Григорьев, А.С. Эволюция когезионной зоны в процессе динамического роста трещин поперечного сдвига в хрупких материалах / А.С. Григорьев. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.6.02 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 6. – С. 14–30.

Perm Polytech Style: Grigoriev A.S. The Evolution of Cohesive Zone during Dynamic Growth of Shear Cracks in Brittle Materials. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 6, pp. 14–31. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.6.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 6, 2025
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.6.02
УДК 51-72, 539.415, 539.421

ЭВОЛЮЦИЯ КОГЕЗИОННОЙ ЗОНЫ В ПРОЦЕССЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РОСТА ТРЕЩИН ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА В ХРУПКИХ МАТЕРИАЛАХ

А.С. Григорьев

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 29 мая 2025 г.
Одобрена: 10 ноября 2025 г.
Принята к публикации:
10 декабря 2025 г.

Ключевые слова:

когезионная зона, динамический рост трещины, динамическое разрушение, время инкубации разрушения, метод дискретных элементов.

АННОТАЦИЯ

Сдвиговые трещины в хрупких материалах, как правило, распространяются со скоростями, меньшими скорости волны Рэлея, но в некоторых случаях способны преодолевать этот порог. Ключевую роль в динамике роста трещины играют процессы в когезионной зоне перед вершиной трещины. Малые размеры когезионной зоны и динамическая природа роста трещин в хрупких материалах затрудняют ее экспериментальное изучение, что делает актуальным применение численного моделирования.

В работе численно исследованы особенности роста трещины поперечного сдвига в хрупких материалах и показано, как динамика роста трещины связана с эволюцией когезионной зоны, в частности с изменением ее протяженности и напряженного состояния. Исследование проведено с использованием метода дискретных элементов и оригинальной модели разрушения, основанной на принципах структурно-кинетической теории прочности. Показано, что режим и установившееся значение скорости роста трещины контролируются напряжениями в когезионной зоне. В частности, переход трещины в сверхсдвиговый режим роста обусловлен образованием дочерней трещины в области максимальных касательных напряжений в когезионной зоне.

Установлено, что длина когезионной зоны не является материальной константой, но варьируется в процессе роста трещины в результате постоянного перераспределения сдвиговых напряжений, которое носит периодический характер. Характеристики динамических колебаний длины контролируются аналогичными параметрами изменения напряженного состояния когезионной зоны, которые, в свою очередь, определяются величиной плотности упругой энергии, запасенной в окружающем объеме материала.

© **Григорьев Александр Сергеевич** – младший научный сотрудник, e-mail: grigoriev@ispms.ru.

Aleksandr S. Grigoriev – Junior Researcher, e-mail: grigoriev@ispms.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE EVOLUTION OF COHESIVE ZONE DURING DYNAMIC GROWTH OF SHEAR CRACKS IN BRITTLE MATERIALS

A.S. Grigoriev

Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 29 May 2025
Approved: 10 November 2025
Accepted for publication:
10 December 2025

Keywords:

cohesive zone, dynamic crack growth, dynamic fracture, fracture incubation time, discrete element method

ABSTRACT

Shear cracks in brittle materials usually propagate at velocities lower than the Rayleigh wave velocity, but in some cases can exceed this threshold. Processes in the cohesive zone ahead of the crack tip play the key role in crack growth dynamics. The small size of the cohesive zone and the dynamic nature of crack growth in brittle materials complicate their experimental studies and increase importance of numerical modeling.

The paper presents the numerical investigations of shear crack propagations in brittle materials, which show how the crack growth dynamics is related to the evolution of the cohesive zone, in particular, to changes in its length and stress state. The study uses the discrete element method and an original fracture model based on the fracture incubation time concept. It is shown that the mode and steady-state value of the crack growth velocity are controlled by stresses in the cohesive zone. In particular, the transition of the crack to the supershear propagation mode is caused by the formation of a daughter crack in the region of maximum tangential stresses in the cohesive zone.

It was found that the length of the cohesive zone is not a material constant but it varies during crack growth as a result of periodic redistribution of shear stresses. The characteristics of dynamic oscillations of cohesive zone length are controlled by the parameters of stress variations in the cohesive zone, which are determined by the value of the density of elastic strain energy accumulated in the surrounding volume of the material.

Введение

В последнее десятилетие в фокусе внимания исследователей находятся различные аспекты роста трещин в хрупких материалах, включая скорость и стабильность распространения трещины, зависимость предельного сопротивления материала с трещиной от скорости деформации и другие [1–9] Известно, что хрупкие материалы склонны к динамическому разрушению путем распространения трещин с характерными скоростями от единиц до десятков процентов скорости волны Рэлея V_R. Более того, в условиях поперечного сдвига трещины способны преодолевать «рэлеевский» скоростной порог и распространяться со скоростью, превышающей скорость поперечной упругой волны и близкой к скорости продольной упругой волны в материале [5–7]. Разнообразие значений скорости разрушения в одном и том же материале является следствием различного баланса мощности выделения накопленной упругой энергии и ее затрат на формирование инкремента трещины. Первое определяется величиной плотности упругой энергии, аккумулированной в окружающем объеме материала к началу роста трещины [10], в то время как второе контролируется сложными динамическими процессами в малой области вблизи вершины трещины, где происходит подготовка разрушения и образование новых свободных поверхностей. Такую область называют когезионной зоной. Изучение закономерностей изменения напряженного состояния когезионной зоны в процессе роста трещины и их зависимости от мощности выделения накопленной в материале упругой энергии находится в фокусе внимания исследователей, поскольку открывает перспективы прогнозирования режима разрушения природных и технических хрупких материалов и управления им.

Экспериментальное выявление когезионной зоны в хрупких материалах является крайне затруднительным ввиду динамической природы хрупкого разрушения и отсутствия индикаторов, позволяющих однозначно идентифицировать область формирования инкремента трещины [2–4]. Еще более сложным является экспериментальное изучение динамики изменения размеров и напряженного состояния этой области в процессе роста трещины, особенно при «сверхсдвиговых» скоростях [11–15]. Это определяет актуальность применения численного моделирования для анализа эволюции когезионной зоны и ее связи с динамикой роста трещин. Для теоретического изучения когезионной зоны растущей трещины традиционно применяются модели на основе градиентной теории деформации и модели нелокального континуума [16–21], а также подходы, связанные с явным введением специальной зоны вблизи вершины трещины, где материал ведет себя нелинейно [22–34]. Однако классические приближения к описанию когезионной зоны не учитывают конечное время формирования инкремента трещины и влияние величины локальных напряжений и скорости их изменения. Привлекательной альтернативой традиционным «квазистатическим» моделям являются динамические модели разрушения, основанные на принципах структурно-кинетической теории прочности [35–38]. Ключевой особенностью данной теории является введение времени инкубации разрушения. Этот параметр определяется как характерное время разрушения материала на рассматриваемом пространственном масштабе в условиях приложенной постоянной нагрузки, равной статической прочности материала. Время инкубации разрушения является физическим (материальным) параметром, величина которого зависит от эффективных механических характеристик хрупкого материала (модулей упругости, прочности) и от его структурных особенностей. С использованием данного материального параметра развиты обобщенные критерии наступления предельного состояния, которые применяются для численного изучения

закономерностей динамического разрушения хрупких материалов, в том числе для определения когезионной зоны растущих трещин [9; 39; 40].

Целью настоящей работы является численное исследование связи характеристик динамического роста трещины поперечного сдвига в хрупком материале (скорости и стабильности распространения трещины) с величиной аккумулированной материалом упругой энергии и параметрами когезионной зоны (ее протяженностью и распределением напряжений). Исследование проводилось с использованием численного метода однородно деформируемых дискретных элементов [41-44] и модели динамического разрушения [9,45-48], которая базируется на принципах структурно-кинетической теории прочности.

Основные приближения и математические соотношения метода однородно деформируемых дискретных элементов

Рост трещины поперечного сдвига моделируется с использованием численного метода однородно деформируемых дискретных элементов. Формализм этого метода подробно описан в предыдущих публикациях [43; 44]. Метод основан на следующих приближениях.

Изучаемое тело моделируется ансамблем равноосных дискретных элементов круглой формы (в двумерной постановке это эквивалентный диск). В таком случае эволюция ансамбля дискретных элементов определяется численным решением классической системы уравнений движения Ньютона – Эйлера для шаров с центральным и тангенциальным взаимодействием.

Взаимодействие дискретных элементов осуществляется через плоские грани. Площади граней определяются упаковкой и размером элемента. В данной работе мы используем двумерную реализацию метода с плотноупакованными элементами одинакового размера и формы (каждый элемент имеет шесть ближайших соседей). Элементы имеют одинаковую толщину в направлении вне плоскости, равную диаметру элементов.

Деформаций и напряжений в объеме элемента распределены однородно. В рамках этого приближения усредненные по объему элемента значения компонентов тензора напряжений $\overline{\sigma}_{\alpha\beta}$ в объеме элемента определяются согласно [42; 43]:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^i_{\alpha\beta} &= \frac{R_i}{\Omega_i^0}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\mathbf{n}_{ik}\right)_\alpha\left(\mathbf{F}_{ik}\right)_\beta = \\ &= \frac{R_i}{\Omega_i^0}\sum_{k=1}^{N_i}\left(\mathbf{n}_{ik}\right)_\alpha\left(\mathbf{F}^{centr}_{ik}+\mathbf{F}^{\tan g}_{ik}\right)_\beta = \\ &= \frac{R_i}{\Omega_i^0}\sum_{k=1}^{N_i}S^0_{ik}\left(\mathbf{n}_{ik}\right)_\alpha\left(\mathbf{T}_{ik}\right)_\beta = \\ &= \frac{R_i}{\Omega_i^0}\sum_{k=1}^{N_i}S^0_{ik}\left(\mathbf{n}_{ik}\right)_\alpha\left(\sigma_{ik}\left(\mathbf{n}_{ik}\right)_\beta+\tau_{ik}\left(\mathbf{t}_{ik}\right)_\beta\right),\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha,\beta=x,y$; индексы i и k – порядковые номера дискретных элементов, R_i – радиус эквивалентного диска, аппроксимирующего элемент i, Ω_i^0 – объем элемента в недеформированном состоянии, S_{ik}^0 – площадь контакта в паре недеформированных элементов i-k, $\mathbf{F}_{ik}$ – вектор силы взаимодействия, $\mathbf{F}_{ik}^{centr}$ и $\mathbf{F}_{ik}^{tang}$ – центральная и тангенциальная компонента силы ($\mathbf{F}_{ik}=\mathbf{F}_{ik}^{centr}+\mathbf{F}_{ik}^{tang}$), $\mathbf{T}_{ik}$ – вектор напряжений на площадке контакта элементов i и k, σ_{ik} и τ_{ik} – центральная и тангенциальная компоненты $\mathbf{T}_{ik}$ в пере i-k, $\mathbf{n}_{ik}$ – единичный вектор нормали, направленный вдоль линии, соединяющей центры масс элементов, $\mathbf{t}_{ik}$ – тангенциальный единичный вектор, $\left(\mathbf{W}\right)_\beta$ – проекция вектора $\mathbf{W}$ на ось β лабораторной системы координат. Усредненные компоненты тензора деформации в дискретном элементе i вычисляются в приращениях согласно закону Гука [44].

Пространственные параметры взаимодействующих элементов (перекрытие и относительное тангенциальное смещение в паре) можно разделить на вклады каждого элемента из пары:

$$\begin{cases}\Delta h_{ik}=\Delta q_{ik}+\Delta q_{ki}=\Delta\varepsilon_{ik}R_i+\Delta\varepsilon_{ki}R_k,\\ \Delta l_{ik}=\Delta\gamma_{ik}R_i+\Delta\gamma_{ki}q_{ki}.\end{cases} \tag{2}$$

Здесь символ Δ означает инкремент соответствующего параметра за шаг по времени Δt, h_{ij} – взаимное перекрытие элементов, q_{ik} и q_{ki} – расстояния от центров масс элементов i и k до центра области взаимодействия ($q_{ik}+q_{ki}=r_{ik}$; r_{ik} – расстояние между центрами масс элементов; $q_{ik}=R$ и $q_{ki}=R$ для недеформированных элементов, $R_i=R_k=R$ – радиус недеформированного элемента), l_{ij} – относительное сдвиговое смещение элементов в паре i-k [42], ε_{ik} и ε_{ki} – центральные деформации элементов i и k в паре i-k, γ_{ik} и γ_{ki} – соответствующие углы сдвига элементов в паре.

