Беляев А.К., Полякова О.Р., Товстик Т.П. Динамика и устойчивость двухзвенного маятника Капицы // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 2. С. 78–87. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.07

Belyaev A.K., Polyakova O.R., Tovstik T.P. Dynamics and stability of Kapitsa's two-link pendulum. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 2, pp. 78-87. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.07

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.07
УДК 539.3

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХЗВЕННОГО МАЯТНИКА КАПИЦЫ

А.К. Беляев[1], О.Р. Полякова[2], Т.П. Товстик[1]

[1]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
[2]Общественная организация научных исследований «Метагалактические Науки» Московской области, Подольск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 01 декабря 2022 г.
Одобрена: 13 марта 2023 г.
Принята к публикации:
30 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

маятник Капицы, перевёрнутый маятник, устойчивость, границы области устойчивости, двухмасштабное разложение, осреднённое движение, двухзвенный маятник, колебания, резонанс, динамический гаситель колебаний, упругая деформация, динамика, нелинейная система уравнений.

АННОТАЦИЯ

Известно, что верхнее, перевёрнутое положение маятника при определённых параметрах вертикальной вибрации его основания является устойчивым. Настоящая работа посвящена динамике модели двухзвенного перевёрнутого маятника в общей нелинейной постановке.

Определив границы параметров заданной вибрации основания, при которых перевёрнутый режим является устойчивым, найти границы начальных условий задачи, а именно начальные немалые углы отклонения звеньев маятника от вертикали, приводящие к колебаниям в перевёрнутом положении. В более сложной постановке задачи, предполагающей учёт малых упругих деформаций растяжения – сжатия в стержнях, выявить эффекты влияния сжимаемости стержней на режим колебаний, а также влияние резонанса на устойчивость.

Применением законов динамики к подвижным элементам конструкции получена полная нелинейная система уравнений движения маятника в двух постановках для системы с двумя и четырьмя степенями свободы соответственно. Уравнения содержат малый параметр амплитуды вибраций основания, что позволяет применить метод двухмасштабного асимптотического разложения. Метод приводит к системе осреднённых уравнений движения, удобной для анализа влияния параметров.

Найдены формы и частоты малых колебаний маятника в зависимости от безразмерного параметра задачи. В нелинейной постановке вычислены максимальные отклонения звеньев маятника, дающие устойчивое решение задачи при нулевых начальных угловых скоростях. В зависимости от начальной фазы вибрации основания получены границы двух зон устойчивости колебаний – абсолютной и частичной. В абсолютной области устойчивые колебания реализуются для любого значения начальной фазы вибрации основания, в частичной – хотя бы для одного значения. Проведено сравнение динамики маятника без учёта и с учётом сжимаемости стержней. Результаты представлены на графиках.

© ПНИПУ

© **Беляев Александр Константинович** – д.ф.-м.н., член-корр. РАН, проф., зав. лаб., e-mail: vice.ipme@gmail.com.
Полякова Оксана Рудольфовна – к.ф.-м.н., e-mail: ksenpolyaor@yandex.ru.
Товстик Татьяна Петровна – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: tovstik_t@mail.ru.

Alexander K. Belyaev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, RAS Corresponding Member, Professor, Head of Laboratory, e-mail: vice.ipme@gmail.com.
Oksana R. Polyakova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: ksenpolyaor@yandex.ru.
Tatiana P. Tovstik – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: tovstik_t@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

DYNAMICS AND STABILITY OF KAPITSA'S TWO-LINK PENDULUM

A.K. Belyaev[1], O.R. Polyakova[2], T.P. Tovstik[1]

[1]Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation
[2]Public Organization of Scientific Research «Metagalactic Sciences», Moscow region, Podolsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 December 2022
Approved: 13 March 2023
Accepted for publication:
30 April 2023

Keywords:

Kapitsa's pendulum, inverted pendulum, stability, oscillation stability zone, two-scale expansion, averaged motion, two-link pendulum, vibration, resonance, dynamic vibration damper, elastic deformation, dynamics, nonlinear system of equations.

ABSTRACT

The object of study. The upper upward position of the pendulum subjected to vibration of the pendulum base is known to be stable for some parameters of the base vibration. The research is devoted to dynamics of the model of a two-link inverted pendulum in a general nonlinear formulation.

The goal. The boundaries of the parameters of a given base vibration, under which the inverted mode is stable, are assumed to be known. The goal is to find the regions of the initial conditions of the problem, namely, the initial non-small angles of deviation of the pendulum links from the vertical that result in stable oscillation in the inverted position. We intend to reveal the impact of the rod compressibility on the oscillation mode, as well as the influence of the resonance on stability in the framework of more complex formulation of the problem which involves account for small elastic axial deformation in the rods.

Methods. By applying the laws of dynamics to the moving elements of the structure, we derive the complete nonlinear system of equations of the pendulum motion in two formulations: (i) for a system with two and (ii) four degrees of freedom, respectively. The equations include the parameter of small base vibration amplitude, which makes it possible to apply the two-scale asymptotic expansion method. The method leads to a system of averaged equations of motion which is convenient for the benchmark study of parameters.

Results. The modes and eigenfrequencies of small oscillations of the pendulum are found depending on the dimensionless parameter of the problem. In the nonlinear formulation, the maximum deviations of the pendulum links are calculated which ensure a stable solution to the problem for zero initial angular velocities. Depending on the initial phase of vibration of the base, the boundaries of absolute and partial zones of stability of vibrations are obtained. In the absolute zone, stable oscillations are realized for any value of the initial phase of the base vibration. In the partial region, stable oscillation occurs at least for one set of initial condition. The dynamics of the pendulum is compared with and without account for rod the compressibility. The results are presented in the graphs.

© PNRPU

Введение

Задачей о маятниках и о резонансах, связанных с колебаниями маятников, впервые заинтересовался 300 лет назад Г. Галилей. Первая публикация о стабилизации обращённого маятника под действием вертикальной вибрации точки его шарнирного закрепления принадлежит А. Стефенсону [1]. Уравнения колебаний маятника с вибрирующей опорой приводят к уравнению Матье, которое решается только в терминах эллиптических функций. П.Л. Капица в 1951 г. [2] использовал предположение о малости амплитуды колебаний опоры и благодаря этому построил теорию расчёта периода колебаний маятника, привёл условие равновесия и оценку точности в предположении малой амплитуды колебаний точки подвеса, нашёл восстанавливающий момент, действующий на маятник, а также рассмотрел задачу с отклонением маятника от верхнего положения равновесия на конечный угол. Теория и эксперименты показали, что состояние равновесия возникает при достаточно интенсивных колебаниях опоры.

