Лямина, Е.А. Начальное течение при осадке жесткопластического пористого полого цилиндра в контейнере / Е. А. Лямина, Н. В. Каленова. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.6.01 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 6. – С. 5–13.

Perm Polytech Style: Lyamina E.A., Kalenova N.V. Instantaneous upsetting of a rigid plastic porous hollow cylinder in a container. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 6, pp. 5-13. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.6.01

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 6, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.6.01
УДК 539.3/.6

НАЧАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ ОСАДКЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОРИСТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА В КОНТЕЙНЕРЕ

Е.А. Лямина[1], Н.В. Каленова[2]

[1]Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация
[2]Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 01 июля 2025 г.
Одобрена: 10 ноября 2025 г.
Принята к публикации:
10 декабря 2025 г.

Ключевые слова:

пористый материал, условие текучести, ассоциированный закон течения, теория пластического течения, жестко/пластический материал, осадка кольца, режимы течения, сингулярный режим, несжимаемый материал, общая структура решения.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается начальное течение при осадке пористого жесткопластического кольца в контейнере без трения. Внутренний радиус кольца свободен от напряжений. Используется общепринятая теория пластического течения. Поверхность текучести в пространстве линейного и квадратичного инвариантов тензора напряжений представляется прямоугольником. Поэтому в общем случае возможны три режима течения. Однако показано, что единственный режим, который может возникнуть во всем объеме в начальный момент времени, приводит к пластической несжимаемости. С другой стороны, режим, приводящий к гидростатическому сжатию, никогда не реализуется. Структура общего решения зависит от начальных значений относительной плотности и внутреннего радиуса кольца. Определена зависимость между этими параметрами, которая приводит к выполнению условия несжимаемости во всем кольце, но при достижении предельно возможного гидростатического давления на поверхности контакта кольца и контейнера. В общем случае, в кольце существуют две области. В области, примыкающей к внутреннему радиусу кольца, выполняется условие несжимаемости. В области, примыкающей к поверхности контакта кольца и контейнера, возникает сингулярный режим на поверхности текучести, и материал является пластически сжимаемым. Граница между этими областями определяется в ходе решения краевой задачи. В частном случае, условия на границе между областями выполняются на внешнем радиусе кольца. Численное решение сводится к определению корня трансцендентного уравнения. Приводится пример расчета, иллюстрирующий распределение радиального, окружного и осевого напряжений по радиусу, а также зависимость усилия прессования от внутреннего радиуса кольца.

© **Лямина Елена Алексеевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, с.н.с., лаборатория механики новых материалов и технологий, e-mail: lyamina@inbox.ru), ORCID: 0000-0002-7319-8703.
Каленова Наталья Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем интеллектуального мониторинга, e-mail: direktoriist@mail.ru, ORCID: 0000-0001-8111-8403.

Elena A. Lyamina – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Senior Researcher of Laboratory of Mechanics of Novel Materials and Technologies, e-mail: ivanov@ivanov.com, ORCID: 0000-0002-7319-8703.
Natalya V. Kalenova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor of the Intelligent monitoring systems department, e-mail: direktoriist@mail.ru. ORCID: 0000-0001-8111-8403.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

INSTANTANEOUS UPSETTING OF A RIGID PLASTIC POROUS HOLLOW CYLINDER IN A CONTAINER

E.A. Lyamina[1], N.V. Kalenova[2]

[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation
[2]Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 July 2025
Approved: 10 November 2025
Accepted for publication:
10 December 2025

Keywords:

porous material, yield criterion, associated flow rule, flow theory of plasticity, rigid/plastic material, upsetting a ring, flow regimes, singular regime, incompressible material, general solution's structure

ABSTRACT

Considered is the instantaneous upsetting of a porous rigid/plastic ring in a container with no friction. The internal ring's radius is traction-free. A conventional flow theory of plasticity is adopted. The yield surface in the linear and quadratic stress invariants' space is rectangular. Therefore, three flow regimes are generally possible. However, it is shown that the only regime that may occur in the entire volume at the initial instant leads to plastic incompressibility. On the other hand, the regime leads to hydrostatic contraction never occurs. The general solution's structure depends on the initial values of the relative density and the inner ring's radius. The relationship between these parameters is determined, which leads to the fulfillment of the incompressibility condition in the entire ring, but upon reaching the maximum possible hydrostatic pressure on the contact surface of the ring and the container. In general, there are two regions in the ring. In the region adjacent to the inner radius of the ring, the incompressibility condition is fulfilled. In the region adjacent to the contact surface of the ring and the container, a singular mode occurs on the yield surface, and the material is plastically compressible. The boundary between these regions is determined in the course of solving the boundary value problem. In a particular case, the conditions on the boundary between the regions are fulfilled on the outer radius of the ring. The numerical solution is reduced to determining the root of a transcendental equation. An example of calculation is given illustrating the distribution of radial, circumferential, and axial stresses along the radius, as well as the dependence of the compression force on the inner radius of the ring.

Введение

Теория пластичности пористых и порошковых материалов используется для моделирования процессов обработки таких материалов давлением. Основной отличительной особенностью пористых и порошковых материалов, по сравнению с традиционными металлами, является пластическая сжимаемость, приводящая к необратимому изменению объема. Теория пластического течения с учетом изменения объема в большинстве случаев основывается на условии текучести, зависящем от среднего напряжения, и ассоциированном законе течения [1]. Получила также развитие деформационная теория пластичности в предположении, что свойства материала зависят от вида деформированного состояния [2, 3]. В этом случае, однако, деформации предполагаются малыми, что не позволяет использовать такую теорию для моделирования процессов обработки материалов давлением. В публикуемой работе используется теория [1].

При применении теории [1] различие между определяющими уравнениями заключается в условии текучести. Обзоры условий текучести для пористых и порошковых материалов представлены в [1; 4; 5]. Особое место среди таких условий текучести занимает цилиндрическое условие текучести. Это условие приводит к независимым механизмам сдвига и уплотнения и позволяет выяснить качественную картину течения на основе более простых, по сравнению с другими условиями текучести, решений [1]. В частности, использование этого условия текучести для анализа процесса осесимметричного выдавливания в [6] позволило предсказать качественную картину течения, наблюдавшуюся в экспериментах [7]. Другие решения для цилиндрического условия текучести получены в [8; 9]. В публикуемой работе также принимается это условие текучести.

