Астапов Н.С., Кургузов В.Д. Моделирование упругопластического разрушения пластины с центральной трещиной // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 1. С. 12–25. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.02

Astapov N.S., Kurguzov V.D. Simulation of elastoplastic fracture of a center cracked plate. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 1, pp. 12-25. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.02
УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Н.С. Астапов, В.Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 25 марта 2022 г.
Одобрена: 06 марта 2023 г.
Принята к публикации:
05 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

критерии разрушения, структура материала, зона предразрушения, диаграмма разрушения, метод конечных элементов, компьютерное моделирование.

АННОТАЦИЯ

Прочность квадратной пластины с центральной трещиной при нормальном отрыве исследована в рамках подхода Нейбера – Новожилова с помощью модифицированной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла, использующей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). В качестве модели деформируемого твердого тела выбрана модель идеального упругопластического материала, имеющего предельное относительное удлинение. К такому классу материалов относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. При наличии сингулярной особенности в поле напряжений в окрестности вершины трещины предлагается использовать двухпараметрический дискретно интегральный критерий прочности. Деформационный критерий разрушения формулируется в вершине реальной трещины, а силовой критерий для нормальных напряжений с учетом осреднения формулируется в вершине модельной трещины. Длины реальной и модельной трещин отличаются на длину зоны предразрушения. Подробно проанализированы определяющие уравнения аналитической модели в зависимости от характерного линейного размера структуры материала. Получены простые, пригодные для поверочных расчетов формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения. Выполнено численное моделирование распространения зон пластичности в квадратных пластинах при квазистатическом нагружении. В численной модели использована текущая лагранжева формулировка уравнений механики деформируемого твердого тела, наиболее предпочтительная для моделирования деформирования тел из упругопластического материала при больших деформациях. Методом конечных элементов получена пластическая зона в окрестности вершины трещины. Проведено сравнение результатов аналитического и численного прогнозирования разрушения пластины при плоской деформации. Показано, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материалов со структурой при нормальном отрыве. Построены диаграммы квазихрупкого и квазивязкого разрушения структурированной пластины.

© ПНИПУ

© **Астапов Николай Степанович** – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: nika@hydro.nsc.ru, iD: 0000-0003-3616-1829.
Кургузов Владимир Дмитриевич – д.ф.-м.н., г.н.с., e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru, iD: 0000-0002-9716-425X.

Nikolay S. Astapov – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: nika@hydro.nsc.ru, iD: 0000-0003-3616-1829.
Vladimir D. Kurguzov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief researcher, e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru, iD: 0000-0002-9716-425X.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

SIMULATION OF ELASTOPLASTIC FRACTURE OF A CENTER CRACKED PLATE

N.S. Astapov, V.D. Kurguzov

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 March 2022
Approved: 06 March 2023
Accepted for publication:
05 April 2023

Keywords:

failure criteria, material structure, pre-fracture zone, diagram of fracture, finite element method, computer modeling.

ABSTRACT

The strength of a square plate with a central crack at normal separation was studied within the framework of the Neuber–Novozhilov approach using a modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model using an additional parameter, the diameter of the plasticity zone (width of the pre-fracture zone). As a model of a deformable solid body, a model of an ideal elastic-plastic material with a limiting relative elongation was chosen. This class of materials includes, for example, low-alloy steels used in structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold. In the presence of a singular feature in the stress field in the vicinity of the crack tip, it is proposed to use a two-parameter discrete integral strength criterion. The deformation fracture criterion is formulated at the tip of a real crack, and the force criterion for normal stresses, taking into account averaging, is formulated at the tip of a model crack. The lengths of real and model cracks differ by the length of the pre-fracture zone. The constitutive equations of the analytical model are analyzed in detail depending on the characteristic linear dimension of the material structure. Simple formulas suitable for verification calculations for the critical breaking load and the length of the pre-fracture zone are obtained. Numerical modeling of the propagation of plasticity zones in square plates under quasi-static loading has been performed. In the numerical model, the updated Lagrangian formulation of the equations of mechanics of a deformable solid body is used, which is most preferable for modeling the deformation of bodies made of an elastic-plastic material at large deformation. The plastic zone in the vicinity of the crack tip is obtained by the finite element method. The results of analytical and numerical prediction of plate fracture under plane deformation are compared. It is shown that the results of numerical experiments are in good agreement with the results of calculations using the analytical model of fracture of materials with a structure under normal separation. Diagrams of quasi-brittle and quasi-ductile fracture of a structured plate are constructed.

© PNRPU

Введение

В обзоре экспериментальных работ [1] проводится физико-техническая классификация процессов разрушения и обсуждение причин возникновения трещин при изготовлении конструкции. Кроме того, в [1] отмечаются проблемы построения аналитических моделей процесса разрушения в рамках линейной механики разрушения. В работе [2] прочностные свойства конструкций исследовались с помощью когезионной модели. В работе [3] даны оценки трещиностойкости по границе раздела материалов. Отметим, что при использовании когезионной модели [2–4] отсутствуют параметры, описывающие поперечник зоны предразрушения и структуру самой зоны предразрушения. В экспериментальной работе [5] по исследованию распространения трещины нормального отрыва в биматериале «керамика – алюминий» показано, что зона предразрушения для трещины на границе раздела сред, как правило, расположена только в одном более слабом материале ([5, Fig. 5]) и локализована в окрестности этой границы. Такое расслоение в результате лабораторного эксперимента наблюдалось в работе ([6, p. 801, Fig. 7]). В результате численного моделирования методом конечных элементов в работе [7] также показано притягивание продвигающейся трещины к границе раздела сред (см. [7, Fig. 3, 7]).

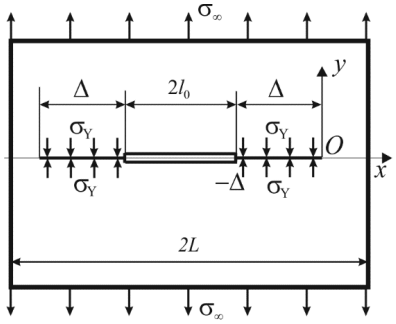
В работе [8] при описании процесса разрушения учитываются пределы упругости составляющих композит материалов, но не учитывается их структура. Однако трещины часто оказываются межзеренными, и наличие периодической структуры существенно влияет на раскрытие трещин, которое изменяется постепенно геометрически упорядоченным образом [1, с. 96]. В работах [9; 10] показано, что критерии разрушения, учитывающие характерный размер структуры материала, позволяют «расширить область применения по сравнению с традиционными критериями», хотя «вопрос о том, как этот размер связан с составом, структурой и, возможно, с другими параметрами реального материала, до сих пор не изучен». Поэтому проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов, аналитических моделей процесса разрушения композитов являются актуальными [11–18]. В работе [18] обосновывается актуальность создания феноменологических моделей для прогнозирования разрушения слоистых материалов.

Настоящая работа является естественным продолжением и обобщением работ [19–23] по исследованию распространения трещины в композите в рамках модифицированной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла (ЛПД). Методом конечных элементов при квазистатическом нагружении последовательно описан процесс распространения пластических зон в окрестности вершины трещины. Проведен сравнительный анализ ре-

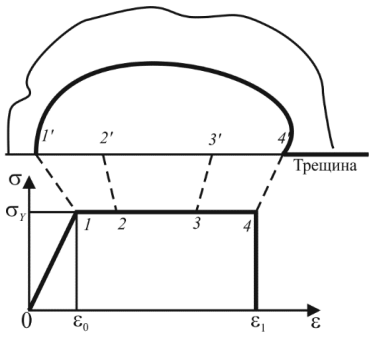
зультатов аналитического и численного моделирования разрушения квадратной пластины при плоской деформации. Учет характерного линейного размера материала позволил вывести простые, пригодные в инженерных приложениях соотношения для критической нагрузки и критической длины зоны предразрушения, а также построить диаграммы разрушения. Установлено, что скорректированная аналитическая модель предлагает приемлемое прогнозирование критической разрушающей нагрузки для любых длин трещин.

