Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинчук В.В. Особенности распространения SH-волн в двухслойной структуре из неоднородных пьезоэлектрического и диэлектрического слоев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 2. С. 98–109. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.09

Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. Peculiarities of SH Wave Propagation in a Two-Layer Structure of Inhomogeneous Piezoelectric and Dielectric Layers. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 2, pp. 98-109. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.09

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.09
УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ SH-ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЕВ

Т.И. Белянкова[1], Е.И. Ворович[2], В.В. Калинчук[1]

[1]Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия
[2]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 ноября 2022 г.
Одобрена: 10 марта 2023 г.
Принята к публикации: 30 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

функционально градиентный пьезоэлектрический материал, функционально градиентный диэлектрический материал, пьезоэлектрический слой, диэлектрический слой, локализация неоднородности, область перехода материалов, включение, сдвиговые горизонтально-поляризованные волны, поверхностные акустические волны.

АННОТАЦИЯ

Предложен подход к моделированию динамических процессов в полубесконечной составной пластине из неоднородных пьезоэлектрического и диэлектрического слоев. При моделировании неоднородности слоев использована двухкомпонентная модель с функционально градиентным изменением свойств, в которой физические параметры основного материала непрерывным образом меняются по толщине до параметров включения. Материал пьезоэлектрического слоя представляет собой сочетание пьезокерамик на основе PZT, обладающих значительным различием скоростных характеристик. Реализована возможность локализации неоднородности как у внешней поверхности пластины, так и в середине слоя или у границы раздела. Диэлектрический слой выполнен из SiO_2, неоднородность диэлектрического слоя моделирует взаимопроникновение пьезоэлектрика и диэлектрика в узкой переходной области у границы раздела. В качестве параметров материала включения рассматривались упругие и диэлектрические модули пьезоэлектрического материала, расположенного у границы раздела. Внешние поверхности составной пластины свободны от механических напряжений и электрически закорочены. Рассмотрена задача о распространении поверхностных SH-волн в составной структуре из функционально градиентных пьезо- и диэлектрического слоев, инициированных действием бесконечно удаленного источника гармонических колебаний. Решение строится в пространстве образов Фурье, сведением к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которое в свою очередь строится с использованием метода Рунге – Кутты – Мерсона. Приведено дисперсионное уравнение задачи, анализ которого позволил исследовать влияние характера, величины области перехода материалов и локализации неоднородности структуры на особенности поведения фазовых скоростей ПАВ для широкого диапазона частот. Полученные результаты приведены в безразмерных параметрах и могут представлять особый интерес при разработке, проектировании и оптимизации новых материалов для микро- и наноразмерных приборов и устройств на SH ПАВ с высокими эксплуатационными характеристиками.

© ПНИПУ

© **Белянкова Татьяна Ивановна** – к.ф.-м.н., доц., в.н.с., e-mail: tbelen415@mail.ru.
Ворович Елена Иосифовна – к.ф.-м.н., доц.
Калинчук Валерий Владимирович – д.ф.-м.н., член-корр. РАН, г.н.с., e-mail: kalin@ssc-ras.ru.

Tatyana I. Belyankova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: tbelen415@mail.ru.
Elena I. Vorovich – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor.
Valery V. Kalinchuk – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, e-mail: kalin@ssc-ras.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

PECULIARITIES OF SH WAVE PROPAGATION IN A TWO-LAYER STRUCTURE OF INHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC AND DIELECTRIC LAYERS

T.I. Belyankova[1], E.I. Vorovich[2], V.V. Kalinchuk[1]

[1]Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 November 2022
Approved: 10 March 2023
Accepted for publication:
30 April 2023

Keywords:

functionally gradient piezoelectric material, functionally gradient dielectric material, piezoelectric layer, dielectric layer, localization of inhomogeneity, transition region of materials, inclusion, shear-horizontally polarized waves, surface acoustic waves.

ABSTRACT

An approach to modeling dynamic processes in a semi-infinite composite plate of inhomogeneous piezoelectric and dielectric layers is proposed. When modeling the inhomogeneity of the layers, a two-component model with a functionally gradient change in properties was used, in which the physical parameters of the base material continuously change along the thickness up to the inclusion parameters. The material of the piezoelectric layer is a combination of PZT-based piezoceramics with a significant difference in speed characteristics. The possibility of localizing the inhomogeneity both at the outer surface of the plate, and in the middle of the layer or at the interface has been implemented. The dielectric layer is made of SiO2, the inhomogeneity of the dielectric layer models the interpenetration of the piezoelectric and the dielectric in a narrow transition region near the interface. The elastic and dielectric moduli of the piezoelectric material located near the interface were considered as parameters of the inclusion material. The outer surfaces of the composite plate are stress-free and electrically short-circuited. The problem of the propagation of surface SH-waves in a composite structure of functionally gradient piezo- and dielectric layers initiated by the action of an infinitely distant source of harmonic oscillations is considered. The solution is constructed in the space of Fourier images by reducing to the solution of a system of ordinary differential equations with variable coefficients, which in turn is constructed using the Runge – Kutta – Merson method. The dispersion equation of the problem is presented, the analysis of which made it possible to investigate the influence of the nature, size of the transition region of materials and localization of structural inhomogeneity on the behavior of SAW phase velocities for a wide frequency range. The results obtained are given in dimensionless parameters and may be of particular interest in the development, design and optimization of new materials for micro- and nanoscale devices and devices based on SH SAW with high performance characteristics.

© PNRPU

Введение

Развитие современных технологий получения искусственных пьезоэлектрических материалов и тонкопленочных гетероструктур с широким спектром физических свойств и уникальными качествами позволяет использовать их при создании приборов и устройств различного назначения. Широко применяемые различные микроэлектромеханические системы (МЭМС), сенсорные устройства, прецизионные датчики, фильтры, ультразвуковые преобразователи, генераторы, устройства передачи и преобразования энергии и т.п. невозможно представить без использования современных функционально ориентированных сегнетоэлектрических материалов. Использование многослойных пьезоэлектрических структур приводит к ряду сложных проблем, связанных как с численной реализацией, так и с изменением физических свойств пьезоэлектрических слоев в окрестности границы раздела, и, как следствие, к изменению характера и скорости распространения поверхностных волн. Динамика многослойных систем долгое время была наиболее изучаемой темой в таких областях науки, как математическая физика, механика сплошных сред, физическая акустика, акустоэлектроника, сейсмоакустика и т.д. [1–8]. Более полный список работ, посвященных исследованиям распространения поверхностных волн в слоистых анизотропных пьезоэлектрических пластинах, приведен в обзорах [9; 10]. Учет непрерывной неоднородности изменения свойств материалов структуры приводит к невозможности получения аналитических решений. Однако использование компромиссных упрощений для некоторых достаточно простых функций, описывающих изменение свойств, позволило построить аналитическое решение краевых задач. В работах [11; 12] разработана теория для описания распространения упругих волн в произвольно слоистой пластине с непрерывным и кусочно-непрерывным изменением свойств. Формализм основан на использовании матрицы переноса (пропагатора). Краевые задачи для пластины со свободными, зажатыми или свободными/зажатыми гранями формулируются в терминах матриц переноса и импеданса и сводятся к реальным дисперсионным уравнениям, которые анализируются как в общих чертах, так и приближенно, в длинноволновых и коротковолновых пределах. Сформулированы теоремы о положении и монотонности ветвей дисперсионных кривых для различных краевых задач слоисто-неоднородной пластины. Сформулировано предположение о возникающем из-за анизотропии отталкивании ветвей дисперсионных кривых, приводящее

к формированию террасирующих узоров в спектрах, в том числе для SH-волн неоднородных пластин. В работе [13] разработана математическая модель для анализа как волн Лява, так и SH-волн, распространяющихся в стратифицированных средах с моноклинной симметрией. Рассмотрены пластины с различными типами граничных условий, наложенных на внешние поверхности. Представлены аналитические и численные решения для волн SH и Лява, полученные с применением метода модифицированной матрицы переноса и специального сложного формализма.

При исследовании распространения SH-волн в пьезоэлектрической пластине из функционально градиентного пьезоэлектрического материала достаточно часто применяют различного рода численные подходы. В [14] с использованием метода степенных рядов исследовано распространение SH-волн в пьезоэлектрической пластине с электрически свободными и закороченными условиями на поверхностях. На примере первых трех мод изучена чувствительность дисперсии и структуры SH-волны и коэффициента электромеханической связи к изменению свойств пьезоэлектрической пластины. В [15] гибридный численный метод, предложенный авторами для анализа распространения волн в анизотропных слоистых пластинах, расширен для пластин из функционально градиентного пьезоэлектрического материала. Рассмотрено квадратичное изменение свойств по толщине пластины, исследовано влияние коэффициентов градиентности изменения модулей материала на дисперсионные свойства пластины. В [16] при решении краевых задач с электрически открытыми и закороченными условиями использованы функции Эри. Показано, что изменение градиента материальных коэффициентов может заметно влиять на дисперсионные характеристики SH-волн в условиях электрического замыкания.