Пластическая сжимаемость и сопутствующее изменение относительной плотности значительно усложняет решение краевых задач, особенно аналитическими методами. Несколько приближенных решений для осесимметричных процессов осадки и выдавливания, полученных методом Хилла, представлены в [10–13]. Метод Хилла изложен в [14]. Приближенное решение для выдавливания в условиях плоскодеформированного состояния приведено в [15]. Точные аналитические и полуаналитические решения известны для сферической поры, расширяющейся в бесконечной жесткопластической среде, [16] и для осадки пористого сплошного цилиндра, помещенного в сжимающееся кольцо из пластически несжимаемого материала [17].

В случае неустановившихся процессов представляют интерес решения для начального момента времени. Для пластически несжимаемых материалов большое количество таких решения построено методом линий скольжения [18]. Для пластически сжимаемых материалов точных аналитических решений мало. Одно из таких решений представлено в [19]. В этой работе рассмотрен цилиндр, подвергнутый одновременному растяжению и кручению. В публикуемой работе исследуется напряженное состояние в пористом кольце, осаживаемом в контейнере.

Постановка задачи

Рассматривается осадка осесимметричного полого пористого жесткопластического цилиндра в контейнере без учета сил трения (рис. 1). Внешний и внутренний радиусы цилиндра обозначены как R_0 и r_0

соответственно. Высота цилиндра равна H_0. Скорость движения пуансона равна V. В начальный момент времени относительная плотность распределена равномерно и равна ϑ_0. Внутренний радиус цилиндра свободен от напряжений. Целесообразно ввести цилиндрическую систему координат (r, θ, z), ось z которой совпадает с осью симметрии процесса. Решение не зависит от θ. Нормальные напряжения в цилиндрической системе координат являются главными напряжениями. Обозначим их как σ_r, σ_θ и σ_z. Среднее напряжение обозначим как σ, а главные компоненты тензора-девиатора напряжений как τ_r, τ_θ и τ_z. При $\sigma < 0$ цилиндрическое условие текучести имеет вид [1]

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\tau_r^2+\tau_\theta^2+\tau_z^2}}{\sqrt{2}} = \tau_s \quad \text{если} \quad -p_s < \sigma, \\ &\sigma = -p_s \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{\tau_r^2+\tau_\theta^2+\tau_z^2}}{\sqrt{2}} = \tau_s, \\ &\sigma = -p_s, \quad \text{если} \quad \frac{\sqrt{\tau_r^2+\tau_\theta^2+\tau_z^2}}{\sqrt{2}} < \tau_s. \end{aligned} \tag{1}$$

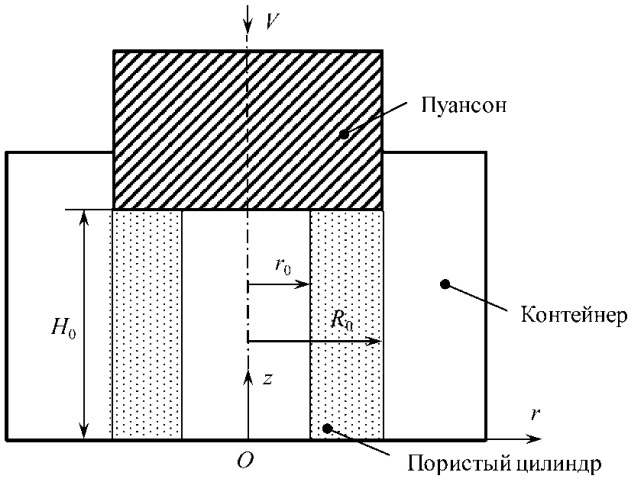


Рис. 1. Схема процесса деформирования
Fig.1. Scheme of the deformation process

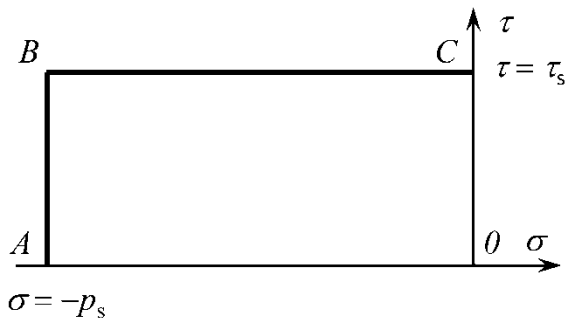


Рис. 2. Поверхность текучести
Fig.2. Yield surface

Первое уравнение совпадает с условием текучести Мизеса при $-p_s < \sigma$ и соответствует линии BC на рис. 2. Третье уравнение в пространстве главных напряжений соответствует плоскости, параллельной девиаторной плоскости, и линии AB на рис. 2. Второе уравнение соответствует пересечению этой плоскости и поверхности Мизеса и точке B на рис. 2. В уравнении (1), τ_s – предел текучести при чистом сдвиге и p_s – предел текучести при всестороннем сжатии. Оба предела являются известными функциями относительной плотности ϑ. В случае беспористого материала $\vartheta = 1$, $p_s \to \infty$ и (1) сводится к условию текучести Мизеса. Уравнения ассоциированного закона пластического течения зависят от того, какое из условий в (1) выполняется. Все случаи представлены в [1]. В частности,

$$\xi_r = \lambda\frac{\tau_r}{\tau_s}, \quad \xi_\theta = \lambda\frac{\tau_\theta}{\tau_s}, \quad \xi_z = \lambda\frac{\tau_z}{\tau_s} \tag{2}$$

при выполнении первого уравнения в (1),

$$\xi_r = \lambda\frac{\tau_r}{\tau_s}+\frac{\xi}{3}, \quad \xi_\theta = \lambda\frac{\tau_\theta}{\tau_s}+\frac{\xi}{3}, \quad \xi_z = \lambda\frac{\tau_z}{\tau_s}+\frac{\xi}{3} \tag{3}$$

