Лямина Е.А., Каленова Н.В., Пирумов А.Р. О сходимости решений по обобщенному условию текучести к решениям по условию Треска при осевой симметрии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 2. С. 29–37. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.04

Lyamina E.A., Kalenova N.V., Pirumov A.R. On the reducibility of solutions for the generalized yield criterion to solutions for Tresca's yield criterion under axial symmetry. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 2, pp. 29-37. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.04
УДК 539.3/6

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ПО ОБОБЩЕННОМУ УСЛОВИЮ ТЕКУЧЕСТИ К РЕШЕНИЯМ ПО УСЛОВИЮ ТРЕСКА ПРИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Е.А. Лямина[1,2], Н.В. Каленова[3], А.Р. Пирумов[4]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
[2]Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия
[3]Московский авиационный институт, Москва, Россия
[4]Российский технологический университет – МИРЭА, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 ноября 2022 г.
Одобрена: 10 марта 2023 г.
Принята к публикации: 30 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

обобщенное условие текучести, максимальное трение, сингулярность, сходимость.

АННОТАЦИЯ

Многие модели механики сплошной среды сводятся к более простым моделям при определенных значениях параметров. Однако решения по общей модели могут не сходиться к соответствующим решениям по более простой модели. В математической теории пластичности условие текучести полностью определяет поведение материала, если принимается ассоциированный закон пластического течения. В публикуемой работе исследуется сходимость осесимметричных идеально жесткопластических решений по обобщенному условию текучести к соответствующим решениям по условию Треска при стремлении обобщенного условия текучести к условию Треска. Показано, что сходимость отсутствует, если закон максимального трения является одним из краевых условий задачи. В этом случае решения по обоим условиям текучести являются сингулярными. В частности, квадратичный инвариант тензора скорости деформации стремится к бесконечности при приближении к поверхности трения. Коэффициент интенсивности скорости деформации контролирует величину этого инварианта в окрестности поверхности трения. Коэффициент интенсивности скорости деформации входит в некоторые определяющие уравнения для предсказания эволюции свойств материала вблизи поверхностей трения в процессах обработки давлением. В настоящей работе на примере конкретной краевой задачи исследуется поведение этого коэффициента при стремлении обобщенного условия текучести к условию Треска. Показано, что коэффициент интенсивности скорости деформации непрерывно изменяется при отклонении обобщенного условия текучести от условия текучести Треска. Такое поведение коэффициента интенсивности скорости деформации оправдывает его использование в определяющих уравнениях для эволюции свойств материала вблизи поверхностей трения.

© ПНИПУ

© **Лямина Елена Алексеевна** – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., e-mail: lyamina@inbox.ru, iD: 0000-0002-7319-8703.
Каленова Наталья Валерьевна – к.ф.-м.н., доц., e-mail: direktoriist@mail.ru, iD: 0000-0001-8111-8403
Пирумов Александр Ремальевич – к.т.н., доц., e-mail: alpirumov@mail.ru.

Elena A. Lyamina – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: ivanov@ivanov.com, iD: 0000-0002-7319-8703.
Natalya V. Kalenova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: direktoriist@mail.ru, iD: 0000-0001-8111-8403
Alexander R. Pirumov – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: alpirumov@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ON THE REDUCIBILITY OF SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED YIELD CRITERION TO SOLUTIONS FOR TRESCA'S YIELD CRITERION UNDER AXIAL SYMMETRY

E.A. Lyamina[1,2], N.V. Kalenova[3], A.R. Pirumov[4]

[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation
[2]Samara National Research University, Samara, Russian Federation
[3]Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation
[4] Russian Technological University – MIREA, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 November 2022
Approved: 10 March 2023
Accepted for publication:
30 April 2023

Keywords:
generalized yield criterion, maximum friction, singularity, reducibility.

ABSTRACT

Many continuum mechanics models are reduced to simpler models at certain parameter values. However, solutions for the general model may not converge to the corresponding solutions for a simpler model. In the mathematical theory of plasticity, the yield criterion completely determines the material's behavior if the associated plastic flow rule is accepted. In this paper, the reducibility of axisymmetric solutions for the generalized yield criterion to the corresponding solutions for Tresca's criterion is investigated when the generalized yield condition tends to Tresca's criterion. It is shown that there is no convergence if the maximum friction law is one of the boundary conditions. In this case, the solutions for both yield criteria are singular. In particular, the quadratic invariant of the strain rate tensor tends to infinity near the friction surface. The strain rate intensity factor controls the magnitude of this invariant in the vicinity of the friction surface. The strain rate intensity factor is involved in some constitutive equations for predicting the evolution of material properties near frictional interfaces in metal forming processes. In this paper, using the solution of a specific boundary value problem, the behavior of this factor is investigated when the generalized yield criterion tends to Tresca's criterion. It is shown that the strain rate intensity factor continuously changes when the generalized yield criterion deviates from Tresca's yield criterion. This behavior of the strain rate intensity factor justifies its use in the constitutive equations for the evolution of material properties near friction surfaces.

© PNRPU

Введение

Многие модели механики сплошной среды сводятся к более простым моделям при определенных значениях параметров. Однако решения по общей модели могут не сходиться к соответствующим решениям по более простой модели. Публикуемая работа посвящена моделям теории пластичности. Простейшей моделью можно считать модель идеально жесткопластического материала, условие текучести которого не зависит от среднего напряжения. Эта модель изложена в большинстве монографий по теории пластичности, например в [1]. Сходимость решения конкретной краевой задачи по вязкопластическим моделям к идеально жесткопластическому решению изучалась в [2]. Показано, что сходимость зависит от типа вязкопластической модели. В частности, существенное значение имеет напряжение насыщения, которое входит в формулировку некоторых вязкопластических моделей [3–5]. В работе [6] рассматривались модели, основанные на условии текучести Кулона – Мора. Показано, что решение по модели двойного сдвига и вращения [7] сходится к решению по простейшей модели, а решения по модели двойного сдвига [8] и по соосной модели [9; 10] не сходятся.