Значительный интерес представляют исследования особенностей поведения SH-волн в составных пластинах [17–20]. В [17] полагалось, что оба слоя поперечно изотропны и идеально скреплены вдоль границы раздела, верхняя и нижняя поверхности пластины механически свободны, электрически открыты и магнитно закрыты. Рассмотрены случаи различных сочетаний скоростных характеристик слоев. Показано, что фазовая скорость для различных режимов с ростом волнового числа приближается к меньшей объемной скорости сдвиговой волны материала в системе. Исследовано влияние на фазовые и групповые скорости SH-волн [18] соотношения толщин и свойств материалов слоев. В работе [19] пьезоэлектрические эффекты моделируются в структуре из пьезоэлектрической пластины, сцепленной с металлической. Исследованы дисперсионные характеристики структуры для различных металлических материалов, распределение электрического потенциала пьезоэлектрического слоя при различных волновых числах. В работе [20] аналитически исследуется распространение SH-волн в составной пластине, состоящей из пьезоэлектрического и диэлектрического слоя SiO_2. Показано влияние свойств пьезоэлектрического слоя и соотношения толщин на фазовые и групповые скорости при открытых и закороченных внешних поверхностях пластины.

В настоящей работе предложен подход к моделированию динамики составной полубесконечной пластины, состоящей из неоднородного пьезоэлектрического и неоднородного диэлектрического слоев. При моделировании неоднородности слоев использована предложенная в [21–23] двухкомпонентная модель с функционально градиентным изменением свойств, в которой физические параметры основного материала непрерывным образом меняются по толщине до параметров включения. Полагалось, что неоднородность пьезоэлектрического слоя может быть локализована у внешней поверхности пластины, в середине слоя или у границы раздела. Наличие неоднородности диэлектрического слоя моделирует взаимопроникновение пьезоэлектрика и диэлектрика в узкой переходной области у границы раздела. Полагалось, что поверхности структуры свободны от механических напряжений и электрически закорочены. На примере задачи о распространении поверхностных SH-волн от бесконечно удаленного источника гармонических колебаний исследованы особенности поведения фазовых скоростей поверхностных акустических волн неоднородной составной пластины на основе PZT/SiO_2 для широкого диапазона частот в зависимости от характера и локализации неоднородности структуры.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о распространении сдвиговых горизонтально-поляризованных (SH) поверхностных акустических волн (ПАВ) в сегнетоэлектрической гетероструктуре, состоящей из пьезоэлектрического слоя (ПС), выполненного из функционально градиентного пьезоэлектрического материала (ФГПМ) ($0 < x_2 < H_1, |x_1|, |x_3| \le \infty$), и диэлектрического слоя (ДС) из функционально градиентного материала (ФГМ) ($H_2 < x_2 < 0, |x_1|, |x_3| \le \infty$) (рис. 1).

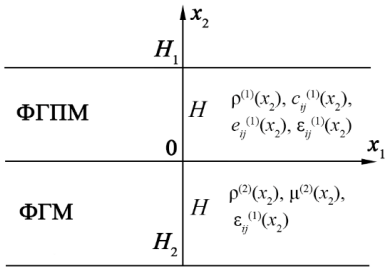


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Поверхности структуры предполагаются свободными от механических напряжений, свойства материалов описываются функциями:

$$\rho^{(1)}=\rho_0^{(1)}f_\rho^{(1)}(x_2),\ c_{ij}^{(1)}=c_{ij}^{0(1)}f_c^{(1)}(x_2),$$
$$e_{ij}^{(1)}=e_{ij}^{0(1)}f_e^{(1)}(x_2),\ \varepsilon_{ij}^{(1)}=\varepsilon_{ij}^{0(1)}f_\varepsilon^{(1)}(x_2), \quad (1.1)$$
$$\rho^{(2)}=\rho_0^{(2)}f_\rho^{(2)}(x_2),\mu^{(2)}=\mu_0^{(2)}f_\mu^{(2)}(x_2),\ \varepsilon_{ij}^{(2)}=\varepsilon_{ij}^{0(2)}f_\varepsilon^{(2)}(x_2),$$

где $\rho_0^{(1)},c_{ij}^{0(1)},e_{ij}^{0(1)},\varepsilon_{ij}^{0(1)}$ – соответственно плотность и компоненты тензоров упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей основного (или опорного материала, относительно параметров которого задается изменение свойств) пьезоэлектрического материала класса 6mm с осью симметрии, направленной вдоль оси x_3. $\rho_0^{(2)},\mu_0^{(2)},\varepsilon_{ij}^{0(2)}$ – плотность, модуль сдвига и компоненты тензора диэлектрических модулей основного диэлектрического материала.

Полагаем, что колебания в структуре вызваны действием удаленного источника, рассматривается установившийся режим гармонических колебаний, смещения удовлетворяют условиям:

$$u_1^{(n)}=0,u_2^{(n)}=0,\partial/\partial x_3=0,u_k^{(n)}=u_k^{(n)}(x_1,x_2),\ k=3,4, \quad (1.2)$$

здесь верхний индекс n = 1 и 2 отвечает номеру составляющей среды, ПС и ДС соответственно. Ниже использованы безразмерные параметры [21–23]: $l'=l/H$, $\rho'^{(n)}=\rho^{(n)}/\rho_0^{(2)}$, $c_{ij}'^{(n)}=c_{ij}^{(n)}/\mu_0^{(2)}$, $e_{ij}'^{(1)}=e_{ij}^{(1)}\xi/\mu_0^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}'^{(n)}=\varepsilon_{ij}^{(n)}\varepsilon^{(0)}\xi^2/\mu_0^{(2)}$, $\varphi'^{(n)}=\varphi^{(n)}/(\xi H)$, $\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\xi=10^{10}$ В/м, $\kappa_2=\omega H/V_S^{(2)}$ – безразмерная частота, $V_S^{(2)}=\sqrt{\mu_0^{(2)}/\rho_0^{(2)}}$ – скорость объемной сдвиговой волны основного материала ДС. Далее штрихи и временной множитель опущены.

Задача о движении составной преднапряженной электроупругой среды описывается уравнениями [1–8]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta}^{(n)}=\rho^{(n)}\ddot{\mathbf{u}}^{\mathbf{e}(n)},\ \nabla\cdot\mathbf{d}^{(n)}=0,\ n=1,2. \quad (1.3)$$

С граничными условиями:

– на поверхностях:

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{(1)}\big|_{x_2=H_1}=0,\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{(2)}\big|_{x_2=H_2}=0, \quad (1.4)$$

$$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=H_1}=0,\varphi^{(2)}\big|_{x_2=H_2}=0; \quad (1.5)$$

– на границе раздела:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{e}(1)}\big|_{x_2=0}=\mathbf{u}^{\mathbf{e}(2)}\big|_{x_2=0},\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{(1)}\big|_{x_2=0}=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{(2)}\big|_{x_2=0},$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}^{(1)}\big|_{x_2=0}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}^{(2)}\big|_{x_2=0}. \quad (1.6)$$

В представлениях (1.3)–(1.6) использованы обозначения: ∇ – оператор Гамильтона, $\mathbf{u}^{\mathbf{e}(n)}=\{u_3^{(n)},u_4^{(n)}=\varphi^{(n)}\}$ – расширенный вектор перемещений, $\varphi^{(n)}$ – электрический потенциал, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности структуры, $\rho^{(n)}$ – плотность материала n-й составляющей структуры. Компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\Theta}^{(n)}$ и вектора индукции $\mathbf{d}^{(n)}$ представляются в виде [1–8] ($k,l,s,p=1,2,3$, $n=1,2$):

$$\Theta_{lk}^{(n)}=c_{lksp}^{(n)}u_{s,p}^{(n)}+e_{lkp}^{(n)}\varphi_{,p}^{(n)},\ d_l^{(n)}=e_{lsp}^{(n)}u_{s,p}^{(n)}-\varepsilon_{lp}^{(n)}\varphi_{,p}^{(n)}. \quad (1.7)$$

С учетом (1.2) отличные от нуля компоненты тензора напряжений и вектора индукции имеют вид:

– для пьезоэлектрического слоя

$$\Theta_{k3}^{(1)}=c_{44}^{(1)}\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial u_4^{(1)}}{\partial x_k},\ d_k^{(1)}=e_{15}^{(1)}\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k}-\varepsilon_{11}^{(1)}\frac{\partial u_4^{(1)}}{\partial x_k}; \quad (1.8)$$