при выполнении второго уравнения в (1) и

$$\xi_r = \xi_\theta = \xi_z = \frac{\xi}{3} \tag{4}$$

при выполнении третьего уравнения в (1). В уравнениях (2) – (4), ξ_r, ξ_θ и ξ_z - нормальные скорости деформации в цилиндрической системе координат, ξ - относительная скорость изменения объема, определяемая как

$$\xi = \xi_r + \xi_\theta + \xi_z. \tag{5}$$

Кроме того, $\lambda > 0$ и $\xi < 0$. Пусть u_r и u_z – радиальная и осевая скорости, соответственно. Нормальные скорости деформации выражаются через эти скорости как

$$\xi_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \xi_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \xi_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Помимо определяющих уравнений, необходимо удовлетворить уравнениям равновесия и уравнению неразрывности. Единственное уравнение равновесия, которое не удовлетворяется тождественно, имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} = 0. \tag{7}$$

Уравнение неразрывности может быть представлено в форме

$$\dot{\vartheta} + \vartheta\xi = 0. \tag{8}$$

Точка над символом обозначает полную производную по времени. Уравнение (8) не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние в начальный момент времени и поэтому в дальнейшем в статье не используется. Однако, при необходимости, из этого уравнения может быть определено распределение скорости изменения относительной плотности по объему деформируемого материала.

Рассмотрим краевые условия. Так как внутренняя поверхность цилиндра свободна от напряжений, то

$$\sigma_r = 0 \tag{9}$$

при $r = r_0$. Кинематические краевые условия имеют вид

$$u_z = 0 \tag{10}$$

при $z = 0$,

$$u_z = -V \tag{11}$$

при $z = H_0$,

$$u_r = 0 \tag{12}$$

при $r = R_0$.

В дальнейшем удобно использовать следующие безразмерные величины:

$$\rho = \frac{r}{R_0},\ \rho_0 = \frac{r_0}{R_0},\ \ h_0 = \frac{H_0}{R_0},\quad v_r = \frac{u_r}{V},$$
$$\varepsilon_r = \frac{H_0}{V}\xi_r,\ \varepsilon_\theta = \frac{H_0}{V}\xi_\theta,\ \varepsilon_z = \frac{H_0}{V}\xi_z,\ \varepsilon = \frac{H_0}{V}\xi. \tag{13}$$

Общая структура решения

Краевые условия (10) и (11) выполняются, если положить, что $u_z = -Vz/H_0$. Подставляя это выражение для осевой скорости в (6) и используя (13), найдем

$$\varepsilon_z = -1. \tag{14}$$

Дальнейший ход решения зависит от того, какое уравнение в (1) имеет силу. Отметим, что наиболее общий случай соответствует второму уравнению в (1) [1]. Поэтому, целесообразно начать исследование с этого режима течения. Уравнение $\tau = \tau_s$ удовлетворяется подстановкой:

$$\tau_r = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}}\sin\varphi,\ \tau_\theta = \tau_s\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} + \cos\varphi\right),$$
$$\tau_z = \tau_s\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}} - \cos\varphi\right). \tag{15}$$

Здесь φ – новая неизвестная функция ρ. Исключая λ в (3) и используя (5), получим

$$\frac{3\left(\xi_r - \xi_\theta\right)}{2\xi_z - \xi_r - \xi_\theta} = \frac{\tau_r - \tau_\theta}{\tau_z}.$$

Переходя в этих уравнениях к безразмерным величинам с помощью (13), исключая компоненты тензора-девиатора напряжений с помощью (15) и ε_z с помощью (14), найдем

$$2\varepsilon_r + \left(\sqrt{3}\tan\varphi - 1\right)\varepsilon_\theta = -\left(\sqrt{3}\tan\varphi + 1\right). \tag{16}$$

Соотношения (6) и (13) позволяют выразить ε_r и ε_θ через v_r. В результате, уравнение (16) принимает форму

$$2\frac{\partial v_r}{\partial\rho} + \left(\sqrt{3}\tan\varphi - 1\right)\frac{v_r}{\rho} = -\frac{\left(\sqrt{3}\tan\varphi + 1\right)}{h_0}. \tag{17}$$

Уравнение равновесия (7) с использованием (13) можно представить в виде

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_r}{\partial\rho} + \frac{\tau_r - \tau_\theta}{\rho} = 0. \tag{18}$$

Уравнение $\sigma = -p_s$ позволяет исключить σ, а уравнение (15) – τ_r и τ_θ. Тогда, уравнение (18) преобразуется к форме

$$\frac{1}{\tau_s}\left(\frac{dp_s}{d\vartheta} + \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}}\frac{d\tau_s}{d\vartheta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\rho} + \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{3}}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi}{\rho} = 0.$$

В начальный момент $\vartheta = \vartheta_0$, и это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = -\frac{\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\tan\varphi\right)}{2\rho}. \tag{19}$$

Пусть φ_0 – значение φ при $\rho = \rho_0$. Решение уравнения (19) должно удовлетворять краевому условию $\varphi = \varphi_0$ при $\rho = \rho_0$. Из (9) и (15) следует, что

$$\sin\varphi_0 = -\frac{\sqrt{3}p_s}{2\tau_s}. \tag{20}$$

Значения p_s и τ_s вычисляются при $\vartheta = \vartheta_0$. Неравенство $p_s > \tau_s$ выполняется для любых значений относительной плотности при применении общепринятых моделей теории пластичности пористых материалов [1; 20; 21]. Поэтому, уравнение (20) не имеет решения. Таким образом, рассматриваемый режим течения не может иметь силу во всей области $\rho_0 \le \rho \le 1$.

Режим течения, соответствующий третьему уравнению в (1), также не может иметь силу во всей области $\rho_0 \le \rho \le 1$. Этот вывод следует из противоречия, возникающего из уравнения (4), которое требует $\varepsilon_z = \varepsilon_\theta$, (14) и краевого условия (12), которое требует $\varepsilon_\theta = 0$ при $\rho = 1$.

