаем, что импульс должен быть пропорционален скорости. Тогда, учитывая, что $C_3^3 = 0$ (44), необходимо принять

$$C_6^4 = 0 \tag{45}$$

Выясним физический смысл постоянной C_1^3. Для этого рассмотрим уравнения движения, т.е. пространственную проекцию 4D-уравнений равновесия (26), и потребуем, чтобы коэффициент при второй производной по времени от вектора перемещений $\ddot{r}_k$ был равен плотности:

$$C_5^4 (iv)^{-2} = -\rho. \tag{46}$$

С другой стороны, в соответствии с гидродинамикой Дарси модуль при скорости $\dot{r}_k$ в (26) можно определить следующим образом:

$$C_1^3 (iv)^{-1} = -\frac{\eta}{K_D}. \tag{47}$$

Следовательно, параметр релаксации импульсов в случае вязкой среды t_{p_k} связан с вязкостью

$$t_{p_k}{}^{-1} = \eta / (K_D \rho).$$

В результате, учитывая (44), (46), получим следующее выражение для импульсов

$$p_k = -\frac{\eta}{D} r_k - \rho \dot{r}_k. \tag{48}$$

Выражение (48) является определяющим уравнением для импульсов в условиях учета внутреннего трения, если динамическая вязкость η не равна нулю. В случае равенства нулю динамической вязкости $\eta = 0$ уравнение (48) дает классическое описание импульсов.

Последний неопределенный модуль C_4^3 является нормировочным, и его можно связать с теплоемкостью:

$$C_4^3 = c_V (iv). \tag{49}$$

Отметим, что нормировочный коэффициент C_4^3 не входит в окончательные уравнения движения среды и уравнение теплообмена, записанные в смешанной форме (через температуру, имеющую смысл напряжений в 4D-модели).

Таким образом, учитывая равенства (33), (34), (37), (44), (45)–(47) и (49) все исходные модули упругости в разложениях (28)–(32) определены через известные термомеханические постоянные:

$$\begin{cases} C_1^3 = -\dfrac{\eta}{K_D}(iv) \\ C_2^3 = -K_T \alpha C_4^3 \\ C_3^3 = 0 \\ C_4^3 = c_V (iv) \end{cases} \begin{cases} C_1^4 = \lambda \\ C_2^4 = \mu \\ C_3^4 = \mu \\ C_4^4 = C_2^3 (iv) t_T \\ C_5^4 = C_1^3 t_{p_k} (iv) \end{cases} \begin{cases} C_6^4 = 0 \\ C_7^4 = 0 \\ C_8^4 = -\dfrac{k_V}{c_V} C_4^3 (iv)^{-1} \\ C_9^4 = -(K - K_T) / K_T \alpha \\ C_{10}^4 = C_4^3 (iv) t_p \end{cases} \tag{50}$$

В заключение, с учетом идентификации всех физических параметров модели (50), запишем обобщенные уравнения движения и обобщенное уравнение теплообмена типа Максвелла – Каттанео в смешанной форме, т.е. в терминах перемещений и температуры:

$$\begin{aligned} &\mu \Delta r_k + (\mu + \lambda_T) r_{m,mk} - \rho \ddot{r}_k - \frac{\eta}{K_D} \dot{r}_k - K_T \alpha T_{,k} + P_i^V \delta_{ik}^* + \\ &+ \eta \Delta v_k + \xi v_{m,mk} - \frac{\rho \eta}{\mu} \ddot{v}_k - \frac{\eta^2}{\mu K_D} \dot{v}_k - K_T \alpha t_T \dot{T}_{,k} = 0; \end{aligned} \tag{51}$$

$$-\frac{k_V}{c_V} \Delta T + t_p \ddot{T} + \dot{T} - \frac{(K - K_T)}{K_T \alpha} \frac{k_V}{c_V} \Delta r_{m,m} + (iv) L^T (P_i^V N_i) = 0, \tag{52}$$

где учтено, что времена релаксации давления t_p и температуры t_T можно выразить через динамическую вязкость η и объемную вязкость ξ: $t_p = \frac{\eta}{\mu}$, $t_T = \frac{(\mu+\lambda)\eta - \xi\mu}{(\lambda-\lambda_T)\mu}$.