1. Постановка задачи

Пусть в однородной структурированной квадратной пластине размером $2L \times 2L$ имеется центральная внутренняя трещина длины $2l_0$ (рис. 1). На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞, то есть реализуется первая мода разрушения.



a



b

Рис. 1. Пластина с центральной внутренней трещиной (*a*); соответствие точек *1–4* диаграммы деформирования точкам *1'–4'* зоны предразрушения в окрестности левой вершины трещины (*b*)

Fig. 1. Plate with a central internal crack (*a*); correspondence of points *1–4* of the deformation diagram to points *1'–4'* of the pre-fracture zone in the vicinity of the left crack tip (*b*)

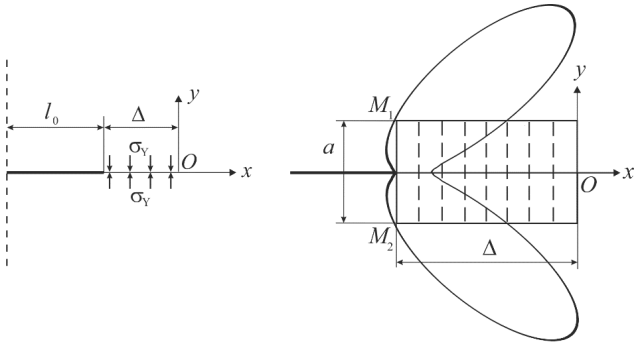
Материал пластины предполагается идеальным упругопластическим материалом с $(\sigma - \varepsilon)$-диаграммой одноосного деформирования, показанной на рис. 1, *b*. Здесь σ_Y – предел текучести, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация до разрушения. Введем параметр $\chi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, характеризующий отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой. Величину χ можно трактовать как относительную длину площадки текучести (коротко: показатель пластичности). Материал пластины обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер d структурного элемента (например, диаметр зерна) предполагается известным.

2. Аналитическая модель разрушения пластины

Предположим, что внутренняя острая трещина нормального отрыва длиной $2l_0$ распространяется прямолинейно в структурно-однородном материале. В модифицированной модели ЛПД [20; 21], помимо реальной внутренней прямолинейной трещины-разреза длиной $2l_0$, вводится в рассмотрение модельная трещина-разрез длиной $2l = 2l_0 + 2\Delta$, где Δ – длина зоны предразрушения или пластической зоны, расположенной на продолжении реальной трещины (рис. 2, *a*). В этой зоне возникают напряжения пластического деформирования, препятствующие раскрытию трещины и устраняющие сингулярность поля напряжений в окрестности её вершины. Предполагается, что напряжения здесь распределяются равномерно и равняются пределу текучести материала σ_Y. Полная постановка задачи распределения напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Такую нелинейную задачу можно существенно упростить, используя классические представления линейной механики разрушения, когда трещина нормального отрыва моделируется как двусторонний разрез, а нелинейность задачи возникает только при описании зоны предразрушения. После введения модельной (дополнительной) трещины-разреза задача может рассматриваться не как упругопластическая, а как упругая. Напомним, что согласно классической модели ЛПД [24–26] пластический материал в зоне предразрушения, поперечник которой равен нулю, стягивает берега трещины.

В модифицированной модели зона предразрушения аппроксимируется прямоугольником со сторонами Δ, a (рис. 2, *б*), причем длина зоны предразрушения Δ определяется в процессе решения задачи о разрушении, а поперечник a этой зоны отождествляется с поперечником зоны пластичности. В соответствии с предлагаемой модификацией модели ЛПД надо различать вершины реальной и модельной трещин. На рис. 1, *b* приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками *1*, *2*, *3*, *4* на $(\sigma - \varepsilon)$-диаграмме и точками *1'*, *2'*, *3'*, *4'* в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины слева от нее. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, на

границе этой зоны он начинает деформироваться неупруго, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. В модели Леонова – Панасюка – Дагдейла предполагается, что на продолжении модельной трещины реализуется одноосное растяжение [27; 28], поскольку к берегам трещины-разреза приложены постоянные напряжения σ_Y, которые притягивают берега друг к другу и, следовательно, действуют на материал растягивающим образом. В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины претерпевает удлинение $\varepsilon < \varepsilon_1$, которое в критическом состоянии совпадает с критическим удлинением $\varepsilon = \varepsilon_1$ (см. в точке *4* на рис. 1, *b*). Пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно показана на рис. 1, *b*, для случая плоского напряженного состояния, а в виде двух лепестков – на рис. 2, *b* – для плоской деформации. Точки M_1 и M_2 являются точками пересечения прямой, параллельной оси Oy и проходящей через вершину реальной трещины, с границей пластической зоны.



a *b*

Рис. 2. Сжимающие напряжения, действующие в модели ЛПД на продолжении трещины (*a*); аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (*b*)

Fig. 2. Compressive stresses acting in the LPD model on the crack continuation (*a*), the approximation of plastic zone by a rectangular prefracture zone (*b*)

Для построения модели разрушения структурированной квадратной пластины при нормальном отрыве воспользуемся интегральным критерием разрушения Нейбера – Новожилова [20–22]

$$\frac{1}{d}\int_0^d \sigma_y(x,0)dx = \sigma_Y, \quad x \ge 0, \tag{1}$$

$$2v(-\Delta) = \delta^*, \qquad x < 0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_y(x,0)$ – нормальные напряжения на продолжении трещины, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, d – характерный линейный размер структуры материала, $2v = 2v(x)$ – раскрытие трещины. Через δ^* обозначено критическое раскрытие модельной трещины; при величине раскрытия, равной критическому значению, разрушается структура материала в вершине реальной трещины (граничной точке зоны предразрушения, то есть в точке *4'* на рис. 1, *b*). Длина зоны предразрушения составляет только часть длины зоны пластичности, если учесть длину интервала осреднения d. Силовой критерий (1) по терминологии Новожилова является необходимым: процесс разрушения материала начинается тогда, когда осредненные по интервалу d нормальные напряжения достигают предела текучести σ_Y. При выполнении деформационного критерия (2) происходит катастрофическое разрушение образца. По этой причине совокупность условий (1), (2) называют достаточным критерием разрушения [20–22].

Для применения интегрального критерия (1), (2) к обработке результатов численных или лабораторных экспериментов с образцами конечных размеров используем аналитическое выражение нормального напряжения $\sigma_y(x,0)$ на продолжении трещины в виде [29]

$$\sigma_y(x,0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + Y_r\sigma_\infty, \quad x \ge 0, \tag{3}$$

где σ_∞ – напряжения, заданные на краях пластины; $K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta}$ – суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в обобщенной модели ЛПД. Коэффициент $K_{I\infty} > 0$ – КИН, порождаемый напряжениями σ_∞, вычисляется по формуле [29, с. 171]: $K_{I\infty} = Y_s\sigma_\infty\sqrt{\pi l}$. Коэффициент $K_{I\Delta} < 0$ – КИН, порождаемый напряжениями σ_Y, действующими в окрестности вершины модельной трещины в зоне предразрушения; $Y_s = Y_s(l/L)$, $Y_r = Y_r(l/L)$ – поправочные коэффициенты, учитывающие конечные размеры пластины. Для центральной внутренней трещины справочник [29, с. 171] предлагает аппроксимирующую формулу $Y_s = \sqrt{\sec(\pi l / L)}$. Коэффициент Y_r найдем из условия равновесия напряжений, приложенных к краям пластины, и напряжений, действующих на продолжении трещины: $Y_r = L/(L-l)$, что соответствует приближению сопротивления материалов. В случае бесконечной области коэффициенты Y_s и Y_r тождественно равны единице. После интегрирования по интервалу осреднения d уравнение (1) принимает вид

$$K_I = (\sigma_Y - Y_r\sigma_\infty)\sqrt{\frac{\pi d}{2}}. \tag{4}$$

Для раскрытия $2v = 2v(x)$, $-\Delta \le x < 0$, модельной трещины используем в (2) представление [28]

$$2v(x) = \frac{\kappa+1}{\mu}K_I\sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|), \qquad K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta} > 0, \ x \le 0, \tag{5}$$

в котором учтем лишь первый член разложения. Здесь $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации или $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния, ν – коэффициент Пуассона; $\mu = E/\left(2\left(1+\nu\right)\right) = \sigma_Y/\left(2\varepsilon_0\left(1+\nu\right)\right)$ – модуль сдвига материала, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y/\varepsilon_0$, где E – модуль Юнга, ε_0 – максимальное упругое относительное удлинение. Уравнение (2) с помощью представления (5) запишем в виде

$$\frac{\kappa+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = \delta^*, \qquad (6)$$

учитывающем конечные размеры пластины.