Интерес к задачам стабилизации обращённых маятников в различных постановках, начавшийся с 1950-х гг., объясняется ещё и тем, что при проектировании установок, работающих в области физики высоких энергий, для расчёта устойчивости движения частиц требуется решать те же уравнения, что и в задаче обращённых маятников [3], при этом поставить эксперименты с маятником для проверки физических теорий значительно проще.

В разные годы многие известные учёные посвящали свои работы описаниям парадоксов, возникающих в задачах, связанных со стабилизацией обращённых маятников под действием вибрации – В.Н. Челомей [4; 5], В.И. Арнольд [6], И.И. Блехман [7; 8], Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц [9].

Публикации по данной теме продолжаются, как в России, так и за рубежом. В работе [10] найдены условия устойчивости малых колебаний обращённого многозвенного маятника. Современные экспериментаторы добиваются стабилизации двухзвенных и трехзвенных маятников [11–14], продолжают публиковаться теоретические работы [15; 16]. Описаны эксперименты стабилизации в верхнем положении гибких моделей маятника, в том числе верёвки [17; 18]. Появляются и другие работы по маятникам, направленные на практическое

применение [19; 20]. Условия устойчивости и границы области притяжения устойчивого решения в случае конечных отклонений от положения равновесия получены в работах [21–23] для моделей маятников в виде гибких упругих стержней, в том числе с учётом продольных деформаций и влияния первого резонанса продольных волн.

Существуют интересные результаты, использующие эффект маятника Капицы в задачах с другими постановками, например работы [24; 25] где вибрациями с периодической нагрузкой обеспечивается устойчивость прямолинейной формы сжатого стержня. Эффект находит приложение в задачах моделирования движения частиц в малых масштабах [26] и для расчёта параметрических систем и механических систем с высокочастотным возбуждением [27; 28].

В данной работе мы используем постановку задачи и предположения Капицы о малости амплитуды колебаний подвеса и рассмотрим как малые, так и конечные углы отклонения двухзвенного маятника. Найденные главные частоты и формы малых колебаний двухзвенного обращённого маятника с вибрацией точки подвеса сравниваются с численным решением задачи в геометрически нелинейной постановке. Вторая, более сложная решаемая задача – определить максимальные начальные отклонения маятника, при которых будет реализовываться эффект Стефенсона – Капицы, когда маятник будет колебаться около верхнего положения равновесия.

Данная работа продолжает в двухзвенной постановке работы, когда получены условия устойчивости и области притяжения устойчивого решения для различных моделей сжимаемого однозвенного маятника Капицы [29; 30].

1. Модель двухзвенного сжимаемого и несжимаемого маятника Капицы

Рассмотрим обобщённую модель маятника Капицы в виде двухзвенного математического маятника с одинаковыми звеньями AB и BD. Нижняя точка шарнирного закрепления системы маятников A совершает вертикальные гармонические колебания с малой по отношению к длине маятников l амплитудой a, частотой ω_0 и начальной фазой β. Движение системы маятников является плоским. Звенья соединены цилиндрическим шарниром, масса m каждого звена сосредоточена в точке на его конце, движение происходит в поле силы тяжести (рис. 1).

Углы отклонения звеньев маятника $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ отсчитываются от верхнего вертикального положения равновесия в направлении, показанном на рис. 1, и в общем случае являются немалыми величинами.

В недеформированном состоянии длина каждого звена маятника равна l. Предполагается, что изгиб звеньев не предусмотрен конструкцией, а малое растяжение-сжатие под действием продольной сжимающей силы происходит согласно линейному закону Гука с коэффициентом жёсткости c. Задача ставится в двух вариантах – с учётом сжимаемости звеньев маятника и без такового. В случае учёта сжимаемости будем предполагать, что при всех режимах движения конструкции амплитуды $p(t), s(t)$ деформаций растяжения – сжатия много меньше длины l самих маятников. Переменные величины деформаций p и s будем отсчитывать от ненапряжённого положения и считать положительными в случае удлинения звена маятника, $|AB| = l + p(t)$, $|BD| = l + s(t)$.

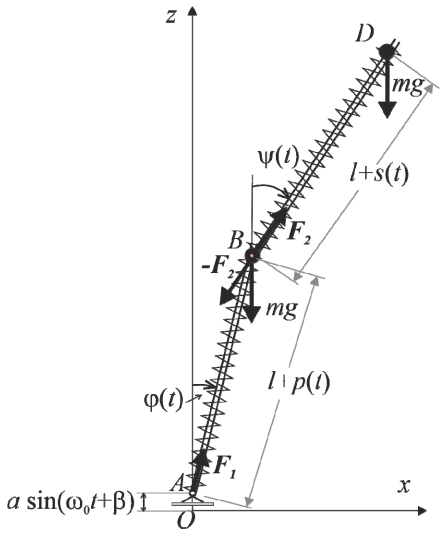


Рис. 1. Модель двухзвенного сжимаемого маятника Капицы

Fig. 1. Model of a two-link compressible Kapitsa pendulum

2. Уравнения движения системы маятников

Предложенная постановка задачи даёт систему с двумя либо с четырьмя степенями свободы для несжимаемых и сжимаемых звеньев соответственно. Введём неподвижную систему координат $Oxyz$ с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и запишем уравнения динамики нижнего и верхнего маятников

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{B} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 - mg\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_\mathbf{B} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}, \\ m\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{D} = \mathbf{F}_2 - mg\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_\mathbf{D} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}, \\ \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}, \\ \overrightarrow{DB} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OA} = a\sin(\omega_0 t + \beta)\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{AB} = |AB|(\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{k}),$$
$$\overrightarrow{BD} = |BD|(\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{k}),$$

где $\mathbf{F}_1$ – сила, действующая на нижний стержень со стороны шарнира в точке A в основании маятника, $\mathbf{F}_2$ – сила, действующая на верхний стержень со стороны нижнего в точке B, $-mg\mathbf{k}$ – сила тяжести, действующая на каждую массу. Нули в правых частях в двух

нижних уравнениях (1) получаются вследствие отсутствия учёта инерции собственного вращения точечных масс относительно точек B и D соответственно. Знаком (×) обозначено векторное произведение векторов, точкой над функцией $(^*)$ – обозначена производная по времени.