Моделирование деформирования элементов конструкции с учетом связных термодинамических процессов

Предложенная модель включает кинематические модели и физические определяющие соотношения рассматриваемой среды и поэтому допускает реализацию для различных объектов деформируемых структур (стрежней, пластин и оболочек). Конкретные особенности таких объектов определяются конкретной кинематической и физической моделью и естественным образом вводятся в предлагаемой модели. В качестве примера рассмотрим одноосное деформирование стержня постоянного сечения с единичной площадью и длиной L в условиях термоупругого деформирования и теплообмена. Считаем, что описывается процесс термодинамического деформирования и теплообмена на конечном временном интервале $[t_1, t_2]$. Полагаем, что вектор перемещения определяется одной компонентой, направленной вдоль стержня OX, а обобщенный вектор перемещений R_i, включающий в качестве компонент и вектор перемещений стержня r_i, и термический потенциал R ($R_i = r_i + ivRN_i \quad r_k = R_i\delta^*_{ik}$), зависит только от продольной координаты x. Следовательно, кинематическая модель определяется равенствами:

$$\begin{cases} R_i = r_i + ivRN_i, \quad r_k = R_i\delta^*_{ik}, \\ r_k = r(x)X_k, \ \varepsilon = \theta = r', \quad r' = dr/dx, \\ R = R(x). \end{cases}$$

Вариационная модель деформирования определяется следующим вариационным равенством, следующим из обобщенного вариационного принципа Л.И. Седова и записанным с помощью равенств (28)–(32), (50):

$$\begin{aligned} &\delta A - \overline{\delta U} = 0, \\ &\delta A = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^L [(P_x^V)\delta r + Q\delta R]dxdt + \int_{t_0}^{t_1} [P_x^F\delta r + P_4^F\delta R]|_{x=0}^{x=L}\, dt, \\ &\overline{\delta U} = \int_V \sigma_{ij}\delta R_{i,j}dV = \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^L [(2\mu+\lambda)r' - K_T\alpha c_V(iv)^2(R+t_T\dot{R})]\delta r' - \\ &- (\rho\dot{r} + (\frac{\eta}{K_D})r)\delta\dot{r} - \frac{k_V}{c_V}c_p(iv)R'\delta R' + \\ &+[(-(K-K_T)/K_T\alpha)r' + c_V(iv)^2(R+t_p\dot{R})]\delta\dot{R}dxdt, \end{aligned} \tag{53}$$

где P_x^V, Q – усилия и P_x^F, P_4^F – источники теплового нагружения, распределенные соответственно по длине стержня и заданные на его торцах.

Проводя интегрирование по частям в вариационном уравнении (53), получим в результате полную математическую постановку для рассматриваемой проблемы: уравнение движения (при вариации перемещений δr), уравнение теплообмена (при вариации термического потенциала δR), а также соответствующий спектр граничных и начально-краевых условий (соответственно предпоследняя и последняя строка в записанных ниже равенствах):

$$\begin{aligned} &+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L [(2\mu+\lambda)r'' - \rho\ddot{r} - (\frac{\eta}{K_D})\dot{r} - \\ &- K_T\alpha c_V(iv)^2(R'+t_T\dot{R}') + P_x^V]\delta r dxdt + \\ &+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L [-\frac{k_V}{c_V}c_p(iv)R'' + (K-K_T)/K_T\alpha)\dot{r}' - \\ &- c_V(iv)^2(\dot{R}+t_p\ddot{R}) + Q]\delta R dxdt - \\ &-\int_{t_0}^{t_1} [(2\mu+\lambda)r' - K_T\alpha c_V(iv)^2(R+t_T\dot{R}) - P_x^F]dt\delta r\,|_0^L + \\ &+\int_{t_0}^{t_1} [\frac{k_V}{c_V}c_p(iv)R' - P_4^F]\delta R dt\,|_0^L + \\ &+\int_0^L (\rho\dot{r} + (\frac{\eta}{K_D})r)\delta r dx\,|_{t_0}^t - \int_0^L [(-(K-K_T)/K_T\alpha)r' + \\ &+ c_V(iv)^2(R+t_p\dot{R})]\delta R dx\,|_{t_0}^t = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Уравнение движения стержня и уравнение теплообмена, полученные в (54), могут быть переписаны в терминах перемещений и температуры путем исключения термического потенциала R, если воспользоваться оператором температуры (35) $[K_T\alpha T + (K-K_T)r']/c_p(iv)K_T\alpha = (R+t_p\dot{R}) = L^T(R)$. Получим:

$$\begin{aligned} &((2\mu+\lambda_T)r'' - \rho(\ddot{r}+t_p\dddot{r}) - K_T\alpha(T'+t_T\dot{T}') + \\ &+((2\mu t_p + \lambda(t_p-t_T) + \lambda_T t_T)\dot{r}'' + \frac{\eta}{K_D}(\dot{r}+t_p\ddot{r}) + P_x^V = 0, \\ &k_V T'' - c_V\dot{T} - c_V t_p\ddot{T} - k_V C_9^4 r''' + Q = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Используя уравнения (28)–(32) нетрудно определить распределение обобщенных напряжений (напряжение, давление, тепловой поток, импульс), определить и энтропию $\dot{R}$. Уравнения (55) носят общий характер и позволяют рассмотреть и частные случаи. Например, в случае, если времена запаздывания и динамический коэффициент вязкости равны нулю, уравнение движения приводится к классическому виду:

$$(2\mu+\lambda_T)r'' - \rho\ddot{r} - K_T\alpha T' + P_x^V = 0.$$

С другой стороны, для изохорических процессов уравнение теплообмена принимает вид гиперболического уравнения, который обычно получают использую обобщенный закон теплопроводности Максвелла – Каттанео:

$$k_V T'' - c_V \dot{T} - c_V t_p \ddot{T} + Q = 0.$$

Отметим, что предложенный вариант связной термодинамики процессов деформирования и теплообмена полностью подтверждает и обобщает идеи модели затухания колебаний конструкций Зинера [26; 27] из-за процессов теплообмена, возникающих за счет связности процессов деформирования и теплообмена.

Рассмотрим возможные каналы диссипации для нашего частного случая, полагая, что рассматриваемый процесс является изотермическим, $(K - K_T) = 0$) и $C_6^4 = C_7^4 = 0$ (вектор теплового потока потенциален, а вектор импульсов имеет вид (48)). Имеем

$$\overline{\delta U} = -\frac{\eta}{K_D}(iv)^2 (R\delta r' - r'\delta R) - K_T \alpha c_V (iv)^2 (r\delta R' - R'\delta r) + \\ + c_V (iv)^2 (R\delta\dot{R} - \dot{R}\delta R) - K_T \alpha c_V t_T (iv)^2 (r'\delta\dot{R} - \dot{R}\delta r'). \quad (56)$$

Уравнение (56) показывает разнообразие каналов диссипации в данной задаче, среди которых первые два канала определяются связными термомеханическими диссипативными свойствами среды (вязкостью и теплоемкостью), третий канал связан с процессом теплообмена – канал Фурье, а последний канал определяется изменением объема и энтропией. Важность определения каналов диссипации связано не только с анализом механизмов диссипации, но и с тем, что, как показано в работе [25], соответствующие каналы диссипации с точностью до множителя вычисляются через площади петель гистерезиса в фазовых пространствах, связанных с аргументами, определяющими каждый конкретный канал, и могут быть вычислены по решению задачи. При этом через площадь петли гистерезиса W_{loop} может быть вычислен и модуль потерь E'' ($W_{loop} \approx \pi\Delta\varepsilon^2 E''$) при колебаниях, который является важной прикладной характеристикой диссипативности. В работе [28] предлагается следующая приближенная оценка: $W_{loop} \approx \pi\Delta\varepsilon^2 E''$. Решение тестовых задач, аналогичных рассмотренной выше, позволяет получить оценки каналов диссипации путем построения решения соответствующих задач (54) и прямого вычисления каналов диссипации, выраженных через теромомеханические физические параметры (50). Полученные результаты являются основой для теоретических оценок модулей потерь и могут использоваться для оптимизации этих важных в прикладном отношении характеристик.