Рассмотрим режим течения, соответствующий первому уравнению в (1). Подстановка (15) имеет силу. Из (2) следует уравнение несжимаемости, которое может быть представлено в виде $\xi = 0$ или $\varepsilon = 0$. Принимая во внимание (6), (13) и (14), последнее уравнение преобразуется к форме

$$\frac{\partial\left(\rho v_r\right)}{\partial\rho} = \frac{\rho}{h_0}. \tag{21}$$

Решение этого уравнения с использованием краевого условия (12) определяет зависимость v_r от ρ. Тогда из (6) следует

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right),\quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right). \tag{22}$$

Из (2), (13), (15) и (22), найдем

$$\frac{2\tan\varphi}{\sqrt{3} - \tan\varphi} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right).$$

Из этого уравнения можно выразить φ как

$$\cot\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}\left(1 + \rho^2\right)} - \sqrt{3}. \tag{23}$$

Так как $\lambda > 0$, то из первого уравнения в (2), (15) и (22) следует, что

$$\sin\varphi < 0. \tag{24}$$

Это неравенство позволяет однозначно определить φ из (23). В частности, из этого уравнения следует

$$\cot\varphi_0 = \frac{4}{\sqrt{3}\left(1 + \rho_0^2\right)} - \sqrt{3}. \tag{25}$$

Уравнение (18) после исключения компонент тензора-девиатора напряжений с помощью (15) принимает форму

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho} = \frac{\tau_s\left(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right)}{\rho}.$$

Переходя здесь к дифференцированию по φ с помощью (23) и исключая затем ρ с помощью этого же уравнения, получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} = -\frac{2\tau_s\left(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right)}{\sqrt{3}\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}. \quad (26)$$

Отметим, что в режиме течения, соответствующему первому уравнению в (1), τ_s является постоянной величиной. Поэтому, интегрирование уравнения (26) и использование краевого условия (9) дает

$$\sigma_r = -2\tau_s \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\left(\cos\gamma + \sqrt{3}\sin\gamma\right)}{\left(\sqrt{3}\cos 2\gamma + \sin 2\gamma\right)} d\gamma = \tau_s \ln\left[\frac{\tan\left(\varphi/2 - \pi/6\right)}{\tan\left(\varphi_0/2 - \pi/6\right)}\right]. \quad (27)$$

Зависимость среднего напряжения от φ находим из (15) и (27) в виде

$$\frac{\sigma}{\tau_s} = \ln\left[\frac{\tan\left(\varphi/2 - \pi/6\right)}{\tan\left(\varphi_0/2 - \pi/6\right)}\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi. \quad (28)$$

С учетом (24) значение φ при $\rho = 1$ определяется из (15) и (22) как $\varphi_s = -\pi/3$.

Построенное решение для режима течения, соответствующего первому уравнению в (1), имеет силу только если $\sigma \geq -p_s$. Достаточно проверить выполнение этого условия при $\rho = 1$. Исключая σ в (28) с помощью уравнения $\sigma = -p_s$, получим

$$\frac{1}{k_s} = \ln\left[-\frac{\tan\left(\varphi_0/2 - \pi/6\right)}{\sqrt{3}}\right] + 1, \quad (29)$$

где $k_s = \tau_s / p_s$. Здесь τ_s и p_s вычисляются при $\vartheta = \vartheta_0$. Для получения численных результатов необходимо принять конкретную зависимость k_s от относительной плотности. Зависимости, представленные в [1], имеют вид

$$\tau_s = \vartheta^{3/2} k, \quad p_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\vartheta^2 k}{\sqrt{1-\vartheta}}, \quad k_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\vartheta}\sqrt{1-\vartheta}. \quad (30)$$

Здесь k – предел текучести при чистом сдвиге материала твердой фазы. Подставляя (30) в (29), получим

$$\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\vartheta_0}\sqrt{1-\vartheta_0}} = \ln\left[-\frac{\tan\left(\varphi_0/2 - \pi/6\right)}{\sqrt{3}}\right] + 1.$$

Отсюда, с использованием (25), следует квадратное уравнение для определения ϑ_0 как функции ρ_0. Зависимость ϑ_0 от ρ_0 показана на Рис. 3.

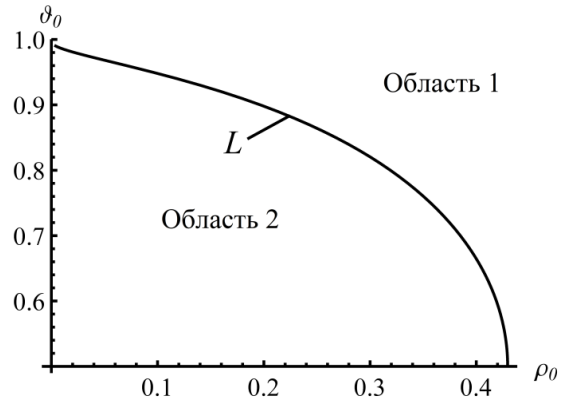


Рис. 3. Геометрическая интерпретация общей структуры решения
Fig.3. Geometric interpretation of the general solution's structure

Общая структура решения имеет следующий вид. Если ϑ_0 и ρ_0 определяют точку линии L (рис. 3), то в начальный момент во всей области $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ распределение напряжений удовлетворяет уравнениям (15), (23) и (27). При этом уравнение $\sigma = -p_s$ выполняется при $\rho = 1$.

Если ϑ_0 и ρ_0 определяют точку в области 1 (рис. 3), то в начальный момент во всей области $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ распределение напряжений удовлетворяет уравнениям (15), (23) и (27). Таким образом, решение совпадает с решением на основе условия текучести Мизеса. В связи с этим случай, когда ϑ_0 и ρ_0 определяют точку в области 1, в дальнейшем не рассматривается.

Если ϑ_0 и ρ_0 определяют точку в области 2 (Рис. 3), то необходимо строить решение, соответствующее первому уравнению в (1) в области $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_s$ и второму уравнению в (1) в области $\rho_s \leq \rho \leq 1$. Величина ρ_s определяется в ходе решения.