Соотношения для центральных сил взаимодействия элементов формулируются в многочастичной форме, учитывающей объемную часть напряжений в объеме элемента:

$$\begin{cases}\sigma_{ik}=\sigma_{ik}^{pair}\left(\varepsilon_{ik}\right)+A_i\overline{\sigma}^i_{mean}=\\ =\sigma_{ki}=\sigma_{ki}^{pair}\left(\varepsilon_{ki}\right)+A_k\overline{\sigma}^k_{mean},\\ \tau_{ik}=\tau_{ik}^{pair}\left(\gamma_{ik}\right)=\tau_{ki}=\tau_{ki}^{pair}\left(\gamma_{ki}\right)\end{cases} \tag{3}$$

где $\overline{\sigma}^i_{mean}=\left(\overline{\sigma}^i_{xx}+\overline{\sigma}^i_{yy}+\overline{\sigma}^i_{zz}\right)/3$ – среднее напряжение в элементе i, A_i – параметр материала. Тангенциальное взаимодействие формулируется в парной форме, как в классическом формализме методе дискретных элементов [42]. Следует отметить, что уравнения (3) учитывают необходимость выполнения третьего закона Ньютона ($\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$ и $\tau_{ik}=\tau_{ki}$).

Используется обобщенная (гипоупругая) форма закона Гука:

$$\begin{cases}\Delta\sigma_{\alpha\alpha}=2G\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}+(1-2G/K)\Delta\sigma_{mean},\\ \Delta\tau_{\alpha\beta}=2G\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}\end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha,\beta=x,y$; $\sigma_{\alpha\alpha}$ и $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ – диагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\tau_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – недиагональные компоненты; $\sigma_{mean}=\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)/3$ – среднее напряжение; K – объемный модуль упругости; G – модуль сдвига. Соответствующая формулировка

соотношений для удельных сил σ_{ik} и τ_{ik} (реакция элемента i на воздействие соседа k) аналогична [43; 44]:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{ik} = 2G_i\Delta\varepsilon_{ik} + \left(1-\dfrac{2G_i}{K_i}\right)\Delta\overline{\sigma}^{i}_{mean}, \\ \Delta\tau_{ik} = 2G_i\Delta\gamma_{ik} \end{cases} \quad (5)$$

где G_i и K_i – соответствующие модули упругости для материала элемента i. Соотношения (5) также записаны в гипоупругой форме. Уравнения (2)–(3) в таком случае принимают следующую форму:

$$\begin{cases} \sigma^{cur}_{ik} = \sigma^{pre}_{ik} + \Delta\sigma_{ik} = \\ = \sigma^{pre}_{ik} + 2G_i\Delta\varepsilon_{ik} + \left(1-\dfrac{2G_i}{K_i}\right)\Delta\overline{\sigma}^{i}_{mean} = \\ = \sigma^{cur}_{ki} = \sigma^{pre}_{ki} + \Delta\sigma_{ki} = \\ = \sigma^{pre}_{ki} + 2G_k\Delta\varepsilon_{ki} + \left(1-\dfrac{2G_k}{K_k}\right)\Delta\overline{\sigma}^{k}_{mean}, \\ \Delta h_{ik} = \Delta\varepsilon_{ik}R_i + \Delta\varepsilon_{ki}R_k. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \tau^{cur}_{ik} = \tau^{pre}_{ik} + \Delta\tau_{ik} = \tau^{pre}_{ik} + 2G_i\Delta\gamma_{ik} = \\ = \tau^{cur}_{ki} = \tau^{pre}_{ki} + \Delta\tau_{ki} = \tau^{pre}_{ki} + 2G_k\Delta\gamma_{ki}, \\ \Delta l_{ik} = \Delta\gamma_{ik}R_i + \Delta\gamma_{ki}R_k. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь индексы "*cur*" и "*pre*" обозначают значения удельных сил на текущем и предыдущем шагах интегрирования уравнений движения.

Пара дискретных элементов может быть в связанном или несвязанном состоянии. Первый случай отвечает наличию химической связи между фрагментами материала, моделируемыми этими элементами. Связанная пара элементов сопротивляется растяжению и сжатию, а также сдвигу. Несвязанная пара сопротивляется только сжатию, а величина сопротивления сдвигу ограничена сверху величиной силы сухого трения: $\left|\tau_{ij}\right| \le \mu\left|\sigma_{ij}\right|$, где μ – коэффициент сухого трения для пары элементов.

Хрупкие материалы характеризуются сильной зависимостью предела прочности на сдвиг от давления, а также изменением механизма разрушения со сдвига на отрыв при больших растягивающих напряжениях. Распространенным критерием разрушения для таких материалов является комбинированный критерий, учитывающий возможность разрушения при сдвиге (критерий разрушения Друкера – Прагера) или отрыве (критерий разрушения Рэнкина):

$$\begin{cases} \sigma^{\mathrm{D-P}}_{\mathrm{fract}}(t) = 1{,}5\left(\beta_{\mathrm{st}}-1\right)\sigma_{\mathrm{mean}}(t) + \\ +0{,}5\left(\beta_{\mathrm{st}}+1\right)\sigma_{\mathrm{eq}}(t) = \sigma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{comp}}, \\ \sigma^{\mathrm{Rankine}}_{\mathrm{fract}}(t) = \sigma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{tens}} \end{cases} \quad (8)$$

где $\beta_{st} = \sigma^{st}_{comp} \big/ \sigma^{st}_{tens}$; σ^{st}_{comp} и σ^{st}_{tens} – прочность при квазистатическом одноосном сжатии и растяжении; t – время.

Трещины распространяются в хрупких материалах со скоростями, сравнимыми со скоростями упругих волн, и величину инкубационного времени разрушения вблизи вершины трещины нельзя считать пренебрежимо малой. Поэтому в данном исследовании используется обобщенная (динамическая) формулировка комбинированного критерия разрушения Друкера – Прагера – Рэнкина. Подробная реализация динамической формулировки критерия приведена в работах [45,46]:

$$\begin{cases} \sigma^{\mathrm{D-P}}_{\mathrm{fract}}(t) = 1{,}5\left(\beta_{\mathrm{dyn}}-1\right)\sigma_{\mathrm{mean}}(t) + \\ +0{,}5\left(\beta_{\mathrm{dyn}}+1\right)\sigma_{\mathrm{eq}}(t) = \sigma^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{comp}}(t-t_0), \\ \sigma^{\mathrm{Rankine}}_{\mathrm{fract}}(t) = \sigma^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{tens}}(t-t_0). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\beta_{dyn} = \sigma^{dyn}_{comp}(t-t_0) \big/ \sigma^{dyn}_{tens}(t-t_0)$; $\sigma^{dyn}_{comp}(t-t_0)$ и $\sigma^{dyn}_{tens}(t-t_0)$ – динамические значения прочности при одноосном сжатии и растяжении, соответственно ($\sigma^{dyn}_{comp} \ge \sigma^{st}_{comp}$, $\sigma^{dyn}_{tens} \ge \sigma^{st}_{tens}$); t_0 – время начала инкубации разрушения при выполнении условия $\sigma^{D-P}_{fract}(t_0) \ge \sigma^{st}_{comp}$ или $\sigma^{Rankine}_{fract}(t_0) \ge \sigma^{st}_{tens}$. При выполнении критерия (9) (в момент времени $t=t_0+T_{fract}$) происходит локальное разрушение (разрыв связи в паре дискретных элементов). Следует отметить, что в процессе подготовки локального разрушения (от t_0 до $t=t_0+T_{fract}$) пара дискретных элементов остается связанной и способна сопротивляться приложенной нагрузке.

Зависимости $\sigma^{dyn}_{comp}\left(T_{fract}\right)$ и $\sigma^{dyn}_{tens}\left(T_{fract}\right)$ в уравнении (9) являются материальными функциями. Они определяются путем обработки результатов экспериментов по одноосному сжатию и растяжению образцов с различными скоростями деформации $\dot{\varepsilon}$. Абсолютные значения динамической прочности различных хрупких материалов при одной и той же скорости деформации могут существенно различаться. В то же время зависимости нормированных пределов прочности при сжатии и растяжении от скорости деформации с приемлемой точностью могут быть аппроксимированы едиными кривыми и применимы для широкого круга хрупких и квазихрупких материалов. Один из вариантов таких кривых предложен в [45] вместе с описанием алгоритма их преобразования в унифицированные зависимости $\sigma^{dyn}_{comp}\left(T_{fract}\right) \big/ \sigma^{st}_{comp}$ и $\sigma^{dyn}_{tens}\left(T_{fract}\right) \big/ \sigma^{st}_{tens}$. Полученные кривые имеют вид двухстадийных логарифмических функций:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{comp}}(T_{\mathrm{fract}})}{\sigma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{comp}}} = 1 - 0{,}37\ln\left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}\dfrac{T_{\mathrm{fract}}}{F_c T_1} - 0{,}01\right) \\ if\ \left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}T_{\mathrm{fract}} \le F_{\mathrm{comp}}\cdot 3{,}762\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}\right) \\ \dfrac{\sigma^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{comp}}(T_{\mathrm{fract}})}{\sigma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{comp}}} = 1 - 0{,}83\ln\left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}\dfrac{T_{\mathrm{fract}}}{F_c T_2} - 0{,}0129\right) \\ if\ \left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}T_{\mathrm{fract}} > F_{\mathrm{comp}}\cdot 3{,}762\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}\right), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{tens}}(T_{\mathrm{fract}})}{\sigma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{tens}}} = 1 - 1{,}66\ln\left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}\dfrac{T_{\mathrm{fract}}}{F_t T_3} - 0{,}238\right) \\ if\ \left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}T_{\mathrm{fract}} \le F_{\mathrm{tens}}\cdot 4{,}623\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}\right) \\ \dfrac{\sigma^{\mathrm{dyn}}_{\mathrm{tens}}(T_{\mathrm{fract}})}{\sigma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{tens}}} = 1 - 0{,}19\ln\left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}\dfrac{T_{\mathrm{fract}}}{F_t T_4} - 0{,}164\right) \\ if\ \left(\dfrac{1}{k}f_{\mathrm{size}}T_{\mathrm{fract}} > F_{\mathrm{tens}}\cdot 4{,}623\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}\right). \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $T_1 = 10^{-3}$ с, $T_2 = 1{,}55\cdot10^{-2}$ с, $T_3 = 5{,}25\cdot10^{-5}$ с и $T_4 = 2{,}5\cdot10^{-4}$ с. Безразмерные параметры $F_{\text{comp}} = \dfrac{\sigma^{\text{st}}_{\text{comp}}}{E} \Big/ \dfrac{\left(\sigma^{\text{st}}_{\text{comp}}\right)^{\text{ref}}}{E^{\text{ref}}}$ и $F_{tens} = \dfrac{\sigma^{st}_{tens}}{E} \Big/ \dfrac{\left(\sigma^{st}_{tens}\right)^{ref}}{E^{ref}}$ характеризуют соотношения между модулем Юнга (E), квазистатическими прочностями (σ^{st}_{comp} и σ^{st}_{tens}) исследуемого материала и теми же параметрами для некоторого «эталонного» материала. Приведенные выражения были выведены с использованием свойств типичного консолидированного песчаника (E^{ref}=16 ГПа, $\left(\sigma^{st}_{comp}\right)^{ref}$ =70 МПа, $\left(\sigma^{st}_{tens}\right)^{ref}$ =10 МПа) в качестве эталонного материала. Безразмерный параметр f_{size} при времени разрушения T_{fract} характеризует изменение инкубационного времени разрушения при изменении пространственного масштаба разрушения (например, характерного размера образца). Концепция кинетической теории прочности предполагает линейную зависимость параметра f_{size} от размера трещины (f_{size} уменьшается с уменьшением масштаба разрушения), если в этом диапазоне размеров качественного изменения структуры материала не происходит [40]. Выражения (10) и (11) при f_{size}=1 получены на основе обработки экспериментальных данных для макроскопических образцов хрупких материалов с линейными размерами в несколько сантиметров.

Выражения (10) и (11) включают безразмерный коэффициент k при времени разрушения T_{fract}. Этот параметр фактически масштабирует кривые (10) и (11) вдоль оси абсцисс без изменения их формы, и, следовательно, изменяются и значения параметров T_{inc} и T_{fract}. Величина времени инкубации разрушения тесно связана с параметрами структуры материала и ее способностью к диссипации механической энергии (усложнение структуры материала, как правило, приводит к замедлению роста трещин и наоборот). Поэтому коэффициент k можно рассматривать как параметр, эффективно характеризующий неоднородность структуры моделируемого материала. В настоящей работе значение k=1, что соответствует ряду типичных хрупких материалов, включая консолидированный песчаник, высокопрочные бетоны и низкопористую керамику [40].

Развитая модель применима для моделирования механического поведения большинства хрупких и квазихрупких материалов, включая горные породы и технические керамики. В то же время некоторые материалы из этого диапазона обладают особыми свойствами (структурно-обусловленной анизотропией механических свойств, сильной зависимостью модулей упругости от скорости деформации, физически или геометрически обусловленной сильной нелинейностью механического поведения и т.п.). Анализ динамического разрушения таких «особых» материалов требует соответствующего развития механической модели и метода моделирования.

