Ерофеев В.И., Ленин А.О., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 2. С. 118–125. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.11

Erofeev V.I., Lenin A.O., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Dispersional dependences and peculiarities of energy transfer by flexible waves in a beam lying on a generalized elastic base. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 2, pp. 118-125. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.11

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 2, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.11
УДК 539.3:534.11

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ИЗГИБНЫМИ ВОЛНАМИ В БАЛКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОБОБЩЕННОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В.И. Ерофеев[1,2], А.О. Ленин[1], Е.Е. Лисенкова[1], И.С. Царев[1]

[1]Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра Института прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия
[2]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 ноября 2022 г.
Одобрена: 13 марта 2023 г.
Принята к публикации: 30 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

балка, обобщенное упругое основание, изгибная волна, дисперсия, перенос энергии.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается динамика балки Бернулли – Эйлера, лежащей на упругом основании. Выбирается обобщенная модель упругого основания, включающая в себя два независимых коэффициента постели: жесткости основания на деформации растяжения – сжатия и на деформации сдвига. В отличие от классической модели упругого основания (модель Винклера), обобщенная модель учитывает распределительную способность грунта, т.е. его свойство оседать не только под нагруженной областью, под фундаментом, но и вблизи него. Балка считается бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, то есть параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. Это позволяет рассматривать модель балки без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, считать бегущими изгибными волнами. Изучается влияние двухконстантного упругого основания на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке. Показано, что при возрастании сдвиговой жесткости упругого основания волны, имеющие одинаковое волновое число (т.е. волны одинаковой длины) будут иметь большую частоту, большую фазовую и групповую скорости. Для рассматриваемой системы в дивергентной форме записано уравнение переноса энергии. Показано, что средняя скорость переноса энергии равняется групповой скорости изгибной волны. Равенство этих скоростей служит дополнительным фактором, свидетельствующим о внутренней физической непротиворечивости модели изгибных колебаний балки, лежащей на обобщенном упругом основании.

© ПНИПУ

© **Владимир Иванович Ерофеев** – д.ф.-м.н., дир., e-mail: erof.vi@yandex.ru
Алексей Олегович Ленин – асп., e-mail: lehan_lenin@mail.ru
Елена Евгеньевна Лисенкова – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: eelissen@yandex.ru
Иван Сергеевич Царев – асп., e-mail: tsarev_ivan97@mail.ru

Vladimir I. Erofeev – Doctor Physics and Mathematics Sciences, Director, e-mail: erof.vi@yandex.ru
Alexey O. Lenin – PhD student, e-mail: lehan_lenin@mail.ru
Elena E. Lisenkova – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: eelissen@yandex.ru
Ivan S. Tsarev – PhD student, e-mail: tsarev_ivan97@mail.ru

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

DISPERSIONAL DEPENDENCES AND PECULIARITIES OF ENERGY TRANSFER BY FLEXIBLE WAVES IN A BEAM LYING ON A GENERALIZED ELASTIC BASE

V.I. Erofeev[1,2], A.O. Lenin[1], E.E. Lisenkova[1], I.S. Tsarev[1]

[1]Mechanical Engineering Research Institute – Branch of Federal Research Center A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russian Federation
[2]National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 November 2022
Approved: 13 March 2023
Accepted for publication:
05 April 2023

Keywords:

beam, generalized elastic foundation, flexural wave, dispersion, energy transfer.

ABSTRACT

The dynamics of a Bernoulli – Euler beam lying on an elastic foundation is considered. A generalized model of an elastic foundation is selected, which includes two independent bedding coefficients: the stiffness of the foundation for tensile-compression deformation and for shear deformation. Unlike the classical elastic foundation model (Winkler's model), the generalized model takes into account the distribution capacity of the soil, i.e. its property to settle not only under the loaded area, under the foundation, but also near it. The beam is considered to be infinite. Such idealization is permissible if optimal damping devices are located on its boundaries, that is, the parameters of the boundary fixation are such that the perturbations falling on it will not be reflected. This makes it possible to consider the beam model without taking into account the boundary conditions, and consider vibrations propagating along the beam as traveling bending waves. The influence of a two-constant elastic foundation on the parameters of a bending wave propagating in a beam is studied. It is shown that with an increase in the shear stiffness of the elastic base, waves with the same wavenumber (i.e., waves of the same length) will have a higher frequency, higher phase and group velocities. For the system under consideration, the energy transfer equation is written in divergent form. It is shown that the average rate of energy transfer is equal to the group velocity of the flexural wave. The equality of these velocities serves as an additional factor indicating the internal physical consistency of the model of bending vibrations of a beam lying on a generalized elastic foundation.