Для КИН $K_{I\Delta}$, порождаемого постоянными напряжениями σ_Y, действующими согласно модели Леонова – Панасюка – Дагдейла в зоне предразрушения, выберем из справочника [29, с. 41] выражение

$$K_{I\Delta} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l}\, \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{\Delta}{l}\right). \qquad (7)$$

Отождествим поперечник зоны предразрушения с поперечником зоны пластичности в вершине реальной трещины [28]:

$$a = q\left(\frac{K_{I\infty}}{\sigma_Y}\right)^2,$$

где $q = 5/(4\pi)$ при плоском напряженном состоянии и $q = \left(3 + 2\left(1-2\nu\right)^2\right)/(4\pi)$ при плоской деформации. Параметр максимального неупругого относительного удлинения $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ определяется на основе $(\sigma - \varepsilon)$-диаграммы деформирования материала (см. рисунок 1*б*). Тогда критическая величина раскрытия трещины δ^*, при которой разрушается ближайший к вершине реальной трещины структурный элемент в зоне предразрушения, вычислим по формуле

$$\delta^* = m\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right) a, \qquad (8)$$

где m – поправочный коэффициент. Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приближенно похожи на конфигурации, изображенные в [27; 28]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется прямолинейно от вершины трещины по ее оси, принимая форму, похожую на узкий вытянутый прямоугольник. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и в лабораторных экспериментах. В связи с этим в работе [22] для уточнения выражения поперечника зоны предразрушения обосновывается введение в соотношение (8) поправочного коэффициента m. Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного эксперимента.

Теперь систему уравнений (4), (6), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma_y(x,0)$, раскрытия трещины $2v = 2v(x)$ и КИН $K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta}$, можно записать в виде

$$\sqrt{\pi l}\left[Y_s\lambda - \frac{2}{\pi}\arccos\left(1-\frac{\Delta}{l}\right)\right] - \left(1 - Y_r\lambda\right)\beta = 0, \qquad (9)$$

$$\sqrt{\pi l}\left[Y_s\lambda - \frac{2}{\pi}\arccos\left(1-\frac{\Delta}{l}\right)\right]\sqrt{\Delta} - h\lambda^2 = 0, \qquad (10)$$

где $\lambda = \sigma_\infty/\sigma_Y$ – безразмерная критическая нагрузка, $\beta = \sqrt{\pi d/2}$, $h = \sqrt{2\pi}\chi m l c Y_s^2/32$. Величина $c = 5$ для плоского напряженного состояния и $c = (5 - 8\nu + 8\nu^2)/(1-\nu^2)$ для плоской деформации, потому что для поперечника a зоны пластичности можно принять $a = 5l\lambda^2 Y_s^2/4$ в условиях плоского напряженного состояния и $a = l\lambda^2 Y_s^2(5 - 8\nu + 8\nu^2)/4$ в условиях плоской деформации [28]. Расчеты показывают, что для любого значения коэффициента Пуассона $0 \le \nu \le 0{,}5$ для плоской деформации выполняется неравенство $3{,}6 \le c \le 5$, причем $c = 3{,}6$ при $\nu = 0{,}34$. Исключая выражение в фигурных скобках из системы уравнений (9), (10), находим точное выражение для критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\Delta} = \frac{h\lambda^2}{\beta(1 - Y_r\lambda)}. \qquad (11)$$

Используя приближение $\arccos\left(1-\Delta/l\right) \approx \sqrt{2\Delta/l}$, погрешность которого не превышает 5 % при $0 \le \Delta/l \le 0.55$, запишем систему уравнений (9), (10) в виде

$$\left(Y_s\lambda\sqrt{\pi l} - 2\sqrt{\frac{2\Delta}{\pi}}\right) - \left(1 - Y_r\lambda\right)\beta = 0, \qquad (12)$$

$$\left(Y_s\lambda\sqrt{\pi l} - 2\sqrt{\frac{2\Delta}{\pi}}\right)\sqrt{\Delta} - h\lambda^2 = 0. \qquad (13)$$

Заменяя $\sqrt{\Delta}$ в (12) выражением (11), получим квадратное уравнение относительно λ, из которого найдем приближенное значение критической разрушающей нагрузки $\lambda_\pm = 2\beta/(2\beta Y_r + f \pm \sqrt{f^2 - 4gh})$, где $f = Y_s\sqrt{\pi l}$, $g = 2\sqrt{2/\pi}$. Возвращаясь к исходным переменным, запишем эту формулу в виде

$$\lambda_{\pm}=\left[Y_r+\frac{Y_s}{2}\sqrt{\frac{2l}{d}}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\chi mc}{2\pi}}\right)\right]^{-1}. \qquad (14)$$

Величина λ_+, когда перед корнем выбирается знак «+», соответствует квазихрупкому разрушению ($\Delta/l\ll 1$), величина λ_- соответствует квазивязкому типу разрушения [22]. Формула (14) предлагаемой модели имеет смысл, если $\chi\le 2\pi/(mc)$ для однородного материала.

Из приближенного уравнения (12) получим выражение

$$\sqrt{\Delta}\approx\frac{\lambda(f+\beta Y_r)-\beta}{g}, \qquad (15)$$

а из уравнения (13) получим два значения

$$\sqrt{\Delta}_{\pm}\approx\frac{2h\lambda}{f\pm\sqrt{f^2-4gh}}, \qquad (16)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\Delta}_+$, когда в равенстве (16) перед корнем выбирается знак «+», квазивязкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\Delta}_-$. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (15) или (16), получим из системы уравнений (12), (13) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (14). А исключая выражение в больших круглых скобках из приближенной системы уравнений (12), (13), получим для критической длины Δ зоны предразрушения такое же выражение (11), какое получено из точной системы уравнений (9), (10). Напомним, что уравнения (9), (12) так же, как исходное уравнение (1), выполняются для любых нагрузок λ вблизи граничных точек зоны пластичности (точка *1'* на рис. 1, *b*). Поэтому для любых нагрузок λ, при которых возникает зона пластичности в окрестности вершины трещины, справедлива и формула (15), которая является следствием равенства (12). Однако уравнения (10) и (13) так же, как и уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок. Кроме того, приближенные выражения (6) и (8) для раскрытия трещины $2\upsilon(-\Delta)$ и критического раскрытия δ^* вносят дополнительную погрешность в уравнения (10), (13), которые используются при выводе формул (11) и (16). Таким образом, получена формула (14) для критической разрушающей нагрузки и три различные формулы (11), (15), (16), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (15) во всем диапазоне нагрузок.