– для диэлектрического слоя

$$\Theta_{k3}^{(2)}=\mu^{(2)}\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_k},\ d_k^{(2)}=-\varepsilon_{11}^{(2)}\frac{\partial u_4^{(2)}}{\partial x_k}. \quad (1.9)$$

В (1.8), (1.9) использованы свойства пьезоэлектрического материала с классом симметрии 6 mm:

$$c_{1111}^{(1)}=c_{2222}^{(1)}=c_{11}^{(1)},\ c_{3333}^{(1)}=c_{33}^{(1)},\ c_{1122}^{(1)}=c_{2211}^{(1)}=c_{12}^{(1)},$$
$$c_{1133}^{(1)}=c_{3311}^{(1)}=c_{2233}^{(1)}=c_{3322}^{(1)}=c_{13}^{(1)},$$
$$c_{2323}^{(1)}=c_{2332}^{(1)}=c_{3223}^{(1)}=c_{3232}^{(1)}=c_{3113}^{(1)}=c_{3131}^{(1)}=c_{1313}^{(1)}=c_{1331}^{(1)}=c_{44}^{(1)},$$
$$c_{1212}^{(1)}=c_{1221}^{(1)}=c_{2112}^{(1)}=c_{2121}^{(1)}=0.5\left(c_{11}^{(1)}-c_{22}^{(1)}\right),$$
$$e_{131}^{(1)}=e_{311}^{(1)}=e_{113}^{(1)}=e_{15}^{(1)},\ e_{232}^{(1)}=e_{322}^{(1)}=e_{223}^{(1)}=e_{15}^{(1)},$$
$$e_{113}^{(1)}=e_{223}^{(1)}=e_{311}^{(1)}=e_{322}^{(1)}=e_{31}^{(1)},$$
$$e_{333}^{(1)}=e_{33}^{(1)},\ \varepsilon_{11}^{(1)}=\varepsilon_{22}^{(1)}.$$

и диэлектрического материала:

$$c_{1111}^{(2)}=c_{2222}^{(2)}=c_{3333}^{(2)}=\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)},$$
$$c_{1122}^{(2)}=c_{2211}^{(2)}=c_{2233}^{(2)}=c_{3322}^{(2)}=c_{1133}^{(2)}=c_{3311}^{(2)}=\lambda^{(2)},$$
$$c_{2323}^{(2)}=c_{2332}^{(2)}=c_{3223}^{(2)}=c_{3232}^{(2)}=c_{3113}^{(2)}=c_{3131}^{(2)}=c_{1313}^{(2)}=c_{1331}^{(2)}=\mu^{(2)},$$
$$c_{1212}^{(2)}=c_{1221}^{(2)}=c_{2112}^{(2)}=c_{2121}^{(2)}=\mu^{(2)},$$
$$\varepsilon_{11}^{(2)}=\varepsilon_{22}^{(2)}=\varepsilon_{33}^{(2)}=\varepsilon^{(2)},$$

С учетом (1.1), (1.2), представлений (1.7)–(1.9) краевая задача (1.3)–(1.6) принимает вид:

– для неоднородного пьезоэлектрического слоя:

$$\sum_{k=1}^{2}\left[c_{44}^{(1)}u_{3,kk}^{(1)}+e_{15}^{(1)}u_{4,kk}^{(1)}\right]+c_{44,2}^{(1)}u_{3,2}^{(1)}+e_{15,2}^{(1)}u_{4,2}^{(1)}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2u_3^{(1)}}{\partial t^2},$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[e_{15}^{(1)}u_{3,kk}^{(1)}-\varepsilon_{11}^{(1)}u_{4,kk}^{(1)}\right]+e_{15,2}^{(1)}u_{3,2}^{(1)}-\varepsilon_{11,2}^{(1)}u_{4,2}^{(1)}=0; \quad (1.10)$$

– для неоднородного диэлектрического слоя

$$\sum_{k=1}^{2}\mu^{(2)}u_{3,kk}^{(2)}+\mu_{,2}^{(2)}u_{3,2}^{(2)}=\rho^{(2)}\frac{\partial^2u_3^{(2)}}{\partial t^2},$$
$$-\sum_{k=1}^{2}\varepsilon^{(2)}u_{4,kk}^{(2)}-\varepsilon_{11,2}^{(2)}u_{4,2}^{(2)}=0. \quad (1.11)$$

Граничные условия на поверхностях

$$x_2=H_1:\Theta_{23}^{(1)}=c_{44}^{(1)}u_{3,2}^{(1)}+e_{15}^{(1)}u_{4,2}^{(1)}=0,\ u_4^{(1)}=0,$$
$$x_2=H_2:\Theta_{23}^{(2)}=\mu^{(2)}u_{3,2}^{(2)}=0,\ u_4^{(2)}=0, \quad (1.12)$$

на границе раздела:

$$x_2 = 0: \Theta_{23}^{(1)} = \Theta_{23}^{(2)},$$
$$d_2^{(1)} = d_2^{(2)} = e_{15}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} u_{4,2}^{(1)} = -\varepsilon_{11}^{(2)} u_{4,2}^{(2)}, \qquad (1.13)$$
$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)},\ u_4^{(1)} = u_4^{(2)}.$$

2. Решение задачи

Решение задачи (1.10)–(1.13) строится в пространстве образов Фурье (α – параметр преобразования по координате x_1):

$$U_p^{(1)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{4} c_k^{(1)} y_{sk}^{(1)}(\alpha, x_2),\ U_p^{(2)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{4} c_k^{(2)} y_{sk}^{(2)}(\alpha, x_2),$$
$$p = 3,4,\ s = 3,4\ . \qquad (2.1)$$

Функции $y_{sk}^{(n)}(\alpha, x_2), n = 1,2$ в представлении (2.1) являются линейно независимыми решениями задач Коши с начальными условиями $y_{sk}^{(n)}(\alpha, 0) = \delta_{sk}$ для уравнений

$$\mathbf{Y}^{(n)\prime} = \mathbf{R}^{(n)}(\alpha, x_2)\mathbf{Y}^{(n)}, \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\Sigma}}^n \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^n \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\Sigma}}^n = \left\{\Theta_{23}^{F(n)}, D_2^{F(n)}\right\}^T,\ \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^n = \left\{U_3^{(n)}, U_4^{(n)}\right\}^T. \qquad (2.3)$$

Здесь $\Theta_{23}^{F(n)}, D_2^{F(n)}, U_k^{(n)}$ – трансформанты Фурье компонент тензора напряжений, вектора индукции (1.8), (1.9) и расширенного вектора смещений; δ_{kp} – символ Кронекера. Матрицы $\mathbf{R}^{(n)}(\alpha, x_2)$ имеют вид:

$$\mathbf{R}^{(1)}(\alpha, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{44}^{(1)}\alpha^2 - \rho^{(1)}\kappa_2^2 & e_{15}^{(1)}\alpha^2 \\ 0 & 0 & e_{15}^{(1)}\alpha^2 & -\varepsilon_{11}^{(1)}\alpha^2 \\ \varepsilon_{11}^{(1)}/g_0 & e_{15}^{(1)}/g_0 & 0 & 0 \\ e_{15}^{(1)}/g_0 & -c_{44}^{(1)}/g_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{R}^{(2)}(\alpha, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu^{(2)}\alpha^2 - \rho^{(2)}\kappa_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{11}^{(2)}\alpha^2 \\ 1/\mu^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\varepsilon_{11}^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.. \qquad (2.5)$$

Здесь $g_0 = c_{44}^{(1)}\varepsilon_{11}^{(1)} + \left(e_{15}^{(1)}\right)^2$.

Уравнения (2.2) в обозначениях (2.3)–(2.5) представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами, линейно независимые решения которых строятся на основе численного решения набора задач Коши с начальными условиями при фиксированных значениях параметра α. Для решения систем ОДУ могут быть использованы различные численные методы [24–27], в работе использован метод Рунге – Кутта – Мерсона, с помощью которого для ПС восстанавливаются значения $y_{sk}^{(1)}(\alpha, x_2)$ от 0 до H_1, для ДС значения $y_{sk}^{(2)}(\alpha, x_2)$ восстанавливаются от 0 до H_2.

Подставляя решения (2.1) в граничные условия для вычисления неизвестных коэффициентов $c_k^{(n)}$, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} & y_{13}^{(1)} & y_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{41}^{(1)} & y_{42}^{(1)} & y_{43}^{(1)} & y_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{11}^{(2)} & y_{12}^{(2)} & y_{13}^{(2)} & y_{14}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{41}^{(2)} & y_{42}^{(2)} & y_{43}^{(2)} & y_{44}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

нетривиальное решение которой возможно при условии

$$\det \mathbf{A} = 0. \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.7) с матрицей (2.6) является дисперсионным уравнением задачи, определяющим основные характеристики волнового процесса в неоднородной структуре.