Описание модели

Трещины поперечного сдвига в объеме материала обычно реализуются в условиях стесненного сдвига. Поэтому в настоящей работе рассматривался образец, находящийся в условиях простого сдвига. Моделировался процесс распространения трещины поперечного сдвига на низкопрочной прямолинейной границе раздела (интерфейсе) двух высокопрочных блоков с одинаковыми физико-механическими характеристиками. Рассматривалась двумерная дискретно-элементная модель (рис. 1) в приближении плоского деформированного состояния. На боковых поверхностях образца задавались периодические граничные условия в горизонтальном направлении. Нижней и верхней поверхностям образца сообщались малые постоянные скорости V, равные по модулю и противоположные по направлению (скорость деформации сдвига составляет около 10^{-3} c^{-1}). Перемещение нагружающих поверхностей в нормальном к трещине направлении запрещалось. На интерфейсе задавалась короткая начальная трещина, длина которой варьировалась в пределах от l_0 = 0,01 мм до l_0 = 0,1 мм. на рис. 1, *b* отрезки, соединяющие центры масс дискретных элементов, отмечают химически связанные пары элементов. Начальная трещина задается в виде совокупности химически несвязанных пар дискретных элементов, лежащих на границе двух блоков (элементы этих пар не соединены отрезками). Длина образца составляла W = 8 мм, высота H = 1,4 мм. Диаметр дискретного элемента d = 0,01 мм.

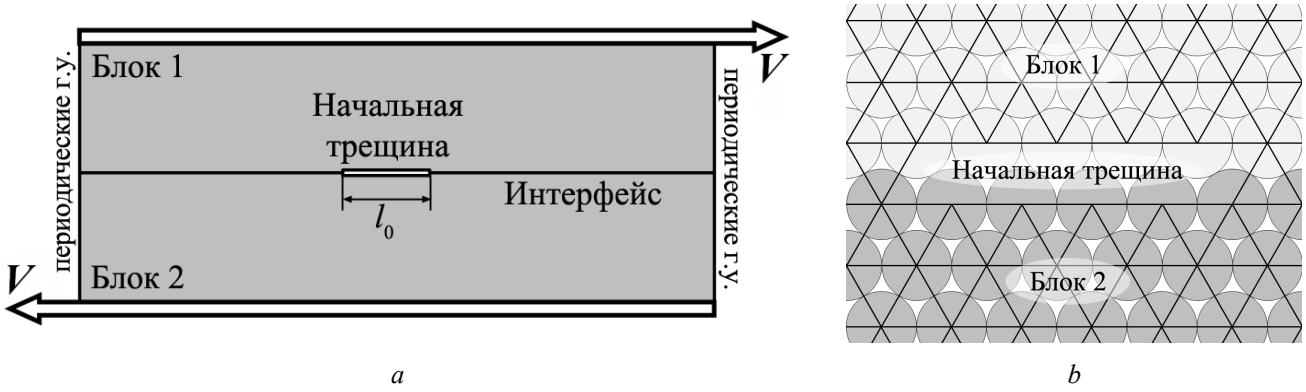


Рис. 1. Схематическое изображение модели и условия нагружения (*a*) и дискретно-элементная структура образца в окрестности начальной трещины (*b*)
Fig. 1. Schematic representation of the model and loading conditions (*a*) and discrete-element structure of the sample in the vicinity of the initial crack (*b*)

Материал блоков полагался упруго-хрупким. Упругие характеристики материала блоков полагались близкими к характеристикам консолидированного песчаника: плотность ρ=2200 кг/м^3, модуль Юнга E = 20 ГПа, коэффициент Пуассона ν = 0,2. Квазистатические прочностные параметры интерфейса полагались σ_c^{st} = 70 МПа (прочность при сжатии) и σ_t^{st} = 23,3 МПа (прочность при растяжении). Хрупкие материалы характеризуются сильной зависимостью предела прочности от давления, а время инкубации разрушения в вершине трещины нельзя считать пренебрежимо малым, поскольку скорости распространения трещины сопоставимы со скоростями упругих волн. Поэтому для моделирования локального разрушения интерфейса использовался комбинированный критерий разрушения Друкера – Прагера – Рэнкина в обобщенной (динамической) формулировке [9; 46; 48]. Обобщенная формулировка является одной из имплементаций интегрального критерия разрушения структурно-кинетической теории прочности и учитывает конечное время инкубации локального разрушения, что позволяет физически корректно описывать динамику роста трещин в хрупких материалах. В исследовании использовалось характерное значение времени инкубации разрушения модельного материала, соответствующее ряду хрупких материалов (высокопрочные бетоны, консолидированные песчаники). Детали применяемого метода и механической модели локально изотропных хрупких материалов приведены в работах [9; 45–48].

Результаты моделирования и обсуждение

На начальном этапе сдвигового нагружения модельный образец с исходной интерфейсной трещиной деформируется упруго (без разрушения) и аккумулирует упругую энергию. Напряженное состояние образца с начальной трещиной при сдвиговом нагружении является неоднородным однородным: максимальные сдвиговые напряжения концентрируются в вершине трещины. Трещина начинает динамически распространяться вдоль интерфейса, когда приложенное сдвиговое напряжение достигает предельной величины, зависящей от начальной длины трещины и всегда меньшей сдвиговой прочности интерфейса [10].

Величина скорости роста трещины в работе определялась как изменение положения вершины трещины в единицу времени. Размер когезионной зоны (области, в которой происходит подготовка разрушения) определялся как протяженность участка интерфейса перед вершиной трещины, на котором в данный момент времени происходит инкубация локального разрушения согласно обобщенному критерию прочности [9; 46].

Скорость роста трещины определяется энергетическим балансом вблизи вершины, а именно соотношением мощности поступления упругой энергии из разгружающихся областей материала позади вершины, затратами этой энергии на деформирование материала перед вершиной и излучением энергии в окружающее пространство в форме упругих волн [9; 10; 48]. В условиях квазистатического деформирования мощность притока упругой энергии к вершине растущей трещины определяется величиной плотности упругой энергии W_{crit}, накопленной материалом к моменту начала роста трещины. При сдвиговом деформировании параметр W_{crit} однозначно характеризуется величиной сдвиговой прочности образца с исходной трещиной $\tau_{crit} \sim \sqrt{W_{crit}}$. Величина τ_{crit} зависит не только от механических характеристик материала (в частности, от статической сдвиговой прочности и упругих модулей), но и от геометрических характеристик исходной трещины. В частности, Гриффитс вывел соотношение, связывающее τ_{crit} с длиной l_0 исходной трещины атомарной толщины [49]. В работе [10] получено обобщение данного соотношения для трещин различной начальной толщины. Было показано, что величина τ_{crit} является нелинейной убывающей функцией безразмерного геометрического параметра исходной трещины $P = l_0/h$, где h – эффективная толщина трещины. В настоящей работе величина h полагалась одинаковой для всех начальных трещин, поэтому в проводимом исследовании величина τ_{crit} однозначно определяется длиной «зародышевой» трещины l_0. Численно полученная зависимость $\tau_{crit}(l_0)$ для рассматриваемого модельного хрупкого материала, аппроксимированная обобщенной функцией [10], приведена на рис. 2, *a*. Можно видеть, в частности, что пятикратное увеличение длины интерфейсной трещины обусловило двукратное снижение сдвиговой прочности интерфейса. Это соответствует четырехкратному снижению плотности упругой энергии W_{crit}, аккумулируемой в материале до начала разрушения.

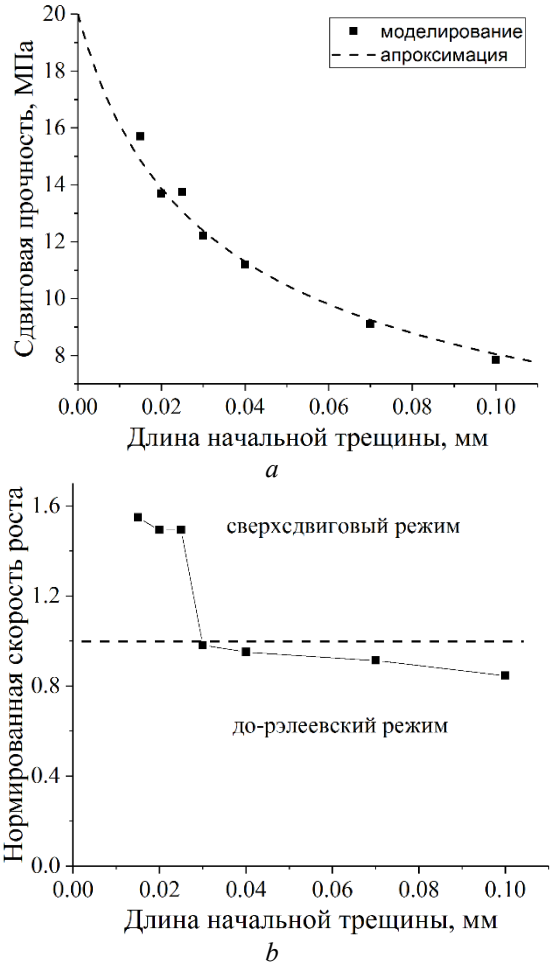


Рис .2. Зависимости сдвиговой прочности образца с начальной трещиной τ_{crit} (*a*) и нормированной установившейся скорости роста трещины V_{steady}/V_R (*b*) от длины начальной трещины l_0

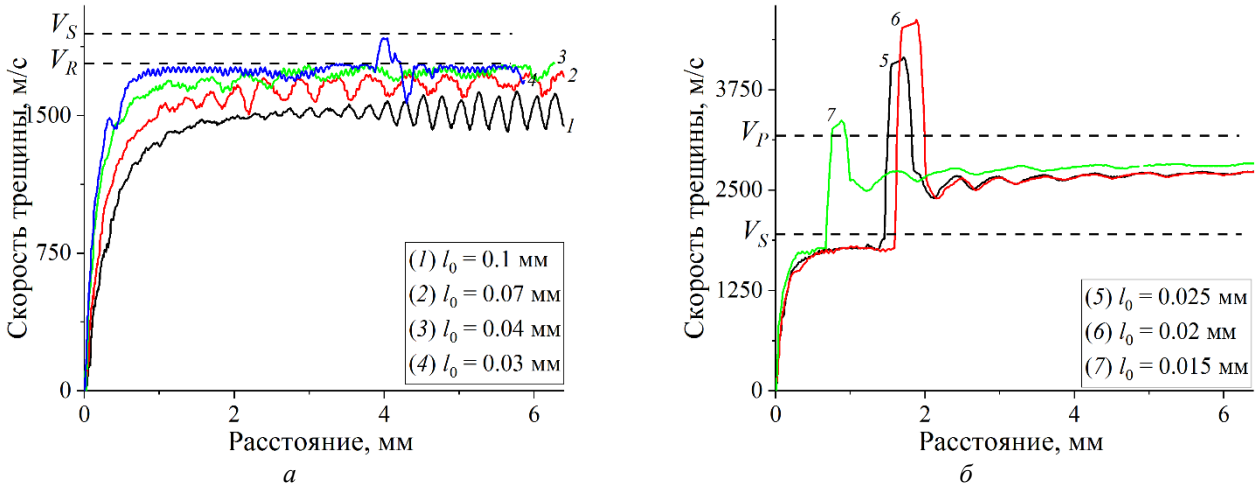
Fig. 2. Dependences of the normalized shear strength of the interface with the initial crack (*a*) and the normalized crack growth rate (*b*) on the length of the initial crack l_0

При достижении критического значения приложенной сдвиговой нагрузки τ_{crit} начальная трещина начинает расти динамически. Здесь и далее мгновенные значения скорости роста трещины обозначаются V_{crack}, установившееся значение скорости роста (скорость трещины после выхода на установившийся «до-рэлеевский» или сверхсдвиговой режим роста) обозначается V_{steady}. Установившееся значение скорости роста трещины V_{steady} возрастает по мере уменьшения начальной длины трещины l_0 (то есть, по мере увеличения τ_{crit} и W_{crit}). Однако, в отличие от функции $\tau_{crit}(l_0)$, зависимость $V_{steady}(l_0)$ терпит разрыв при некотором пороговом значении $l_0=l_{min}$. На Рисунке 2б можно выделить два участка, которые соответствуют двум различным режимам роста трещины:

1) традиционный «дорэлеевский» режим [1–10; 50], в котором скорость распространения трещины ограничена сверху скоростью волны Рэлея V_R в материале;

2) «сверхсдвиговой» режим [8; 11–15; 51–55], в котором скорость роста трещины превышает скорость поперечной упругой волны V_S, но ограничена сверху скоростью продольной упругой волны V_P в материале.