В выражении критической нагрузки (14) возможен предельный переход при $\chi\to 0$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов (в таких материалах зона предразрушения отсутствует: $\Delta=0$). С использованием необходимого критерия разрушения (1) в случае хрупкого разрушения критические напряжения вычисляются по формуле

$$\lambda_0=\left(Y_r+Y_s\sqrt{\frac{2l_0}{d}}\right)^{-1}. \qquad (17)$$

Проанализируем выражение критической нагрузки (14) более подробно. Коэффициенты Y_s и Y_r характеризуют геометрию образца и полностью определяются шириной пластины $2L$ и длиной трещины $2l_0$. Параметр χ определяется по $(\sigma-\varepsilon)$-диаграмме материала пластины. Параметр c определяется коэффициентом Пуассона. Поэтому исследуем зависимость критической нагрузки от оставшихся двух параметров: характерного линейного размера структуры материала d и поправочного коэффициента m. Для любой длины трещины выполняется неравенство $\lambda_0\le\lambda_+\le\lambda_-\le 1$, причём равенство $\lambda_+=\lambda_-$ выполняется лишь в том случае, когда подкоренное выражение в (14) равно нулю, то есть $\chi mc/(2\pi)=1$. А равенство $\lambda_0=\lambda_+=\lambda_-=1$ выполняется лишь для трещины нулевой длины.

При возрастании параметра d возрастает и λ_+ (квазихрупкий сценарий) и λ_- (квазивязкий сценарий). Оказывается, для любого $d=d_+>0$ можно так выбрать $d=d_-$, что для трещины любой длины критические нагрузки λ_+ и λ_- совпадут, то есть $\lambda_+(d_+)\equiv\lambda_-(d_-)$. В этом случае d_+ и d_- связаны соотношением

$$d_-=\left(\left(1-\sqrt{1-t}\right)^2/t\right)^2 d_+,\quad t=\chi mc/(2\pi). \qquad (18)$$

Наибольшее значение множителя $\left(\left(1-\sqrt{1-t}\right)^2/t\right)^2$ равно 1 и достигается при $t=1$, тогда выполняются равенства $d=d_-=d_+$ и $\lambda_+(d_+)=\lambda_-(d_-)=\left[Y_r+\frac{Y_s}{2}\sqrt{\frac{2l}{d}}\right]^{-1}$, что легко видно из выражения (14).

При возрастании параметра m возрастает и λ_+ (квазихрупкий сценарий), а λ_- – убывает. И равенство $\lambda_+=\lambda_-$ выполняется только тогда, когда $m=2\pi/(\chi c)$.

Рассмотрим процесс деформирования при постепенном нагружении $0<\lambda<1$. Если необходимый критерий (1) не выполняется ($\lambda<\lambda_0$), то нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины $2l_0$ не меняется. В случае, если в достаточном критерии (1), (2) условие (1) выполнено, а условие (2) – нет, имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины модельной трещины $2l=2l_0+2\Delta$. Первое соотношение в доста-

точном критерии (1), (2) определяет движение вершины модельной трещины. Если условия (1), (2) выполнены, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (11), (16). При $\lambda = \lambda_{\pm}$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотношение (2) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому (17) и достаточному (14) критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

На рис. 3 приведены диаграммы разрушения, полученные по необходимому критерию (17) (кривая *1* – график функции λ_0, хрупкое разрушение) и по достаточному критерию (14) (кривая *2* – график функции λ_+, квазихрупкое разрушение; кривая *3* – график функции λ_-, квазивязкое разрушение). Плоскость $(l/L, \lambda)$ разбивается кривыми *1*, *2* (или *1*, *3*) на три области. В области I длина исходной трещины не меняется (трещина устойчива), в области II увеличивается на величину, равную длине зоны предразрушения (трещина подрастает, оставаясь устойчивой), в области III увеличивается катастрофически (трещина неустойчива). Для удобства практического приложения длина трещины $2l$ на рис. 3 отнесена к ширине пластины $2L$. Вычисления были проведены при следующих значениях параметров: $d = 0,7$ мм, $\nu = 0,33$, $\chi = 2,5$.

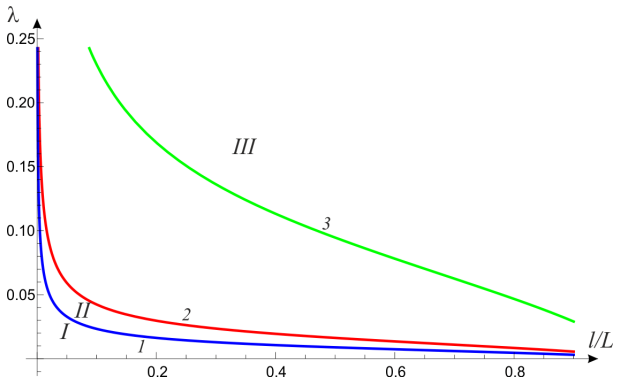


Рис. 3. Диаграммы разрушения, полученные по необходимому критерию (кривая *1* – λ_0) и по достаточному критерию (кривая *2* – λ_+, кривая *3* – λ_-)

Fig. 3. Fracture diagrams obtained by the required criterion (curve *1* – λ_0) and by the sufficient criterion (curve *2* – λ_+, curve *3* – λ_-)

3. Компьютерное моделирование

Воспользуемся методом конечных элементов для численного моделирования реальной формы пластической зоны в окрестности вершины трещины. Рассмотрим квадратную пластину единичной толщины с центральной внутренней трещиной в условиях плоского деформированного состояния, растягиваемую напряжениями σ_∞, приложенными на кромке (см. рис. 1, *a*). Геометрические размеры пластины: ширина $2L = 100$ мм, длина трещины $2l$ варьировалась от 12 до 48 мм. В силу наличия двух плоскостей симметрии при конечно-элементном анализе моделируется 1/4 пластины. Материал пластины предполагается идеально упруго-пластическим со следующими характеристиками: модуль Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, предел текучести $\sigma_Y = 400$ МПа.

Расчетная область покрывалась равномерной сеткой из четырехугольных элементов размером 0,02 мм с линейной аппроксимацией перемещений. Отношение размера элемента в окрестности вершины трещины к ее длине в самом неблагоприятном случае ($l = 6$ мм) равно 1/300, что соответствует рекомендациям, приведенным в [30]. В процессе нагружения внешняя нагрузка σ_∞ монотонно возрастала по линейному закону от нуля до σ_Y. При уровнях нагружения $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_Y > 0,2$ в окрестности вершины трещины возникают большие пластические деформации. Поэтому задача решалась в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейности на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела [31] с использованием в качестве меры напряжений тензора напряжений Коши, а в качестве меры деформаций – тензора логарифмических деформаций Генки.

Численный расчет базировался на следующих определяющих соотношениях теории пластического течения, справедливых при больших деформациях. Пусть $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ – вектор скорости материальных частиц деформируемого тела; $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; $\mathbf{d}$ – симметричный тензор скорости деформаций; $\mathbf{s}$ – симметричный тензор напряжений Коши. Кинематические соотношения (связь тензора скорости деформаций с тензором градиента скорости) имеют вид $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}})$, где $\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ – тензор градиента скорости; ∇ – пространственный набла-вектор. Основная гипотеза теории пластического течения, позволяющая в определяющих соотношениях одновременно учесть упругую и пластическую составляющие деформаций, состоит в аддитивном представлении тензора скорости деформаций $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, где $\mathbf{d}^e$ и $\mathbf{d}^p$ – упругая и пластическая составляющие тензора скорости деформаций, которые определяются из законов упругого и пластического деформирования. Для изотропных материалов эти составляющие определяются из закона Гука (для упругой составляющей тензора скорости деформаций) и ассоциированного закона пластичности:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p), \quad \mathbf{d}^p = c\lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}. \qquad (19)$$

Здесь $\mathbf{s}^H$ – объективная производная Хилла тензора напряжений Коши $\mathbf{s}$: $\mathbf{s}^H = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{s}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d}$, $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} - \nabla\mathbf{v})$ – кососимметричный тензор вихря, $\mathbf{C}^E$ – тензор четвертого ранга закона Гука для изотропной упругой среды, компоненты которого в декартовой системе координат имеют вид:

$$\mathbf{C}^E_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right],$$

δ_{ij} – дельта-функция Кронекера, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. В (19) введена скалярная функция текучести $F(\mathbf{s})$ такая, что уравнение $F(\mathbf{s}) = 0$ определяет поверхность текучести в пространстве компонент тензора напряжений Коши. Параметр c определяет мгновенное состояние деформирования материала (упругое или пластическое):