Условие текучести является одним из основных определяющих уравнений математической теории пластичности и полностью определяет поведение материала, если принимается ассоциированный закон пластического течения. В связи с этим существует большое количество условий текучести для учета особенностей деформирования конкретного материала [1; 11–13]. В частности, обобщенные изотропные условия текучести для пластически несжимаемых материалов предложены в [14; 15]. При определенных значениях параметра, входящего в условие [14], оно сводится к условиям Мизеса и Треска [16; 17]. Однако решения по обобщенному условию текучести могут не сходиться к соответствующим решениям по условию Треска. В настоящей работе показано, что в случае осесимметричной деформации отсутствие сходимости решений имеет место, если одним из краевых условий является условие максимального трения.

Условие максимального трения требует, чтобы удельные силы трения были равны пределу текучести при чистом сдвиге, если на поверхности трения реализуется режим проскальзывания. Соответствующая поверхность трения называется поверхностью максимального трения. Решения краевых задач являются сингулярными как при применении обобщенного условия текучести [18], так и при применении условия Треска [19]. В частности, квадратичный инвариант тензора скорости деформации стремится к бесконечности при приближении к поверхности максимального трения. Коэффициент при главном сингулярном члене в разло-

жении квадратичного инварианта тензора скорости деформации в ряд вблизи поверхности трения называется коэффициентом интенсивности скорости деформации. С одной стороны, этот коэффициент контролирует величину квадратичного инварианта тензора скорости деформации в тонком слое вблизи поверхности максимального трения. С другой стороны, величина квадратичного инварианта тензора скорости деформации во многом контролирует эволюцию свойств материала. В [20] предложен подход к описанию эволюции свойств материала вблизи поверхностей трения на основе коэффициента интенсивности скорости деформации. Этот подход позволяет предсказать значительные градиенты свойств материала, которые возникают вблизи поверхностей трения при обработке материалов резанием и давлением (например, [21–24]). Используя подход [20] и экспериментальные данные, в [25] получено эмпирическое уравнение для твердости поверхностного слоя при обработке давлением алюминиевого сплава 6061.

Принимая во внимание отмеченное выше отсутствие сходимости решений по обобщенному условию текучести к соответствующим решениям по условию текучести Треска и использование коэффициента интенсивности скорости деформации в инженерных приложениях, представляет интерес исследовать поведение этого коэффициента при переходе обобщенного условия текучести в условие Треска. В настоящей работе такое исследование выполняется на примере решения краевой задачи, сформулированной в [26]. В этой работе получено решение по условию текучести Треска и показаны возможности практического применения решения. Обобщение решения [26] на условие текучести [14] представлено в [27]. Асимптотический анализ решений, позволяющий определить коэффициент интенсивности скорости деформации, в [26; 27] не проводился.

1. Модели материала

Рассматривается осесимметричная деформация идеально жесткопластического материала, подчиняющегося условию текучести Треска или обобщенному условию текучести [14]. Пусть σ_1 и σ_2 – главные напряжения в произвольной меридиональной плоскости и σ_θ – окружное напряжение, которое также является третьим главным напряжением. Соответствующие скорости деформации обозначены ξ_1, ξ_2 и ξ_θ. В дальнейшем предполагается, что

$$\xi_\theta \neq 0. \tag{1}$$

Без ограничения общности можно принять $\sigma_1 > \sigma_2$. Кроме того, для целей настоящего исследования необходимо рассмотреть напряженные состояния, удовлетворяющие условию

$$\sigma_1 \geq \sigma_\theta \geq \sigma_2. \tag{2}$$

Условие текучести Треска сводится к одному из следующих соотношений между главными напряжениями

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 \ \text{ и } \ \sigma_1 - \sigma_\theta = \sigma_0 \tag{3}$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 \ \text{ и } \ \sigma_\theta - \sigma_2 = \sigma_0. \tag{4}$$

Здесь σ_0 – предел текучести при одноосном растяжении. Специальный случай $\sigma_1 > \sigma_\theta > \sigma_2$ исключен из рассмотрения, так как противоречит (1). В дальнейшем для определенности исследуется решение при выполнении условия (3). Условие (4) может быть исследовано аналогично и не приводит к принципиально новым результатам. Условие текучести [14] имеет вид

$$\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^n + \left(\sigma_\theta - \sigma_2\right)^n + \left(\sigma_1 - \sigma_\theta\right)^n = 2\sigma_0^n, \tag{5}$$

где $1 \leq n < \infty$. Это условие сводится к условию Треска при $n = 1$ [16]. В дальнейшем существенное значение будет иметь предел текучести при чистом сдвиге *k*. Этот предел выражается через предел текучести при одноосном растяжении как

$$k = k_T = \frac{\sigma_0}{2} \ \text{ и } \ k = k_G = \frac{\sigma_0}{\sqrt[n]{1 + 2^{n-1}}} \tag{6}$$

для условий (3) и (5) соответственно. Из этих соотношений видно, что $k_T = k_G$ при $n = 1$.