3. Численный анализ

В качестве модели неоднородного ПС использованы пьезоэлектрические структуры, выполненные из двух различных видов пьезокерамики на основе PZT (таблица) [21; 22]. Материалы m_1, m_2 и m_{31} представляют собой керамику PZT-5, PZT DL-61HD и PZT DL-40 соответственно, m_3 – гипотетический материал. При выборе материалов включений учитывалось незначительное расхождение значений упругих модулей и существенный разброс пьезоэлектрических и диэлектрических свойств. В качестве опорного материала ДС использован SiO_2 (m_4, см. таблицу).

Параметры материалов

Material parameters

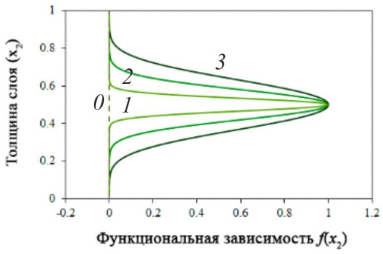
Параметр	$\rho\cdot10^3$ kg·m^{-3}	$c_{44}\cdot10^{11}$ n·m^{-2}	e_{15} C·m^{-2}	$\varepsilon_{11}/\varepsilon^{(0)}$	V_S^m, m·s^{-1}	V_{Se}^m, m·s^{-1}
m_1	7.75	0.211	12.3	916	1650	2265
m_2	8.20	0.390	33.1	2810	2181	3182
m_3	8.15	0.161	5.15	912	1406	1542
m_{31}	7.70	0.230	6.20	290	1728	2221
m_4	2.20	0.312	–	4.135	3766	–
m_{41}	6.70	0.230	–	290	1853	–

Неоднородность диэлектрического слоя моделировала переход от пьезоэлектрика к диэлектрику в узкой области у границы раздела, при этом учитывались плотность, упругие и диэлектрические модули пьезоэлектрического материала. В переходной области использованы параметры материала m_1 или m_{41} с упругими и диэлектрическими модулями, равными m_{31}, но меньшей плотностью.

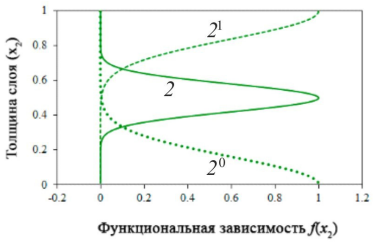
Следуя [21–23], участвующие в (1.1) функции $f_{s_n}^{(n)}, s_1 = \rho, c, e, \varepsilon, s_2 = \rho, \mu, \varepsilon$ представим в виде:

$$f_{s_n}^{(n)} = g_{s_n}^1 + g_{s_n}^2 f\left(x_2\right). \qquad (3.1)$$

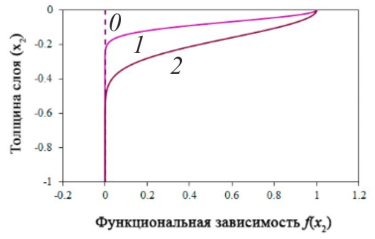
Параметры $g_{s_n}^1, g_{s_n}^2$ – определены значениями модулей основного материала и материалов включений; $f\left(x_2\right)$ – определяет характер изменения параметров по толщине слоя, локализацию включения и размер зоны перехода одного материала в другой. На рис. 2, *a*, *b*, представлены функциональные зависимости, определяющие величину зоны перехода основного материала к материалу включения и его локализацию по толщине ПС.



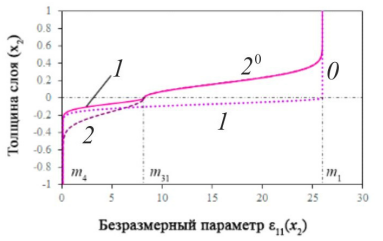
a



b



c



d

Рис. 2. Графики функциональных зависимостей изменения свойств пьезоэлектрического (*a*, *b*) и диэлектрического (*c*) слоев; *d* – изменение безразмерного диэлектрического модуля по толщине структуры

Fig. 2. Graphs of functional dependences of changes in the properties of piezoelectric (*a*, *b*) and dielectric (*c*) layers; *d* – the change of the dimensionless dielectric module in the thickness of the structure

Цифрой «0» на рис. 2, *a*, отмечен случай однородного ПС. На рис. 2, *b*, верхними индексами «1» (штриховые линии) и «0» (пунктирные линии) отмечены графики с локализацией включения у поверхности пьезоэлектрического слоя и у границы раздела, цифрами без индекса (сплошные линии) отмечены графики с локализацией включения в середине слоя. На рис. 2, *c*, приведены зависимости изменения параметров ДС по толщине в однородном случае (кривые *0*) и неоднородном случае с локализацией включения у границы раздела с меньшей (кривые *1*) и большей (кривые *2*) областью перехода материалов. На рис. 2, *d*, показано изменение безразмерного параметра $\varepsilon_{11}\left(x_2\right)$ по толщине структуры для случаев однородного ПС из m_1 на неоднородном диэлектрическом слое из m_1/m_4 (пунктирная линия) и неоднородного ПС из m_1/m_{31} с локализацией включения у границы раздела на неоднородном ДС из m_{41}/m_4 с узкой (сплошная линия) и более широкой (штриховая линия) областью перехода материалов. Цифрами на рис. 2, *d*, отмечены части кривых, соответствующие изменениям в пьезоэлектрическом (рис. 2, *a*, *b*) и диэлектрическом (рис. 2, *c*) слоях.

Как следует из графиков, свойства неоднородной среды определяются как характером изменения параметров материала, величиной и расположением неоднородности ($f\left(x_2\right)$), так и соотношением параметров основного материала или материалов структуры с параметрами материалов включений ($g_{s_n}^1, g_{s_n}^2$, (3.1)) как в пьезоэлектрическом, так и диэлектрическом слое.

3.1. Влияние размера области перехода материалов в неоднородном пьезоэлектрическом слое

Рассмотрен случай неоднородного пьезоэлектрического слоя из m_1/m_2 и m_1/m_3 на однородном диэлектрическом слое m_4. На рис. 3 представлено поведение относительных фазовых скоростей сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных акустических волн (SH–ПАВ) $V_F / V_S^{(2)}$ (где $V_F = \kappa_2 / \xi$, ξ – корни дисперсионного уравнения (2.7)) в случае неоднородного ПС из m_1/m_2 (рис. 3, *a*, *c*, *e*) и m_1/m_3 (рис. 3, *b*, *d*, *f*) на однородном диэлектрическом слое. Штрихпунктирные, сплошные, штриховые и пунктирные линии с цифрами соответствуют зависимостям *0*, *1*, *2*, *3* рис. 2, *a*. Неоднородность локализована в середине пьезоэлектрического слоя.

Из анализа рис. 3, *a*, *c*, *e*, видно, что наличие высокоскоростного включения в ПС приводит к сдвигу частот выхода поверхностных волн при увеличении области перехода материалов в область более высоких значений, что особенно заметно в высокочастотном диапазоне (рис. 3, *a*). Увеличение зоны перехода приводит к увеличению фазовых скоростей SH-ПАВ, в случае первых мод (рис. 3, *c*) изменения скорости локализованы в области низких и средних частот, увеличение зоны перехода расширяет эту частотную область, меняется

характер поведения скорости. Наличие низкоскоростного включения в ПС (рис. 3, *b*, *d*, *f*) приводит к обратному результату: частоты выхода поверхностных волн сдвигаются в область более низких значений, с увеличением зоны перехода материалов значения скоростей SH-ПАВ уменьшаются, в случае первых мод увеличение зоны перехода приводит к уменьшению скорости во всем частотном диапазоне. Следует отметить, что независимо от характера включения начиная с 4-й моды для поведения скоростей SH-ПАВ характерно наличие террасных участков [1–3;11–13] в окрестности $V_S^{(2)}$ (рис. 3, *a*, *b*, *e*, *f*).

Для большей наглядности на рис. 4 показано характерное поведение скоростей SH-ПАВ составной пластины из неоднородного ПС и однородного ДС. На рис. 4, *a*, *c*, *e*, приведены фазовые скорости в случае ПС с высокоскоростным включением (m_2), на рис. 4, *b*, *d*, *f* – скорости в случае ПС с низкоскоростным включением (m_3). Области перехода материалов на рисунках (*a*, *b*), (*c*, *d*) и (*e*, *f*) соответствуют кривым *1*, *2* и *3* рис. 2, *a*. Включение расположено в середине ПС. Частотами κ_n^0 отмечены критические точки пересечения кривых скоростей SH-ПАВ с $V_S^{(2)}$.