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad F < 0 \quad \text{или} \quad F = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}:\mathbf{d} \le 0, \\ 1, & \text{если} \quad F = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}:\mathbf{d} > 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали единичной длины к поверхности текучести в пространстве компонент тензора напряжений $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}, \quad k = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (20)$$

Скалярный параметр $\lambda > 0$, введенный в (19), определяется в соответствии с заданным законом упрочнения. Окончательно формулы определяющих соотношений упругопластичности можно записать в виде:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^{EP} : \mathbf{d}, \qquad (21)$$

где $\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - c(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})g$ – тензор четвертого ранга, скалярная функция g зависит от модуля Юнга, коэффициента Пуассона, второго инварианта тензора напряжений и закона упрочнения [31]. Значение скалярного параметра $c = 0$ определяет упругое деформирование материала (включая разгрузку от достигнутого пластического состояния), а значение $c = 1$ включает пластическое течение материала.

Определяющие соотношения (21) являются нелинейными относительно тензора скорости деформаций $\mathbf{d}$, так как тензор четвертого ранга $\mathbf{C}^{EP}$ зависит от $\mathbf{d}$. Запись определяющих соотношений пластичности в виде (21) позволяет для случая квазистатического деформирования дать вариационную формулировку задачи и получить симметричную матрицу касательной жесткости в конечно-элементных формулировках уравнений. Для получения конкретного вида тензора четвертого ранга $\mathbf{C}^{EP}$ в (21), кроме функции g, требуется задать выражение функции текучести $F(\mathbf{s})$, с помощью которой определяется тензор второго ранга $\mathbf{n}$ в (20). В модели упругопластического материала с условием текучести Мизеса эта функция записывается в виде $F(\mathbf{s}) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} - \sigma_{\mathrm{Y}}$, где σ_1, σ_2, σ_3 – главные напряжения тензора напряжений Коши $\mathbf{s}$.

Расчет напряженно-деформированного состояния пластины выполнялся в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2020 [32]. Использовались стандартные 4-узловые элементы с линейной аппроксимацией перемещений (тип 11, класс quad4 по классификации MSC.Marc).

В качестве примера на рис. 4 показана полученная в расчетах одна из пластических зон перед вершиной трещины длиной $2l = 24$ мм. Здесь приведено распределение эквивалентных пластических деформаций $\varepsilon^p = \sqrt{2\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{ij}/3}$ (ε^p_{ij} – компоненты тензора пластических деформаций), при уровне нагружения $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_{\mathrm{Y}} = 0.27$. Контурные полосы на рисунке ограничены диапазоном $10^{-5} \div 10^{-3}$ для более детальной прорисовки распределения эквивалентных пластических деформаций. Форма пластической зоны на рис. 4 ($\lambda = 0,27$) напоминает известный лепесток, приводимый в классических монографиях по теории пластичности для иллюстрации малых пластических деформаций [27; 28; 33].

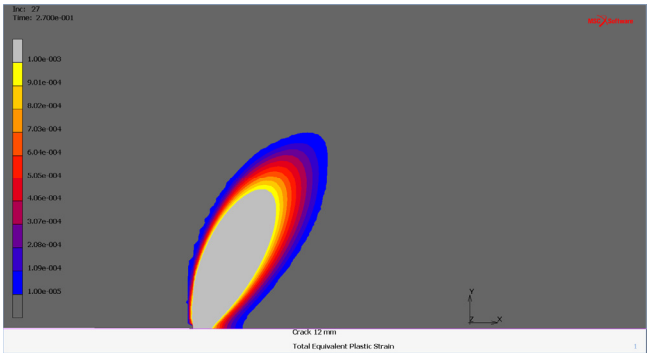


Рис. 4. Форма пластической зоны для трещины длиной $2l = 24$ мм при $\lambda = 0,27$

Fig. 4. The shape of the plastic zone for a crack with a length of $2l = 24$ mm at $\lambda = 0,27$

Для обработки данных численного эксперимента зададим значение параметра $\chi = 3$. На каждом шаге по нагрузке λ в результате анализа изолиний пластических зон определим поперечник зоны предразрушения $a_E = a_E(\lambda)$, раскрытие трещины $2v_E = 2v_E(\lambda)$ и длину зоны предразрушения $\Delta_E = \Delta_E(\lambda)$. Раскрытие модельной трещины $2v_E$ вычислим как удвоенное смещение ближайшего к точке M_1 узла сетки (см. рис. 2, *b*). Под величиной $2v_E$ понимается разрыв упругих смещений

у основания пластической зоны при $x = -\Delta$. Длину Δ_E пластической зоны найдём как разность наибольшей из всех абсцисс граничных точек зоны пластичности и абсциссы вершины трещины. Нижний индекс E отмечает величины, полученные в численном эксперименте. Критическое значение раскрытия трещины δ_E^* установим по формуле $\delta_E^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) a_E = \chi \varepsilon_0 a_E$, где $\varepsilon_0 = \sigma_Y / E$. Находим два последовательных шага по нагрузке, в одном из которых выполняется неравенство $2v_E < \delta_E^*$, а в другом – неравенство $2v_E > \delta_E^*$. Путем интерполяции определим нагрузку λ_S, при которой раскрытие трещины $2v_E$ становится равным критическому раскрытию δ_E^*. Полученное значение λ_S является критической нагрузкой по достаточному критерию (1), (2). В вершине реальной трещины выполнено условие (2) деформационного критерия разрушения. Таким образом, для трещин полудлины $l = 6$, 12, 18, 24 мм получены значения критической нагрузки $\lambda_S = 0{,}343$; 0,261; 0,210; 0,172 соответственно.

4. Сравнение численных и аналитических результатов

Заметим, что уравнения механики деформируемого твердого тела [31], используемые при численном моделировании методом конечных элементов, не содержат характерный линейный размер d структуры материала. При дискретизации расчетной области естественным образом вводится структурный параметр, совпадающий с размером конечного элемента. Если методом конечных элементов решаются уравнения механики деформируемого твердого тела для материалов со структурой, то необходимо, чтобы размер конечного элемента не превышал характерного линейного размера структуры материала. В задачах с сингулярностью поля напряжений отсутствует сходимость метода конечных элементов к точному решению: напряжения в окрестности вершины трещины (3) стремятся к бесконечности при стремлении расстояния до вершины к нулю, поэтому ни о какой сходимости не может быть и речи. В подобных задачах нельзя устремлять размер конечного элемента к нулю, а, наоборот, следует ограничивать его снизу значениями примерно $1/200 \div 1/400$ от длины трещины [30]. Сравнения с точными (аналитическими) решениями показывают, что отношение 1/200 дает для конечного элемента с квадратичной аппроксимацией смещений погрешность не более 1 %, что вполне достаточно для инженерных приложений. Кроме того, при численном моделировании остается неопределенным значение параметра ε_1 – максимальное относительное удлинение диаграммы деформирования материала (см. рис. 1, *b*). Наоборот, уравнения (9), (10) или приближенные уравнения (12), (13) аналитической модели содержат величины d и ε_1, причем величина d входит только в уравнения (9) и (12), а величина ε_1 входит только в уравнения (10) и (13). Поэтому предлагается следующий алгоритм сравнения численных результатов из раздела 4 и результатов, которые можно получить с помощью аналитической модели (12), (13).

1. Полагаем характерный линейный размер равным размеру элемента перед вершиной трещины $d = 0{,}02$ мм. Задаем значение параметра χ, например $\chi = 3$, и полудлину трещины, например, $l = 6$ мм.