Закон пластического течения, ассоциированный с (3), имеет вид

$$\xi_1 = \lambda_1, \quad \xi_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 \ \text{ и } \ \xi_\theta = -\lambda_2. \tag{7}$$

Здесь $\lambda_1 \geq 0$ и $\lambda_2 \geq 0$. Закон пластического течения, ассоциированный с (5), имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^{n-1} + \left(\sigma_1 - \sigma_\theta\right)^{n-1}\right], \\ \xi_2 &= -\lambda\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^{n-1} + \left(\sigma_\theta - \sigma_2\right)^{n-1}\right], \\ \xi_\theta &= \lambda\left[\left(\sigma_\theta - \sigma_2\right)^{n-1} - \left(\sigma_1 - \sigma_\theta\right)^{n-1}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\lambda \geq 0$. Дополнительно к уравнениям (7) и (8) необходимо считать, что главные направления тензоров напряжения и скорости деформации совпадают. Из (7) и (8) следует уравнение несжимаемости

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_\theta = 0. \tag{9}$$

Введем декартову систему координат (x, y) в произвольной меридиональной плоскости. Пусть φ – угол между осью *x* и направлением главного напряжения σ_1, отсчитываемый от оси против хода часовой стрелки (рис. 1).

Компоненты тензора напряжения в декартовой системе координат выражаются через главные напряжения как

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0} = s + t\cos 2\varphi, \quad \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0} = s - t\cos 2\varphi, \quad \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_0} = t\sin 2\varphi, \tag{10}$$

где

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_0} \text{ и } t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_0}. \tag{11}$$

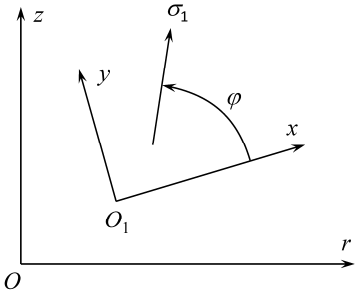


Рис. 1. Декартова система координат в меридиональной плоскости и направление напряжения σ_1

Fig. 1. Cartesian coordinate system in a meridional plane and the direction of the stress σ_1

Используя (11), условие (5) может быть представлено в виде

$$(2t)^n + (s_\theta - s + t)^n + (s + t - s_\theta)^n = 2 \tag{12}$$

где $s_\theta = \sigma_\theta/\sigma_0$. Исключая λ в (8) и используя (11), получим

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_\theta} = \frac{2(2t)^{n-1} + (s + t - s_\theta)^{n-1}(s_\theta - s + t)^{n-1}}{(s_\theta - s + t)^{n-1} - (s + t - s_\theta)^{n-1}}. \tag{13}$$

Компоненты тензора скорости деформации в декартовой системе координат обозначим ξ_{xx}, ξ_{yy} и ξ_{xy}.

2. Особенности решения при $n \to 1$

Решения для обобщенного условия текучести могут не сходиться к решениям для условия Треска при $n \to 1$. Рассмотрим поверхность максимального трения. Касательное напряжение на этой поверхности равно пределу текучести при чистом сдвиге, если реализуется режим проскальзывания. Предел текучести при чистом сдвиге – максимальное касательное напряжение, допускаемое условием текучести. С другой стороны, максимальное касательное напряжения в произвольной точке пластической области равно $t\sigma_0$. Таким образом, из (6) следует, что

$$t = \frac{1}{\sqrt[n]{1 + 2^{n-1}}} \tag{14}$$

на поверхности максимального трения. Подставляя (14) в (12), найдем

$$\left(s_\theta - s + \frac{1}{\sqrt[n]{1 + 2^{n-1}}}\right)^n + \left(s - s_\theta + \frac{1}{\sqrt[n]{1 + 2^{n-1}}}\right)^n = \frac{2}{1 + 2^{n-1}}. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$s = s_\theta \tag{16}$$

на поверхности максимального трения. Подставляя (16) в (11), получим

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_\theta. \tag{17}$$

С другой стороны, из (3)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_\theta + \sigma_0. \tag{18}$$

Уравнение (17) имеет силу при любом значении n, отличном от единицы. Таким образом, из (17) и (18) следует, что решение для обобщенного условия текучести не сходится к решению для условия Треска при $n \to 1$.

Геометрическая интерпретация решений представлена на рис. 2.

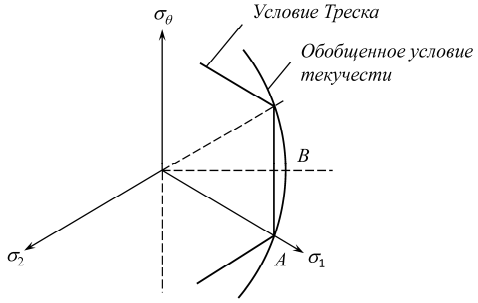


Рис. 2. Геометрическая интерпретация отсутствия сходимости решений по обобщенному условию текучести к соответствующим решениям по условию Треска

Fig. 2. Geometric interpretation of the absence of convergency of the solutions for the generalized yield criterion to the corresponding solutions for Tresca's yield criterion

В случае условия Треска напряженное состояние всегда соответствует точке *A*. С другой стороны, уравнение (17) показывает, что в случае обобщенного условия текучести окружное напряжение равно среднему арифметическому двух других главных напряжений. Таким образом, напряженное состояние соответствует точке *B*, которая, в свою очередь, соответствует плоскодеформированному состоянию. Это видимое противоречие разрешается, если подставить (16) в (13). Правая часть (13) стремится к бесконечности (или отрицательной бесконечности). Это возможно, если $\xi_\theta \to 0$, что соответствует плоскодеформированному состоянию, или если $|\xi_1| \to \infty$ и $|\xi_2| \to \infty$. Условие (1) требует, чтобы реализовывался второй случай, что согласуется с общей теорией [18].