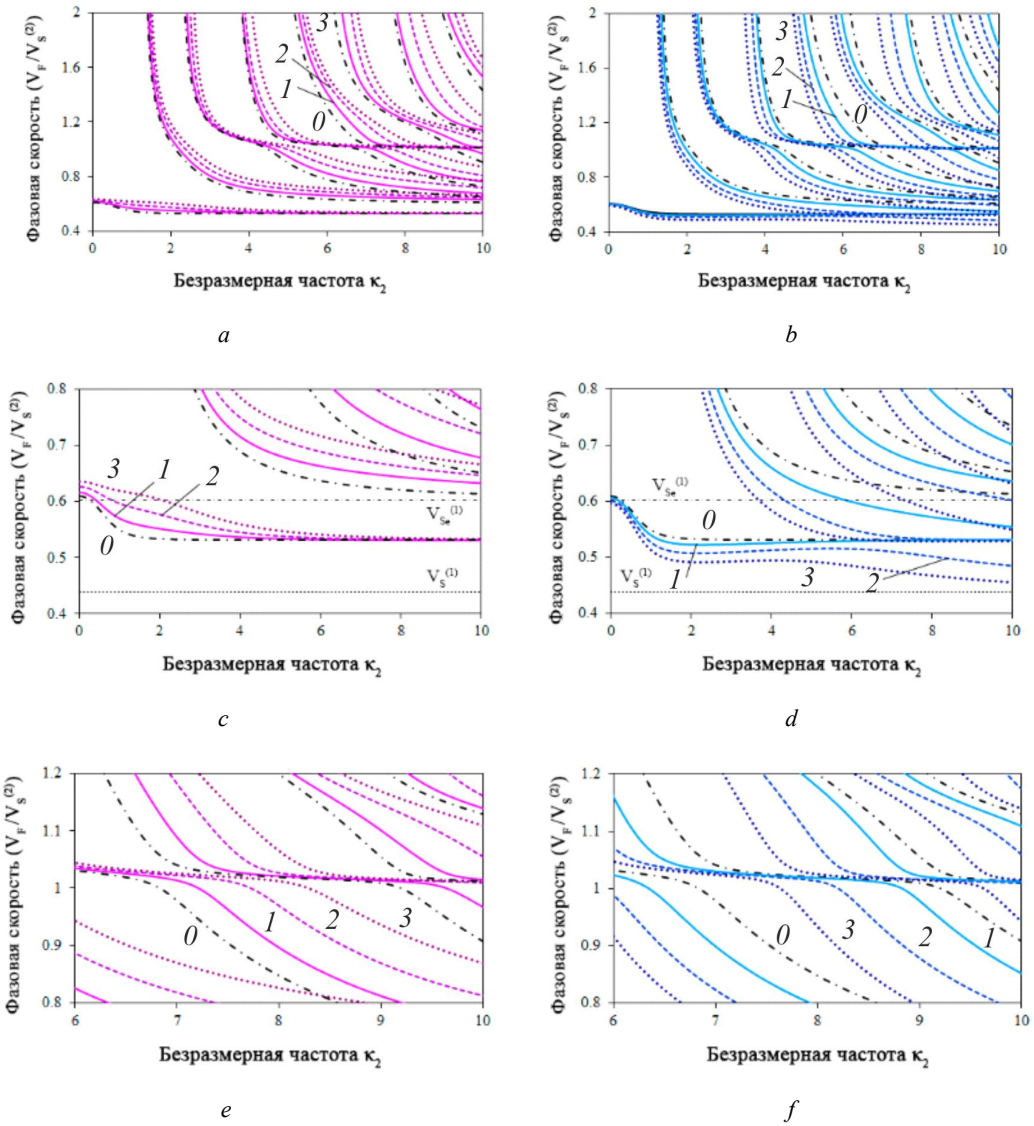


Рис. 3. Влияние величины области перехода материалов неоднородного пьезоэлектрического слоя из m_1/m_2 (*a*, *c*, *e*) и из m_1/m_3 (*b*, *d*, *f*) на фазовые скорости ПАВ. Неоднородность локализована в середине слоя; *c*, *e* – фрагменты *a*; *d*, *f* – фрагменты *b*

Fig. 3. Influence of the size of the transition region of materials of an inhomogeneous piezoelectric layer from m_1/m_2 (*a*, *c*, *e*) and from m_1/m_3 (*b*, *d*, *f*) on the phase velocities of SAW. The heterogeneity is localized in the middle of the layer; *c*, *e* – fragments *a*; *d*, *f* – fragments *b*

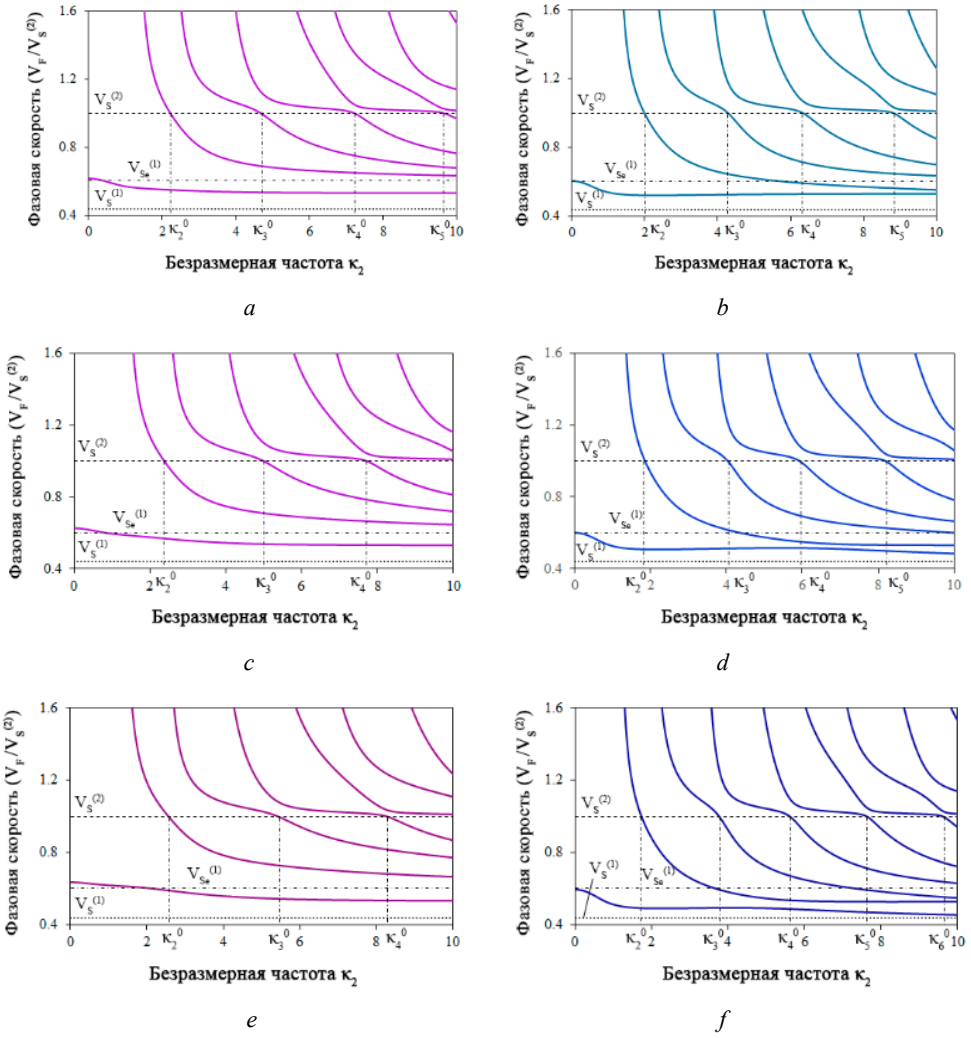


Рис. 4. Особенности поведения фазовых скоростей ПАВ для структуры с высокоскоростным (*a*, *c*, *e*) и низкоскоростным (*b*, *d*, *f*) включениями в пьезоэлектрическом слое. Области перехода материалов на *a*, *b*; *c*, *d*; *e*, *f* соответствуют зависимостям *1*, *2*, *3* рис. 2, *a*. Неоднородность локализована в середине слоя

Fig. 4. Features of the behavior of phase velocities of SAW for a structure with high- velocity (*a*, *c*, *e*) and low-velocity (*b*, *d*, *f*) inclusions in a piezoelectric layer. The areas of transition of materials to *a*, *b*; *c*, *d*; *e*, *f* correspond to dependencies *1*, *2*, *3* fig. 2, (*a*). The inhomogeneity is localized in the middle of the layer