Первый режим соответствует классическому представлению о росте трещины в материале и реализуется для трещин, начальная длина которых l_0 превышает некоторый нижний предел l_{min} (величина l_{min} зависит от механических характеристик материала и эффективной ширины трещины h). На рисунке 3а показаны примеры динамики роста таких трещин. Можно видеть, что на начальном этапе (разгон) скорость роста трещины V_{crack} постепенно возрастает от нуля до некоторого установившегося значения (V_{steady}), которое ниже V_R. В установившемся режиме распространения мгновенное значение V_{crack} является не постоянным, но периодически изменяется (колеблется) вокруг V_{steady}. Период таких колебаний является постоянным, а амплитуда постепенно возрастает до тех пор, пока не достигает некоторого характерного значения, и далее не меняется. По мере уменьшения начальной длины трещины l_0 (и увеличения плотности накопленной упругой энергии W_{crit}) протяженность стадии ускорения сокращается, а установившееся среднее значение V_{steady} постепенно возрастает и стремится к V_R, хотя и не достигает его (рис. 2, *b*). Кроме того, кратно уменьшается амплитуда колебаний V_{crack} около V_{steady}, и увеличивается период колебаний, а форма колебаний становится все более сложной и нерегулярной. Наименьшая амплитуда и наиболее сложная форма колебаний V_{crack} имеет место при $l_0 \approx l_{min}$ (рис. 3, *a*). Описанные закономерности дорэлеевского роста трещины наблюдаются во многих экспериментальных и численных исследованиях [1–10; 50].



а *б*

Рис. 3. Зависимости скорости роста трещины от расстояния, пройденного вершиной трещины для трещин с различной начальной длиной: *a* – «медленные» дорэлеевские трещины, *b* – «быстрые» сверхсдвиговые трещины

Fig. 3. Dependences of the crack growth rate on the distance traveled by the crack tip for cracks with different initial lengths: *a* – *slow* sub-Rayleigh cracks, *b* – *fast* supershear cracks

Рис. 3, *b* иллюстрируют динамику роста трещин, начальная длина которых l_0 меньше l_{min}. Установившийся режим распространения таких трещин называют «сверхсдвиговым». Начальная стадия распространения этих трещин (ускоренный рост) не отличается качественно от рассмотренных выше «дорэлеевских» трещин, а протяженность этой стадии продолжает сокращаться по мере дальнейшего уменьшения l_0. Однако далее трещина резко ускоряется (на кривых виден «всплеск» скорости) и далее растет со скоростью $V_{crack} \geq \sqrt{2}\, V_S$. Такие скорости характерны для «сверхсдвигового» режима роста трещины [8; 11–15; 51–53]. Качественное изменение режима распространения трещины является следствием достижения некоторого порогового (минимального) значения плотности энергии упругой деформации, запасенной в системе до начала роста трещины ($W_{crit} > W_{min}$), что реализуется для коротких начальных трещин ($l_0 < l_{min}$). Для рассмотренного материала величина $W_{min} \approx \left(\tau_{crit}^{min}\right)^2 / 2G$ составляет около 50% максимального значения $W_{lim} = \left(\tau_c^{st}\right)^2 / 2G$ ($\tau_{crit}^{min} \approx 0{,}7\tau_c^{st}$, где τ_c^{st} – статическая сдвиговая прочность интерфейса), а соответствующее пороговое значение начальной длины трещины составляет приблизительно $l_{min} \approx 0{,}03$ мм (рис. 2).

Причиной скачкообразного увеличения скорости роста «коротких» начальных трещин ($l_0 < l_{min}$) является

формирование вторичной («дочерней») трещины недалеко от вершины растущей трещины сдвига. Механизм формирования вторичной трещины детально описан в многочисленных аналитических и численных работах [8; 10; 53] и исследован экспериментально [11–15]. Начало динамического роста трещины сопровождается упругой разгрузкой материала позади вершины и формированием упругих сдвиговых волн, которые распространяются по ходу распространения трещины и формируют участок (пик) высоких сдвиговых напряжений перед вершиной трещины. Этот участок распространяется со скоростью поперечной упругой волны, подпитывается энергией излучаемых упругих волн и поэтому постепенно расширяется, а амплитуда пика возрастает. Поскольку пик напряжений движется быстрее трещины, он постепенно отдаляется от вершины и теряет энергетическую подпитку. Дальнейшая эволюция пика сдвиговых напряжений определяется мощностью притока упругой энергии из разгружающихся областей материала позади вершины трещины (которая, в свою очередь, определяется плотностью аккумулированной упругой энергии W_{crit}). При $W_{crit}<W_{min}$ (что соответствует $l_0>l_{min}$) участок высоких сдвиговых напряжений удаляется от трещины настолько, что в итоге становится независимым локализованным волновым пакетом, который постепенно рассеивается в процессе дальнейшего распространения. При этом вершина трещины перемещается с «дорэлеевской» скоростью. При $W_{crit}>W_{min}$ ($l_0<l_{min}$) напряжения перед вершиной трещины растут настолько быстро, что успевают достигнуть критической величины до потери энергетической связи с трещиной, и на интерфейсе (на малом удалении от вершины трещины) зарождается вторичная трещина. Эта «дочерняя» трещина растет со скоростью, превышающей скорость волны Рэлея.

На рис. 4 представлены примеры полей скоростей и интенсивности нормальных напряжений вблизи вершины динамически растущей трещины до перехода в сверхсдвиговый режим (классический «дорэлеевский» режим), в момент перехода (зарождение «дочерней» трещины) и после перехода (сверхсдвиговый режим). Представленные картины полей напряжений являются типичными и хорошо согласуются с полученными в различных численных [8; 54], аналитических и экспериментальных [4; 13; 55] исследованиях. В частности, в работе [8] с использованием фазово-полевой модели исследуется рост трещины поперечного сдвига в «дорэлеевском» и сверхсдвиговом режимах. Можно отметить, что полученные в [8] поля напряжений вокруг вершины растущей трещины согласуются с полученными в настоящей работе. Рост трещины в классическом режиме сопровождается формированием «упругого вихря» впереди вершины трещины, где поле скоростей имеет кольцевую составляющую (рис. 4, *a*). Такой характер упругих смещений определяет локализацию касательных напряжений перед вершиной, а именно формирование эллиптической области концентрации касательных напряжений (рис. 4, *d*). Описанный характер поведения материала вблизи вершины трещины регистрируется в экспериментальных исследованиях и показан в аналитических (асимптотических) сингулярных и несингулярных решениях [13; 21; 55]. Эта область движется впереди вершины трещины со скоростью поперечной упругой волны и постепенно увеличивается в размерах за счет подпитки упругой энергией сдвиговых волн из разгружающихся областей блоков позади вершины трещины, а величина касательных напряжений в центральной части эллипса напряжений постепенно возрастает. Отметим, что участок высоких сдвиговых напряжений на линии интерфейса, показанный в классической работе [51], является профилем сдвиговых напряжений на участке пересечения интерфейса упругим вихрем. Характер упругих смещений и связанное с ними напряженное состояние вблизи вершины трещины существенно меняется при переходе из до-рэлеевского в сверхсдвиговый режим (рис. 4, *b* и рис. 4, *e*). Поскольку вторичная трещина формируется в области максимальных касательных напряжений и упругих деформаций, векторы смещения поверхностей в вершине вторичной трещины имеют преимущественные направления вдоль линии трещины (что близко к условию чистого сдвига) и приводит к генерации мощной упругой Р-волны, помимо традиционных S-волн, которые генерируются любыми растущими трещинами. Наложение этих волн друг на друга образует так называемый конус Маха (рис. 4, *c* и 4, *f*) [8; 13; 21; 55]. Р-волны имеют наибольшую скорость распространения в среде. Поэтому их вклад в суммарную энергию упругих волн, способствует максимально быстрому росту напряжений впереди вершины трещины и быстрой инкубации разрушения, что приводит к росту трещины со скоростью, превышающей скорость волны Рэлея. Отметим, что при переходе в сверхсдвиговой режим роста трещины вихревая составляющая поля скоростей исчезает. Поле скоростей «обтекает» вершину трещины в соответствии с направлениями смещений берегов растущей трещины, что отмечается и в работах других исследователей [13; 55].

Таким образом, плотность аккумулированной упругой энергии W_{crit} определяет режим и установившуюся скорость роста трещины поперечного сдвига. В свою очередь, величина W_{crit} однозначно определяется длиной исходного дефекта. Рост трещины, включая появление дочерней трещины при переходе из «дорэлеевского» в «сверхсдвиговый» режим, является результатом процесса инкубации локального разрушения, который локализован в когезионной зоне перед вершиной трещины (примеры мгновенных положений этой зоны приведены на рис. 4, *d–f*) и длится конечное, хотя и малое время. Описанные выше закономерности динамического роста трещин различной начальной длины определяются закономерностями изменения параметров когезионной зоны, в частности, длины когезионной зоны (L_{cz}) и величины касательных (сдвиговых) напряжений внутри этой зоны. Результаты моделирования показывают, что закономерности эволюции когезионной зоны в «до-рэлеевском» и «сверхсдвиговом» режимах роста трещины имеют ряд качественных различий.

На рисунке 5 (кривые *1*) приведены примеры зависимостей L_{cz} от расстояния пройденного вершиной трещины для «дорэлеевских» трещин различной начальной длины ($l_0>l_{min}$). Можно видеть, что в процессе роста трещины значение L_{cz} быстро возрастает до некоторого установившегося уровня, который далее не изменяется. Сопоставление рис. 5 и рис. 3, *a*, показывает, что начальная стадия роста величины L_{cz} соответствует стадии ускорения трещины, а достижение установившегося среднего значения L_{cz} определяет переход к стадии установившегося распространения трещины. На стадии установившегося распространения трещины происходит качественная трансформация характера вариаций мгновенных значений L_{cz}. Если вначале они могут быть охарактеризованы как хаотические «высокочастотные» вариации, то по

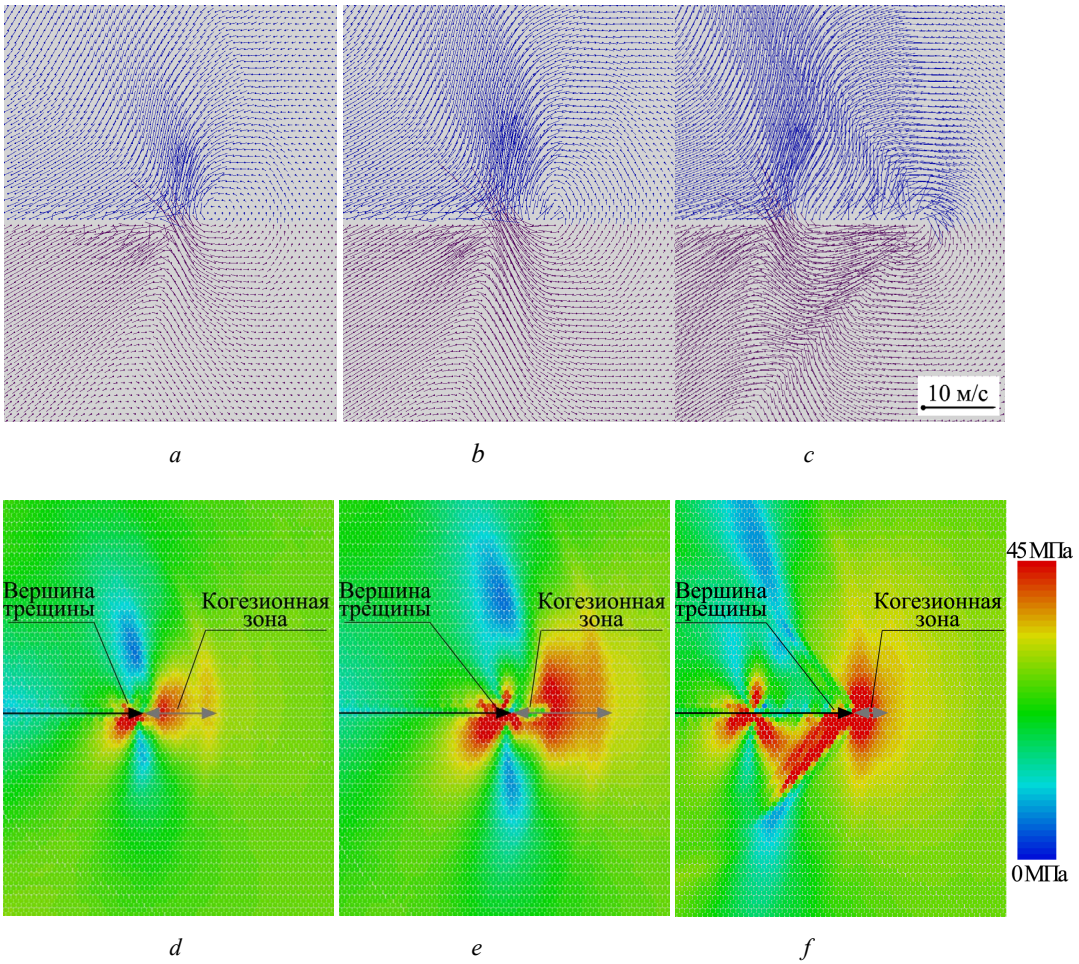


Рис. 4. Поля скоростей (*a*)-(*c*) и интенсивности нормальных напряжений (*d*)-(*f*) вблизи вершины трещины: до перехода в сверхсдвиговый режим (*a*), (*d*); в момент перехода (*b*), (*e*); после перехода в сверхсдвиговый режим (*c*), (*f*)