© PNRPU

Введение

В прикладной механике под упругим основанием принято понимать расчетную модель среды, сопротивляющейся деформированию взаимодействующей с ней конструкции. В теории сооружений такой средой выступает, как правило, грунтовое основание.

Классическая модель (обычно называемая моделью Винклера) упругого основания базируется на гипотезе Э. Винклера (1867) [1], развитой Х. Циммерманом (1888) [2], о том, что при давлении на поверхность грунта на какой-либо одной малой площадке грунт будет оседать только под ней. Таким образом, классическая модель упругого основания не учитывает распределительную способность грунта, т.е. его свойство оседать не только под нагруженной областью, под фундаментом, но и вблизи него.

Модель, учитывающую распределительную способность грунта, называют обобщенной моделью упругого основания. Она сформировалась к середине 50-х – началу 60-х гг. XX в. Появление модели и ее развитие связаны с работами К. Вигхорта (1922) [3], М.М. Филоненко-Бородича (1945) [4], М. Хетенеи (1946) [5], П.Л. Пастернака (1954) [6], В.З. Власова и Н.Н. Леонтьева (1956, 1960) [7; 8], Э. Рейсснера [9]. В основу обобщенной модели положено «сплошное упругооседающее и упруговращающееся основание» [6]. Свойства такого основания описываются двумя независимыми коэффициентами постели: коэффициентом сжатия h_1 и учитывающим совместную работу соседних областей коэффициентом сдвига h_2.

Обобщенную модель упругого основания называют двухкоэффициентной [6], двухкарактеристической [10; 11], двухпараметрической [12–15], но чаще всего – моделью Пастернака (см., например, [16–20]).

Если дисперсионные свойства изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на классическом упругом основании, хорошо известны, то о модели, содержащей обобщенное упругое основание, такого сказать нельзя.

Знание дисперсионных зависимостей той или иной модели позволяет использовать такую модель в неразрушающем контроле конструкций [21]. Кроме того, интерес к задачам устойчивости и волновой динамики балок, лежащих на упругом основании, определяется необходимостью расчета динамического поведения рельсовых направляющих (например, ракетного трека [22; 23]), несущих высокоскоростные движущиеся нагрузки.

1. Математическая модель

Уравнение изгибных колебаний балки, модели Бернулли – Эйлера, лежащей на обобщенном упругом основании, имеет вид [24]:

$$\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+h_1 w-h_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (1)$$

Здесь $w(x,t)$ – перемещение частиц срединной линии балки при изгибе, ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения балки, E – модуль Юнга, J – осевой момент инерции.

Предполагаем, что балка является бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, то есть параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В [25] на основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано существование согласованных концевых гасителей различных типов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель балки (1) без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, рассматривать как бегущие изгибные волны.

Введение безразмерных величин для перемещения, координаты и времени

$$U=\frac{w}{w_0};\quad z=x\sqrt[4]{\frac{h_1}{EJ}};\quad \tau=t\sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}, \tag{2}$$

где w_0 – максимальное поперечное перемещение, при котором растяжимостью срединной линии балки можно пренебречь, приводит уравнение (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial z^4}+U-a\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \tag{3}$$

Здесь $a=\dfrac{h_2}{\sqrt{h_1 EJ}}$ – параметр, включающий в себя коэффициент изгибной жесткости балки (EJ) и коэффициенты жесткости упругого основания (h_1, h_2).