Для нерастяжимых маятников неизвестные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ находятся из уравнений движения (1). Для растяжимых маятников силы связаны с деформациями

$$\begin{cases} F_1(t)=-c\,p(t), \quad \mathbf{F}_1=F_1\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}, \\ F_2(t)=-cs(t), \quad \mathbf{F}_2=F_2\dfrac{\overrightarrow{BD}}{|BD|} \end{cases} \tag{2}$$

и находятся из системы уравнений движения (1), (2).

Положим, что в начальный момент звенья маятника отклонены от верхнего вертикального положения на заданные углы, в общем случае не малые, и их угловые скорости равны нулю. Для растяжимого случая считаем в начальный момент звенья маятника сжатыми силой тяжести, действующей на массы, а скорость изменения деформаций равна нулю. Положим

$$\varphi(t)\big|_{t=0}=\varphi_{00},\ \ \dot\varphi(t)\big|_{t=0}=0,\ \ \psi(t)\big|_{t=0}=\psi_{00},\ \ \dot\psi(t)\big|_{t=0}=0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} p(t)\big|_{t=0}=p_{00}=-2\frac{mg}{c},\ \ \dot p(t)\big|_{t=0}=0, \\ s(t)\big|_{t=0}=s_{00}=-\frac{mg}{c},\ \ \dot s(t)\big|_{t=0}=0. \end{gathered} \tag{4}$$

Можно найти деформации звеньев маятника под действием собственного веса и с учётом немалости углов отклонения в предположении, что в первый момент времени звенья маятника поддерживались в равновесии силами, перпендикулярными линии звеньев, тогда

$$p_{00}=-\frac{mg}{c}\left(\cos\varphi_{00}+\cos\psi_{00}\cos(\psi_{00}-\varphi_{00})\right),$$

$$s_{00}=-\frac{mg}{c}\cos\psi_{00},$$

но, как показывают расчёты, эти поправки несущественны.

В целом получаем задачу (1)–(2) с начальными условиями (3)–(4) для определения движения двухзвенного маятника.

3. Уравнения движения системы

Перейдём к безразмерным переменным по длине и по времени и введём обозначения для параметров системы

$$\begin{gathered} \tilde p=\frac{p}{l},\ \ \tilde s=\frac{s}{l},\ \ \varepsilon=\frac{a}{l},\ \ \tilde t=\omega_0 t,\ \ \nu^2=\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}, \\ \varepsilon^2 q=\frac{\omega_l^2}{\omega_0^2},\ \ \omega_c^2=\frac{c}{m},\ \ \omega_l^2=\frac{g}{l}. \end{gathered} \tag{5}$$

В дальнейшем значок тильды опускаем.

Уравнения движения (1) для недеформируемых маятников в безразмерных переменных (5) преобразуются к виду

$$\begin{cases} 2\ddot\varphi+\ddot\psi\cos(\psi-\varphi)-\dot\psi^2\sin(\psi-\varphi)+ \\ +2\varepsilon\sin(t+\beta)\sin\varphi-2q\varepsilon^2\sin\varphi=0, \\ \ddot\varphi\cos(\psi-\varphi)+\ddot\psi+\dot\varphi^2\sin(\psi-\varphi)+ \\ +\varepsilon\sin(t+\beta)\sin\psi-q\varepsilon^2\sin\psi=0, \end{cases} \tag{6}$$

где начальные условия выражаются равенствами (3). Слагаемые с параметром q отвечают за дестабилизирующее влияние силы тяжести, а слагаемые с сомножителем $\varepsilon\sin(t+\beta)$ – за стабилизирующее влияние вибрации основания. Отметим, что в случае малых колебаний маятника система (6) превращается в систему уравнений, подобных известному уравнению Матье [31].

Для деформируемых маятников полная нелинейная система уравнений включает четыре дифференциальных уравнения второго порядка для четырёх степеней свободы системы. С использованием тензорного аппарата и тензоров поворота система уравнений (1)–(2) в безразмерных переменных преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2\ddot p-2(1+p)\dot\varphi^2+\left(\ddot s-(1+s)\dot\psi^2\right)\cos(\psi-\varphi)- \\ -\left(2\dot s\dot\psi+(1+s)\ddot\psi\right)\sin(\psi-\varphi)- \\ -2\varepsilon\sin(t+\beta)\cos\varphi+2q\varepsilon^2\cos\varphi+\nu^2 p=0, \\ \ddot s-(1+s)\dot\psi^2+\left(\ddot p-(1+p)\dot\varphi^2\right)\cos(\psi-\varphi)+ \\ +\left(2\dot p\dot\varphi+(1+p)\ddot\varphi\right)\sin(\psi-\varphi)- \\ -\varepsilon\sin(t+\beta)\cos\psi+q\varepsilon^2\cos\psi+\nu^2 s=0, \\ 2(1+p)\ddot\varphi+\left((1+s)\ddot\psi+2\dot s\dot\psi\right)\cos(\psi-\varphi)+ \\ +4\dot p\dot\varphi+\left(\ddot s-(1+s)\dot\psi^2\right)\sin(\psi-\varphi)+ \\ +2\varepsilon\sin(t+\beta)\sin\varphi-2q\varepsilon^2\sin\varphi=0, \\ \left((1+p)\ddot\varphi+2\dot p\dot\varphi\right)\cos(\psi-\varphi)+(1+s)\ddot\psi+ \\ +2\dot s\dot\psi-\left(\ddot p-(1+p)\dot\varphi^2\right)\sin(\psi-\varphi)+ \\ +\varepsilon\sin(t+\beta)\sin\psi-q\varepsilon^2\sin\psi=0. \end{cases} \tag{7}$$

В частном случае недеформируемых звеньев два нижних уравнения системы (7) превращаются в систему (6), а два верхних уравнения будут содержать неопределённость, где в слагаемых $\nu^2 p$ и $\nu^2 s$ получаем неопределённость при $\nu^2\to\infty$, $p\to 0$, $s\to 0$.