Fig. 4. Velocity fields (*a*)-(*c*) and equivalent stress fields (*d*)-(*e*) near the crack tip: before the transition to the supershear regime (*a*), (*d*); at the moment of transition (*b*), (*e*); after the transition to the supershear regime (*c*), (*f*)

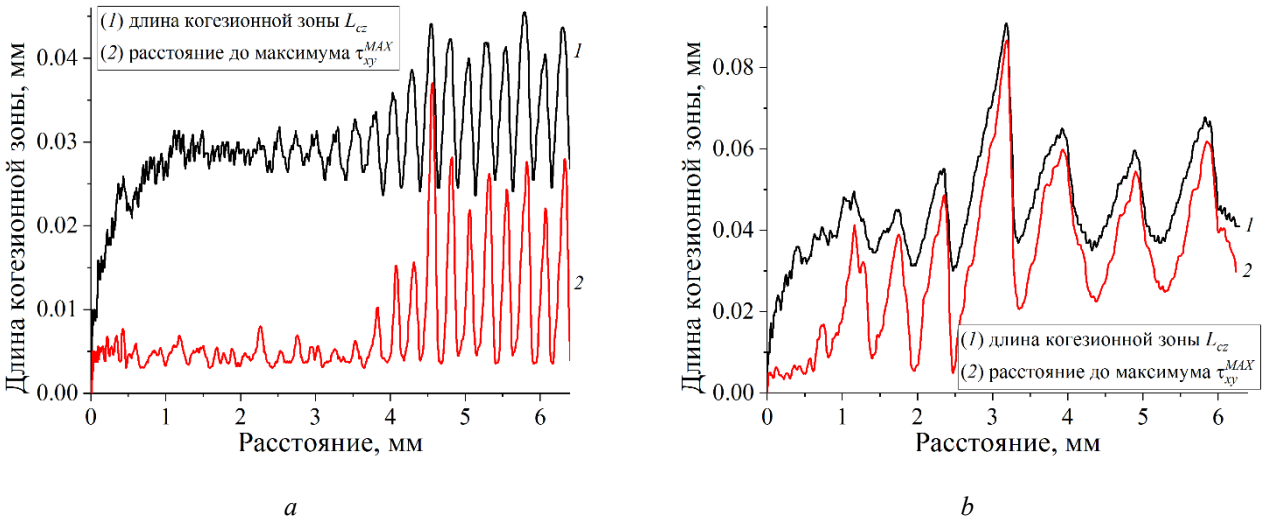
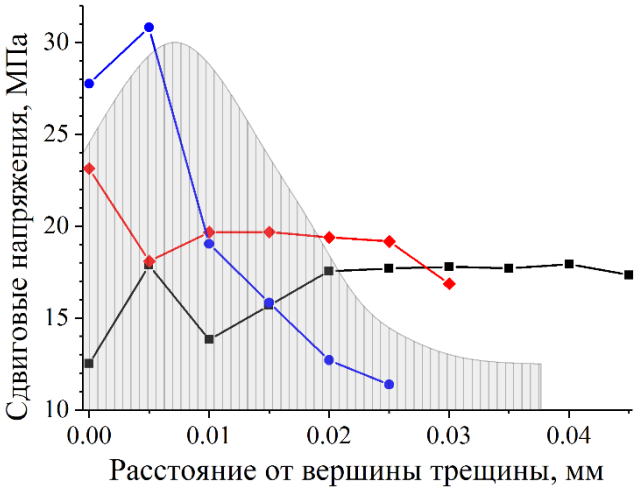


Рис. 5. Зависимости длины когезионной зоны L_{cz} и положения в ней максимума напряжений τ_{xy}^{MAX} относительно вершины трещины от расстояния, пройденного вершиной трещины. «Дорэлеевские» трещины ($l_0 > l_{min}$) с различной начальной длиной l_0: (*a*) – 0,1 мм, (*b*) – 0,04 мм

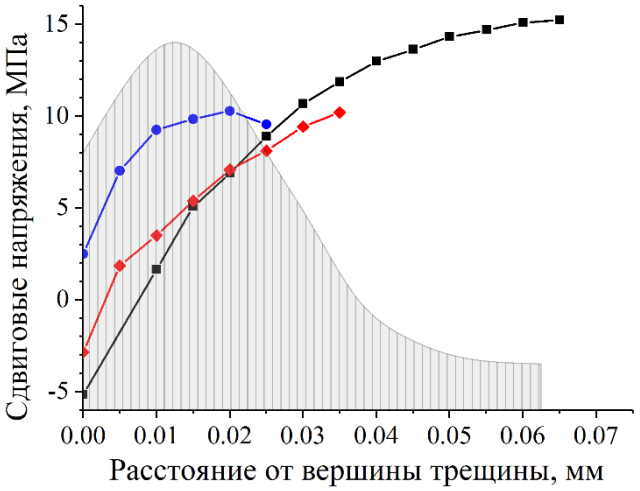
Fig. 5. Dependences of the cohesive zone length L_{cz} and the relative position of the shear stress maximum τ_{xy}^{MAX} in it on the distance traveled by the crack tip. *Sub-Rayleigh* cracks ($l_0 > l_{min}$) with different initial lengths l_0: (*a*) – 0.1 mm, (*b*) – 0.04 mm

мере роста трещины в структуре колебаний проявляется «низкочастотная» периодическая составляющая, которая постепенно становится доминирующей (рис. 5а,б). Переход от нерегулярного к регулярному режиму колебаний L_{cz} происходит тем быстрее, чем меньше длина исходного дефекта l_0 (и чем больше величина аккумулированной упругой энергии W_{crit}). Кроме того, с уменьшением l_0 возрастают установившееся среднее значение L_{cz} и период регулярных колебаний L_{cz} около среднего значения. Отметим, что величина периода колебаний L_{cz} равна периоду колебаний скорости роста трещины V_{crack} (рис. 3а), а сами колебания V_{crack} и L_{cz} являются коррелированными. Увеличение средней величины L_{cz} с уменьшением l_0 также хорошо коррелирует с аналогичным трендом для V_{steady}. Обобщая сказанное, можно констатировать, что увеличение аккумулированной материалом энергии (которая характеризуется удельным параметром W_{crit}) и соответствующее увеличение мощности потока упругой энергии из разгружающихся тыльных областей материала в область перед вершиной растущей трещины определяют возрастание средней длины когезионной зоны и периода колебаний L_{cz} около среднего значения. В свою очередь, динамика процессов формирования приращения трещины в когезионной зоне определяет динамику роста трещины (среднюю скорость и период колебаний скорости около среднего значения).

Периодичность изменения протяженности L_{cz} когезионной зоны «дорэлеевской» трещины тесно связана с особенностями динамики напряженного состояния участка интерфейса впереди вершины трещины. В рамках традиционных представлений распределение сдвиговых напряжений в когезионной зоне имеет нелинейный и немонотонный вид и характеризуется максимумом (τ_{xy}^{MAX}) у вершины трещины. Результаты последних исследований показывают [9; 10; 48], что такое представление о напряженном состоянии когезионной зоны является идеализированным и лишь ограниченно справедливым. Высокая скорость роста трещин, динамические процессы переноса энергии упругими волнами и взаимодействие этих волн определяют сильную вариативность не только длины когезионной зоны, но и мгновенного распределения сдвиговых напряжений в ней. Более того, характерный вид распределения сдвиговых напряжений τ_{xy} на стадии установившегося роста трещины изменяется качественно при изменении начальной длины трещины l_0. На рис. 6 показаны типичные примеры распределений τ_{xy} в когезионной зоне в различные моменты времени, соответствующие различным фазам одного полуцикла колебаний L_{cz} на стадии установившегося роста трещины. Можно видеть, что в случае «длинной» начальной трещины (рис. 6, *a*) распределения сдвиговых напряжений в целом коррелируют с традиционными модельными представлениями (типичное [8; 54] модельное распределение схематически представлено серой диаграммой на рис. 6). Однако в различных фазах периода колебания L_{cz} эти распределения существенно различаются. Так, в максимуме L_{cz} максимум напряжений τ_{xy}^{MAX} расположен вблизи окончания когезионной зоны (черная кривая на рис. 6, *a*). Когда значение L_{cz} близко к среднему (синяя кривая на рис. 6, *a*), профиль сдвиговых напряжений имеет вид, наилучшим образом соответствующий классической схеме. В минимуме L_{cz} максимум сдвигового напряжения находится у вершины трещины (красная кривая на рис. 6, *a*). В случае «короткой» начальной трещины, длина которой l_0 близка к критическому значению l_{min}, распределения сдвиговых напряжений являются однотипными во всех фазах колебания L_{cz} (рис. 6, *b*) и качественно отличаются от рассмотренных выше. Сдвиговые напряжения монотонно возрастают по мере удаления от вершины трещины и достигают максимального значения в самой удаленной от вершины трещины точке когезионной зоны. Только в фазе минимума L_{cz} максимум сдвиговых напряжений τ_{xy}^{MAX} находится внутри когезионной зоны.



a



b

Рис. 6. Примеры мгновенных распределений сдвиговых напряжений τ_{xy} на участке интерфейса перед вершиной «дорэлеевской» трещины при l_0: *a* – 0,1 мм; *b* – 0,04 мм

Fig. 6. Examples of shear stress distributions (τ_{xy}) in the interface ahead of the crack tip for *sub-Rayleigh* crack with initial length l_0: *a* – 0.1 mm; *b* – 0.04 mm

Таким образом, по мере уменьшения начальной длины трещины l_0 среднее положение τ_{xy}^{MAX} смещается к краю когезионной зоны. При этом положение максимума динамически изменяется на протяжении всего процесса роста трещины (красные кривые на рис. 5). На начальном этапе ускорения трещины и выхода на установившийся режим распространения τ_{xy}^{MAX} расположен вблизи вершины. На стадии установившегося режима роста трещины положение τ_{xy}^{MAX} в когезионной зоне периодически колеблется, что определяет соответствующие регулярные колебания L_{cz} и V_{crack} около среднего значения. В случае «длинных» трещин среднее положение τ_{xy}^{MAX} находится в первой половине когезионной зоны (ближе к вершине трещины). По мере уменьшения начальной длины трещины l_0 среднее положение τ_{xy}^{MAX} смещается к самой удаленной от вершины трещины точке когезионной зоны. При $l_0 \to l_{min}$ положение τ_{xy}^{MAX} совпадает краем когезионной зоны в течение всего цикла колебаний L_{cz}, за исключением фазы минимума, когда точка τ_{xy}^{MAX} находится внутри когезионной зоны.

На стадии установившегося роста трещины периодически изменяются не только профиль τ_{xy} и положение τ_{xy}^{MAX}, но и сами значения τ_{xy}^{MAX} и τ_{xy}^{end}. На рисунке 7 показаны примеры динамики изменения τ_{xy}^{MAX} и τ_{xy}^{end} в процессе роста двух рассмотренных выше трещин различной начальной длины l_0. Сопоставление графиков на рис. 5 и рис. 7 свидетельствует о том, что регулярная составляющая вариации L_{cz} появляется одновременно с регулярной (периодической) составляющей колебаний τ_{xy}^{MAX} и τ_{xy}^{end}, а период регулярной вариации L_{cz} совпадает с периодом регулярной вариации напряжений. Как и в случае напряжений, амплитуда и период регулярной вариации L_{cz} возрастают с уменьшением l_0.

При $l_0 < l_{min}$ на начальном этапе ускорения трещины когезионная зона развивается аналогично «до-рэлеевским» трещинам (рис. 8). Однако формирование «дочерней» трещины вызывает качественное изменение эволюции когезионной зоны. На стадии перехода к «сверхсдвиговому» режиму роста трещины протяженность когезионной зоны L_{cz} снижается в несколько раз и далее практически не изменяется (осцилляции L_{cz} быстро затухают, рис. 8, *a*). В то же время пиковое напряжение τ_{xy}^{MAX} на переходной стадии продолжает возрастать, достигает максимального значения в установившемся сверхсдвиговом режиме и далее почти не изменяется (как и в случае L_{cz}, осцилляции напряжения быстро затухают, рис. 8, *b*). Интересно отметить, что установившееся значение напряжения τ_{xy}^{end} достигается уже в самом начале роста трещины (переход в «сверхсдвиговый» режим проявляется только в появлении осцилляций, которые постепенно затухают). Отметим также, что установившиеся значения τ_{xy}^{MAX} и τ_{xy}^{end} отличаются более чем в 2 раза. Это качественно отличается от наблюдаемого в «до-рэлеевских» трещинах, где имеет место тенденция «выполаживания» напряженного состояния когезионной зоны по мере уменьшения l_0 (рис. 6 и 7). Таким образом, стабильность распределения напряжений в когезионной зоне трещины, распространяющейся в сверхсдвиговом режиме, определяет стабильность величины L_{cz} и, как следствие, стабильную величину скорости трещины (рис. 3, *b*). Описанная динамика изменения параметров когезионной зоны справедлива для всех трещин, растущих в сверхсдвиговом режиме (при $l_0 < l_{min}$).