2. Анализ дисперсионных зависимостей

На основе выражения (3) исследуем далее влияние обобщенного упругого основания на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке. Будем отыскивать решение уравнения (3) в виде бегущей гармонической волны:

$$U=Ae^{i(\Omega\tau-Kz)}+A^*e^{-i(\Omega\tau-Kz)}. \tag{4}$$

Здесь A, A^* – безразмерная комплексная амплитуда и ее комплексно-сопряженная часть, Ω – частота и K – волновое число, связанные с круговой частотой ω и размерным волновым числом k соотношениями:

$$\Omega=\sqrt{\frac{\rho F}{h_1}}\omega,\quad K=\sqrt[4]{\frac{EJ}{h_1}}k. \tag{5}$$

Подстановка соотношения (4) в уравнение (3) приводит к дисперсионному уравнению

$$-\Omega^2+K^4+1+aK^2=0, \tag{6}$$

из которого определяем закон дисперсии изгибной волны

$$\Omega=\pm\sqrt{K^4+aK^2+1}, \tag{7}$$

фазовую и групповую скорости

$$\vartheta_\phi=\frac{\Omega}{K}=\pm\sqrt{K^2+a+\frac{1}{K^2}}, \tag{8}$$

$$\vartheta_{гр}=\frac{d\Omega}{dK}=\pm\frac{a+2K^2}{\sqrt{K^2+a+\dfrac{1}{K^2}}}. \tag{9}$$

Зависимости (7), (8), (9) приведены на рис. 1, 2 и 3 соответственно. Все построения выполнены в первом квадранте координатной плоскости, поскольку не учитываются волны, имеющие отрицательные частоты (т.е. гармоники, распространяющиеся со сдвигом по фазе на π) и отрицательные волновые числа (т.е. гармоники, распространяющиеся в отрицательном направлении оси z). Для построения зависимостей (7), (8), (9) во всей плоскости следует учесть симметрию этих графиков относительно вертикальной и горизонтальной осей.

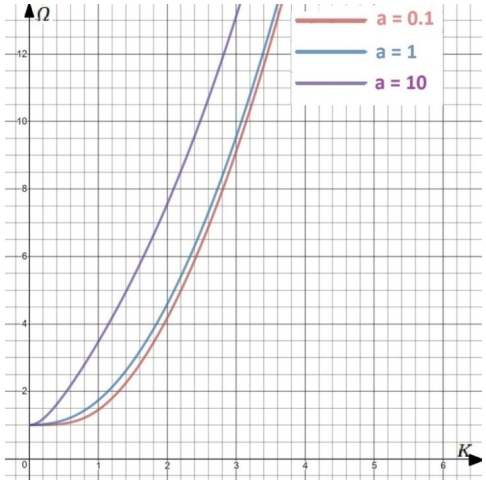


Рис. 1. Закон дисперсии изгибной волны

Fig. 1. Dispersion law of a flexural wave

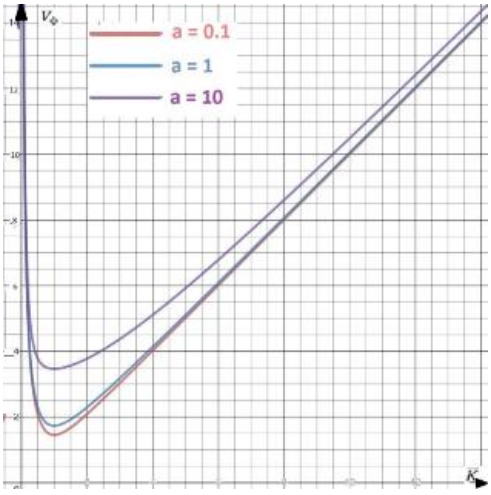


Рис. 2. Фазовая скорость изгибной волны

Fig. 2. Phase velocity of a bending wave

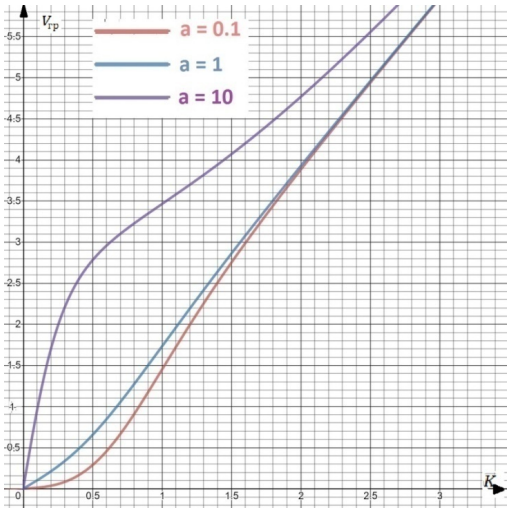


Рис. 3. Групповая скорость изгибной волны

Fig. 3. Group velocity of a flexural wave

Кривые, изображенные на рисунках, построены при трех значениях параметра: a= 0,1; a = 1; a = 10. Легко видеть, что при возрастании сдвиговой жесткости упругого основания волны, имеющие одинаковое волновое число (т.е. волны одинаковой длины), будут иметь большую частоту, большую фазовую и групповую скорости.