Решение при реализации двух режимов течения

Если ϑ_0 и ρ_0 определяют точку линии L, то соответствующее решение может рассматриваться, как частный случай решения для параметров ϑ_0 и ρ_0 соответствующих точке в области 2 (рис. 3). В этом частном случае $\rho_s = 1$. В связи с этим, решение строится только для случая, когда реализуются два режима течения. Значения φ и v_r при $\rho = \rho_s$ обозначим как φ_s и v_s, соответственно.

В области $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_s$ материал является несжимаемым. Принимая во внимание введенные выше обозначения, решение уравнения (21) представляется в виде

$$v_r = \frac{\rho}{2h_0} + \left(v_s - \frac{\rho_s}{2h_0}\right)\frac{\rho_s}{\rho}.$$

Тогда

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} + \left(v_s h_0 - \frac{\rho_s}{2}\right)\frac{\rho_s}{\rho^2}. \quad (31)$$

Из (2) и (13) следует, что $\varepsilon_\theta \tau_z = \varepsilon_z \tau_\theta$. Подставляя сюда (14), (15) и (31), получим

$$\tan\varphi = \sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}\rho^2}{\rho_s^2 - 3\rho^2 - 2\rho_s v_s h_0}.$$

Отсюда находим,

$$\tan\varphi_s = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}\rho_s}{\rho_s + v_s h_0}, \quad \tan\varphi_0 = \sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}\rho_0^2}{\rho_s^2 - 3\rho_0^2 - 2\rho_s v_s h_0}. \quad (32)$$

Второе уравнение совпадает с (25) при $\rho_s = 1$ и $v_s = 0$. Из уравнений (32) можно выразить ρ_s и v_s как

$$\rho_s = \rho_0 \sqrt{\frac{\left(\tan\varphi_s - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\tan\varphi_0 + 1\right)}{\left(\tan\varphi_0 - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\tan\varphi_s + 1\right)}}, \quad v_s = \frac{\left(\sqrt{3} + \tan\varphi_s\right)}{\left(\sqrt{3} - \tan\varphi_s\right)}\frac{\rho_s}{h_0}. \quad (33)$$

Решение (27) и, следовательно, (28) имеют силу. Таким образом, полагая $\sigma = -p_s$ в (28) найдем

$$\frac{1}{k_s} = \ln\left[\frac{\tan\left(\varphi_0/2 - \pi/6\right)}{\tan\left(\varphi_s/2 - \pi/6\right)}\right] - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi_s.$$

Здесь k_s вычисляется при $\vartheta = \vartheta_0$. Из этого уравнения можно выразить φ_0 как

$$\tan\left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \exp\left(\frac{1}{k_s} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi_s\right)\tan\left(\frac{\varphi_s}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \quad (34)$$

Рассмотрим область $\rho_s \le \rho \le 1$. В этой области имеют силу уравнения (17) и (25). Решение уравнения (25), удовлетворяющее условию $\varphi = \varphi_s$ при $\rho = \rho_s$, имеет форму

$$\left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^2 = \frac{\left(\cos\varphi_s + \sqrt{3}\sin\varphi_s\right)}{\left(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right)}\exp\left(\frac{\varphi_s - \varphi}{\sqrt{3}}\right). \quad (35)$$

Пусть φ_c - значение φ при $\rho = 1$. Уравнение для определения этой величины следует из (33) и (35) в виде

$$\frac{\left(\tan\varphi_0 - \sqrt{3}\right)}{\rho_0^2\left(\sqrt{3}\tan\varphi_0 + 1\right)} = \frac{\left(\sin\varphi_s - \sqrt{3}\cos\varphi_s\right)}{\left(\cos\varphi_c + \sqrt{3}\sin\varphi_c\right)}\exp\left(\frac{\varphi_s - \varphi_c}{\sqrt{3}}\right) \quad (36)$$

Переходя в (17) к дифференцированию по φ с помощью (19), найдем

$$\sqrt{3}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 1\right)}{\left(\sqrt{3}\tan\varphi + 1\right)}v_r = \frac{\rho}{h_0}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $v_r = 0$ при $\varphi = \varphi_c$, имеет форму

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{3}h_0}\exp\left(\frac{\varphi - \varphi_s}{2\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{\cos\varphi_s + \sqrt{3}\sin\varphi_s}{\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi}}\int_{\varphi_c}^{\varphi}\rho\exp\left(\frac{\varphi_s - \chi}{2\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{\cos\chi + \sqrt{3}\sin\chi}{\cos\varphi_s + \sqrt{3}\sin\varphi_s}}d\chi.$$

Здесь ρ необходимо исключить с помощью (35). Тогда,

$$v_r = \frac{v_s\left(\sqrt{3} - \tan\varphi_s\right)}{\left(\sqrt{3} + \tan\varphi_s\right)}\sqrt{\frac{\cos\varphi_s + \sqrt{3}\sin\varphi_s}{\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi}}\left[\exp\left(\frac{\varphi + \varphi_s - 2\varphi_c}{2\sqrt{3}}\right) - \exp\left(\frac{\varphi_s - \varphi}{2\sqrt{3}}\right)\right]. \quad (37)$$

При выводе этого решения учитывались первое уравнение в (33) и (36), позволившие исключить ρ_s и φ_0. Так как $v_r = v_s$ при $\varphi = \varphi_s$, то из (37) следует

$$1 = \frac{\left(\sqrt{3} - \tan\varphi_s\right)}{\left(\sqrt{3} + \tan\varphi_s\right)}\left[\exp\left(\frac{\varphi_s - \varphi_c}{\sqrt{3}}\right) - 1\right].$$

Из этого уравнения определяется зависимость φ_c от φ_s в виде

$$\varphi_c = \varphi_s - \sqrt{3}\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \tan\varphi_s}\right). \quad (38)$$

Исключая в (36) параметры φ_0 и φ_c с помощью (34) и (38), получаем уравнение для вычисления величины φ_s. Это уравнение решается численно. Остальные параметры, входящие в решение, определяются по формулам в (33), (34) и (38).