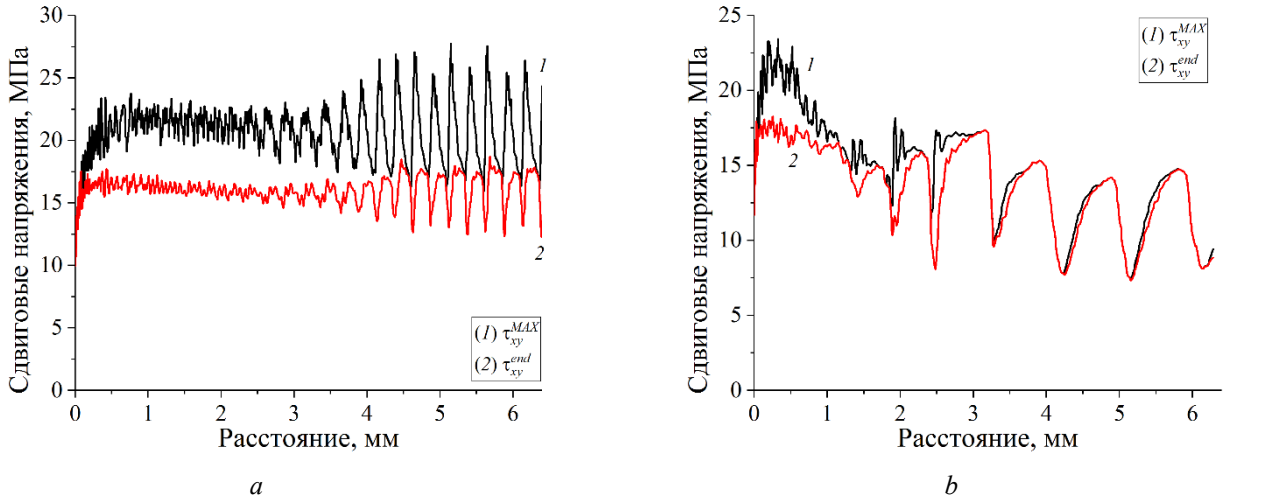
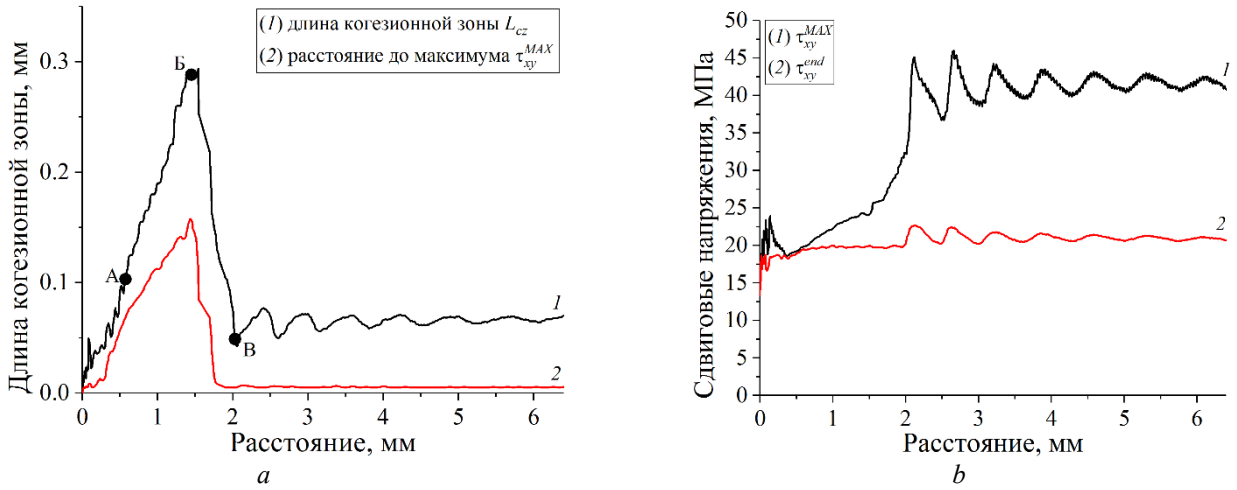


Рис. 7. Зависимость величины сдвиговых напряжений в когезионной зоне (в точке максимума τ_{xy}^{MAX} и в самой удаленной от вершины точке распределения τ_{xy}^{end}) от расстояния, пройденного вершиной трещины, для трещин с различной начальной длиной l_0: *a* – 0,1 мм; *b* – 0,04 мм

Fig. 7. Dependence of shear stresses (τ_{xy}^{MAX} – in point of maximum, τ_{xy}^{end} – in the end point of cohesive zone) in the fracture preparation zone on the distance traveled by the crack tip for cracks with different initial lengths l_0: *a* – 0.1 mm; *b* – 0.04 mm

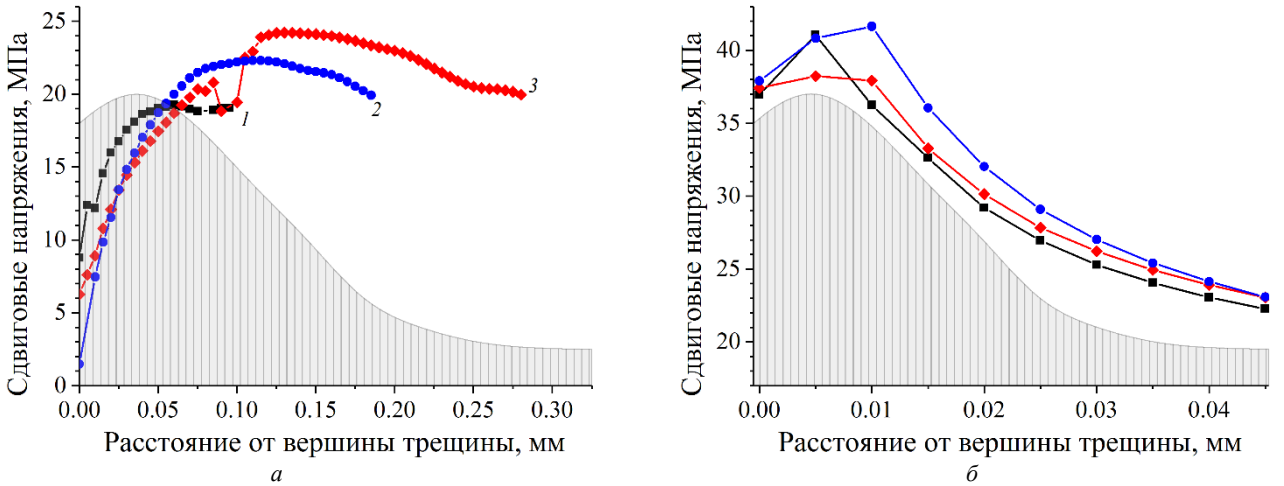


a *b*

Рис. 8. Типичные зависимости длины когезионной зоны L_{cz} и положения максимума напряжений τ_{xy}^{MAX} относительно вершины трещины в когезионной зоне (*a*) и зависимость сдвиговых напряжений в зоне подготовки разрушения (*b*) от расстояния, пройденного вершиной трещины. «Быстрые» трещины ($l_0<l_{min}$) l_0 = 0,025 мм

Fig. 8. Dependences of cohesive zone length L_{cz} and the relative position of the maximum stress τ_{xy}^{MAX} in the cohesive zone (*a*) and the dependence of shear stresses in the cohesive zone (*b*) on the crack tip distance. “fast” cracks ($l_0<l_{min}$) l_0 = 0.025 mm

Как отмечалось выше, кардинальное изменение распределения сдвиговых напряжений в когезионной зоне и определяемый этим явлением переход в сверхсдвиговый режим роста трещины вызваны образованием вторичной («дочерней») трещины в когезионной зоне. Анализ результатов моделирования показал, что дочерняя трещина формируется на участке когезионной зоны, в котором располагается максимум сдвиговых напряжений τ_{xy}^{MAX}. На рис. 9, *a* приведены распределения напряжений в когезионной зоне на начальной стадии ускорения трещины и перехода в «сверхсдвиговый» режим распространения (кривые *1–3* соответствуют точкам А, Б и В на рис. 8, *a*). Можно видеть, что распределения *1* и *2* схожи с теми же для «дорэлеевских» трещин при значениях l_0, близких к l_{min} (рис. 6, *b*). Однако распределение *3*, отвечающее моменту формирования «вторичной» трещины, имеет немонотонный профиль, характеризующийся участком «сброса» сдвигового напряжения в окрестности пикового значения τ_{xy}^{MAX} (в центральной области когезионной зоны). Такой «сброс» является следствием возникновения вторичной трещины (центр вторичной трещины находится на расстоянии ~0,1 мм от вершины трещины). Отметим, что зарождение вторичной трещины в центральной области когезионной зоны в окрестности максимума распределения сдвиговых напряжений является общей закономерностью динамики роста «коротких» ($l_0<l_{min}$) исходных трещин. Формирование вторичной трещины приводит к качественному изменению режима выделения аккумулированной упругой энергии материала и ее переноса в область перед вершиной трещины. Это определяет описанные выше качественные изменения динамики изменения напряжений в когезионной зоне (рис. 8, *b*) и соответствующие скачкообразные изменения протяженности когезионной зоны (рис. 8, *a*) и скорости роста трещины (рис. 3, *b*). На стадии роста трещины в «сверхсдвиговом» режиме профиль напряжений в когезионной зоне является стабильным и хорошо соответствует классическим представлениям о распределении напряжений в когезионных зонах (рис. 9, *b*).



a *б*

Рис. 9. Примеры мгновенных распределений сдвиговых напряжений τ_{xy} на участке интерфейса перед вершиной «быстрых» трещин ($l_0<l_{min}$) при l_0 = 0,025 мм: *a* – до перехода в сверхсдвиговый режим, *b* – после перехода в сверхсдвиговый режим

Fig. 9. Examples of shear stress distributions (τ_{xy}) in the interface ahead of the crack tip (cohesive zone) for *fast* ($l_0<l_{min}$) cracks at l_0 = 0.025 mm: *a* – before the transition, *b* – after the transition to the supershear regime

Постепенный рост протяженности когезионной зоны L_{cz} вплоть до перехода процесса роста трещины в сверхсдвиговый режим обусловлен высокими значениями упругой энергии, накопленной в образце к моменту начала роста. Увеличение протяженности когезионной зоны свидетельствует об «избыточности» выделяемой упругой энергии и невозможности ее эффективной релаксации за счет роста трещины в «дорэлеевском» режиме. Совокупность этих факторов создает условия для формирования вторичной трещины сдвига в когезионной зоне, которая, объединившись с первичной трещиной, начинает расти в более эффективном (энергетически выгодном) сверхсдвиговом режиме.

Заключение

С использованием динамической модели разрушения, учитывающей конечное время зарождения несплошностей, проведено численное изучение особенностей динамического распространения трещин поперечного сдвига в хрупких материалах и связи его параметров с ключевыми характеристиками когезионной зоны растущей трещины. Показано, что режим и установившееся значение скорости роста трещины определяются величиной плотности упругой энергии, накопленной в материале к моменту начала распространения трещины, и контролируются динамикой изменения напряженного состояния и протяженности когезионной зоны. В частности, в случае «избыточного» притока упругой энергии из разгружающихся областей за вершиной трещины процесс зарождения инкремента трещины в когезионной зоне претерпевает качественное изменение, приводящее к скачкообразному увеличению скорости роста трещины до значений, превышающих скорость поперечной упругой волны и приближающихся к скорости продольной упругой волны.

Установлено, что длина когезионной зоны не является материальной константой, но варьируется в процессе роста трещины. На начальной стадии роста трещины она может быть на порядок меньше, чем на стадии установившегося распространения. Более того, даже на стадии установившегося распространения размер когезионной зоны периодически изменяется в пределах порядка величины в результате постоянного перераспределения сдвиговых напряжений, которое носит периодический характер. Характеристики динамических колебаний длины (амплитуда, период) контролируются аналогичными параметрами изменения напряженного состояния когезионной зоны, которые, в свою очередь, определяются величиной плотности упругой энергии, запасенной в окружающем объеме материала.

Таким образом, энергетический баланс в когезионной зоне динамически растущей трещины поперечного сдвига определяет режим, установившееся значение скорости и стабильность ее распространения. Полученные результаты моделирования дополняют экспериментальные данные о динамически растущих трещинах и могут быть полезны для оценки границ и размеров когезионной зоны трещин в строительных и природных хрупких материалах.