2. Используя результаты численного моделирования с привлечением достаточного критерия аналитической модели, вычисляем для заданного χ критическую нагрузку λ_S, как показано в конце предыдущего пункта.

3. По найденному значению λ_S определяем по формуле (15) соответствующее ему значение Δ_S.

4. Из соотношения (11) аналитической модели находим величину поправочного коэффициента m.

5. Имея значение m, получаем возможность спрогнозировать по формуле (14) критическую разрушающую нагрузку $\lambda_\pm$ для других длин трещины. Выбор между λ_- и λ_+ определяется значением λ_S, найденным в численном (или лабораторном) эксперименте: если $\lambda_S = \lambda_+$, то критическая нагрузка для других длин трещины прогнозируется по λ_+; если $\lambda_S = \lambda_-$, то прогноз выполняется с помощью λ_-.

Таким образом, предлагаемая процедура, исходя из сведений для трещины заданной длины, позволяет построить прогноз критических нагрузок для трещин произвольной длины. Результаты для сравнения возможностей аналитической модели и численного подхода приведены в табл. 1.

Таблица 1

Численные и аналитические результаты прогнозирования

Table 1

Numerical and analytical results of forecasting

l, мм	λ_S	Δ_S, мм	m	λ_6	λ_{12}	λ_{18}	λ_{24}
6	0,343	0,7635	0,1499	0,343	0,256	0,205	0,165
12	0,261	0,9381	0,1461	0,349	0,261	0,209	0,168
18	0,210	1,005	0,1447	0,351	0,263	0,210	0,170
24	0,172	1,044	0,1418	0,356	0,267	0,213	0,172

В табл. 1 через λ_6, λ_{12}, λ_{18}, λ_{24} обозначены критические нагрузки по достаточному критерию для трещин полудлины $l = 6$, 12, 18 и 24 мм соответственно. В каждой строке таблицы одна из нагрузок λ_6, λ_{12}, λ_{18}, λ_{24} найдена из численного расчета при $\chi = 3$ и $d = 0{,}02$ мм, а три остальных являются прогнозом. Например, для трещины полудлины $l = 6$ мм найдены значения

$\lambda_6 = \lambda_S = 0,343$, $\Delta_S = 0,7635$ мм и значение поправочного коэффициента $m = 0,1499$. Затем, используя значение m, вычислены значения $\lambda_+ = 0,0415$ (квазихрупкий сценарий) и $\lambda_- = 0,343$ (квазивязкий сценарий). Так как $\lambda_S = \lambda_- = 0,343$, то для трещины полудлины 12, 18 и 24 мм значения нагрузок λ_{12}, λ_{18}, λ_{24} предсказываются по формуле (14) с λ_-. Аналогично для остальных длин трещин.

В целом прогнозирование критической нагрузки по формуле (14) аналитической модели можно считать хорошим, так как погрешность не превышает 4 %, что вполне допустимо с инженерной точки зрения. Интересно отметить, что если вместо приближенной системы уравнений (12), (13) решать численно нелинейную систему уравнений (9), (10), то для $l = 6$ мм, $\lambda_6 = \lambda_S = 0,343$ найдём $\Delta_S = 0,7475$ мм $m = 0,1483$ и затем $\lambda_{12} = 0,257$, $\lambda_{18} = 0,206$, $\lambda_{24} = 0,166$. То есть отличие от данных в первой строке табл. 1 не больше, чем на единицу в третьей значащей цифре.

Таблица 2

Критические нагрузки λ_0 и $\lambda_\pm$ для трещины полудлины $l = 6$ мм

Table 2

Critical loads and for crack half-length mm

λ	λ_6	λ_{12}	λ_{18}	λ_{24}
λ_-	0,343	0,256	0,205	0,165
λ_+	0,0415	0,0289	0,0225	0,0181
λ_0	0,0387	0,0269	0,0209	0,0169

В табл. 2 приведены результаты прогнозирования нагрузки λ_0 (формула (17), хрупкое разрушение), λ_+ (формула (14), квазихрупкое разрушение), λ_- (формула (14), квазивязкое разрушение) по исходным данным $\lambda_S = 0,343$, $m = 0,1499$ для трещины полудлины $l = 6$ мм. Соответствующие графики представлены на рис. 3: кривая *1* – хрупкий сценарий, кривая *2* – квазихрупкий сценарий, кривая *3* – квазивязкий сценарий. Из таблицы видно, что λ_- почти в десять раз больше λ_0, а λ_+ отличается от λ_0 мало. Длина Δ зоны предразрушения, вычисленная по формуле (15) при квазихрупком разрушении, равна $\approx 10^{-5}$ мм для всех длин трещины, что плохо согласуется с результатом численного моделирования Δ_S (см. третью колонку табл. 1).

Если воспользоваться приближением $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, то выражение (14) критической нагрузки можно упростить без существенной потери точности:

$$\lambda_+ = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l}{d}} \left(1 - \frac{\chi mc}{8\pi} \right) \right]^{-1}, \qquad (22)$$

$$\lambda_- = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l}{d}} \frac{\chi mc}{8\pi} \right]^{-1}. \qquad (23)$$

В табл. 3 приведены результаты прогнозирования нагрузки λ_+ (формула (22), квазихрупкое разрушение) и λ_- (формула (23), квазивязкое разрушение) для пластины с трещиной полудлины $l = 12$, 18 и 24 мм по исходным данным $\lambda_S = 0,343$, $m = 0,1499$ для трещины полудлины $l = 6$ мм. Действительно, отличие значений нагрузки λ_+ по сравнению с данными табл. 2 незначительно. Погрешность вычисления нагрузки λ_- заметнее (около 5 %), но вполне допустима с инженерной точки зрения.

Таблица 3

Критические нагрузки λ_+ и λ_- для трещины полудлины $l = 6$ мм, вычисленные по упрощенным формулам (22), (23)

Table 3

Critical loads and for a crack half-length mm, calculated by simplified formulas (22), (23)

λ	λ_6	λ_{12}	λ_{18}	λ_{24}
λ_-	0,359	0,269	0,215	0,174
λ_+	0,0413	0,0287	0,0224	0,0180

Интересно отметить, что вычисленный по формуле (18) характерный линейный размер структуры материала d_+ при $d_- = 0,02$ мм, $m = 0,1499$ оказался равен $d_+ \approx 3,324$ мм. Следовательно, в этом случае $\lambda_+(d_+) \equiv \lambda_-(d_-)$ во всём диапазоне длин трещины. Кроме того, длина Δ зоны предразрушения, вычисленная по формуле (15) при квазихрупком разрушении для $d_+ \approx 3,324$ мм, оказалась равной ≈ 0.0045 мм, что более реалистично, чем $\approx 10^{-5}$ мм для $d_+ \approx 0,02$ мм. Итак, численно-аналитическое моделирование разрушения исследуемой пластины при $\chi = 3$ показало следующее: если $d = 0,02$ мм, то пластина разрушается по квазивязкому сценарию (кривая 3 на рис. 3), а при $d = 3,324$ мм – по квазихрупкому.

5. Обсуждение результатов

Выбор параметра осреднения d необходимого критерия (1) в определенной мере субъективен [33]. Зона радиуса d, где напряженное состояние определяет момент инициации трещины, больше сингулярной, поэтому только значения коэффициента интенсивности напряжений K_I, как характеристики напряженно-деформированного состояния, теперь уже недостаточно. Будем рассматривать эту зону не как область, где реа-

лизуется процесс микроповреждений, пластических деформаций, микроразрушений, а как область, где напряженное состояние по известным решениям теории упругости за счет перераспределения внутренних усилий определяет момент разрушения. Размер осреднения d считается характеристикой материала и зависит от других характеристик материала: разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристики трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, можно получить оценку параметра d в виде

$$d = \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_{1c}}{\sigma_c}\right)^2,$$

где K_{1c} – критический коэффициента интенсивности напряжений, σ_c – предел прочности материала на растяжение. Необходимость осреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны d сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров пластины, длины трещины и т.п. [34; 35]. Интегральный критерий Нейбера – Новожилова (1) относится к структурным критериям разрушения. Присутствие в критерии параметра осреднения d означает, что процесс разрушения обладает собственной структурой, которая в общем случае не обязательно связана со структурой материала.