Из рисунков следует, что увеличение области перехода материалов для высокоскоростного включения (рис. 4, *a*, *c*, *e*) приводит к смещению частот κ_n^0 в область более высоких значений, при этом постепенно увеличивается длина террасных участков. Для первой моды возрастает значение частоты пересечения кривой с линией $V_{Se}^{(1)}$, т.е. увеличивается частотный диапазон, в котором скорость первой моды превышает $V_{Se}^{(1)}$. При низкоскоростном включении (рис. 4, *b*, *d*, *f*) увеличение области перехода материалов смещает κ_n^0 в область низких частот, в рассматриваемом диапазоне располагается больше террасных участков, их длина уменьшается. Для первой моды характерно падение значений скорости во всем частотном диапазоне, отмечается область сближения скоростей первых двух мод в высокочастотном диапазоне (рис. 4, *b*), однако с увеличением области перехода материалов сближение скоростей становится меньше и смещается в область более низких частот (рис. 4, *f*). Скорость 1-й моды падает до $V_S^{(1)}$ (где $V_S^{(1)} = V_S^{m_1}$), причем дальнейшее увеличение области перехода материалов приводит к падению скорости до наименьшего значения из $V_S^{m_1}$ и $V_S^{m_3}$.

3.2. Влияние области локализации неоднородности пьезоэлектрического слоя

На рис. 5 представлены особенности фазовых скоростей SH-ПАВ в зависимости от локализации неоднородности ПС из m_1/m_2 (*a*, *b*) и m_1/m_3 (*c*, *d*). Сплошная, штриховая и пунктирные линии *2*, 2^1, 2^0 отвечают закономерностям рис. 2, *b*. Рис. 5, *b*, *d* – фрагменты рисунков *a*, *c*.

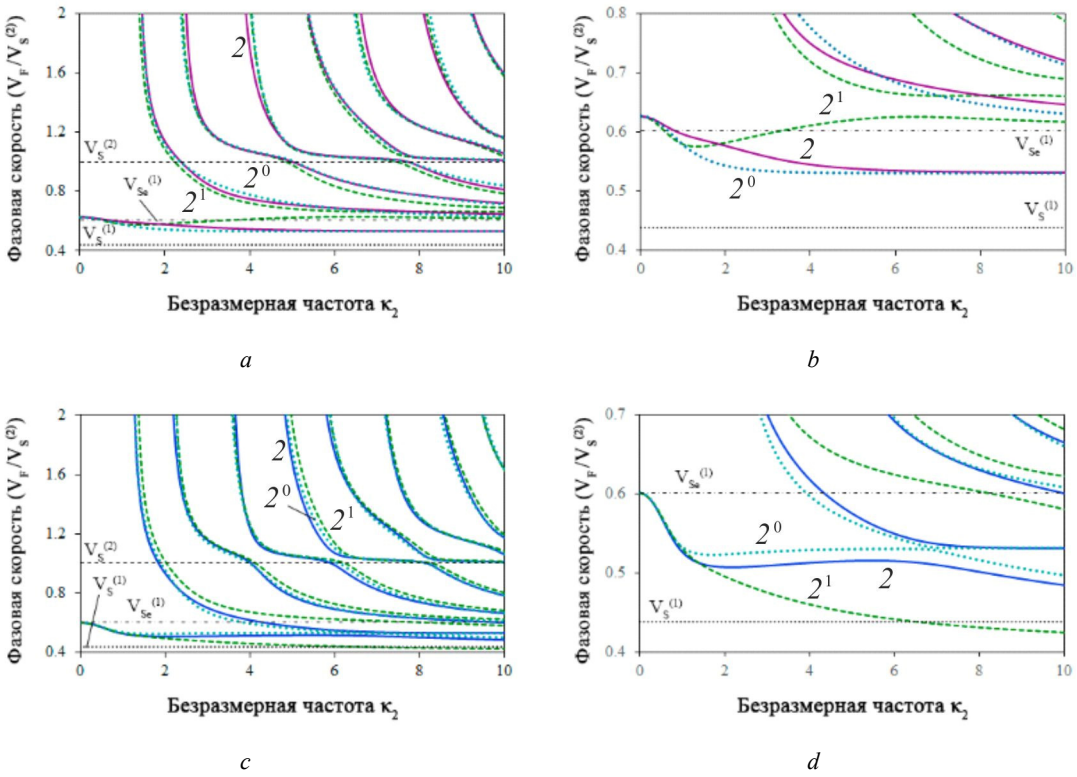


Рис. 5. Влияние области локализации неоднородности на относительные фазовые скорости ПАВ. Зона перехода материалов фиксирована: *a*, *b* – неоднородность m_1/m_2; *c*, *d* – неоднородность m_1/m_3; *b*, *d* – фрагменты соответственно *a*, *c*

Fig. 5. Influence of the inhomogeneity localization region on the relative phase velocities of SAW. The transition zone of materials is fixed: *a*, *b* – heterogeneity m_1/m_2; *c*, *d* – heterogeneity m_1/m_3; *b*, *d* – fragments, respectively, *a*, *c*

Анализ рис. 5, *a*, *b*, показывает, что, в отличие от рис. 3, *a*, влияние локализации неоднородности носит более сложный характер и по-разному сказывается на поведении скоростей в различных частотных диапазонах. Так, при неоднородности m_1/m_2 частоты выхода 2, 3, 6-й и 9-й мод SH-ПАВ сдвигаются в область более низких частот, 4-й и 7-й мод – в область более высоких частот, частоты выхода 5-й и 8-й мод изменяется незначительно. При поверхностной локализации неоднородности (штриховые линии, кривые 2^1, рис. 5, *b*) скорости 1, 2-й и 3-й мод становятся существенно ближе, скорость 1-й моды начиная с κ_1^* превосходит $V_{Se}^{(1)}$, чего не происходит при срединной и приграничной локализациях. Скорость 2-й и 3-й мод в достаточно большом частотном диапазоне меньше скоростей со срединной и приграничной локализациями, однако с ростом частоты скорость растет и становится преобладающей. При неоднородности m_1/m_3 частоты выхода 2, 3, 5-й и 6-й мод SH-ПАВ сдвигаются в область более высоких частот, 4-й и 8-й мод – в область более низких частот, частоты выхода 7-й и 9-й мод изменяются незначительно. При граничной локализации (пунктирные линии, кривые 2^0, рис. 5, *d*) наблюдается частотный диапазон, в котором скорости 1-й и 2-й мод принимают очень близкие значения (пересечений нет), при срединной локализации этот эффект менее выражен, однако может более явно проявляться при увеличении области перехода материалов. При поверхностной локализации эффекта сближения скоростей нет, во всем частотном диапазоне скорость 1-й моды падает приближаясь к значению $V_S^{m_3}$.

3.3. Влияние неоднородности диэлектрического слоя

На рис. 6 показано влияние неоднородности ДС на поведение скоростей SH-ПАВ в случае однородного ПС из m_1 (рис. 6, *a*, *c*, *e*) и неоднородного ПС из m_1/m_{31} (рис. 6, *b*, *d*, *f*). На рис. 6, *a*, *c*, *e*, кривые *0* (штриховые линии) отвечают структуре однородных ПС и ДС из m_1/m_4, кривые *1* (сплошные линии) – структуре однородного ПС из m_1 на неоднородном ДС из m_1/m_4 с локализацией неоднородности у границы раздела и областью перехода в соответствии с кривой *1* рис. 2, *c*. Рисунок 6, *c*, *e* – фрагменты рис. 6, *a*. На рис. 6, *b*, *d*, *f*, кривые *1* (сплошные линии) и кривые *2* (штриховые линии) соответствуют случаю неоднородного ПС из m_1/m_{31} с локализацией неоднородности у границы раздела (зона перехода, кривая 2^0 рис. 2, *b*, *d*) и неоднородного ДС из m_{41}/m_4 с локализацией у границы раздела и областями перехода, отвечающими кривым *1* и *2* рис. 2, *c*, *d*. Рис. 6, *d*, *f* – фрагменты рис. 6, *b*.