Эту систему уравнений будем также рассматривать с начальными условиями (3)–(4), условия (4) в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{gathered} \tilde p(t)\big|_{t=0}=\tilde p_{00}=-2q\varepsilon^2\frac{1}{\nu^2},\ \ \dot{\tilde p}(t)\big|_{t=0}=0, \\ \tilde s(t)\big|_{t=0}=\tilde s_{00}=-q\varepsilon^2\frac{1}{\nu^2},\ \ \dot{\tilde s}(t)\big|_{t=0}=0, \end{gathered} \tag{8}$$

в дальнейшем значок тильды опускаем.

4. Осреднённые уравнения движения для системы недеформируемых маятников

Здесь и далее безразмерную амплитуду вибраций основания считаем малой величиной

$$\varepsilon \ll 1. \tag{9}$$

Введём в рассмотрение медленное время $\tau = \varepsilon t$ и найдём асимптотическое приближение для системы (6), (3), методом двухмасштабного разложения Боголюбова – Митропольского [32].

$$\begin{gathered}\varphi(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi_n(\tau)+\varphi_n(t,\tau)\right)\varepsilon^n,\\ \psi(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\Psi_n(\tau)+\psi_n(t,\tau)\right)\varepsilon^n,\\ \tau = \varepsilon t, \qquad \left\langle \varphi_n(t,\tau)\right\rangle = 0,\\ \left\langle \psi_n(t,\tau)\right\rangle = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,\end{gathered} \tag{10}$$

где через $\left\langle Z(t)\right\rangle$ обозначен оператор осреднения $\left\langle Z(t)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z(t)dt$, и в данном разложении средние значения функций φ_n, ψ_n при фиксированном τ равны нулю.

Учитываем выражения для полных производных функций φ и ψ по времени

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}, \tag{11}$$

подставляем разложение (10) в систему (6) и последовательно приравниваем нулю члены при степенях ε^0, ε^1, ε^2.

Далее точкой сбоку от функции будем обозначать частную производную по времени t, а штрихом – частную (или полную для функции одной переменной) производную по медленному времени τ. Члены при ε^0 дают систему

$$\begin{cases}2\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\psi}_0\cos(\Psi_0+\psi_0-\Phi_0-\varphi_0) -\\ -\left(\dot{\psi}_0\right)^2\sin(\Psi_0+\psi_0-\Phi_0-\varphi_0) = 0,\\ \ddot{\varphi}_0\cos(\Psi_0+\psi_0-\Phi_0-\varphi_0) + \ddot{\psi}_0 +\\ +\left(\dot{\varphi}_0\right)^2\sin(\Psi_0+\psi_0-\Phi_0-\varphi_0) = 0,\end{cases}$$

которой удовлетворяет нулевое решение $\varphi_0(t,\tau) = 0$, $\psi_0(t,\tau) = 0$. При ε^1 получаем систему

$$\begin{cases}2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\psi}_1\cos(\Psi_0-\Phi_0) + 2\sin(t+\beta)\sin\Phi_0 = 0,\\ \ddot{\varphi}_1\cos(\Psi_0-\Phi_0) + \ddot{\psi}_1 + \sin(t+\beta)\sin\Psi_0 = 0,\end{cases}$$

из которой находим

$$\varphi_1(t,\tau) = \sin(t+\beta)A(\tau), \quad \psi_1(t,\tau) = \sin(t+\beta)B(\tau), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}A(\tau) &= \frac{1}{1+\sin^2(\Psi_0-\Phi_0)}\left(2\sin\Phi_0 - \cos(\Psi_0-\Phi_0)\sin\Psi_0\right),\\ B(\tau) &= \frac{2}{1+\sin^2(\Psi_0-\Phi_0)}\left(\sin\Psi_0 - \cos(\Psi_0-\Phi_0)\sin\Phi_0\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Второй шаг даёт систему для определения медленно меняющихся функций, и при ε^2 система (6) после осреднения с учётом (10)–(13) принимает вид

$$\begin{cases}2\Phi_0'' + b(\tau)\Psi_0'' - \left(\left(\Psi_0'\right)^2 + \frac{1}{2}B^2(\tau)\right)d(\tau) +\\ + A(\tau)\cos\Phi_0 - 2q\sin\Phi_0 = 0,\\ b(\tau)\Phi_0'' + \Psi_0'' + \left(\left(\Phi_0'\right)^2 + \frac{1}{2}A^2(\tau)\right)d(\tau) +\\ + \frac{1}{2}B(\tau)\cos\Psi_0 - q\sin\Psi_0 = 0,\end{cases} \tag{14}$$

$$b(\tau) = \cos(\Psi_0-\Phi_0), \quad d(\tau) = \sin(\Psi_0-\Phi_0).$$

С учётом начальных условий для точной системы (3) находим начальные условия для осреднённой системы. С точностью до ε^1 выпишем полную производную по времени от функции φ

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varphi(t,\tau) = \frac{d}{dt}\left(\Phi_0(\tau)+\varepsilon\varphi_1(t,\tau)+O(\varepsilon^2)\right) =\\ &= \varepsilon\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tau} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + O(\varepsilon^2),\\ &\frac{d}{dt}\varphi(t,\tau)\big|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_0'(\tau)\big|_{\tau=0} =\\ &= -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big|_{t,\tau=0} = -A(0)\cos\beta,\end{aligned}$$

далее проводим аналогичные вычисления для функции ψ и получаем начальные условия для системы (14)

$$\begin{gathered}\Phi_0(0) = \varphi_{00}, \quad \Psi_0(0) = \psi_{00},\\ \Phi_0'(0) = -A(0)\cos\beta, \quad \Psi_0'(0) = -B(0)\cos\beta.\end{gathered} \tag{15}$$

В систему уравнений (14), в отличие от (6), входит единственный безразмерный параметр q, где

$$q = \frac{gl}{a^2\omega_0^2}. \tag{16}$$

Заметим, что начальная фаза β быстрых колебаний основания вошла в начальные условия осреднённой системы, следовательно, границы устойчивости колебаний для немалых углов отклонения маятника будут определяться не только начальными углами отклонения, но и начальной фазой β.

Осреднённая система движения (14), (15), в отличие от полной нелинейной системы (6), (3), не содержит быстро меняющейся функции времени. Это бывает

удобно для анализа системы. В более простых случаях однозвенного маятника [22; 30] осреднённое уравнение удавалось аналитически проинтегрировать и получить уравнение сепаратрисы на фазовой плоскости, в том числе с учётом упругой деформации маятника. Здесь же найти интегралы системы (14) не удалось.