3. Коэффициент интенсивности скорости деформации

Квадратичный инвариант тензора скорости деформации стремится к бесконечности при приближении к поверхности максимального трения как при применении обобщенного условия текучести, так и при применении условия текучести Треска [18; 19]. В обоих случаях асимптотическое представление квадратичного инварианта тензора скорости деформации имеет вид

$$\xi_{eq} = \frac{D}{\sqrt{S}} + o\left(\sqrt{S}\right) \tag{19}$$

при $S \to 0$. Здесь S – расстояние до поверхности максимального трения, D – коэффициент интенсивности скорости деформации. Этот коэффициент может быть использован для предсказания формирования тонкого слоя вблизи поверхности трения, свойства материала в котором существенно отличаются от свойств в основном объеме [20]. В частности, эмпирическое соотношение, связывающее коэффициент интенсивности скорости деформации и твердость поверхностного слоя при обработке давлением алюминиевого сплава 6061 предложено в [25]. Так как решения по обобщенному условию текучести не сходятся к решениям по условию Треска, то представляет интерес выяснить поведение коэффициента интенсивности скорости деформации при $n \to 1$.

Выберем начало системы координат (x, y), введенной в п. 1, в произвольной точке поверхности максимального трения и направим ось x по касательной к этой поверхности (линии в меридиональной плоскости). В случае осесимметричной деформации второй инвариант тензора скорости деформации представляется в виде

$$\xi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\xi_{xx}^2 + \xi_{yy}^2 + \xi_{\theta\,\theta}^2 + 2\xi_{xy}^2}. \tag{20}$$

При выводе (19) предполагается, что неограниченными могут быть только производные от компонент вектора скорости по y. Таким образом, компонента тензора скорости деформации ξ_{xx} должна быть ограничена, так как не включает производных от компонент вектора скорости по y. Уравнение (9) может быть представлено в виде $\xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{\theta\,\theta} = 0$. Так как ξ_{xx} и $\xi_{\theta\,\theta}$ ограничены, то компонента ξ_{yy} также ограничена. Таким образом, из (19) и (20) получаем, что

$$\left|\xi_{xy}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{D}{\sqrt{S}} + o\left(\sqrt{S}\right) \tag{21}$$

при $S \to 0$.

Отметим, что в некоторых случаях для приложений целесообразно использовать коэффициент интенсивности пластической мощности вместо коэффициента интенсивности скорости деформации [28; 29]. Уравнение (21) показывает, что пластическая мощность вблизи поверхности трения представляется выражением

$$W = \frac{\omega}{\sqrt{S}} + o\left(\sqrt{S}\right) \tag{22}$$

при $S \to 0$. Здесь $\omega = 4D\left|\sigma_{xy}\right|/\sqrt{3}$ – коэффициент интенсивности пластической мощности. При этом, касательное напряжение вычисляется на поверхности трения. Принимая во внимание (6), найдем

$$\omega = \frac{2D\sigma_0}{\sqrt{3}} \text{ и } \omega = \frac{4D\sigma_0}{\sqrt{3}\sqrt[n]{1+2^{n-1}}} \tag{23}$$

в случае условия текучести Треска и обобщенного условия текучести соответственно. Таким образом, коэффициент интенсивности пластической мощности при применении обобщенного условия текучести сходится к коэффициенту интенсивности пластической мощности при применении условия текучести Треска, если сходится коэффициент интенсивности скорости деформации. В связи с этим в дальнейшем ограничимся рассмотрением коэффициента интенсивности скорости деформации.

4. Коэффициент интенсивности скорости деформации при обжатии осесимметричного слоя материала

4.1. Постановка задачи и общее решение

Рассмотрим краевую задачу, сформулированную в [26]. Ниже вводятся необходимые обозначения и краевые условия. Осесимметричный слой пластического материала обжимается на жестком стержне (рис. 3). Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), ось z которой совпадает с осью симметрии слоя. Кроме того, краевая задача симметрична относительно плоскости $z = 0$. В связи с этим достаточно рассмотреть область $z \geq 0$. Радиус стержня обозначим a_0, а внешний радиус слоя – b_0.

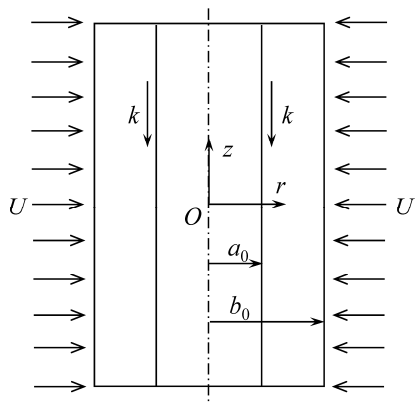


Рис. 3. Геометрическая схема процесса деформирования

Fig. 3. Geometry of the deformation process

Граничные условия, существенные для определения коэффициента интенсивности скорости деформации, имеют вид

$$u_r = -U \tag{24}$$

при $r = b_0$,

$$u_r = 0 \tag{25}$$

при $r = a_0$,

$$\sigma_{rz} = 0 \tag{26}$$

при $r = b_0$,

$$\sigma_{rz} = k \tag{27}$$

при $r = a_0$. Здесь u_r – радиальная скорость, σ_{rz} – касательное напряжение в цилиндрической системе координат. Таким образом, $r = a_0$ – поверхность максимального трения.