При a = 0 обобщенная модель упругого основания переходит в классическую модель Винклера.

На рис. 4–6 приведены зависимости от волнового числа частоты, фазовой и групповой скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на различных упругих основаниях и без него.

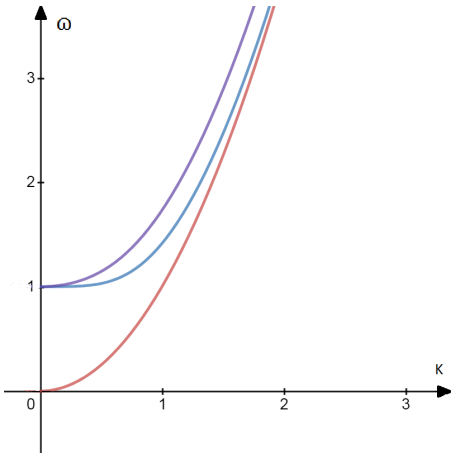


Рис. 4. Зависимости от волнового числа частот изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на различных упругих основаниях и без него (синяя линия – балка лежит на упругом основании Винклера; фиолетовая линия – балка лежит на обобщенном упругом основании; красная линия – свободно колеблющаяся балка)

Fig. 4. Dependences on the wave number of the frequencies of bending waves propagating in a beam lying on various elastic foundations and without it (blue line – the beam lies on the Winkler elastic foundation; purple line –the beam lies on the generalized elastic foundation; red line – freely vibrating beam)

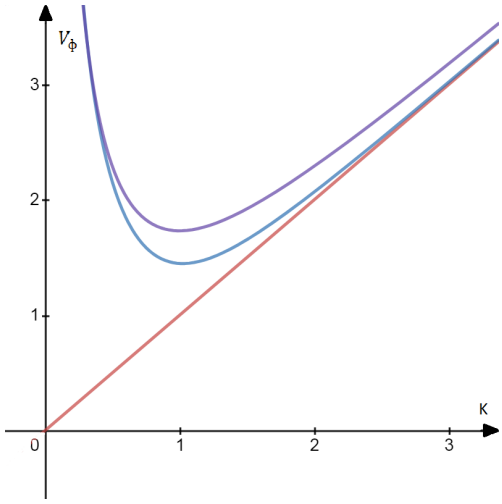


Рис. 5. Зависимости от волнового числа фазовых скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на различных упругих основаниях и без него (синяя линия – балка лежит на упругом основании Винклера; фиолетовая линия – балка лежит на обобщенном упругом основании; красная линия – свободно колеблющаяся балка)

Fig. 5. Dependences on the wave number of the phase velocities of bending waves propagating in a beam lying on various elastic foundations and without it (blue line – the beam lies on the Winkler elastic foundation; purple line – the beam lies on the generalized elastic foundation; red line – freely vibrating beam)

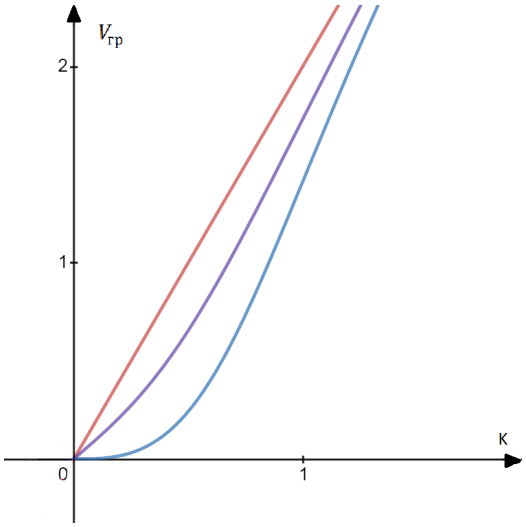


Рис. 6. Зависимости от волнового числа групповых скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на различных упругих основаниях и без него (синяя линия – балка лежит на упругом основании Винклера; фиолетовая линия – балка лежит на обобщенном упругом основании; красная линия – свободно колеблющаяся балка)

Fig. 6. Dependences on the wave number of the group velocities of bending waves propagating in a beam lying on various elastic foundations and without it (blue line – the beam lies on the Winkler elastic foundation; purple line -– the beam lies on the generalized elastic foundation; red line – freely vibrating beam)

Синей линией изображены зависимости, соответствующие балке, лежащей на упругом основании Винклера; фиолетовой линией – балке, лежащей на обобщен-

ном упругом основании; красной линией – свободно колеблющейся балке (балка Бернулли – Эйлера).