Библиографический список

1. Albertini G., Lebihain M., Hild F., Ponson L., Kammer D. S. Effective toughness of heterogeneous materials with rate-dependent fracture energy // Physical Review Letters. – 2021. – Vol. 127(3). – Art. 035501. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.035501

2. Bouchbinder E., Goldman T., Fineberg J. The dynamics of rapid fracture: instabilities, nonlinearities and length scales // Rep. Prog. Phys. – 2014. – Vol. 77. – Art. 046501. doi: 10.1088/0034-4885/77/4/046501

3. Fineberg J., Bouchbinder E. Recent developments in dynamic fracture: some perspectives // Int. J. Fract. – 2015. – Vol. 196(1-2). – pp. 33-57. doi: 10.1007/s10704-015-0038-x

4. Berman N., Cohen G., Fineberg J. Dynamics and properties of the cohesive zone in rapid fracture and friction // Physical Review Letters. – 2020. – Vol. 125. – P. 125503. doi: 10.1103/PhysRevLett.125.125503

5. Dyskin A., Pasternak E. Inter-sonic propagation of shear zone as an effect of longitudinal deformation // International Journal of Engineering Science. – 2023. Vol. – 183. – Art. 103795, doi:10.1016/j.ijengsci.2022.103795.

6. Bleyer J., Roux-Langlois C., Molinari J. F. Dynamic crack propagation with a variational phase-field model: limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms // International Journal of Fracture. – 2017. – Vol. – 204(1), – pp. 79–100. doi: 10.1007/s10704-016-0163-1

7. Gori M., Rubino V., Rosakis A. J., Lapusta N. Pressure shock fronts formed by ultra-fast shear cracks in viscoelastic materials // Nature Communications. – 2018. – Vol. 9(1). – pp. 1–7. doi: 10.1038/s41467-018-07139-4

8. Zeng J., Ji J., Chen S., Tian F. Sub-Rayleigh to supershear transition of dynamic mode-II cracks // International Journal of Engineering Science. – 2023. – Vol. 188. – Art. 103862. doi:10.1016/J.IJENGSCI.2023.103862

9. Shilko E. V., Grigoriev A. S. Understanding the properties of the cohesive zone in dynamic shear fracture // Engineering Fracture Mechanics. – 2025. – Vol. 315. – Art. 110780. doi:10.1016/j.engfracmech.2024.110780

10. Psakhie S. G., Shilko E. V., Popov M. V., Popov V. L. Key role of elastic vortices in the initiation of intersonic shear cracks // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2015. – Vol. 91(6). – pp. 1–6. doi:10.1103/PhysRevE.91.063302

11. Rubino V., Rosakis A. J., Lapusta N. Spatiotemporal Properties of Sub-Rayleigh and Supershear Ruptures Inferred From Full-Field Dynamic Imaging of Laboratory Experiments // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2020. – Vol. 125(2). – e2019JB018922. doi: 10.1029/2019JB018922

12. Yu C., Pandolfi A., Ortiz M., Coker D., Rosakis A. J. Three-dimensional modeling of intersonic shear-crack growth in asymmetrically loaded unidirectional composite plates // Int. J. Solids Struct. – 2002. – Vol. 39. – pp. 6135–6157. doi: 10.1016/S0020-7683(02)00466-3

13. Mello M., Bhat H. S., Rosakis A. J. Spatiotemporal properties of Sub-Rayleigh and supershear rupture velocity fields: Theory and experiments // Journal of the

Mechanics and Physics of Solids. – 2016. – Vol. 93. – pp. 153–181. doi: 10.1016/j.jmps.2016.02.031

14. Ben-David O., Rubinstein S. M., Fineberg J. Slip-stick and the evolution of frictional strength // Nature. – 2010. – Vol. 463(7277). – pp. 76–79. doi: 10.1038/nature08676

15. Song S. G., Beroza G. C., Segall P. A Unified Source Model for the 1906 San Francisco Earthquake // Bulletin of the Seismological Society of America. – 2008. – Vol. 98(2). – pp. 823–831. doi: 10.1785/0120060402

16. Deseri L., Owen D. R. Toward a Field Theory for Elastic Bodies Undergoing Disarrangements // Journal of Elasticity. – 2003. – Vol. 70(1–3). – pp. 197–236. doi: 10.1023/B:ELAS.0000005584.22658.b3

17. Aifantis E. C. On non-singular GRADELA crack fields // Theoretical and Applied Mechanics Letters. – 2014. – Vol. 4(5). – Art. 051005. doi: 10.1063/2.1405105

18. Lazar M., Polyzos D. On non-singular crack fields in Helmholtz type enriched elasticity theories // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 62. – pp. 1–7. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.01.002

19. Owen D. R. Elasticity with Gradient-Disarrangements: A Multiscale Perspective for Strain-Gradient Theories of Elasticity and of Plasticity // Journal of Elasticity. – 2017. – Vol. 127(1). – pp. 115–150. doi: 10.1007/s10659-016-9599-9

20. Hao B., Mayya A., Vasudevan A., Chopin J., Bai Y., Ponson L. Dynamic forcing of crack fronts: From non-local elasticity to shock wave behavior // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2025. – Vol. 204. – P. 106260. doi: 10.1016/j.jmps.2025.106260

21. Zhou S., Zhuang X., Rabczuk T. Phase field modeling of brittle compressive-shear fractures in rock-like materials: A new driving force and a hybrid formulation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2019. – Vol. 355. – pp. 729–752. doi: 10.1016/j.cma.2019.06.021

22. Wang Q., Feng Y. T., Zhou W., Cheng Y., Ma G. A phase-field model for mixed-mode fracture based on a unified tensile fracture criterion // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – Vol. 370. – P. 113270. doi: 10.1016/j.cma.2020.113270

23. Moës N., Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – Vol. 69(7). – pp. 813–833. doi: 10.1016/S0013-7944(01)00128-X

24. Zhou F., Molinari J. F., Shioya T. A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials // Engineering Fracture Mechanics. – 2005. – Vol. 72(9). – pp. 1383–1410. doi: 10.1016/j.engfracmech.2004.10.011

25. Marder M., Liu X. Instability in lattice fracture // Physical Review Letters. – 1993. – Vol. 71(15). – pp. 2417–2420. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.2417

26. Ippolito M., Mattoni A., Colombo L., Pugno N. Role of lattice discreteness on brittle fracture: Atomistic simulations versus analytical models // Physical Review B. – 2006. – Vol. 73(10). – Art. 104111. doi: 10.1103/PhysRevB.73.104111

27. Heizler S. I., Kessler D. A., Levine H. Propagating mode-I fracture in amorphous materials using the continuous random network model // Physical Review E. – 2011. – Vol. 84(2). – Art. 026102. doi: 10.1103/PhysRevE.84.026102

28. Heizler S. I., Kessler D. A. Microbranching in mode-I fracture using large-scale simulations of amorphous and perturbed-lattice models // Physical Review E. – 2015. – Vol. 92(1). – Art. 012403. doi: 10.1103/PhysRevE.92.012403

29. Marconi V. I., Jagla E. A. Diffuse interface approach to brittle fracture // Physical Review E. – 2005. – Vol. 71(3). – Art. 036110. doi: 10.1103/PhysRevE.71.036110

30. Spatschek R., Brener E., Karma A. Phase field modeling of crack propagation // Philosophical Magazine. – 2011. – Vol. 91(1). – pp. 75–95. doi:10.1080/14786431003773015

31. Unnikrishna Pillai A., Behera A. K., Rahaman M. M. Combined diffused material interface and hybrid phase-field model for brittle fracture in heterogeneous composites // Engineering Fracture Mechanics. – 2023. – Vol. 277. – Art. 108957. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108957

32. Livne A., Bouchbinder E., Fineberg J. Breakdown of Linear Elastic Fracture Mechanics near the Tip of a Rapid Crack // Physical Review Letters. – 2008. – Vol. 101(26). – Art. 264301. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.264301

33. Harpaz R., Bouchbinder E. A nonlinear symmetry breaking effect in shear cracks // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2012. – Vol. 60(10). – pp. 1703–1709. doi: 10.1016/j.jmps.2012.06.010

34. Pundir M., Adda-Bedia M., Kammer D. S. Transonic and Supershear Crack Propagation Driven by Geometric Nonlinearities // Physical Review Letters. – 2024. – Vol. 132(22). – pp. 1–8. doi: 10.1103/PhysRevLett.132.226102

35. Zhurkov S. N. Kinetic concept of the strength of solids // International Journal of Fracture. – 1984. – Vol. 26(4). – pp. 295–307. doi: 10.1007/BF00962961

36. Regel V. R. Present state of solid bodies strength physics // Rheologica Acta. – 1975. – Vol. 14(1). – pp. 19–26. doi: 10.1007/BF01527208

37. Morozov N. F., Petrov Yu. V. Incubation time based testing of materials // European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2006. – Vol. 25(4). – pp. 670-676. doi: 10.1016/j.euromechsol.2006.05.005.

38. Selyutina N., Petrov Y. The dynamic strength of concrete and macroscopic temporal parameter characterized in fracture process // Procedia Structural Integrity. – 2016. – Vol. 2. – pp. 438–445. doi: 10.1016/j.prostr.2016.06.057

39. Dorogoy A., Godinger A., Rittel D. Application of the incubation time criterion for dynamic brittle fracture // International Journal of Impact Engineering. – 2018. – Vol. 112. – pp. 66-73. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.09.019

40. Shilko E. V., Grigoriev A. S. Understanding the properties of the cohesive zone in dynamic shear fracture // Engineering Fracture Mechanics. – 2025. – Vol. 315. – P. 110780. doi: 10.1016/j.engfracmech.2024.110780

41. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies // Geotechnique. – 1979. – Vol. 29(1). – pp. 47–65.

42. Potyondy D. O., Cundall P. A. A bonded-particle model for rock // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2004. – Vol. 41. – pp. 1329–1364. doi: 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011

43. Psakhie S. G., Shilko E. V., Grigoriev A. S., Astafurov S. V., Dimaki A. V., Smolin A. A mathematical model of particle-particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic-plastic materials // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 130. – pp. 96–115. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034

44. Shilko E. V., Psakhie S. G., Schmauder S., Popov V. L., Astafurov S. V., Smolin A. Y. Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure // Computational Materials Science. – 2015. – Vol. 102, – pp. 267–285. doi: 10.1016/j.commatsci.2015.02.026

45. Григорьев А.С., Шилько Е.В., Скрипняк В.А., Чернявский А.Г., Псахье С.Г. Численная модель динамического механического поведения хрупких материалов, основанная на принципах кинетической теории прочности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 75–99. doi: 10.15593/perm.mech/2017.3.05

46. Grigoriev A. S., Shilko E. V., Skripnyak V. A., Psakhie S. G. Kinetic approach to the development of computational dynamic models for brittle solids // International Journal of Impact Engineering. – 2019. – Vol. 123. – pp. 14–25. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2018.09.018

47. Grigoriev A. S., Zabolotskiy A. V., Shilko E. V., Dmitriev A. I., Andreev K. Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modeling // Materials. – 2021. – Vol. 14(23). – Art. 7376. doi: 10.3390/ma14237376

48. Grigoriev A. S. Features of Shear Crack Growth Dynamics in Heterogeneous Brittle Materials // Russian Physics Journal. – 2023. – Vol. 65(12). – pp. 2216–2223. doi: 10.1007/s11182-023-02893-5

49. Griffits A. A. VI. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. – 1921. – Vol. 221(582–593). – pp. 163–198. doi: 10.1098/rsta.1921.0006

50. Sharon E., Cohen G., Fineberg J. Propagating solitary waves along a rapidly moving crack front // Nature. – 2001. – Vol. 410(6824). – pp. 68–71. doi: 10.1038/35065051

51. Andrews D. J. Rupture velocity of plane strain shear cracks // Journal of Geophysical Research. – 1976. – Vol. 81(32). – pp. 5679–5687. doi: 10.1029/JB081i032p05679

52. Dascalu C. Supershear rupture with a two-scale damage model // Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 295. – Art. 109783. doi: 10.1016/ j.engfracmech.2023.109783

53. Dunham E. M. Conditions governing the occurrence of supershear ruptures under slip-weakening friction // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2007. – Vol. 112(7). – pp. 1–24. doi: 10.1029/2006JB004717

54. Mousavi S. M., Aifantis E. C. Dislocation-based gradient elastic fracture mechanics for in-plane analysis of cracks // International Journal of Fracture. – 2016. – Vol. 202. – pp. 93–110. doi: 10.1007/s10704-016-0143-5

55. Mello M., Bhat H. S., Rosakis A. J., Kanamori H. Identifying the unique ground motion signatures of supershear earthquakes: Theory and experiments // Tectonophysics. – 2010. – Vol. 493. – pp. 297–326. doi: 10.1016/j.tecto.2010.07.003

References

1. Albertini G., Lebihain M., Hild F., Ponson L., Kammer D. S. Effective toughness of heterogeneous materials with rate-dependent fracture energy, *Physical Review Letters*, 2021, Vol. 127(3), Art. 035501. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.035501

2. Bouchbinder E., Goldman T., Fineberg J. The dynamics of rapid fracture: instabilities, nonlinearities and length scales, *Rep. Prog. Phys*., 2014, Vol. 77, Art. 046501. doi: 10.1088/0034-4885/77/4/046501

3. Fineberg J., Bouchbinder E. Recent developments in dynamic fracture: some perspectives, *Int. J. Fract.*, 2015, Vol. 196(1-2), pp. 33-57. doi: 10.1007/s10704-015-0038-x

4. Berman N., Cohen G., Fineberg J. Dynamics and properties of the cohesive zone in rapid fracture and friction, *Physical Review Letters*, 2020, Vol. 125, P. 125503. doi: 10.1103/PhysRevLett.125.125503

5. Dyskin A., Pasternak E. Inter-sonic propagation of shear zone as an effect of longitudinal deformation, *International Journal of Engineering Science*, 2023. Vol, 183, Art. 103795, doi:10.1016/j.ijengsci.2022.103795.