Рассмотрим упрощение осреднённой системы (14) на случай геометрически линейной постановки для малых углов отклонения звеньев маятника. Имеем

$$b=1, \quad d(\tau)=\Psi_0-\Phi_0,$$
$$A(\tau)=2\Phi_0-\Psi_0, \quad B(\tau)=2\Psi_0-2\Phi_0.$$

Система принимает вид

$$\begin{cases}\Phi_0''+(3-2q)\Phi_0+(q-2)\Psi_0=0,\\ \Psi_0''+(3-2q)\Psi_0+(2q-4)\Phi_0=0,\end{cases} \tag{17}$$

$$\Phi_0(0)=\varphi_{00}, \quad \Psi_0(0)=\psi_{00},$$
$$\Phi_0'(0)=(\psi_{00}-2\varphi_{00})\cos\beta, \quad \Psi_0'(0)=2(\varphi_{00}-\psi_{00})\cos\beta.$$

Найдём собственные частоты и главные формы колебаний системы (17), а также условия устойчивости. Ищем решение в виде

$$\Phi_0(\tau)=xe^{i\lambda\tau}, \quad \Psi_0(\tau)=ye^{i\lambda\tau}, \tag{18}$$

где необходимым условием устойчивости колебаний является $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda^2>0$.

Подставляя (18) в систему (17), получаем

$$\begin{cases}(\lambda^2+2q-3)x+(2-q)y=0,\\ 2(2-q)x+(\lambda^2+2q-3)y=0.\end{cases} \tag{19}$$

Квадраты собственных частот системы выражаются через параметр q

$$\lambda_1^2=3-2\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})q, \quad \lambda_2^2=3+2\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})q, \tag{20}$$

соотношение амплитуд главных форм малых колебаний системы не зависит от параметра q

$$\begin{bmatrix}\Phi_0(\tau)=e^{i\lambda_1\tau}, & \Psi_0(\tau)=\sqrt{2}e^{i\lambda_1\tau},\\ \Phi_0(\tau)=e^{i\lambda_2\tau}, & \Psi_0(\tau)=-\sqrt{2}e^{i\lambda_2\tau},\end{bmatrix} \qquad \Psi_0/\Phi_0=\pm\sqrt{2}. \tag{21}$$

Из условия положительности обоих квадратов собственных частот (20) получаем условие устойчивости

$$q<q^*=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}29. \tag{22}$$

Точное критическое значение (22) совпадает с результатом, полученным в работе [10]. Отметим, что для однозвенного математического маятника область устойчивости шире: $q^*=0{,}5$.

При $q=q^*$ нижняя частота колебаний маятниковой системы обращается в ноль, и система становится неустойчивой, при уменьшении параметра q квадраты частот системы растут и приближаются к максимально возможным значениям $3-2\sqrt{2}$ и $3+2\sqrt{2}$ соответственно.

Проводилось сравнение численных решений точной нелинейной системы уравнений (6), (3), осреднённой нелинейной системы (14), (15) и линейной системы (17). Вне области резонанса для малых значений углов отклонения все три системы давали одинаковый результат для амплитуд, периодов и фаз медленных колебаний. При увеличении модуля углов наклона, осреднённая система так же, как и полная нелинейная система, показывала эффект увеличения периода колебаний маятника. При дальнейшем увеличении углов отклонения и приближении их к границам устойчивости решение осреднённой системы расходилось с точным решением.

5. Обсуждение результатов. Влияние деформации маятников

Обсудим результаты расчётов, сделанных в пакете Wolfram Mathematica для двух поставленных задач (6), (3) и (7)–(8), (3). Зафиксируем значения параметров q и ε в области, соответствующей устойчивому движению маятника с несжимаемыми звеньями около верхнего положения равновесия

$$q<q^*=1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon\ll 1,$$

и, меняя значение параметра жёсткости ν, $\nu^2=\dfrac{\omega_c^2}{\omega_0^2}=\dfrac{c}{m\omega_0^2}$ в пределах $\nu\in(0,\infty)$, найдём возможные режимы движения двухзвенного растяжимого маятника. Пусть в начальный момент угловая скорость звеньев маятника равна нулю и заданы начальные отклонения звеньев от вертикали (3) и начальные малые деформации звеньев (8).

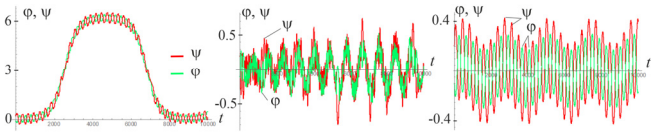
Расчёты показывают, что в отсутствие колебаний основания и отклонений звеньев от вертикали у системы есть две собственные частоты упругих вертикальных колебаний

$$\omega_{c1}^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_c^2, \quad \omega_{c2}^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_c^2,$$
$$\omega_{c1}\approx 0.618\omega_c, \quad \omega_{c2}\approx 1{,}618\omega_c, \tag{23}$$

следовательно, когда внешняя частота ω_0 сравняется с одной из данных упругих частот, будет наступать резонанс. Эти значения не будут сохраняться как резонансные частоты для больших отклонений звеньев маятника от вертикали, но послужат неким ориентиром.

Возьмём для расчётов $q=0{,}1$ и $\varepsilon=0{,}01$, начальную фазу β будем менять от 0 до 2π с шагом $\pi/8$. На промежутке значений параметра $\nu=\omega_c/\omega_0$, $0<\nu\le 1{,}72$ для любых начальных углов наклона (в том числе очень

маленьких, порядка 0,0001) и при всех значениях начальной фазы система полностью теряет устойчивость за время, меньшее, чем $t=2\,000$. Однако в промежутке $0{,}66\le\nu\le1{,}29$ наблюдаются неустойчивые режимы, при которых величина $\varphi(t)-\psi(t)$ совершает колебания, близкие к гармоничным, и амплитуда этих колебаний не растёт, а определяется начальными условиями (рис. 2, *a*). На границах этого промежутка при $0{,}66\le\nu\le0{,}69$ и $1{,}26\le\nu\le1{,}29$ угол $\varphi(t)-\psi(t)$ меняется по гармоническому закону не для всех начальных фаз β. В остальной области неустойчивости звенья маятника движутся хаотически.