Заключение

Предложенная в работе модель расширенной термодинамики связных процессов термоупругости и теплообмена, построенная на использовании вариационного формализма для 4D-пространственно-временного континуума, трансверсально изотропного в отношении временной координаты, обеспечивает последовательное описание взаимно связных в общем случае необратимых процессов динамического деформирования изотропной среды и теплового обмена в этой среде. Инвариантность модели гарантируется использованием вариационного метода построения, а возможность моделирования процессов, сопровождающихся диссипацией энергии, связана с использованием обобщенного вариационного метода Л.И. Седова. В представленном виде модель связных процессов термоупругости и теплообмена построена для физически изотропных сред, хотя ее обобщение на анизотропные среды принципиально возможно, не требует изменения методики построения модели, хотя и представляет технические трудности, так как требует описания свойств неизотропных тензоров третьего и четвертого рангов в 4D-трансверсально- изотропном пространстве Минковского.

Библиографический список

1. Landau, L.D. Theory of Elasticity / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Vol. 7 of Course of Theoretical Physics, 1986, 3rd edn. Pergamon Press, Oxford.

2. Coleman, B.D. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity / B.D. Coleman, W. Noll // Arch. Ration. Mech.Anal. – 1963. – No. 13. – P. 167–178.

3. Carlson, D.E. Linear Thermoelasticity / D.E. Carlson // Truesdell, C. (ed.). Handbuch der Physik. – Vol. VI a/2, 1972. – P. 297–345. – Springer, Berlin.

4. Joseph, D.D. Heat waves / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Mod. Phys. – 1989. – No. 61. – P. 41–73.

5. Lepri, S. Thermal conduction in classical lowdimensional lattices / S. Lepri, R. Livi, A. Politi // Phys. Rep. – 2003. – Vol. 377. – P. 1–80.

6. Dhar, A. Heat transport in low-dimensional systems / A. Dhar // Adv. Phys. – 2008. – Vol. 57. – P. 457. [arXiv:0808.3256]

7. Zhang, G. Impacts of doping on thermal and thermoelectric properties of nanomaterials / G. Zhang, B.W. Li // NanoScale. – 2010. – Vol. 2. – P. 1058–1068.

8. Wang, M. General heat conduction equations based on the thermomass theory / M. Wang, B.Y. Cao, Z.Y. Guo // Front. Heat Mass Transf. (FHMT). – Vol. 1. – P. 1–8.

9. Gusev, A. Wave-relaxation duality of heat propagation in Fermi–Pasta–Ulam chains / A. Gusev, S. Lurie // Mod. Phys. Lett. B. – 2012. – Vol. 26(22). – 1250145.

10. Sobolev, S.L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium / S.L. Sobolev // Usp. Phys. Nauk. – 1991. – 161(3). – 5–29 [Sov. Phys. Usp. (Engl. Transl.) 34(3), 217–229.

11. Лурье, С.А. О моделировании теплопереноса в динамически деформируемых средах / С.А. Лурье, П.А. Белов, Ю.Г. Яновский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 3. – С. 436–444

12. Белов, П.А. Идеальная несимметричная 4D-среда как модель обратимой динамической термоупругости / П.А. Белов, С.А. Лурье // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – Т. 52. – С. 243–276

13. Лурье, С.А. Вариационная модель неголономных сред / С.А. Лурье, П.А. Белов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 436–444.

14. Белов, П.А. Вариационная модель неголономных 4D-сред / П.А. Белов, А.Г. Горшков, С.А. Лурье // Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 41–58.

15. Lurie, S.A. Theory of space–time dissipative elasticity and scale effects / S.A. Lurie, P.A. Belov // Nanoscale Syst.: Math. Model. Theory Appl. – 2012. – No. 2. – P. 66–178.

16. Lurie, S.A. On the Nature of the Relaxation Time, the Maxwell–Cattaneo and Fourier Law in the Thermodynamics of a Continuous Medium, and the Scale Effects in Thermal Conductivity / S.A. Lurie, P.A. Belov // Contin. Mech. Thermodyn. – 2020. – No. 32. – P. 709–728.