6. Bleyer J., Roux-Langlois C., Molinari J. F. Dynamic crack propagation with a variational phase-field model: limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms, *International Journal of Fracture*, 2017, Vol, 204(1), pp. 79–100. doi: 10.1007/s10704-016-0163-1

7. Gori M., Rubino V., Rosakis A. J., Lapusta N. Pressure shock fronts formed by ultra-fast shear cracks in viscoelastic materials, *Nature Communications*, 2018, Vol. 9(1), pp. 1–7. doi: 10.1038/s41467-018-07139-4

8. Zeng J., Ji J., Chen S., Tian F. Sub-Rayleigh to supershear transition of dynamic mode-II cracks, *International Journal of Engineering Science*, 2023, Vol. 188, Art. 103862. doi:10.1016/J.IJENGSCI.2023.103862

9. Shilko E. V., Grigoriev A. S. Understanding the properties of the cohesive zone in dynamic shear fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, 2025, Vol. 315, Art. 110780. doi:10.1016/j.engfracmech.2024.110780

10. Psakhie S. G., Shilko E. V., Popov M. V., Popov V. L. Key role of elastic vortices in the initiation of intersonic shear cracks, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics,* 2015, Vol. 91(6), pp. 1–6. doi:10.1103/PhysRevE.91.063302

11. Rubino V., Rosakis A. J., Lapusta N. Spatiotemporal Properties of Sub-Rayleigh and Supershear Ruptures Inferred From Full-Field Dynamic Imaging of Laboratory Experiments, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2020, Vol. 125(2), e2019JB018922. doi: 10.1029/2019JB018922

12. Yu C., Pandolfi A., Ortiz M., Coker D., Rosakis A. J. Three-dimensional modeling of intersonic shear-crack growth in asymmetrically loaded unidirectional composite plates, *Int. J. Solids Struct.*, 2002, Vol. 39, pp. 6135–6157. doi: 10.1016/S0020-7683(02)00466-3

13. Mello M., Bhat H. S., Rosakis A. J. Spatiotemporal properties of Sub-Rayleigh and supershear rupture velocity fields: Theory and experiments, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* 2016, Vol. 93, pp. 153–181. doi: 10.1016/j.jmps.2016.02.031

14. Ben-David O., Rubinstein S. M., Fineberg J. Slip-stick and the evolution of frictional strength, *Nature*, 2010, Vol. 463(7277), pp. 76–79. doi: 10.1038/nature08676

15. Song S. G., Beroza G. C., Segall P. A Unified Source Model for the 1906 San Francisco Earthquake,

Bulletin of the Seismological Society of America, 2008, Vol. 98(2), pp. 823–831. doi: 10.1785/0120060402

16. Deseri L., Owen D. R. Toward a Field Theory for Elastic Bodies Undergoing Disarrangements, *Journal of Elasticity*, 2003, Vol. 70(1–3), pp. 197–236. doi: 10.1023/B:ELAS.0000005584.22658.b3

17. Aifantis E. C. On non-singular GRADELA crack fields, *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2014, Vol. 4(5), Art. 051005. doi: 10.1063/2.1405105

18. Lazar M., Polyzos D. On non-singular crack fields in Helmholtz type enriched elasticity theories, *International Journal of Solids and Structures*, 2015, Vol. 62, pp. 1–7. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.01.002

19. Owen D. R. Elasticity with Gradient-Disarrangements: A Multiscale Perspective for Strain-Gradient Theories of Elasticity and of Plasticity, *Journal of Elasticity*, 2017, Vol. 127(1), pp. 115–150. doi: 10.1007/s10659-016-9599-9

20. Zhou S., Zhuang X., Rabczuk T. Phase field modeling of brittle compressive-shear fractures in rock-like materials: A new driving force and a hybrid formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, Vol. 355, pp. 729–752. doi: 10.1016/j.cma.2019.06.021

21. Hao B., Mayya A., Vasudevan A., Chopin J., Bai Y., Ponson L. Dynamic forcing of crack fronts: From non-local elasticity to shock wave behavior, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2025, Vol. 204, P. 106260. doi: 10.1016/j.jmps.2025.106260

22. Wang Q., Feng Y. T., Zhou W., Cheng Y., Ma G. A phase-field model for mixed-mode fracture based on a unified tensile fracture criterion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, Vol. 370, P. 113270. doi: 10.1016/j.cma.2020.113270

23. Moës N., Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth, *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, Vol. 69(7), pp. 813–833. doi: 10.1016/S0013-7944(01)00128-X

24. Zhou F., Molinari J. F., Shioya T. A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, Vol. 72(9), pp. 1383–1410. doi: 10.1016/j.engfracmech.2004.10.011

25. Marder M., Liu X. Instability in lattice fracture, *Physical Review Letters*, 1993, Vol. 71(15), pp. 2417–2420. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.2417

26. Ippolito M., Mattoni A., Colombo L., Pugno N. Role of lattice discreteness on brittle fracture: Atomistic simulations versus analytical models, *Physical Review B*, 2006, Vol. 73(10), Art. 104111. doi: 10.1103/PhysRevB.73.104111

27. Heizler S. I., Kessler D. A., Levine H. Propagating mode-I fracture in amorphous materials using the continuous random network model, *Physical Review E*, 2011, Vol. 84(2), Art. 026102. doi: 10.1103/PhysRevE.84.026102

28. Heizler S. I., Kessler D. A. Microbranching in mode-I fracture using large-scale simulations of amorphous and perturbed-lattice models, *Physical Review E*, 2015, Vol. 92(1), Art. 012403. doi: 10.1103/PhysRevE.92.012403

29. Marconi V. I., Jagla E. A. Diffuse interface approach to brittle fracture, *Physical Review E*, 2005, Vol. 71(3), Art. 036110. doi: 10.1103/PhysRevE.71.036110

30. Spatschek R., Brener E., Karma A. Phase field modeling of crack propagation, *Philosophical Magazine*, 2011, Vol. 91(1), pp. 75–95. doi:10.1080/14786431003773015

31. Unnikrishna Pillai A., Behera A. K., Rahaman M. M. Combined diffused material interface and hybrid phase-field model for brittle fracture in heterogeneous composites, *Engineering Fracture Mechanics*, 2023, Vol. 277, Art. 108957. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108957

32. Livne A., Bouchbinder E., Fineberg J. Breakdown of Linear Elastic Fracture Mechanics near the Tip of a Rapid Crack, *Physical Review Letters*, 2008, Vol. 101(26), Art. 264301. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.264301

33. Harpaz R., Bouchbinder E. A nonlinear symmetry breaking effect in shear cracks, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2012, Vol. 60(10), pp. 1703–1709. doi: 10.1016/j.jmps.2012.06.010

34. Pundir M., Adda-Bedia M., Kammer D. S. Transonic and Supershear Crack Propagation Driven by Geometric Nonlinearities, *Physical Review Letters*, 2024, Vol. 132(22), pp. 1–8. doi: 10.1103/PhysRevLett.132.226102

35. Zhurkov S. N. Kinetic concept of the strength of solids, *International Journal of Fracture*, 1984, Vol. 26(4), pp. 295–307. doi: 10.1007/BF00962961

36. Regel V. R. Present state of solid bodies strength physics, *Rheologica Acta*, 1975, Vol. 14(1), pp. 19–26. doi: 10.1007/BF01527208

37. Morozov N. F., Petrov Yu. V. Incubation time based testing of materials, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2006, Vol. 25(4), pp. 670-676. doi: 10.1016/j.euromechsol.2006.05.005.

38. Selyutina N., Petrov Y. The dynamic strength of concrete and macroscopic temporal parameter characterized in fracture process, *Procedia Structural Integrity*, 2016, Vol. 2, pp. 438–445. doi: 10.1016/j.prostr.2016.06.057

39. Dorogoy A., Godinger A., Rittel D. Application of the incubation time criterion for dynamic brittle fracture, *International Journal of Impact Engineering*, 2018, Vol. 112, pp. 66-73. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.09.019

40. Shilko E. V., Grigoriev A. S. Understanding the properties of the cohesive zone in dynamic shear fracture, Engineering Fracture Mechanics, 2025, Vol. 315, P. 110780. doi: 10.1016/j.engfracmech.2024.110780

41. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, 1979, Vol. 29(1), pp. 47–65

42. Potyondy D. O., Cundall P. A. A bonded-particle model for rock, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004, Vol. 41, pp. 1329–1364. doi: 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011

43. Psakhie S. G., Shilko E. V., Grigoriev A. S., Astafurov S. V., Dimaki A. V., Smolin A. A mathematical model of particle-particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic-plastic materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, Vol. 130, pp. 96–115. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034

44. Shilko E. V., Psakhie S. G., Schmauder S., Popov V. L., Astafurov S. V., Smolin A. Y. Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure, *Computational Materials Science*, 2015, Vol. 102, – pp. 267–285. doi: 10.1016/j.commatsci.2015.02.026

45. Grigoriev A.S., Shilko E.V., Skripnyak V.A., Chernyavsky A.G., Psakhie S.G. Chislennaia model' dinamicheskogo mekhanicheskogo povedeniia khrupkikh

materialov, osnovannaia na printsipakh kineticheskoi teorii prochnosti [The numerical model of dynamic mechanical behavior of brittle materials based on the concept of the kinetic theory of strength]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, No. 3, pp. 75-99. doi: 10.15593/perm.mech/2017.3.05

46. Grigoriev A. S., Shilko E. V., Skripnyak V. A., Psakhie S. G. Kinetic approach to the development of computational dynamic models for brittle solids, *International Journal of Impact Engineering*, 2019, Vol. 123, pp. 14–25. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2018.09.018

47. Grigoriev A. S., Zabolotskiy A. V., Shilko E. V., Dmitriev A. I., Andreev K. Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modeling, *Materials*, 2021, Vol. 14(23), Art. 7376. doi: 10.3390/ma14237376

48. Grigoriev A. S. Features of Shear Crack Growth Dynamics in Heterogeneous Brittle Materials, *Russian Physics Journal*, 2023, Vol. 65(12), pp. 2216–2223. doi: 10.1007/s11182-023-02893-5

49. Griffits A. A. VI. The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1921, Vol. 221(582–593), pp. 163–198. doi: 10.1098/rsta.1921.0006

50. Sharon E., Cohen G., Fineberg J. Propagating solitary waves along a rapidly moving crack front, *Nature*, 2001, Vol. 410(6824), pp. 68–71. doi: 10.1038/35065051

51. Andrews D. J. Rupture velocity of plane strain shear cracks, *Journal of Geophysical Research*, 1976, Vol. 81(32), pp. 5679–5687. doi: 10.1029/JB081i032p05679

52. Dascalu C. Supershear rupture with a two-scale damage model, *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, Vol. 295, Art. 109783. doi: 10.1016/j.engfracmech.2023.109783

53. Dunham E. M. Conditions governing the occurrence of supershear ruptures under slip-weakening friction, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2007, Vol. 112(7), pp. 1–24. doi: 10.1029/2006JB004717

54. Mousavi S. M., Aifantis E. C. Dislocation-based gradient elastic fracture mechanics for in-plane analysis of cracks, *International Journal of Fracture*, 2016, Vol. 202, pp. 93–110. doi: 10.1007/s10704-016-0143-5

55. Mello M., Bhat H. S., Rosakis A. J., Kanamori H. Identifying the unique ground motion signatures of supershear earthquakes: Theory and experiments, *Tectonophysics*, 2010, Vol. 493, pp. 297–326. doi: 10.1016/j.tecto.2010.07.003

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0002.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was performed within the framework of the state assignment of the IFPM SB RAS, subject number FWRW-2021-0002.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The authors' contributions are equal.