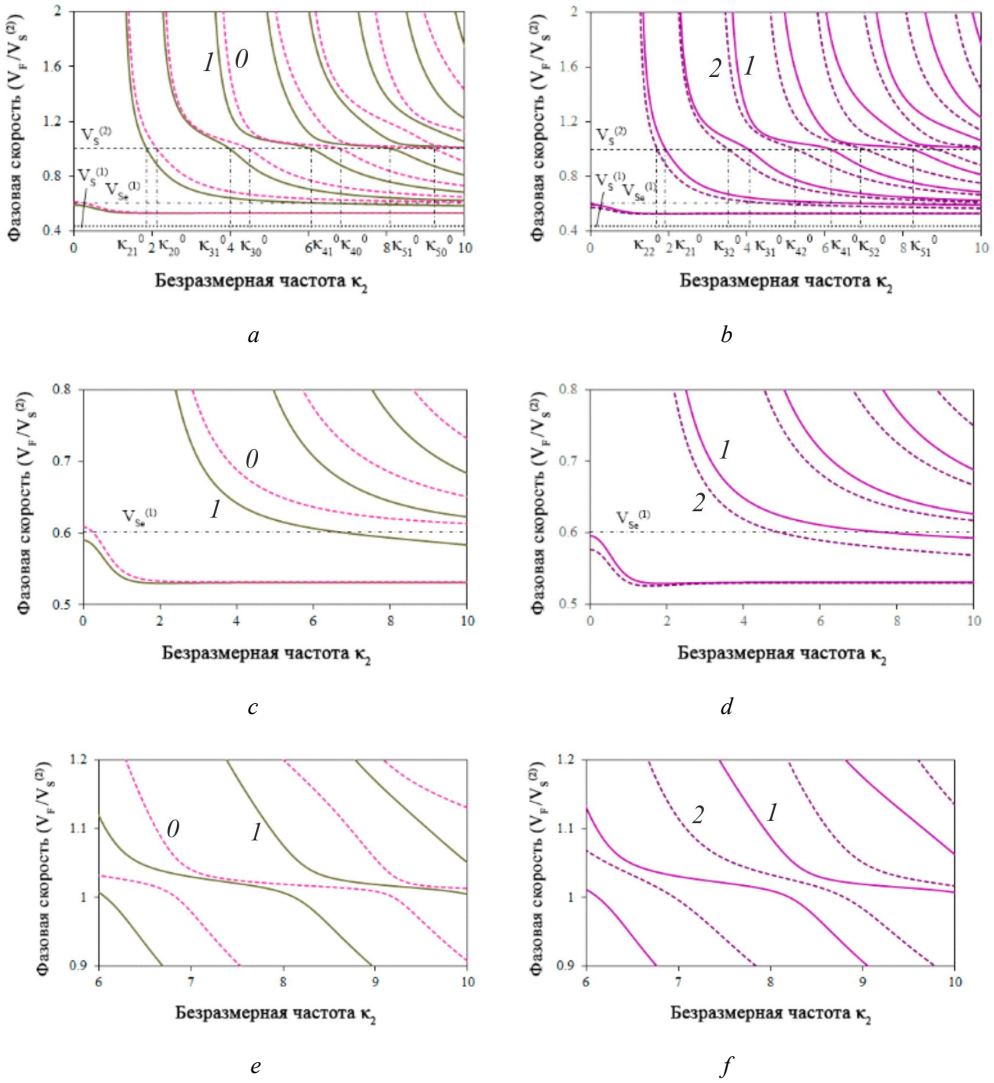


Рис. 6. Влияние неоднородности диэлектрического слоя на скорости ПАВ: *a* – структура m_1/m_4 (однородный случай, кривые *0*), неоднородный диэлектрический слой (кривые *1*); *b* – неоднородный пьезоэлектрический слой m_1/m_{31} и неоднородный диэлектрический слой m_{41}/m_4, локализация неоднородностей у границы раздела, область перехода материалов отвечает кривым *1*, *2*, рис. 2, *c*; *c*, *e* – фрагменты *a*; *d*, *f* – фрагменты *b*

Fig. 6. Influence of the inhomogeneity of the dielectric layer on the velocities of SAW: *a* – structure m_1/m_4 (homogeneous case, curves 0), inhomogeneous dielectric layer (curves *1*); *b* – is an inhomogeneous piezoelectric layer m_1/m_{31} and an inhomogeneous dielectric layer m_{41}/m_4, localization of inhomogeneity at the interface, the transition region of materials corresponds to curves *1*, *2* fig. 2, *c*; *c*, *e* – are fragments *a*; *d*, *f* – are fragments *b*

Из рис. 6, *a* – *f*, видно, что наличие неоднородности в диэлектрическом слое (кривые *1*, рис. 6, *a*, *c*, *e*) приводит к сдвигу как частот выхода новых мод, так и критических частот κ_{n1}^0 в сторону более низких значений, причем с ростом частоты сдвиг увеличивается. Наблюдается уменьшение скоростей SH-ПАВ относительно случая однородных слоев (кривые *0*), причем для мод, начиная со 2-й, падение скорости происходит во всем частотном диапазоне, в случае 1-й моды различие скоростей отмечается только в небольшой низкочастотной области, для частот выше κ_{21}^0 скорости совпадают (см. рис. 6, *c*). Увеличение зоны перехода материалов при неоднородности диэлектрического слоя (см. рис. 6, *b*, *d*, *f*) приводит к дальнейшему уменьшению значений частот выхода новых мод и частот κ_{n2}^0, кривые скоростей становятся более пологими.

Так, сравнение рис. 6, *a* и *b*, показывает, что в случае однородных слоев (кривая *0*, см. рис. 6, *a*) террасный участок появляется в поведении 4-й моды, наличие неоднородности в диэлектрическом слое с зоной перехода, отвечающей кривой *1* (см. рис. 2, *c*), приводит к появлению террасного участка в 5-й моде (кривая *1*, см. рис. 6, *a*), наличие в граничной области неоднородности пьезоэлектрического и диэлектрического слоев с зоной перехода, соответствующей кривым 2^0 и *2* рис. 2, *b* и *c*, приводит к появлению террасного участка в 7-й моде (кривая *2*, см. рис. 6, *b*, *f*).

Заключение

Предложен подход к моделированию динамических процессов в составной полубесконечной пластине из неоднородных пьезоэлектрического и диэлектрического слоев. При моделировании неоднородности слоев использована двухкомпонентная модель с функционально градиентным изменением свойств по толщине. При выборе материалов включений уделялось внимание материалам с различием скоростных характеристик, с незначительным расхождением значений упругих модулей и существенным отличием пьезоэлектрических и диэлектрических свойств. Неоднородность диэлектрического слоя связана с взаимопроникновением материалов слоев в узкой переходной области у границы раздела. В рамках модели полагалось, что плотность, диэлектрические и упругие модули диэлектрического слоя непрерывно изменяются по толщине от соответствующих параметров пьезоэлектрического материала до параметров основного материала диэлектрика. Внешние поверхности пластины свободны от механических напряжений и электрически короткозамкнуты. На примере задачи о распространении поверхностных SH-волн от бесконечно удаленного источника гармонических колебаний в неоднородной двухслойной структуре на основе PZT/SiO_2 исследованы особенности поведения фазовых скоростей ПАВ для широкого круга изменения параметров задачи. Рассмотрены неоднородности пьезоэлектрического слоя с различной локализацией при однородном диэлектрическом слое и неоднородность диэлектрического слоя с граничной локализацией в случае однородного и неоднородного пьезоэлектрического слоя. Предложенный подход позволил провести детальный анализ влияния величины области перехода материалов, характера неоднородности и ее расположения по толщине пластины на особенности поведения ПАВ в широком частотном диапазоне. Показано, что влияние области перехода материалов как при высокоскоростном, так и при низкоскоростном включении ПС усиливается с ростом частоты. Установлены характерные особенности поведения ПАВ в зависимости от локализации как высокоскоростного, так и низкоскоростного включения ПС. Показана существенная роль учета неоднородности приграничной области ДС на поведение скоростей ПАВ, связанной с проникновением материалов ПС и ДС в пластине.