17. Maxwell, J.C. Philos. / J.C. Maxwell // Trans. R. Soc. Lond. – 1867. – Vol. 57, no. 49.

18. Cattaneo, C. Sur Une Forme De Lequation De La Chaleur Eliminant Le Paradoxe Dune Propagation Instantanee / C. Cattaneo // Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances. De L Academie Des Sciences. – 1958. – Vol. 247, no. 4. – P. 431–433.

19. Vernotte, P. Les Paradoex De La Theorie Continue De Lequation De La Chaleur / P. Vernotte //Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences. – Vol. 246, no. 22. – P. 3154–3155.

20. Седов, Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред / Л.И. Седов // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5, № 125. – С. 121–180.

21. Седов, Л.И. Об основных концепциях механики сплошной среды / Л.И. Седов // Некоторые проблемы математики и механики. – 1961. – С. 227–235.

22. Седов, Л.И. Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов / Л.И. Седов, М.Э. Эглит // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 142, № 1. – С. 54–59.

23. Belov, P.A. Variational Formulation of Linear Equations of Coupled Thermohydrodynamics and Heat Conductivit / P.A. Belov, S.A. Lurie, V.N. Dobryanskiy // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, no. 10. – P. 1948–1962.

24. Belov, P. Вариационная формулировка градиентной необратимой термодинамикию / P. Belov, S.A. Lurie // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 5. – P. 36–44. https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index

25. Lurie, S.A. Symmetry Properties of Models for Reversible and Irreversible Thermodynamic Processes / S.A. Lurie, P.A. Belov, H.A. Matevossian // Symmetry. – 2023. – No. 15. – 2173. DOI: 10.3390/ sym15122173

26. Zener, C. Internal Friction in Solids. I. Theory of Internal Friction in Reeds // Phys. Rev –1937. – Vol. 52, no. 3. – P. 230–235.

27. Zener, C. Internal Friction in Solids. II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction / C. Zener // Phys. Rev. – 1938. – Vol. 53, no. 1. – P. 90–99.

28. Пальмов, В.А. Колебания упругопластических тел / В.А. Пальмов. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

References

1. Landau, L. D., Lifshitz, E.M.: Theory of Elasticity, vol. 7 of Course of Theoretical Physics, 1986, 3rd edn. Pergamon Press, Oxford.

2. Coleman, B.D., Noll, W. *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*//Arch. Ration. Mech.Anal. –1963–No.13. –Pp.167–178.

3. Carlson, D. E. *Linear Thermoelasticity*. In: Truesdell, C. (ed.). Handbuch der Physik, vol. VI a/2, 1972. Pp. 297–345. Springer, Berlin.

4. Joseph, D.D., Preziosi, L. *Heat waves*// Rev. Mod. Phys. – 1989. – No.61. – Pp. 41–73

5. Lepri, S., Livi, R., Politi, A.*Thermal conduction in classical lowdimensional lattices*// Phys. Rep. – 2003. – Vol. 377. – Pp.1–80.

6. Dhar, A. *Heat transport in low-dimensional systems*// Adv. Phys. – 2008. – Vol. 57. – Pp. 457. [arXiv:0808.3256]

7. Zhang, G., Li, B.W. *Impacts of doping on thermal and thermoelectric properties of nanomaterials*// NanoScale. – 2010. – Vol. 2. – Pp. 1058–1068.

8. Wang, M., Cao, B.Y., Guo, Z.Y. *General heat conduction equations based on the thermomass theory*// Front. Heat Mass Transf. (FHMT). – Vol. 1. –Pp. 1–8.

9. Gusev, A., Lurie, S. *Wave-relaxation duality of heat propagation in Fermi–Pasta–Ulam chains*// Mod. Phys. Lett. B. – 2012. – Vol. 26(22). – 1250145.

10. Sobolev, S. L.: Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium. Usp. Phys. Nauk 161(3), 5–29 (1991) [Sov. Phys. Usp. (Engl. Transl.) 34(3), 217–229.