При компьютерном моделировании размер конечного элемента в окрестности вершины трещины необходимо согласовывать с параметром d. Достаточно нескольких элементов по длине d, чтобы получить решение с приемлемой точностью. Сильно сгущать сетку у вершины не нужно, поскольку в задачах с сингулярностью поля напряжений отсутствует сходимость метода конечных элементов к точному решению. Интегрирование напряжений по интервалу d устраняет особенность в вершине трещины и приводит к конечным значениям осредненных напряжений, а для них уже сходимость имеет место. Как показали численные эксперименты, уменьшение размера конечного элемента до 0,01 мм при том же интервале осреднения $d = 0,02$ мм привело к незначительному изменению результатов.

Параметр m, найденный в численном эксперименте, характеризует отклонение реального поперечника пластической зоны от модельной величины a, входящей в соотношение (8). Естественно предположить, что в аналитической модели (12), (13) величина m поправочного коэффициента не должна зависеть от длины трещины. Приведенные в таблице значения $m \approx 0,146$, полученные при прогнозировании длин четырех трещин, подтверждают это предположение. Точность вычисления параметра m зависит от точности определения критической нагрузки λ_S и соответствующей ей критической длины Δ_S зоны предразрушения. Значение параметра m зависит от величины выбранного интервала осреднения d, а также от точности определения границы пластической области в численном расчете, которая, в свою очередь, зависит от размера конечных элементов. Прямоугольник со сторонами Δ и a хорошо аппроксимирует зону пластичности при плоском напряженном состоянии (см. рис. 1, *b*), но плохо – при плоской деформации (см. рис. 2, *b*).

Заключение

Полученные простые структурные формулы (11), (14)–(16) можно применять для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_Y$ и оценки длины зоны предразрушения Δ при нагружении по первой моде (нормальный отрыв) в структурированных материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величину нагрузки λ и длины Δ через длину трещины $2l$ с использованием следующих четырех параметров: d – характерный линейный размер структуры материала, ε_0 и ε_1 – параметры $\sigma - \varepsilon$-диаграммы деформирования, m – поправочный коэффициент. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования, например, так, как показано в данной работе. Можно поступить наоборот, зная из эксперимента критическую нагрузку λ и длину зоны разрушения Δ, применив вышеизложенный алгоритм, получить значение структурного параметра d. Форму и размеры пластической (длину Δ и поперечник a) в эксперименте можно получить методом корреляции цифровых изображений [36].

Подробный анализ выражения (14) критической нагрузки $\lambda_\pm$ показал следующее. Для двух пластин, отличающихся лишь характерным линейным размером d структуры материала так, что выполняется равенство (18), критические нагрузки λ_+ (квазихрупкое разрушение) и λ_- (квазивязкое разрушение) совпадают, то есть $\lambda_+(d_+) \equiv \lambda_-(d_-)$ во всём диапазоне длин трещины. Для двух одинаковых пластин равенство $\lambda_+ = \lambda_-$ выполняется тождественно лишь тогда, когда $\chi mc/(2\pi) = 1$.

В целом рассматриваемую аналитическую модель можно использовать при исследовании деформирования и разрушения конструкций из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Библиографический список

1. Итон Н., Гловер А., Мак-Грат Дж. Особенности разрушения при изготовлении и эксплуатации сварных конструкций // Механика. Новое в зарубежной науке. Механика разрушения. Разрушение конструкций. – М.: Мир, 1980. – Вып. 20. – С. 92–120.

2. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints / G. Lin, X.-G. Meng, A. Cornec, K.-H. Schwalbe // Int. J. of Fracture. – 1999. – Vol. 96. – P. 37–54.

3. Chandra N. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model // Compos, Part A: Appl. Sci. Manufact. – 2002. – Vol. 33. – P. 1433–1447.

4. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах адгезионного расслоения композита // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 1. – С. 100–109.

5. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures / J.J. Kruzic, J.M. McNaney, R.M. Cannon, R.O. Ritchie // Mechanics of materials. – 2004. – Vol. 36. – P. 57–72.

6. Pirondi A., Moroni F. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metaljoints // International Journal of Adhesion & Adhesives. – 2009. – Vol. 29. – P. 796–805.

7. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear // Materials and Design. – 2011. – Vol. 32. – P. 1940–1947.

8. Kim Y.-J., Schwalbe K.-H. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments II. Heat affected zone cracks // Eng. Fract. Mech. – 2001. – Vol. 68. – P. 183–199.

9. Сукнев С.В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // Физ. мезомех. – 2018. – Т. 21, № 4. – С. 22–32.

10. Сукнев С.В. Применение нелокальных и градиентных критериев для оценки разрушения геоматериалов в зонах концентрации растягивающих напряжений // Физ. мезомех. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 67–75.

11. Wang P., Qu S. Analysis of ductile fracture by extended unified strength theory // Int. J. Plast. – 2018 – Vol. 104. – P. 196–213.

12. Revil-Baudard B., Cazacu O., Chandola N. Effect of the yield stresses in uniaxial tension and pure shear on the size of the plastic zone near a crack // Int. J. Plast. – 2018. – Vol. 102. – P. 101–117.

13. A new approach to model delamination growth in fatigue using the Virtual Crack Closure Technique without re-meshing / N.V. De Carvalho, G.E. Mabson, R. Krueger, L.R. Deobald // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 222. – P. 17. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106614

14. Yin T., Li Q., Li X. Experimental investigation on mode I fracture characteristics of granite after cyclic heating and cooling treatments // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 222. – P. 21. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106740

15. Степанова Л.В. Асимптотические поля напряжений у вершины трещины в идеально пластическом материале в условиях смешанного нагружения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 3. – С. 73–89. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.08

16. Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 72–85. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.08

17. Глаголев В.В., Девятова М.В., Маркин А.А. Модель трещины поперечного сдвига // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 182–192.

18. Смирнов С.В., Веретенникова И.А., Вичужанин Д.И. Моделирование расслоения при пластической деформации биметаллического материала, полученного сваркой взрывом // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 398–411.

19. Kurguzov V.D., Kornev V.M. Simulation of fracture of elastoplastic materials in mode III: from brittle to ductile // Meccanica. DOI: 10.1007/s11012-019-01090-4

20. Kornev V.M., Kurguzov V.D., Astapov N.S. Fracture model of bimaterial under delamination of elasto-plastic structured media // Applied Composite Materials. – 2013. – Vol. 20 (2). – P. 129–143. DOI: 10.1007/s10443-012-9259-6

21. Кургузов В.Д., Корнев В.М. Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 179–194.

22. Кургузов В.Д., Астапов Н.С., Астапов И.С. Модель разрушения квазихрупких структурированных материалов // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 173–185.

23. Kurguzov V.D., Shutov A.V. Elasto-plastic fracture criterion for structural components with sharp V-shaped notches // Int. J. Fract. – 2021. – Vol. 228. – P. 179–197. DOI: 10.1007/s10704-021-00530-1

24. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.

25. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8. – P. 100–104.

26. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 488 с.

27. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001. – 632 с.

28. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.

29. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Механика разрушения и прочность материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – Т. 2. – 619 с.

30. Кургузов В.Д. Выбор параметров сетки конечных элементов при моделировании роста трещин гидроразрыва. // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 254–263.

31. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.

32. MARC 2020. Volume A: Theory and User Information. – Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2020. – P. 1061.

33. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения: курс лекций. – СПб.: ЦОП «Профессия», 2012. – 552 с.

34. Сукнев С.В., Новопашин М.Д. Определение локальных механических свойств материалов // Доклады академии наук. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 48–50.