Легко видеть, что свободная балка, в отличие от балок, лежащих на упругих основаниях, не имеет зоны непропускания, и колебания в виде бегущих изгибных волн происходят при любых значениях частоты. Для балок, лежащих на упругих основаниях (как Винклера, так и обобщенном), частотный диапазон $0<\Omega<1$ представляет собой зону непропускания. Частота $\Omega=1$ является частотой отсечки. Частоты и фазовые скорости изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на обобщенном упругом основании, при любом значении волнового числа больше частот и фазовых скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на основании Винклера, а те, в свою очередь, больше частот и фазовых скоростей изгибных волн, распространяющихся в свободной балке Бернулли – Эйлера (см. рис. 4, 5).

Из рис. 6 следует, что групповые скорости изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на обобщенном основании, при любом значении волнового числа больше групповых скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на упругом основании Винклера, но всегда меньше групповых скоростей изгибных волн, распространяющихся в свободной балке Бернулли – Эйлера.

3. Уравнение переноса энергии и его анализ

Важной характеристикой волнового поля, наряду с амплитудой и фазой, является количество переносимой волнами энергии. При этом, как подчеркивается, например, в [26], энергетический анализ не сводится к амплитудному или дисперсионному, а требует специального подхода.

В [27] предложен, а в [28] развит подход, рассматривающий механические системы и их элементы соответственно как глобальные и локальные резервуары энергии. Авторы этих работ вводят понятия глобальных и локальных относительных энергетических критериев, приводят энергетический анализ типовых экспериментальных диаграмм деформирования стандартных образцов материалов.

Понятие потока энергии введено в 1874 г. знаменитым русским физиком Н.А. Умовым [29], сформулировавшим уравнение переноса энергии в дивергентной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0, \tag{10}$$

где W – плотность энергии, $\vec{S}$ – плотность потока энергии называемая вектором Умова – Пойнтинга. В зарубежной литературе эта величина чаще упоминается как вектор Пойнтинга, невзирая на то, что работы английского физика появились на 10 лет позднее работ Н.А. Умова и посвящены, в отличие от последних, имеющих общефизическое значение, исключительно переносу энергии электромагнитными волнами.

Для одномерных процессов плотность потока энергии является скалярной величиной, и дивергенция в уравнении (10) заменяется на производную $\frac{\partial}{\partial x}$.

Для распределенных систем, описываемых лагранжианом, зависящим от обобщенных координат, их первых и вторых производных $L\left(w,\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$, а именно к этому классу систем относится модель балки, лежащей на упругом основании (9), плотности энергии и потока энергии через лагранжиан определяются выражениями [30]

$$W=\frac{\partial L}{\partial w_t}w_t-L, \tag{11}$$

$$S=\frac{\partial L}{\partial w_x}w_t+\frac{\partial L}{\partial w_{xx}}w_{xt}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{xx}}\right)w_t, \tag{12}$$

где индексами t и x обозначены производные по соответствующим переменным.

Между собой плотности энергии и потока энергии связаны соотношением [30]

$$<S>=\vartheta_{\text{эн}}<W>. \tag{13}$$

Здесь через < > обозначено среднее значение соответствующей величины за период волны. Для линейных однородных систем скорость переноса энергии совпадает с групповой скоростью, т.е.

$$\vartheta_{\text{эн}}=\vartheta_{\text{гр}}. \tag{14}$$

Проверим выполнимость данного соотношения для изгибных волн в балке, лежащей на двухконстантном упругом основании.