11. Lurie S.A., Belov P.A., Yanovskii Yu.G. On modeling heat transfer in dynamically deformable media [O modelirovanii teploperenosa v dinamicheski deformiruemyh sredah]. *Mechanics of composite materials and structures,* 2000.\, vol.6, no 3, pp. 436-444

12. Lurie S.A., Belov P.A., Ideal Asymmetric 4D Medium as a Model of Reversible Dynamic Thermoelasticity [Idealnaya nessimmetrichnaya 4D-sreda kak model obratimoi dinamicheskoi termouprugosti], Solid Mechanics, 2011, vol. 52, pp. 243–276

13. Lurie S.A., Belov P.A., Variatsionnaia model' negolonomnykh sred [Variational model of nonholonomic media]. *Mechanics of composite materials and structures*, 2001, vol. 7, no 2, pp. 436-4of 4D 44.

14. Belov P.A., Gorshkov A.G., Lur'e S.A. Variational model of nonholonomic media, [Variatsionnaia model' negolonomnykh 4D-sred], Solid Mechanics. 2006, no. 6., pp. 41-58.

15. Lurie, S.A., Belov, P.A.: Theory of space–time dissipative elasticity and scale effects// Nanoscale Syst.: Math. Model. Theory Appl. .–.2012.– No.**2.** – Pp.66–178

16. Lurie, S.A.; Belov, P.A. On the Nature of the Relaxation Time, the Maxwell–Cattaneo and Fourier Law in the Thermodynamics of a Continuous Medium, and the Scale Effects in Thermal Conductivity//Contin. Mech. Thermodyn. – .2020. – No..32. – Pp.709–728.

17. Maxwell, J.C.: Philos.//Trans. R. Soc. Lond. .–. 1867 .– .Vol. 57.–.No.49.

18. Cattaneo, C.: Sur Une Forme De Lequation De La Chaleur Eliminant Le Paradoxe Dune Propagation Instantanee.// Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances. De L Academie Des Sciences.–. 1958. .–.Vol. 247. .–. No.4. .–.Pp. 431–433

19. Vernotte, P.: Les Paradoex De La Theorie Continue De Lequation De La Chaleur. //Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences.–.Vol,246. .–. No.22.– .Pp, 3154–3155

20. Sedov L.I. Mathematical methods for constructing new models of continuous media, [Matematicheskie metody postroenia

novyh modelei sploshnyh sred], Математические методы построения новых моделей сплошных сред], Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 1965, vol.20., no 5-125, pp.121- 180.

21. Sedov L.I. Ob osnovnykh kontseptsiiakh mekhaniki sploshnoi sredy [On the basic concepts of continuum mechanics]. Some problems of mathematics and mechanics. 1961, pp. 227-235.

22. Sedov L.I., Eglit M.E. Postroenie negolonomnykh modelei sploshnykh sred s uchetom konechnosti deformatsii i nekotorykh fiziko-khimicheskikh effektov [Construction of Nonholonomic Models of Continuous Media Taking into Account the Finiteness of Deformations and Certain Physicochemical Effects]. Report USSR Academy of Sciences, 1962, vol. 142, no. 1, pp. 54-59.

23. Belov P. A., Lurie S.A. and V. N. Dobryanskiy. Variational Formulation of Linear Equations of Coupled Thermohydrodynamics and Heat Conductivit.// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 10. – Pp. 1948–1962.

24. BelovP, S.A. Lurie Вариационная формулировка градиентной необратимой термодинамикию.// Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 5. – Pp.36–44 https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index

25. Lurie, S.A.; Belov, P.A.; Matevossian, H.A. Symmetry Properties of Models for Reversible and Irreversible Thermodynamic Processes.// Symmetry. – 2023. – No.15. – 2173. https://doi.org/10.3390/ sym15122173

26. Zener, C. Internal Friction in Solids. I. Theory of Internal Friction in Reeds//*Phys. Rev* –1937. – Vol.*52*. – No. 3– Pp. 230–235.

27. Zener, C. Internal Friction in Solids. II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction//*Phys. Rev.* –.1938. – Vol.53. – No. 1. – Pp90–99.

28. Pal'mov V.A. Kolebaniya uprugoplasticheskih tel. M.: Nauka, 1976. 328 s.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00275), выданного Институту прикладной механики РАН.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (grant No. 23-11-00275), issued to the Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The authors' contributions are equal.