35. Новопашин М.Д., Сукнев С.В. Градиентные критерии предельного состояния // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4(54). – С. 316–335.

36. Развитие метода корреляции цифровых изображений для изучения процессов деформации и разрушения конструкционных материалов / П.С. Любутин, С.В. Панин, В.В. Титков, А.В. Еремин, Р. Сундер // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – No 1. – С. 87–107. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.08

References

1. Eaton N.F., Glover A.G., McGrath J.T. *Aspects of fracture in the production and service of welded structures* // Fracture 1977: Advances in research on the strength and fracture, of materials. Fourth intern. Conf. on fracture, June 1977, Univ. of Waterloo, Canada / D.M.R. Taplin, ed. New York a. o.: Pergamon, 1978, V.1, An overview. 1978, pp. 751-773. (ISBN 0-08-022136-X).

2. Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints. *Int. J. of Fracture*, 1999, vol. 96, pp. 37-54.

3. Chandra N. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model. *Compos, Part A: Appl. Sci. Manufact*., 2002, vol. 33, pp. 1433-1447.

4. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modelirovaniye obrazovaniya novykh material'nykh poverkhnostey v protsessakh adgezionnogo rassloyeniya kompozita [Modeling generation of a new material surfaces in the processes of adhesive delamination of a composite]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no.1, pp. 100-109. doi: 10.15593/perm.mech/2018.1.09

5. Kruzic J.J., McNaney J.M., Cannon R.M., Ritchie R.O. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures. *Mechanics of materials*, 2004, vol. 36, pp. 57-72. doi: 10.1016/S0167-6636(03)00031-0

6. Pirondi A., Moroni F. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metaljoints. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 2009, vol. 29, pp. 796-805.

7. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear. *Materials and Design*, 2011, vol. 32, pp. 1940-1947.

8. Kim Y.-J., Schwalbe K.-H. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments II. Heat affected zone cracks. *Eng. Fract. Mech.,* 2001, vol. 68. P. 183-199.

9. Suknev, S.V.: Nelokal'nyye i gradiyentnyye kriterii razrusheniya kvazikhrupkikh materialov pri szhatii [Nonlocal and gradient fracture criteria for quasi-brittle materials under compression]. *Fizicheskaia mezomekhanika,* 2018, vol. 21, no. 4, pp. 22-32.

10. Suknev S.V. Primenenie nelokal'nykh i gradientnykh kriteriev dlia otsenki razrusheniia geomaterialov v zonakh kontsentratsii rastiagivaiushchikh napriazhenii [The use of nonlocal gradient and the criteria for assessing the destruction of geomaterials in the areas of concentration of tensile stress]. *Fizicheskaia mezomekhanika*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 67-75.

11. Wang, P., Qu, S.: Analysis of ductile fracture by extended unified strength theory. *Int. J. Plast.,* 2018, vol. 104, pp. 196–213.

12. Revil-Baudard, B., Cazacu, O., Chandola, N. Effect of the yield stresses in uniaxial tension and pure shear on the size of the plastic zone near a crack. *Int. J. Plast.*, 2018, vol. 102, pp. 101–117.

13. De Carvalho N.V., Mabson G.E., Krueger R., Deobald L.R. A new approach to model delamination growth in fatigue using theVirtual Crack Closure Technique without remeshing. *Engineering Fracture Mechanics,* 2019, vol. 222, 106614, 17 p. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106614

14. Yin T., Li Q., Li X. Experimental investigation on mode I fracture characteristics of granite after cyclic heating and cooling treatments. *Engineering Fracture Mechanics,* 2019, vol. 222, 106740, 21 p. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106740

15. Stepanova L.V. Asymptotic stress fields in the vicinity of the crack in perfectly plastic solids under mixed mode loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 3, pp. 73-89. doi: 10.15593/perm.mech/2020.3.08

16. Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 1, pp. 72-85. doi: 10.15593/perm.mech/2021.1.08

17. Glagolev V.V., Devyatova M.V., Markin A.A. Model of a mode II shear crack. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 698-706.

18. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Vichuzhanin D.I. Modelirovanie rassloenija pri plasticheskoj deformacii bimetallicheskogo materiala, poluchennogo svarkoj vzryvom [Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation]. *Vychislitel'naja mekhanika sploshnyh sred*, 2014, vol. 7. no. 4, pp. 398-411.

19. Kurguzov V. D., Kornev V. M. Simulation of fracture of elastoplastic materials in mode III: from brittle to ductile. *Meccanica*. doi.org/10.1007/s11012-019-01090-4

20. Kornev V.M., Kurguzov V.D., Astapov N.S. Fracture model of bimaterial under delamination of elasto-plastic structured media. *Applied Composite Materials*, 2013, 20 (2), 129-143. doi: 10.1007/s10443-012-9259-6

21. Kurguzov V.D., Kornev V.M. Construction of quasi-brittle and quasi-ductile fracture diagrams based on necessary and sufficient criteria. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no. 1, pp.156-169.

22. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. Fracture model for structured quasibrittle materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 6, pp. 1055-1065.

23. Kurguzov V.D., Shutov A.V. Elasto-plastic fracture criterion for structural components with sharp V-shaped notches. *Int. J. Fract.*, 2021, vol. 228, pp. 179–197. https://doi.org/10.1007/s10704-021-00530-1

24. Leonov M.Ia., Panasiuk V.V. Razvitie mel'chaishikh treshchin v tverdom tele [Development of tiny cracks in the solid] *Prikladnaya mekhanika*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391-401.

25. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids,* 1960, vol. 8, pp. 100-104.

26. Panasiuk V.V., Andreikiv A.E., Parton V.Z. Osnovy mekhaniki razrusheniia materialov [Fundamentals of mechanics of materials destruction]. Kiev, Naukova dumka, 1988. 488 p.

27. Astaf'ev V.I., Radaev Iu.N., Stepanova L.V. Nelineinaia mekhanika razrusheniia [Non-linear fracture mechanics]. Samara, Izd-vo “Samarskii universitet”, 2001. 632 p.

28. Matvienko Yu.G. Modeli i kriterii mehaniki razrushenija [Models and criteria of fracture mechanics]. Moskva, *FIZMATLIT*, 2006. 328 p.

29. Savruk M.P. Kojefficienty intensivnosti naprjazhenij v telah s treshhinami // Mehanika razrushenija i prochnost' materialov [Stress intensity factor in the bodies with cracks // Fracture mechanics and strength of materials]. vol.2. Kiev, Naukova Dumka, 1988. 619 p.

30. Kurguzov V.D. Vybor parametrov setki konechnykh elementov pri modelirovanii rosta treshchin gidrorazryva [Optimization of the finite element mesh in modeling of hydrofracturing crack growth] *Vychisl. mekh. splosh. sred*, 2015, vol. 8, no 3, pp. 254-263.

31. Korobeinikov S.N. Nelineynoe deformirovanie tverdyh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk, Izdatelstvo SO RAN, 2000. 262 p.

32. *MARC* Users Guide**.** Vol. A. Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2015. 943 p.

33. Pestrikov V.M., Morozov E.M. Mekhanika razrusheniya. Kurs lekciy [Mechanics of fracture. Course of lectures]. SPb, Professia, 2012. 552 p.

34. Suknev S.V., Novopashin M.D. Opredelenie lokal'nykh mekhanicheskikh svoistv materialov [Determination of local mechanical properties of materials] *Doklady akademii nauk,* 2000, vol. 373, no 1, pp. 48–50.

35. Novopashin M.D., Suknev S.V. Gradientnye kriterii predel'nogo sostoianiia [Gradient limit state criteria] *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia*, 2007, no 4(54), pp. 316–335.

36. Lyubutin P.S., Panin S.V., Titkov V.V., Eremin A.V., Sunder R. Development of digital image correlation method to study deformation and fracture processes of structural materials. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 1, pp. 87-107. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.08

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was not sponsored.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.