a *b* *c*

Рис. 2. Значения углов наклона $\varphi(t)$, $\psi(t)$ звеньев маятника, $\varepsilon=0{,}01$, $q=0{,}1$, $\varphi_{00}=-0{,}1$, $\psi_{00}=0{,}2$, $\beta=7\pi/8$, $0\le t\le10000$; *a* – $\nu=0{,}7$; *b* – $\nu=1{,}85$; *c* – $\nu=20{,}0$

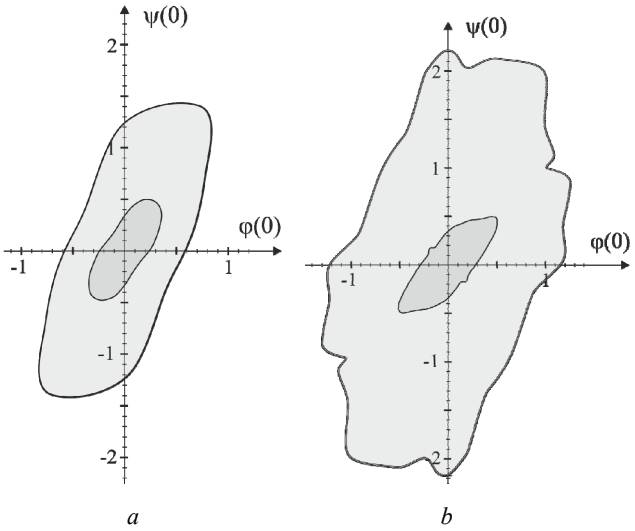
Fig. 2. The values of the angles of inclination $\varphi(t)$, $\psi(t)$ of the pendulum links, $\varepsilon=0.01$, $q=0.1$, $\varphi_{00}=-0.1$, $\psi_{00}=0.2$, $\beta=7\pi/8$, $0\le t\le10000$; *a* – $\nu=0.7$; *b* – $\nu=1.85$; *c* – $\nu=20.0$

Далее для значений $\nu\ge1{,}73$ существуют колебательные режимы, при которых за время $t=10\,000$ маятник успевает совершить от 10–12 (см. рис. 2, *b*) до 20–35 (см. рис. 2, *c*) колебаний около верхнего положения равновесия с примерно одинаковой амплитудой и частотой колебаний. Расчёты проводились и дольше, до $t=50\,000$. Для параметров вблизи границы области устойчивости существует вероятность, что маятник, устойчиво колебавшийся в течение времени $t=10\,000$, далее на каком-то шаге вылетит из устойчивого режима, но такие случаи являются не результатом постепенного роста амплитуд, а единичным всплеском. Поскольку целью численных экспериментов является качественная оценка влияния сжимаемости маятника на границы его устойчивости, условимся считать устойчивым режим колебаний, при котором в результате численного счёта в течение времени $t=10\,000$ наблюдается устойчивость.

Вблизи резонанса, даже при малых начальных условиях, система сразу выходит на режим колебаний с большими углами отклонения от вертикали (см. рис. 2, *b*). Вне зоны резонанса ($\nu\ge2{,}4$) в процессе колебаний амплитуды сохраняются на уровне начальных значений (см. рис. 2, *c*). В целом вдали от резонансных значений ($\omega_{c2},\omega_{c1}\gg\omega_0$) учёт сжимаемости мало влияет на амплитуду и период колебаний.

На режим колебаний и его устойчивость влияет начальная фаза вибраций основания, но в экспериментальных установках проконтролировать начальную фазу, возможно, затруднительно. Условимся различать зоны устойчивости и разделим их на абсолютную и частичную. В абсолютной зоне устойчивый режим реализуется для всех значений начальной фазы β, в частичной зоне – только для некоторых начальных фаз. Вне абсолютной и частичной зон устойчивости лежит зона неустойчивости, в которой неустойчивость наступает для всех значений β.

Сравнение границ устойчивых колебаний в случае учёта и без учёта продольного сжатия представлены на графике (рис. 3).



a *b*

Рис. 3. Абсолютная (внутри) и частичная зоны устойчивости, $\varepsilon=0{,}01$; $q=0{,}1$; $\nu=1{,}8$; *a* – несжимаемый маятник; *b* – сжимаемый маятник

Fig. 3. Absolute (inside) and partial stability regions, $\varepsilon=0.01$; $q=0.1$; $\nu=1.8$; *a* – incompressible pendulum; *b* – compressible pendulum

Расчёты проведены для конкретных фиксированных значений параметров $q=0{,}1$, $\varepsilon=0{,}01$ и $\nu=1{,}8$. Найдены границы устойчивости – абсолютная и относительная – на плоскости начальных условий $\varphi(0)=\varphi_{00}$, $\psi(0)=\psi_{00}$. Области начальных значений, приближённо полученные численно путём интегрирования уравнений (6) и (7) – для несжимаемых и сжимаемых маятников соответственно, показаны на плоскости. Внутренняя, более тёмная область соответствует зоне абсолютной устойчивости, более светлым закрашена зона частичной устойчивости.

Полученные границы устойчивости показывают, что максимальные отклонения по первой форме колебаний (21) допустимы значительно большие, чем по второй.

Расчёты проводись и по приближённым уравнениям (14), (15), при этом вдали от границы устойчивости решение совпадало с точным решением, а для больших

значений углов отклонения, порядка $\pi/2$, точность сильно уменьшалась.

Заключение

Таким образом, решена задача динамики двухзвенного маятника Капицы в геометрически нелинейной постановке – для немалых углов наклона звеньев маятника. Для задачи с двумя степенями свободы получена в нулевом асимптотическом приближении система осреднённых уравнений, в которую не входит быстро меняющаяся функция $\sin(t+\beta)$. Качественно определено характерное влияние параметра жёсткости звеньев маятника на устойчивость на всём возможном диапазоне изменения жёсткости. Для фиксированных значений параметров найдены границы устойчивости, абсолютные и частичные, связанные с начальной фазой вибрации основания.