Для балки (9) безразмерные плотности энергии $\left(\tilde{W}\right)$ и потока энергии $(\tilde{S})$ следующим образом связаны с физическими значениями этих величин:

$$\tilde{W}=\frac{W}{h_1 w_0^2}, \tag{15}$$

$$\tilde{S}=\frac{S}{h_1 w_0^2}\sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}\sqrt[4]{\frac{EJ}{h_1}} \tag{16}$$

и задаются соотношениями:

$$\tilde{W}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^2+\frac{1}{2}U^2+\frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2, \tag{17}$$

$$\tilde{S}=\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}\frac{\partial U}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial \tau}-a\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial \tau}. \tag{18}$$

За период бегущей гармонической волны (4) среднее значение (17) равно:

$$<\tilde{W}>=(\Omega^2+K^4+1+aK^2)\left|A\right|^2, \qquad (19)$$

а среднее значение (18) равно:

$$<\tilde{S}>=(4\Omega K^2+2a\Omega K)\left|A\right|^2, \qquad (20)$$

где $\left|A\right|^2=AA^*$.

Скорость переноса энергии вычисляем по формуле

$$\vartheta_{\text{эн}}=\frac{<\tilde{S}>}{<\tilde{W}>}, \qquad (21)$$

следующей из (13), (19), (20), и убеждаемся в справедливости соотношения (14), то есть:

$$\vartheta_{\text{эн}}=\frac{(a+2K^2)}{\pm\sqrt{K^2+a+\dfrac{1}{K^2}}}=\vartheta_{\text{гр}}. \qquad (22)$$

Справедливость соотношения (22) является дополнительным фактором, свидетельствующим о внутренней физической непротиворечивости модели (9).

Заключение

Анализ дисперсионных зависимостей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на обобщенном упругом основании, показал, что:

– при возрастании сдвиговой жесткости упругого основания волны, имеющие одинаковое волновое число (т.е. волны одинаковой длины), будут иметь большую частоту, большую фазовую и групповую скорости;

– частотный диапазон $0<\Omega<1$ представляет собой (как и для балки, лежащей на основании Винклера) зону непропускания;

– частоты и фазовые скорости изгибных волн при любом значении волнового числа больше частот и фазовых скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на основании Винклера, а те, в свою очередь, больше частот и фазовых скоростей изгибных волн, распространяющихся в свободной балке;

– групповые скорости изгибных волн при любом значении волнового числа больше групповых скоростей изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на упругом основании Винклера, но всегда меньше групповых скоростей изгибных волн, распространяющихся в свободной балке.

Анализ уравнения переноса энергии показал, что средняя скорость потока энергии для рассматриваемой системы равняется групповой скорости изгибной волны. Равенство этих скоростей служит дополнительным фактором, свидетельствующим о внутренней физической непротиворечивости модели изгибных колебаний балки, лежащей на обобщенном упругом основании.

Библиографический список

1. Winkler E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. – Prague, 1867.

2. Zimmerman H. Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. – Berlin, 1888.

3. Wieghardt K. Uber den Ralken auf Nachgibiebiger Unterlage // Zeitschriff fur AngewandteMathematik und Mechanik. – 1922. – Bd. 2, H. 3. – S. 165–184.

4. Филоненко-Бородич М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку // Труды Моск. электромех. ин-та инж. трансп. – 1945. – № 53. – С. 92–108.

5. Hetenyi M. Beams on Elastic Foundations. – University of Michigan Press, 1946. – 255 p.

6. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.

7. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Техническая теория расчета фундаментов на упругом основании // Труды МИСИ. – М.: Стройиздат, 1956. – Вып. 14 (154). – С. 12–31.

8. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 492 с.

9. Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. – Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts, 1996.

10. Дуплякин И.А. Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками // Прикладная математика и механика. – 1991. – Т. 55, № 3. – С. 461–471.

11. Александров В.М., Дуплякин И.А. Динамика бесконечной балки Тимошенко, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками, при движении деформируемого экипажа // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 180–197.

12. Сливкер В.И. К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 1. – С. 36–39.

13. Eisenberger M., Clastornik J. Beams on variable two-parameter elastic foundation // Computers and Structures. – 1986. – Vol. 23. – P. 351–356.

14. Куреннов С.С. Модель двухпараметрического упругого основания в расчете напряженного состояния клеевого соединения // Труды МАИ. – 2013. – № 66. – С. 7. www.mai.ru/science/trudy/

15. Рао Ч.К., Рао Л.Б. Закритическое поведение тонкостенной свободно опертой балки с открытым профилем поперечного сечения, покоящейся на двухпараметрической упругом основании, при ее кручении // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 1(347). – С. 204–213.

16. Wang T.M., Stephens J.E. Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – Vol. 51, no 2. – P. 149–155.

17. Wang T.M., Gagnon L.W. Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations // Journal of Sound and Vibration. – 1978. – Vol. 59, no 2. – P. 211–220.