Решение уравнений равновесия и определяющих уравнений (3) и (7), удовлетворяющее краевым условиям (24)–(27), получено в [26]. Обобщение этого решения на условие текучести (5) представлено в [27]. Асимптотический анализ решений в этих работах не проводился.

Обозначения, принятые в п. 1, сохраняют силу, если ось x совместить с осью *r*, а ось *y* с осью *z*. Решение [27] сводится к трем уравнениям:

$$\frac{3\rho^2 + a^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{A\cos 2\varphi}{(t-\beta)^{n-1} - (t+\beta)^{n-1}}, \tag{28}$$

$$(t+\beta)^n + (t-\beta)^n + 2^n t^n = 2, \tag{29}$$

$$t\sin 2\varphi = \frac{(1-\rho^2)a}{\rho(1-a^2)}\kappa. \tag{30}$$

Здесь

$$\rho = \frac{r}{b_0}, \quad a = \frac{a_0}{b_0}, \quad \kappa = \frac{k_G}{\sigma_0}, \quad \beta = s - s_0. \tag{31}$$

Кроме того,

$$A = (t+\beta)^{n-1} + (t-\beta)^{n-1} + 2(2t)^{n-1} \tag{32}$$

и

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \tag{33}$$

Из (14), (16), (30), (31) и (33) следует, что

$$\beta = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ и } t = \kappa \tag{34}$$

при $\rho = a$.

Сдвиговая скорость деформации в цилиндрической системе координат определяется как

$$\xi_{rz} = \frac{U}{2b_0}\frac{(a^2 + 3\rho^2)}{(a^2 - 1)\rho^2}\tan 2\varphi. \tag{35}$$

4.2. Коэффициент интенсивности скорости деформации

Применяя биномиальную теорему, получим

$$\begin{gathered}(t-\beta)^{n-1} = t^{n-1} + (1-n)t^{n-2}\beta + \frac{1}{2}(1-n)(2-n)t^{n-3}\beta^2 + o(\beta^2),\\ (t+\beta)^{n-1} = t^{n-1} - (1-n)t^{n-2}\beta + \frac{1}{2}(1-n)(2-n)t^{n-3}\beta^2 + o(\beta^2),\\ (t-\beta)^n = t^n - nt^{n-1}\beta - \frac{1}{2}n(1-n)t^{n-2}\beta^2 + o(\beta^2),\\ (t+\beta)^n = t^n + nt^{n-1}\beta - \frac{1}{2}n(1-n)t^{n-2}\beta^2 + o(\beta^2)\end{gathered} \tag{36}$$

при $\beta \to 0$. Используя (36), уравнение (28) преобразуется к виду

$$\frac{2a}{(\rho - a)} + o\left[(\rho - a)^{-1}\right] = \frac{A\cos 2\varphi}{\left[2(1-n)t^{n-2}\beta + o(\beta^2)\right]} \tag{37}$$

при $\rho \to a$ и $\beta \to 0$. Принимая во внимание (34), положим что

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \alpha(\rho - a)^q + o\left[(\rho - a)^q\right] \tag{38}$$

при $\rho \to a$, где $q > 0$. Тогда,

$$\begin{gathered}\sin 2\varphi = 1 - 2\alpha^2(\rho - a)^{2q} + o\left[(\rho - a)^{2q}\right],\\ \cos 2\varphi = -2\alpha(\rho - a)^q + o\left[(\rho - a)^q\right],\\ \tan 2\varphi = -\frac{(\rho - a)^{-q}}{2\alpha} + o\left[(\rho - a)^{-q}\right]\end{gathered} \tag{39}$$

при $\rho \to a$. Из (32) видно, что $A = O(1)$ при $\rho \to a$. Тогда из (37) и (39) следует, что

$$\beta = O\left[(\rho - a)^{q+1}\right] \tag{40}$$

при $\rho \to a$.

Используя (36), уравнение (29) преобразуется к виду

$$2(1 + 2^{n-1})t^n - n(1-n)t^{n-2}\beta^2 + o(\beta^2) = 2. \tag{41}$$

при $\beta \to 0$. Введем новую неизвестную τ по формуле

$$\kappa\tau = \kappa - t. \tag{42}$$

Из (34) следует, что

$$\tau = 0 \tag{43}$$

при $\rho = a$. Используя (42), принимая во внимание (43) и применяя биномиальную теорему, получим

$$t^n = \kappa^n\left[1-n\tau+\frac{1}{2}(n-1)n\tau^2+o\left(\tau^2\right)\right],$$
$$t^{n-2} = \kappa^{n-2}\left[\begin{array}{l}1-(n-2)\tau+\\ +\frac{1}{2}(n-3)(n-2)\tau^2+o\left(\tau^2\right)\end{array}\right] \quad (44)$$

при $\tau \to 0$. Подставляя (44) в (41), найдем

$$\left[2\tau+o(\tau)\right]+\left[(1-n)\kappa^{n-2}\beta^2+o\left(\beta^2\right)\right]=0 \quad (45)$$

при $\tau \to 0$ и $\beta \to 0$. Сравнивая (40) и (45), получим

$$\tau = O\left[(\rho-a)^{2(q+1)}\right] \quad (46)$$

при $\rho \to a$.