Библиографический список

1. Stephenson A. On induced stability // Phil. Mag. – 1908. – Vol. 15. – P. 233–236.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Бюл. физ. наук. – 1951. – Т. 44(1). – С. 7–20.
3. Капица П.Л. Электроника больших мощностей // Усп. физ. наук. – 1962. – Т. 78(2). – С. 181–265.
4. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 110, № 3. – С. 345–347.
5. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 1. – С. 62–67.
6. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Наука, 1994.
7. Блехман И.И. Вибрационная механика и вибрационная реология. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 752 с.
8. Арнольд В.И. Математическое понимание природы. – М.: МЦНМО, 2022. – 144 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
10. Acheson D.J. A pendulum theorem // Proc. Roy. Soc. London. – 1993. – Ser. A.V. 443. – P. 239–245.
11. Гордин Я.Д., Грибков В.А. О причине рассогласования расчетных и экспериментальных областей устойчивости обращенных стабилизируемых маятников // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 1: Общая и прикладная механика. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 65–68.
12. Грибков В.А., Затоненко Ю.В., Гордин Я.Д. Стабилизация обращенного вертикального положения маятника виброускорением (в форме меандра) оси подвеса маятника // XLVI Академические чтения по космонавтике. – Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. – Москва. – 2022. – Т. 4. – С. 470–473.
13. Acheson D.J., Mullin T. Upside-down pendulums // Nature. – 1993. – Vol. 366. – P. 215–216.
14. Эксперимент по раскачиванию двойного маятника управлением с обратной связью / Я. Аврейцевич, Г. Василевский, Г. Кудра, С.А. Решмин // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2012. – № 2. – С. 10–16.
15. Ананьевский И.М. Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия // ПММ. – 2018. – Т. 82, вып. 2. – С. 149–155.
16. Грибков В.А., Хохлов А.О. Устойчивость тройного инвертированного физического маятника из статьи академика В.Н. Челомея 1983 г. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Машиностроение. – 2015. – № 6. – С. 33–49.
17. Васильков В.Б. Влияние вибрации на нелинейные эффекты в механических системах: дис. … д-ра техн. наук. – СПб, 2008 / ИПМаш. РАН. СПб. – 2009. – 210 с.
18. Vasilkov V.B. Experimental investigation of nonlinear effects in a vibrating rope // Advanced Problems in Mechanics. Proceedings of XXXI Intern. Summer School. – 2004. – St. Petersburg: IPME RAS. – P. 383–387.
19. Li M., Aoyama T., Hasegawa Y. Gait modification for improving walking stability of exoskeleton assisted paraplegic patient. – Robomech J. – 2020. – Vol. 7, no. 21. DOI: 10.1186/s40648-020-00169-y
20. О моделировании пляски проводов воздушных ЛЭП и параметрическом анализе эффективности маятниковых гасителей / И.И. Сергей, А.А. Виноградов, А.Н. Данилин, Н.Н. Курдюмов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 256–265. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.23
21. Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре / Н.Ф. Морозов, А.К. Беляев, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 482, № 2. – С. 155–159. DOI: 10.31857/S086956520003166-5
22. Кулижников Д.Б., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Области притяжения в обобщенной задаче Капицы // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64), вып. 3. – С. 482–492.
23. Classical Kapitsa's problem of stability of an inverted pendulum and some generalizations / A.K. Belyaev, N.F. Morozov, P.E. Tovstik [et al.] // Acta Mechanica. – 2021. – Vol. 232. – P. 1743–1759. DOI: 10.1007/s00707-020-02907-0
24. Сейранян А.А., Сейранян А.П. Задача Челомея о стабилизации статически неустойчивого стержня с помощью вибрации // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 6. – С. 898–903.
25. Belyakov A.O., Seyranian A.P. Stability Boundary Approximation of Periodic Dynamics // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices: Proceedings of the 1st International Nonlinear Dynamics Conference, NODYCON 2019: 1, Rome, 17-20 февраля 2019 года. – Rome, 2020. – P. 13–23. DOI: 10.1007/978-3-030-34713-0_2
26. A microscopic Kapitza pendulum / C.J. Richards, T.J. Smart, P.H. Jones [et al.] // Scientific Reports. – 2018. – Vol. 8, no.13107. DOI: 10.1038/s41598-018-31392-8
27. Guha P., Garai S. Integrable modulation, curl forces and parametric Kapitza equation with trapping and escaping // Nonlinear Dynamics. – 2021. – Vol. 106. – P. 3091–100. DOI: 10.1007/s11071-021-06947-6
28. Thomsen J.J. Special Effects of High-Frequency Excitation. In: Vibrations and Stability. Springer. – 2021. – P. 387–447. DOI: 10.1007/978-3-030-68045-9_7
29. Беляев А.К., Полякова О.Р., Товстик Т.П. Модельная задача устойчивости колебаний перевернутого сжимаемого в продольном направлении маятника на вибрирующем основа-

нии // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2022. – М.: ООО «ТРП», 2022. – Т. 2. – С. 162–167.

30. Belyaev A.K., Polyakova O.R., Tovstik T.P. The Effect of Longitudinal Oscillations Resonance on Stability and Domains of Attraction in the Generalized Kapitsa Problem. Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. – 2023. – Vol 185. – P. 93–100. DOI: 10.1007/978-3-031-18564-9_7

31. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

32. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1958. – 408 с.

References

1. Stephenson A. On induced stability. *Phil. Mag.,* 1908, Vol. 15, pp.233-236.

2. Kapitsa P.L. Maiatnik s vibriruiushchim podvesom [A pendulum with vibrating point of suspension]. *Usp Phys Nauk*, 1951, V. 44, pp.7-20. Collected Papers of P.L. Kapitza, edited by D. Ter Haar, Pergamon, London, 1965. Vol. 2. pp.714-726.

3. Kapitsa P.L. Ėlektronika bol′shikh moshchnosteĭ [High power electronics]. *Usp Phys Nauk*, 1962, V. 78 (2), pp.181-265.

4. Chelomei V.N. O vozmozhnosti povysheniia ustoĭchivosti uprugikh sistem pri pomoshchi vibratsiĭ [On the possibility of increasing the stability of elastic systems using vibrations]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 1956, T. 110. No.3, pp.345-347.

5. Chelomei V.N. Paradoksy v mekhanike, vyzyvaemye vibratsiiami [Mechanical paradoxes caused by vibrations]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 1983, V. 270, No.1, pp.62-67.