Библиографический список

1. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. – New York: Plenum press, 1969. – 211 p.
2. Mindiin R.D. An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1955. – 190 p.
3. Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – North-Holland, Amsterdam, 1973. – 425 p.
4. Matthews H. Surface Wave Filters. Design, Construction and use. – New York: John Wiley & Sons, 1977. – 521 p.
5. Acoustic Surface Waves / E.A. Ash, G.W. Farnell, H.M. Gerard, A.A. Oliner, A.J. Slobodnik, H.I. Jr. Smith; A.A. Oliner (Eds). – Springer Verlag, Berlin, 1978. – 334 p.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
7. Maugin G.A., Attou D. An asymptotic theory of thin piezoelectric plates // Q J Mech Appl Math. – 1990. – Vol. 43. – P. 347–362. DOI: 10.1093/qjmam/43.3.347
8. Бреховских Л.М. Годин О.А. Акустика слоистых сред. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
9. Wang J., Yang J. Higher-order theories of piezoelectric plates // Appl. Mech. Rev. – 2000. – Vol 53, no 4. – P. 87–99. DOI: 10.1115/1.3097341
10. Elastic surface waves in crystals. Part 1: Review of the physics / N. Favretto-Cristini, D. Komatitsch, J.M. Carcione, F. Cavallini // Ultrasonics. – 2011. – Vol. 51, no. 6. – P. 653–660. DOI: 10.1016/j.ultras.2011.02.007
11. Alshits V.I., Maugin G.A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate // Wave Motion. – 2005. – Vol. 41, no. 4. – P. 357–394. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2004.09.002
12. Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P. Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // Wave Motion. 2008. – Vol. 45, no. 5. – P. 605–615. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.07.008
13. Kuznetsov S.V. Dispersion of SH and Love Waves // International Journal of Physics. – 2014. – Vol. 2, no. 5. – P. 170–180. DOI: 10.12691/ijp-2-5-7
14. Zagrouba M., Bouhdima M.S. Investigation of SH wave propagation in piezoelectric plates // Acta Mechanica. – 2021. – Vol. 232, no. 9. – P. 3363–3379. DOI: 10.1007/s00707-021-02990-x
15. Liu G.R., Tani J. Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates. //Journal of Vibration and Acoustics. – 1994. – Vol. 116, no. 4. – P. 440–448. DOI: 10.1115/1.2930447
16. Cao X.S., Jin F., Wang Z.K. Theoretical Investigation on Horizontally Shear Waves in a Functionally Gradient Piezoelectric Material Plate // Advanced Materials Research. – 2008. – Vol. 33–37. – P. 707–712. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.33-37.707
17. Nie G., An Z., Liu J. SH-guided waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates. // Progress in Natural Science. – 2009. – Vol. 19, no. 7. – P. 811–816. DOI: 10.1016/j.pnsc.2008.10.007
18. Ezzin H., Amor M.B., Ghozlen M.H.B. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates // Acta Mechanica. – 2016. – Vol. 228, no. 3. – P. 1071–1081. DOI: 10.1007/s00707-016-1744-9
19. Wang Q. SH wave propagation in piezoelectric coupled plates // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2002. – Vol. 49, no. 5. – P. 596–603. DOI: 10.1109/tuffc.2002.1002458
20. Son M.S., Kang Y.J. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric plates.// Journal of Mechanical Science and Technology. – 2011. – Vol. 25, no. 3. – P. 613–619. DOI: 10.1007/s12206-011-0114-8
21. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Shear horizontal waves in piezoelectric structures with a functionally graded coating // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2021. – Vol. 28, no. 5. – P. 486–494. DOI: 10.1080/15376494.2019.1578006
22. Peculiarities of surface acoustic waves, propagation in structures with functionally graded piezoelectric materials, coating from different ceramics on the basis of PZT / T.I. Belyankova, E.I. Vorovich, V.V. Kalinchuk, O.M. Tukodova // Journal of Advanced Dielectrics. – 2020. – Vol. 10, no. 1–2. – P. 2060017. DOI: 10.1142/S2010135X20600176

23. Specific features of SH-waves propagation in structures with prestressed inhomogeneous coating made of piezoceramics based on LiNbO3 / T.I. Belyankova, E.I. Vorovich, V.V. Kalinchuk, O.M. Tukodova // Journal of Advanced Dielectrics. – 2021. – Vol. 11, no. 4–5. – P. 2160007. DOI: 10.1142/S2010135X21600079

24. A method for the design of inhomogeneous materials and block structures / V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko, I.V. Ryadchikov // Doklady Physics. – 2018. – Vol. 63, no. 10. – P. 402–406. DOI: 10.1134/S1028335818100014

25. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the properties of topological discretization of solutions to boundary value problems // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation. – 2021. – Vol. 18, no. 1. – P. 8–13. DOI: 10.31429/vestnik-18-1-8-13

26. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block elements in boundary-value problems for sets of differential equations of mechanics and physics in non-classical domains // Doklady Physics. – 2021. – Vol. 66, no. 6. – P. 169–174. DOI: 10.1134/S102833582106001X

27. Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – Vol. 37, no. 1. – P. 79–83. DOI: 10.18720/MPM.3712018_11

References

1. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations. New York: Plenum press, 1969, 211 p.

2. Mindiin R.D. An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1955, 190 p.

3. Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland, Amsterdam, 1973, 425 p.

4. Matthews H. Surface Wave Filters. Design, Construction and use. New York: John Wiley & Sons, 1977, 521 p.

5. Ash E.A., Farnell G.W., Gerard H.M., Oliner A.A., Slobodnik A.J., Smith Jr., H.I. Acoustic Surface Waves, A.A. Oliner (Eds)., Springer Verlag, Berlin, 1978, 334 p.

6. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh. [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kiev, Naukova dumka, 1981, 283 p.

7. Maugin G.A., Attou D. An asymptotic theory of thin piezoelectric plates, *Q J Mech Appl Math*., 1990, Vol. 43, pp. 347-362.

8. Brekhovskikh L.M., Godin O.A. Akustika sloistykh sred. [Acoustics of layered media]. Moscow, Nauka, 1989, 416 p.

9. Wang J., Yang J. Higher-order theories of piezoelectric plates. *Appl. Mech. Rev*., 2000, Vol 53, No 4, pp. 87-99.

10. Favretto-Cristini N., Komatitsch D., Carcione J.M., Cavallini F. Elastic surface waves in crystals. Part 1: Review of the physics. *Ultrasonics*, 2011, Vol. 51, No. 6, pp. 653-660.

11. Alshits, V. I., Maugin, G. A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate. *Wave Motion*, 2005, Vol. 41, No. 4, pp. 357–394.

12. Shuvalov, A. L., Poncelet, O., Kiselev, A. P. Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates. *Wave Motion*, 2008, Vol. 45, No. 5, pp. 605–615.

13. Kuznetsov S. V. Dispersion of SH and Love Waves. *International Journal of Physics*, 2014, Vol. 2, No. 5, pp. 170-180.

14. Zagrouba, M., Bouhdima, M. S. Investigation of SH wave propagation in piezoelectric plates. *Acta Mechanica*, 2021, Vol. 232, No. 9, pp. 3363–3379.

15. Liu, G. R., & Tani, J. Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, Vol. 116, No. 4, pp. 440-448.

16. Cao, X. S., Jin, F., & Wang, Z. K. Theoretical Investigation on Horizontally Shear Waves in a Functionally Gradient Piezoelectric Material Plate. *Advanced Materials Research*, 2008, Vol. 33-37, pp. 707–712.

17. Nie, G., An, Z., Liu, J. SH-guided waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates. *Progress in Natural Science*, 2009, Vol. 19, No. 7, pp. 811–816.

18. Ezzin, H., Amor, M. B., Ghozlen, M. H. B. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates. *Acta Mechanica*, 2016, Vol. 228, No. 3, pp. 1071–1081.

19. Wang, Q. SH wave propagation in piezoelectric coupled plates. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2002, Vol. 49, No. 5, pp. 596–603.

20. Son, M. S., Kang, Y. J. Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric plates. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2011, Vol. 25, No. 3, pp. 613–619.

21. T.I. Belyankova, V.V. Kalinchuk, Shear horizontal waves in piezoelectric structures with a functionally graded coating. *Mech. Adv. Mater. Struct*., 2021, Vol. 28, No. 5, pp. 486-494.

22. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M., Peculiarities of surface acoustic waves, propagation in structures with functionally graded piezoelectric materials, coating from different ceramics on the basis of PZT. *Journal of Advanced Dielectrics*, 2020, Vol. 10, No. 1-2, pp. 2060017.

23. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M. Specific features of SH-waves propagation in structures with prestressed inhomogeneous coating made of piezoceramics based on LiNbO3. *Journal of Advanced Dielectrics*, 2021, Vol. 11, No. 4-5, pp. 2160007.

24. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Ryadchikov I.V. A method for the design of inhomogeneous materials and block structures. *Doklady Physics*, 2018, Vol. 63, No. 10, pp. 402-406.

25. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the properties of topological discretization of solutions to boundary value problems. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, Vol. 18, No. 1, pp. 8-13.

26. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block elements in boundary-value problems for sets of differential equations of mechanics and physics in non-classical domains. *Doklady Physics*, 2021, Vol. 66, No. 6, pp. 169-174.

27. Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, Vol. 37, No. 1, pp. 79-83.

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН (номер госрегистрации 122020100343-4). Часть исследований выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (проект 19-48-230042).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was carried out as part of the implementation of the state task of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (state registration number 122020100343-4). Part of the research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Krasnodar Region (project 19-48-230042).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.