Главные напряжения вычисляются как $\sigma_r = \sigma + \tau_r$, $\sigma_\theta = \sigma + \tau_\theta$, $\sigma_z = \sigma + \tau_z$. Зависимость среднего напряжения от радиуса в области $\rho_0 \le \rho \le \rho_s$ определяется из (23) и (28). Среднее напряжение в области $\rho_s \le \rho \le 1$ является постоянной величиной, $\sigma = -p_s$. Компоненты тензора-девиатора напряжений определяются из (15) в обеих областях. Однако, зависимость φ от ρ следует из (23) в области $\rho_0 \le \rho \le \rho_s$ и из (35) в области $\rho_s \le \rho \le 1$. Отметим, что напряжения не зависят от h_0. Усилие прессования вычисляется как $F = 2\pi\int_{r_0}^{R_0}|\sigma_z|rdr$. Вводя безразмерное усилие прессования соотношением $f = \frac{F}{2\pi\tau_s R_0^2}$, получим

$$f = \int_{\rho_0}^{1}\frac{|\sigma_z|}{\tau_s}\rho d\rho. \quad (39)$$

Иллюстрация решения

Расчеты выполнялись при $\vartheta_0 = 0.6$. На рисунках 4, 5 и 6 показано распределение радиального, окружного и осевого напряжений по радиусу для различных значений ρ_0. Пунктирные кривые соответствуют значению ρ_0, при котором во всем кольце выполняется первое уравнение в (1), а второе уравнение в (1) выполняется на поверхности контакта деформируемого кольца и контейнера. Точки излома кривых на рис. 5 соответствуют границе между областями, в которых действуют различные режимы течения. Как видно из этого рисунка, размер области, в которой материал является пластически сжимаемым, уменьшается при увеличении ρ_0, что согласуется с физическими представлениями. На рисунке 7 показана зависимость безразмерного усилия прессования от ρ_0, определенная по (39). Из этого рисунка видно, что усилие прессования увеличивается при уменьшении ρ_0, что также согласуется с физическими представлениями.

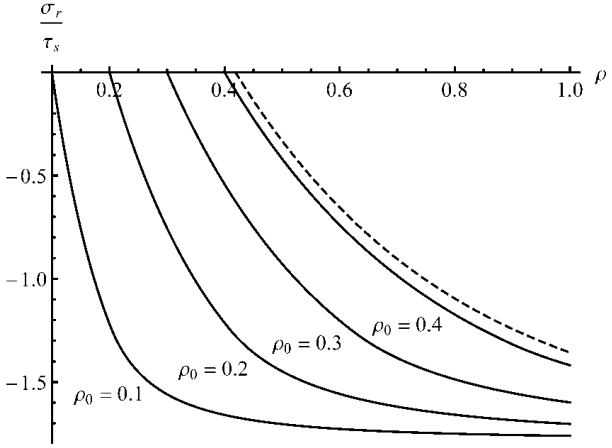


Рис. 4. Распределение радиального напряжения по радиусу для нескольких значений ρ_0 при $\vartheta_0 = 0.6$

Fig. 4. Radial distribution of the radial stress for several ρ_0 -values at $\vartheta_0 = 0.6$

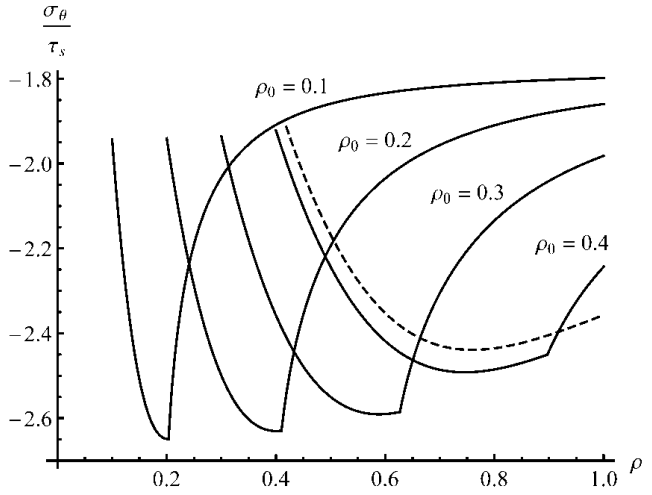


Рис. 5. Распределение окружного напряжения по радиусу ля нескольких значений ρ_0 при $\vartheta_0 = 0.6$

Fig. 5. Radial distribution of the circumferential stress for several ρ_0 -values at $\vartheta_0 = 0.6$

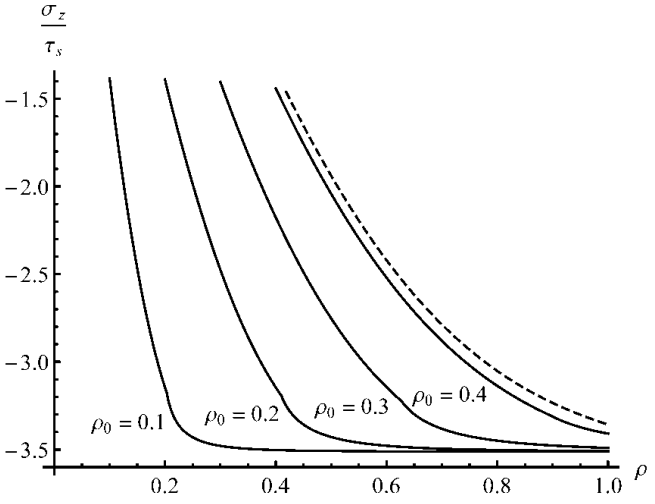


Рис. 6. Распределение осевого напряжения по радиусу для нескольких значений ρ_0 при $\vartheta_0 = 0.6$

Fig. 6. Radial distribution of the axial stress for several ρ_0 -values at $\vartheta_0 = 0.6$

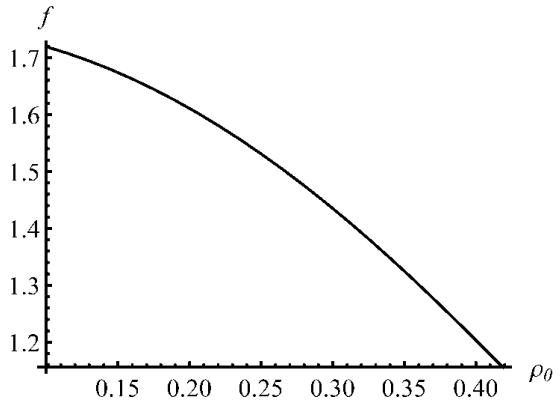


Рис. 7. Зависимость усилия прессования от внутреннего радиуса при $\vartheta_0 = 0.6$