Используя (39) и (42), уравнение (30) преобразовывается к виду

$$\begin{array}{c}2\alpha^2(\rho-a)^{2q}+o\left[(\rho-a)^{2q}\right]+\\ +\tau\left\{1-2\alpha^2(\rho-a)^{2q}+o\left[(\rho-a)^{2q}\right]\right\}=\\ =\frac{\left(1+a^2\right)}{a\left(1-a^2\right)}(\rho-a)+o(\rho-a)\end{array} \quad (47)$$

при $\rho \to a$. Так как асимптотическое поведение функции τ вблизи поверхности максимального трения удовлетворяет (46), то уравнение (47) имеет решение только если

$$q=\frac{1}{2}. \quad (48)$$

В этом случае из (47) и (39) получаем

$$\alpha=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2a}\sqrt{1-a^2}},$$
$$\tan 2\varphi = -\frac{\sqrt{a}\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+a^2}\sqrt{\rho-a}}+o\left[(\rho-a)^{-1/2}\right] \quad (49)$$

при $\rho \to a$. Подставляя (49) в (35), найдем

$$\xi_{rz} = \frac{U}{b_0}\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{1-a^4}\sqrt{\rho-a}}+o\left[(\rho-a)^{-1/2}\right] \quad (50)$$

при $\rho \to a$. Используя (31), это уравнение можно представить в виде

$$\xi_{rz} = \frac{U}{\sqrt{b_0}}\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{1-a^4}\sqrt{S}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{S}}\right) \quad (51)$$

при $S \to 0$, где $S = r - a_0$. Сравнивая (21) и (51), коэффициент интенсивности скорости деформации определяется как

$$D=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a^4}}\frac{U}{\sqrt{b_0}}. \quad (52)$$

Таким образом, коэффициент интенсивности скорости деформации не зависит от величины n в интервале $1 < n < \infty$. При $n = 1$ коэффициент интенсивности скорости деформации вычислен в [30] на основе решения [26]. Результат этих вычислений совпадает с (52). Следовательно, коэффициент интенсивности скорости деформации не зависит от величины n в интервале $1 \le n < \infty$, несмотря на то, что решение по обобщенному условию текучести не сходится к решению по условию Треска при $n \to 1$.

Отметим, что коэффициент интенсивности пластической мощности зависит от величины n, так как знаменатель во второй формуле в (23) зависит от n.

Заключение

В настоящей работе показано, что решения по обобщенному условию текучести [14] не сходятся к соответствующим решениям по условию текучести Треска при $n \to 1$, хотя условие [14] совпадает с условием Треска при $n = 1$. Отсутствие сходимости связано с законом максимального трения, который приводит к сингулярным решениям по обоим условиям текучести. Поскольку условия на поверхности максимального трения аналогичны условиям на поверхностях разрыва скорости, отсутствие сходимости также будет иметь место для разрывных решений.

Поле скоростей деформации вблизи поверхностей максимального трения характеризуется коэффициентом интенсивности скорости деформации, который является коэффициентом при главном сингулярном члене в разложении квадратичного инварианта тензора скорости деформации в ряд в окрестности поверхности максимального трения. На примере конкретного решения показано, что коэффициент интенсивности скорости деформации не зависит от условия текучести (из класса рассмотренных условий), несмотря на отмеченное выше отсутствие сходимости решений при $n \to 1$.

Библиографический список

1. Hill R. The Mathematical Theory of plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 356 p.

2. Alexandrov S., Miszuris W. The transition of qualitative behaviour between rigid perfectly plastic and viscoplastic solutions // J. Eng. Math. 2016. – Vol. 97. – P. 67–81. DOI: 10.1007/s10665-015-9797-7

3. Dealy J.M., Wissbrun K.F. Melt rheology and its role in plastic processing: theory and applications. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1990. – 665 p.

4. The influence of deformation conditions on the flow of strain rate sensitive materials / J. Sińczak, J. Kusiak, W. Łapkowski, R. Okoń // J. Mater. Process. Technol. – 1992. – Vol. 34. – P. 219–224. DOI: 10.1016/0924-0136(92)90110-E

5. Mitsoulis E., Hatzikiriakos S.G. Capillary extrusion flow of a fluoropolymer melt // Int. J Mater. Form. – 2013. – Vol. 6. – P. 29–40. DOI: 10.1007/s12289-011-1062-7

6. Alexandrov S., Harris D. Comparison of solution behaviour for three models of pressure-dependent plasticity: A simple analytical example // Int. J. Mech. Sci. – 2006. – Vol. 48. – P. 750–762. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.01.009

7. Harris D., Grekova E. A hyperbolic well-posed model for the flow of granular materials // Hill J.M., Selvadurai A. (eds) Mathematics and Mechanics of Granular Materials. – Springer, Dordrecht, 2005. – P. 107–135. DOI: 10.1007/1-4020-4183-7_7

8. Spencer A.J.M. A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions // J. Mech. Phys. Solids. – 1964. – Vol. 12. – P. 337–351. DOI: 10.1016/0022-5096(64)90029-8

9. Ишлинский А.Ю. О плоском движении песка // Украинский математический журнал. – 1954. – Т. 6, № 4. – С. 430–441.