6. Blekhman I.I. Vibration mechanics. World Scientific, Singapore, 2000.

7. Blekhman I.I. Vibratsionnaia mekhanika i vibratsionnaia reologiia [Vibration mechanics and vibration rheology] *FIZMATLIT*, Moscow, 2018, 752 p.

8. Arnold V.I. Mathematical understanding of nature. *AMS*, 2014, 168 p.

9. Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanics. Vol. 1 (3rd ed.), *Butterworth-Heinemann,* 1976.

10. Acheson D.J. A pendulum theorem. *Proc. Roy. Soc., London, Ser. A.,* 1993, V. 443, pp.239-245.

11. Gordin Ya.D., Gribkov V.A. [On root causes of mismatch between theoretical and experimental stability domains of inverted regulated pendula]. *XII All-Rusiian Conference of Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Vol. 1: General and Applied Mechanics. RITs BashGU*, Ufa, 2019, pp. 65-68.

12. Gribkov V.A., Zatonenko Iu.V., Gordin Ya.D. Stabilization of the Reversed Vertical Position of the Pendulum by Vibration Acceleration (in the Form of a Meander) of the Pendulum Suspension AXIS. *XLVI Akademicheskie chteniia po kosmonavtike. V. 4. – BAUMANPRESS.* – Moscow. – 2022. – pp. 470-473.

13. Acheson D.J., Mullin T. Upside-down pendulums. *Nature,* 1993, 366, pp.215-216.

14. Awrejcewicz J., Wasilewski G., Kudra G., Reshmin S.A. An experiment with swinging up a double pendulum using feedback control. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 2012. Vol. 51. No.2. pp.176-182.

15. Anan'evskii I.M. The control of a three-link inverted pendulum near the equilibrium point. *Mechanics of Solids.* 2018. Vol. 53. No.S. pp.16-21.

16. Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Ustoĭchivost′ troĭnogo invertirovannogo fizicheskogo maiatnika iz stat′i akademika V.N. Chelomeia 1983 g. [Stability of the triple inverted physical pendulum described in the article of Academician V.N. Chelomey (1983)] *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2015, no. 6, pp. 33–49.

17. Vasilkov V.B. Vliianie vibratsii na nelineĭnye ėffekty v mekhanicheskikh sistemakh. Dis. dokt. tekhn. nauk [Influence of vibration on nonlinear effects in mechanical systems. Doctor dissertation in Technical Sciences] *IPME RAS*, St. Petersburg, 2009, 210 p.

18. Vasilkov V.B. Experimental investigation of nonlinear effects in a vibrating rope // *Advanced Problems in Mechanics. IPME RAS* (Proceedings of XXXI Intern. Summer School Advanced Problems in Mechanics) St. Petersburg, 2004, pp.383-387.

19. Li M., Aoyama T., Hasegawa Y. Gait modification for improving walking stability of exoskeleton assisted paraplegic patient. *Robomech J.,* 2020, Vol. 7, No. 21, doi: 10.1186/s40648-020-00169-y

20. Sergey I.I., Vinogradov A.A., Danilin A.N., Kurdyumov N.N. On modeling of overhead TLC galloping and parametric analysis of pendulum dampers efficiency. PNRPU Mechanics Bulletin, 2018, no. 4, pp. 256-265. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.23

21. Morozov N.F., Belyaev A.K., Tovstik P.E. et al. Stability of a Vertical Rod on a Vibrating Support. *Doklady Physics*, 2018, Vol. 63, No. 9, pp.380-384. doi: 10.1134/S1028335818090069

22. Kulizhnikov D.B., Tovstik P.E., Tovstik T.P. The Basin of Attraction in the Generalized Kapitsa Problem. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. Pleiades Publishing, Ltd.,* 2019, Vol. 52. No. 3, pp. 309-316. doi: 10.1134/S1063454119030129

23. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E. et al. Classical Kapitsa's problem of stability of an inverted pendulum and some generalizations. *Acta Mechanica*, 2021, Vol. 232, pp.1743-1759. doi: 10.1007/s00707-020-02907-0

24. Seyranian A.A., Seyranian A.P. Chelomei's problem of the stabilization of a statically unstable rod by means of a vibration. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 2008, Vol. 72, No.6, pp.649-652.

25. Belyakov A.O., Seyranian A.P. Stability Boundary Approximation of Periodic Dynamics // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices – Proceedings of the 1st International Nonlinear Dynamics Conference, NODYCON 2019 : 1, Rome, 17-20 February 2019. – Rome, 2020. – P. 13-23. – doi: 10.1007/978-3-030-34713-0_2

26. Richards C.J., Smart T.J., Jones P.H. et al. A microscopic Kapitza pendulum. *Scientific Reports,* 2018, Vol. 8, No.13107. https://doi.org/10.1038/s41598-018-31392-8

27. Guha P., Garai S. Integrable modulation, curl forces and parametric Kapitza equation with trapping and escaping. *Nonlinear Dynamics,* 2021, Vol. 106, pp. 3091-3100. https://doi.org/10.1007/s11071-021-06947-6

28. Thomsen J.J. Special Effects of High-Frequency Excitation. In: Vibrations and Stability, *Springer,* 2021, pp.387-447. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68045-9_7

29. Belyaev A.K., Polyakova O.R., Tovstik T.P. Modelnaia zadacha ustoichivosti kolebaniĭ perevernutogo szhimaemogo v prodol′nom napravlenii maiatnika na vibriruiushchem osnovanii [Model problem of stability of oscillations of an inverted longitudinally compressible pendulum on a vibrating base].

Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsiĭ i sploshnykh sred [Dynamic and technological problems of structural and continuous mechanics]. (Proceedings of the XXVIII International Symposium named after A.G. Gorshkov), 2022, Moscow, T.2, pp.162-167.

30. Belyaev A.K., Polyakova O.R., Tovstik T.P. The Effect of Longitudinal Oscillations Resonance on Stability and Domains of Attraction in the Generalized Kapitsa Problem. *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep*. 2023, vol 185, pp. 93-100. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_7

31. Abramovits M., Stigan I. (eds.) Handbook of mathematical functions. *National Bureau of Standards. Applied mathematics series*, 1964, Vol. 55.

32. Bogoliubov N.N., Mitropolski Y.A. Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations, *New York: Gordon and Breach,* 1961.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта №С-26/1025.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was supported financially by the Government of the Perm Territory within the framework of scientific project No. C-26/1025.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.