Fig. 7. Dependence of the compression force on the internal radius at $\vartheta_0 = 0.6$

Заключение

Построено аналитическое решение для начального течения жесткопластического пористого кольца, помещенного в контейнер и подверженному действию сжимающей нагрузки. Численный метод требуется только для решения одного трансцендентного уравнения. Материал кольца подчиняется цилиндрическому условию текучести, что предполагает существование нескольких режимов течения. Показано, что, в зависимости от параметров процесса, возможны только два режима: (i) пластически несжимаемый материал во всем объеме кольца, (ii) пластически несжимаемый материал в некоторой области кольца, примыкающей к его внутренней поверхности, и сингулярный режим в остальном объеме. В последнем случае материал является пластически сжимаемым. Приводится пример расчета распределения радиального, окружного и осевого напряжений по радиусу, а также зависимости усилия прессования от величины внутреннего радиуса кольца. Численные результаты согласуются с физическими представлениями о процессе деформирования.

При разработке новых компьютерных программ необходимо проверять результаты расчета по ним с помощью аналитических или полуаналитических решений [22–24]. Полученное решение может быть использовано для этой цели при разработке компьютерных программ, основанных на условии пластичности (1).

Полученное решение также представляет теоретическую основу для экспериментального определения параметров условия пластичности (1) при различных значениях начальной относительной плотности. Решение имеет силу при отсутствие трения. Однако, известно, что при надлежащей обработке торцов заготовки такие решения успешно используются совместно с экспериментальными данными [25].

Библиографический список

1. Друянов Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел. – М: Машиностроение, 1989. – 164 с.

2. Ломакин Е. В., Щендригина О. П. Напряжения и деформации в диске из физически нелинейного материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – № 4. – С. 25–33.

3. Ломакин Е.В., Тишин П.В. Определяющие соотношения для материалов со свойствами, зависящими от вида деформированного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – №1. – С. 52–62. doi: 10.15593/perm.mech/2021.1.06

4. Александров С.Е. Об условиях текучести пористых и порошковых тел// Изв. РАН МТТ. – 1994. – № 6. – С.107-112.

5. Benzerga A. A. On the structure of poroplastic constitutive relations // J. Mech. Phys. Solids. – 2023. – V.178. – paper 105344. doi: 10.1016/j.jmps.2023.105344

6. Друянов Б.А., Пирумов А.Р. Исследование процесса экструзии пористого материала // Вестник машиностроения. – 1980. – Т. 60, № 9. – С. 61-62.

7. Оресов Ю.Г., Живов Л.И., Павлов В.А., Макагон В.И. Технологические режимы горячей экструзии

порошкового титана // Теория и практика прессования порошков. Киев: Наук. Думка. – 1975. – С. 146-150.

8. Залазинский А.Г., Поляков А.П. Модель пластически сжимаемого материала и ее применение к исследованию процесса прессования пористой заготовки // ПМТФ. –2002. – Т. 43, № 3. – С. 140-151.

9. Залазинский А.Г., Поляков А.А., Поляков А.П. О пластическом сжатии пористого тела // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 1. – С. 123-134.

10. Александров С.Е., Друянов Б.А. Прессование уплотняемого пластического материала// ПМТФ. – 1990. – №1. – С.108-113.

11. Александров С.Е., Друянов Б.А. Исследование процесса установившейся экструзии уплотняемого материала // ПМТФ. – 1990. – №4. – С.141-145.

12. Александров С.Е., Вишняков Л.Р. Исследование процесса прессования тонкостенной трубы из порошкового материала // ПМТФ. – 1993. – №2. – С.12-19.

13. Doege E., Bagaviev A. On the analytical modelling of the compacting process of a porous metal ring // Int. J. Mech. Sci. – 1997. – V.39, No.10. – pp. 1151-1159. doi:.10.1016/S0020-7403(97)00010-6

14. Хилл Р. Общий метод анализа процессов металлообработки // Механика: сб. пер. иностр. лит. – 1964. – №3. – С.129-153.

15. Sevastyanov G.M. Plane-Strain Extrusion of a Green Type Porous Plastic Material through a Wedge-Shaped Die // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2022. – №2. – С. 5-9. doi: 10.15593/perm.mech/2022.2.01

16. Hwang Y.-M., Alexandrov S., Rynkovskaya M. Expansion of a spherical cavity in an infinite porous rigid/plastic medium // Proc. IMechE Part C: J. Mech. Eng. Sci. – 2024. – V.238, No.17. – pp. 8801-8808.

17. Alexandrov S., Hwang Y.-M., Lyamina E., Chen J-R. Experimental procedure for identifying yield criteria for powder materials and its implementation // J. Appl. Sci. Eng. – 2024. – V.28, No.7. – P.1425-1433.

18. Друянов Б.А., Непершин Р. И. Теория технологической пластичности. - М.: Машиностроение, 1990. - 271 с.

19. Pindra N., Leblond J.B., Kondo D. Limit-analysis of a circular cylinder obeying the Green plasticity criterion and loaded in combined tension and torsion // Meccanica – 2018. – V.53. – P. 2437–2446.

20. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci. – 1972. – V.14, No.4. – P. 215-224

21. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals // Int. J. Mech. Sci. – 1976. – V.18, No.6. – P. 285-291.