10. Ostrowska-Maciejewska J., Harris D. Three-dimensional constitutive equations for rigid/perfectly plastic granular materials // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. – 1990. – Vol. 108. – P. 153–169. DOI: 10.1017/S0305004100069024

11. Druyanov B. Technological mechanics of porous bodies. – New-York: Clarendon Press, 1993. – 198 p.

12. Barlat F., Kuwabara T., Korkolis Y.P. Anisotropic plasticity and application to plane stress // Altenbach H., Öchsner A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2018. – P. 1–22. DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6_225-1

13. Giraldo-Londoño O., Paulino Glaucio H. A unified approach for topology optimization with local stress constraints considering various failure criteria: von Mises, Drucker – Prager, Tresca, Mohr – Coulomb, Bresler – Pister and Willam – Warnke // Proc. R. Soc. A. – 2020. – Vol. 476. – P. 20190861. DOI: 10.1098/rspa.2019.0861

14. Hosford W.F. A generalized isotropic yield criterion // ASME. J. Appl. Mech. – 1972. – Vol. 39, no. 2. – P. 607–609. DOI: 10.1115/1.3422732

15. Billington E.W. Generalized isotropic yield criterion for incompressible materials// Acta Mechanica. – 1988. – Vol. 72. – P. 1–20. DOI: 10.1007/BF01176540

16. Dodd B., Naruse K. Limitations on isotropic yield criteria // Int. J. Mech. Sci. – 1989. Vol. 31, no. 7. – P. 511–519. DOI: 10.1016/0020-7403(89)90100-8

17. Cazacu O. New expressions and calibration strategies for Karafillis and Boyce (1993) yield criterion // Int. J. Solids Struct. – 2020. – Vol. 185–186. – P. 410–422. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.09.004

18. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Int. J. Non-Linear Mech. – 2001. – Vol. 36, no. 1. – P. 1–11. DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00075-X

19. Александров С.Е., Ричмонд О. Асимптотическое поведение поля скорости при осесимметричном течении материала, подчиняющегося условию Треска // Докл. РАН. – 1998. – Т. 360, № 4. – С. 480–482.

20. Гольдштейн Р.В., Александров С.Е. Подход к предсказанию формирования микроструктуры материала вблизи поверхностей трения при развитых пластических деформациях // Физ. Мезомех. – 2014. – Т. 17, № 5. – С. 15–20.

21. Kim Y.-T., Ikeda K. Flow behavior of the billet surface layer in porthole die extrusion of aluminum // Metallurg. Mater. Trans. – 2000. – Vol. 31A. – P. 1635–1643. DOI: 10.1007/s11661-000-0173-4

22. Трунина Т.А., Коковихин Е.А. Формирование мелкодисперсной структуры в поверхностных слоях стали при комбинированной обработке с применением гидропрессования // Пробл. Машиностр. Надежн. Машин. – 2008. – № 2. – С. 71–74.

23. Formation of ultra-fine copper grains in copper-clad aluminum wire / T.T. Sasaki, R.A. Morris, G.B. Thompson, Y. Syarif, D. Fox // Scripta Mater. – 2010. – Vol. 63. – P. 488–491. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2010.05.010

24. Interfacial microstructure and mechanical properties of Cu/Al clad sheet fabricated by asymmetrical roll bonding and annealing / X. Li, G. Zu, M. Ding, Y. Mu, P. Wang // Mater. Sci. Technol. – 2011. – Vol. 529A. – P. 485–491. DOI: 10.1016/j.msea.2011.09.087

25. Towards the theoretical/experimental description of the evolution of material properties at frictional interfaces in metal forming processes / S. Alexandrov, Y.-R. Jeng, C.-Y. Kuo, C.-Y. Chen // Trib. Int. – 2022. – Vol. 171. – P. 107518. DOI: 10.1016/j.triboint.2022.107518

26. Spencer A.J.M. A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres // Int. J. Mech. Sci. – 1965. – Vol. 7, no. 3. – P. 197–209. DOI: 10.1016/0020-7403(65)90018-4

27. Alexandrov S., Erisov Y., Grechnikov F. Effect of the yield criterion of matrix on the brittle fracture of fibres in uniaxial tension of composites // Adv. Mater. Sci. Eng. – 2016. – Article 3746161. DOI: 10.1155/2016/3746161

28. Alexandrov S., Mustafa Y. The strain rate intensity factor in the plane strain compression of thin anisotropic metal strip // Meccanica. – 2014. – Vol. 49. – P. 2901–2906. DOI: 10.1007/s11012-014-0039-2

29. Lyamina E. Prediction of a material property gradient near the friction surface in axisymmetric extrusion and drawing // Metals. – 2022. – Vol. 12, no. 8. – Article 1310. DOI: 10.3390/met12081310

30. Alexandrov S. The strain rate intensity factor and its applications: a review // Materials Science Forum. – 2009. – Vol. 623. – P. 1–20. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.623.1