22. Roberts S.M., Hall F., Van Bael A., Hartley P., Pillinger I., Sturgess E.N., Van Houtte P., Aernoudt E. Benchmark tests for 3-D, elasto-plastic, finite-element codes for the modelling of metal forming processes // J. Mater. Process. Technol. – 1992. – Vol.34. – pp. 61–68. doi: 10.1016/0924-0136(92)90090-F

23. Abali B.E., Reich F.A. Verification of deforming polarized structure computation by using a closed-form solution // Contin. Mech. Thermodyn. – 2020. – Vol.32. – P. 693–708. doi: 10.1007/s00161-018-0709-8

24. Yang H., Timofeev D., Abali B.E., Li B., Müller W.H. Verification of strain gradient elasticity computation by analytical solutions // Z Angew Math Mech. – 2021. – Vol. 101. – P.e202100023. doi: 10.1002/zamm.202100023

25. Reiss W., Pöhlandt K. The Rastegaev upset test - a method to compress large material volumes homogeneously // Exp. Tech. – 1986. – Vol. 10. – pp.20-24. doi: 10.1111/j.1747-1567.1986.tb01367.x

References

1. Druyanov B. A., Applied plasticity theory for porous bodies, Moscow, Mashinostroenie, 1989, 164 p.

2. Lomakin E.V., Shchendrigina O.P. Stresses and strains in a disk of physically nonlinear material with stress state dependent properties. *Mech. Solids,* 2020, Vol. 55, no.4, pp. 475-481. doi: 10.3103/S0025654420040081

3. Lomakin E.V., Tishin P.V. Constitutive relations for materials with strain state dependent properties. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no.1., pp. 52-62. doi: 10.15593/perm.mech/2021.1.06

4. Aleksandrov S. E. Yield criteria for porous and powder materials. *Mech. Solids,* 1994, Vol. 29, no. 6, pp. 110-116.

5. Benzerga A. A. On the structure of poroplastic constitutive relations. *J. Mech. Phys. Solids,* 2023, Vol.178, paper 105344. doi: 10.1016/j.jmps.2023.105344

6. Druyanov B.A., Pirumov A.R. Studying the process of extrusion of a porous material. *Vestn. Mashinostr*., 1980, Vol. 60, no.9, pp.61–62.

7. Oresov Y.G., Zhivov L.I., Pavlov V. A., Makagon V.I. Technological regimes of hot extrusion of powdered titanium, in Theory and practice of powder compaction, Naukova Dumka, Kiev, 1975, pp. 146-150.

8. Zalazinskii, A.G., Polyakov, A.P. Model of a plastically compressible material and its application to the analysis of the compaction of a porous body. *J. Appl. Mech. Tech. Physics,* 2002, Vol.43, pp. 457–466. doi: 10.1023/A:1015334907897

9. Zalazinskii A. G., Polyakov A.A., Polyakov A.P. On plastic compression of a porous body. Mech. Solids, 2003, Vol. 38, No.1, pp. 101-110.

10. Aleksandrov, S.E., Druyanov, B.A. Pressing of a compact plastic material. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.,* 1990, Vo. 31, pp. 108–113. doi: 10.1007/BF00852757

11. Aleksandrov S.E., Druyanov B.A. Investigating the process of the steady extrusion of a compacted material. *J. Appl. Mech. Tech. Phy*., 1991, Vol. 31, no. 4, pp. 645-649. doi: 10.1007/BF00851344

12. Aleksandrov, S.E., Vishnyakov, L.R. Pressing thin-walled tubing from powdered material. *J. Appl. Mech. Tech. Phys*., 1993, Vol.34, pp. 162–168. doi: 10.1007/BF00852507

13. Doege E., Bagaviev A. On the analytical modelling of the compacting process of a porous metal ring. *Int. J. Mech. Sci.,* 1997, Vol.39, no.10, pp. 1151-1159. doi:.10.1016/S0020-7403(97)00010-6

14. Hill R. A general method of analysis for metal-working processes. *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, Vol.11, no.5, pp. 305-326. doi: 10.1016/0022-5096(56)90033-4

15. Sevastyanov G.M. Plane-strain extrusion of a green type porous plastic material through a wedge-shaped die.

PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no.2, pp. 5-9. doi: 10.15593/perm.mech/2022.2.01

16. Hwang Y.-M., Alexandrov S., Rynkovskaya M. Expansion of a spherical cavity in an infinite porous rigid/plastic medium. *Proc. IMechE Part C: J. Mech. Eng. Sci.,* 2024, Vol.238, no.17, pp.8801-8808.

17. Alexandrov S., Hwang Y.-M., Lyamina E., Chen J-R. Experimantal procedure for identifying yield criteria for powder materials and its implementation. *J. Appl. Sci. Eng.,* 2024, Vol.28, no.7, pp.1425-1433.

18. Druyanov B.A., Nepershin R.I. Problems of technological plasticity. Elsevier, Amsterdam, 1994.

19. Pindra N., Leblond J.B., Kondo D. Limit-analysis of a circular cylinder obeying the Green plasticity criterion and loaded in combined tension and torsion. *Meccanica,* 2018, Vol.53, pp. 2437–2446. doi: 10.1007/s11012-018-0833-3

20. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci*., 1972, Vol.14, no.4, pp. 215-224. doi: 10.1016/0020-7403(72)90063-X

21. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals. *Int. J. Mech. Sci*., 1976, Vol.18, No.6, pp. 285-291. doi: 10.1016/0020-7403(76)90030-8

22. Roberts S.M., Hall F., Van Bael A., Hartley P., Pillinger I., Sturgess E.N., Van Houtte P., Aernoudt E. Benchmark tests for 3-D, elasto-plastic, finite-element codes for the modelling of metal forming processes. *J. Mater. Process. Technol*., 1992, Vol.34, pp. 61–68. doi: 10.1016/0924-0136(92)90090-F

23. Abali B.E., Reich F.A. Verification of deforming polarized structure computation by using a closed-form solution. *Contin. Mech. Thermodyn*., 2020, Vol.32, 693–708. doi: 10.1007/s00161-018-0709-8

24. Yang H., Timofeev D., Abali B.E., Li B., Müller W.H. Verification of strain gradient elasticity computation by analytical solutions. *Z Angew Math Mech*., 2021, Vol. 101, P.e202100023. doi: 10.1002/zamm.202100023

25. Reiss W., Pöhlandt K. The Rastegaev upset test - a method to compress large material volumes homogeneously. Exp. Tech., 1986, Vol. 10, pp.20-24. doi: 10.1111/j.1747-1567.1986.tb01367.x

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124013000674-0).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was performed on the topic of the state assignment (state registration number 124013000674-0).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The authors' contributions are equal.