References

1. Hill R. The Mathematical Theory of plasticity. Oxford, Clarendon Press, 1950, 356 p.
2. Alexandrov S., Miszuris W. The transition of qualitative behaviour between rigid perfectly plastic and viscoplastic solutions, 2016, *J. Eng. Math*., 97, pp. 67-81. doi:10.1007/s10665-015-9797-7
3. Dealy J.M., Wissbrun K.F. Melt rheology and its role in plastic processing: theory and applications. New York, Van Nostrand Reinhold, 1990, 665 p.
4. Sińczak J., Kusiak J., Łapkowski W., Okoń R. The influence of deformation conditions on the flow of strain rate sensitive materials, 1992, *J. Mater. Process. Technol*., 34, pp. 219-224. doi:10.1016/0924-0136(92)90110-E
5. Mitsoulis E., Hatzikiriakos S.G. Capillary extrusion flow of a fluoropolymer melt, 2013, *Int. J Mater. Form.,* 6, pp. 29-40. doi:10.1007/s12289-011-1062-7
6. Alexandrov S., Harris D. Comparison of solution behaviour for three models of pressure-dependent plasticity: A simple analytical example, 2006, *Int. J. Mech. Sci*., 48, pp. 750-762. doi:10.1016/j.ijmecsci.2006.01.009
7. Harris D., Grekova E. A hyperbolic well-posed model for the flow of granular materials. In: Hill J.M., Selvadurai A. (eds) Mathematics and Mechanics of Granular Materials. Springer, Dordrecht, 2005, pp.107-135. doi:10.1007/1-4020-4183-7_7
8. Spencer A.J.M. A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions, 1964, *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp. 337-351. doi:10.1016/0022-5096(64)90029-8
9. Ishlinsky A.Yu. O ploskom dviginii peska [To plane flow of sand]. *Ukrainskiy mathematicheskiy journal,* 1954, Vol. 6, No. 4, pp. 430-441.
10. Ostrowska-Maciejewska J., Harris D. Three-dimensional constitutive equations for rigid/perfectly plastic granular materials,1990, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc*., 108, pp. 153-169. doi:10.1017/S0305004100069024
11. Druyanov B. Technological mechanics of porous bodies. New-York, Clarendon Press, 1993, 198 p.
12. Barlat F., Kuwabara T., Korkolis Y.P. Anisotropic plasticity and application to plane stress. In: Altenbach H., Öchsner A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2018, pp. 1-22. doi:10.1007/978-3-662-53605-6_225-1
13. Giraldo-Londoño O., Paulino Glaucio H. A unified approach for topology optimization with local stress constraints considering various failure criteria: von Mises, Drucker–Prager, Tresca, Mohr–Coulomb, Bresler– Pister and Willam–Warnke, *Proc. R. Soc. A*., 476, 2020, p. 20190861. doi:10.1098/rspa.2019.0861
14. Hosford W. F. A generalized isotropic yield criterion, 1972, *ASME. J. Appl. Mech*., 39(2), pp. 607–609. doi:10.1115/1.3422732
15. Billington, E.W. Generalized isotropic yield criterion for incompressible materials, 1988, *Acta Mechanica*, 72, pp. 1–20. doi:10.1007/BF01176540
16. Dodd B., Naruse K. Limitations on isotropic yield criteria, 1989, *Int. J. Mech. Sci*.,. 31(7), pp. 511-519. doi: 10.1016/0020-7403(89)90100-8
17. Cazacu O. New expressions and calibration strategies for Karafillis and Boyce (1993) yield criterion, 2020, *Int. J. Solids Struct.*, 185–186, pp. 410-422. doi:10.1016/j.ijsolstr.2019.09.004.
18. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress, 2001, *Int. J. Non-Linear Mech*., 36(1), pp. 1-11. doi:10.1016/S0020-7462(99)00075-X
19. Alexandrov S., Richmond O. Asymptotic behavior of the velocity field in an axisymmetric flow of a material satisfying the Tresca condition, *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 1998, Vol. 360, No. 4, pp. 480–482.
20. Goldstein R.V., Alexandrov S.E. An approach to prediction of microstructure formation near friction surfaces at large plastic strains, 2015, *Phys. Mesomech.*, 18, pp.223–227. doi:10.1134/S1029959915030066.
21. Kim Y.-T., Ikeda K. Flow behavior of the billet surface layer in porthole die extrusion of aluminum, 2000, *Metallurg. Mater. Trans.*, 31A, pp. 1635-1643. doi: 10.1007/s11661-000-0173-4
22. Trunina T.A., Kokovikhin E.A. Formation of a finely dispersed structure in steel surface layers under combined processing using hydraulic pressing, 2008, *J. Mach. Manuf. Reliab*., 37, pp.160–162. doi:10.3103/S1052618808020118
23. Sasaki T.T., Morris R.A., Thompson G.B., Syarif Y., Fox D. Formation of ultra-fine copper grains in copper-clad aluminum wire, 2010, *Scripta Mater*., 63, pp. 488-491. doi: 10.1016/j.scriptamat.2010.05.010
24. Li X., Zu G., Ding M., Mu Y., Wang P. Interfacial microstructure and mechanical properties of Cu/Al clad sheet fabricated by asymmetrical roll bonding and annealing, 2011, *Mater. Sci. Technol*., 529A, pp. 485-491. doi: 10.1016/j.msea.2011.09.087
25. Alexandrov S., Jeng Y.-R., Kuo C.-Y., Chen C.-Y. Towards the theoretical/experimental description of the evolution of material properties at frictional interfaces in metal forming processes, 2022, *Trib. Int*., 171, Paper 107518. doi:10.1016/j.triboint.2022.107518
26. Spencer A.J.M. A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres, 1965, *Int. J. Mech. Sci.,* 7(3), pp. 197-209. doi:10.1016/0020-7403(65)90018-4
27. Alexandrov S., Erisov Y., Grechnikov F. Effect of the yield criterion of matrix on the brittle fracture of fibres in uniaxial tension of composites, 2016, *Adv. Mater. Sci. Eng*., Article 3746161. doi:10.1155/2016/3746161
28. Alexandrov S., Mustafa Y. The strain rate intensity factor in the plane strain compression of thin anisotropic metal strip, 2014, *Meccanica*, 49, pp. 2901–2906. doi:10.1007/s11012-014-0039-2
29. Lyamina E. Prediction of a material property gradient near the friction surface in axisymmetric extrusion and drawing, 2022, *Metals*, 12(8), Article 1310. doi:10.3390/met12081310
30. Alexandrov S. The strain rate intensity factor and its applications: a review, 2009, *Materials Science Forum,* 623, pp. 1–20. doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.623.1

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ-20-79-10340.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was carried out with the support of the RNF grant-20-79-10340.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.