18. Козел А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

19. Козел А.Г., Старовойтов Э.И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

20. Analitical solution for fracture problem of stope roof based on Pasternak foundation model / Q. Feng, Sh. Fu, Ch. Wang, W.W. Liu // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – 2019. – Vol. 56, no 2. – P. 142–150.

21. Неразрушающий контроль: справочник: в 7 т. / под ред. В.В. Клюева. – Т. 3: Ультразвуковой контроль. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.

22. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека / С.В. Бутова, С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, В.Г. Камчатный // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 1. – С. 3–84.

23. Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке / С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, В.Г. Камчатный, И.А. Одзерихо // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 3. – С. 21–27.

24. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, № 2. – С. 193–209.

25. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. – Н. Новгород: Наш дом, 2010. – 248 с.

26. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М.: Наука, 1989. – 344 с.

27. Гордон Дж. Конструкции, или почему не ломаются вещи. – М.: Мир, 1980.

28. Малков В.П. Энергоемкость механических систем. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995. – 258 с.

29. Умов Н.А. Избранные сочинения. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 575 с.

30. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. – Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. – 254 с.

References

1. Winkler E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit.*Prague,*1867

2. Zimmerman H. Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. *Berlin,* 1888.

3. Wieghardt K. Uber den ralken auf nachgibiebigerunterlage. *Zeitschriff fur AngewandteMathematik und Mechanik*,1922, bd.2, h.3, s.165-184.

4. Filonenko-Borodich M.M. The simplest model of elastic foundation, capable of distributing the loads. *Proceedings of the Moscow Electromechanacal Institute of Transport Endineers,* 1945, no 53, pp. 92-108. (in Russian).

5. Hetenyi M.Beams on Elastic Foundations. *University of Michigan Press*,1946, 255 p.

6. Pasternak P.L. Fundamentals of a New Method for Calculation Foundations on an Elastic Foundation using Two Coefficients, *Moscow, Gosstroyizdat,*1954, 56 p. (in Russian).

7. Vlasov V.Z., Leontiev N.N. Technical theory of calculating foundations on an elastic foundation, *Proceedings of the Moscow Civil Engineering Institute,* 1956, no 14 (154), pp.12-31. (in Russian).

8. Vlasov V.Z., Leontiev N.N. Beams, Plates, Shells on an Elastic Base. *Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature,* 1960, 492 p. (in Russian).

9. Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics, *Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts,* 1996.

10. Duplyakin I.A. The motion of a carriage with constant velocity along a beam of infinite length resting on a base with two elastic characteristics, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,*1991, vol.55, no 3, pp.376-384.

11. Aleksandrov V.M., Duplyakin I.A. Dynamics of an endless Timoshenko beam lying on a base with two elastic characteristics during the movement of a deformable crew. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics,*1996, no1, pp.180-197. (in Russian).

12. Slivker V.I. To the question of the appointment of the characteristics of a two-parameter elastic base. *Structural Mechanics and Calculation of Structures,*1981, no1, pp.36-39. (in Russian).

13. Eisenberger M., Clastornik J. Beams on variable two-parameter elastic foundation.*Computers and Structures,*1986, vol. 23, pp.351-356.

14. Kurennov S.S. Model of a two-parameter elastic base in calculating the stress state of the adhesive joint. *Electronic Journal "Proceedings of the Moscow Aviation Institute",*2013, no 66, 7 p. www.mai.ru/science/trudy/

15. Rao Ch.K., Rao L.B. Torsional post-buckling of a simply supported thin-walled open-section beam rasting on two-parameters foundation.*Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,*2018, vol.59, no 1, pp.176-184.

16. Wang T.M., Stephens J.E. Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations, *Journal of Sound and Vibration,*1977, vol. 51, no 2, pp.149-155.

17. Wang T.M., Gagnon L.W. Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations. *Journal of Sound and Vibration,*1978, vol. 59, no 2, pp.211-220.

18. Kozel A.G. Displacements in a circular three-layer plate on a two-parameter. *Mechanics. Research and Innovation,* 2017, no10, pp.90-95. (in Russian).

19. Kozal A.G., Starovoitov E.I. The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 2018, vol.24, no 3, pp. 392-406. (in Russian).

20. Feng Q., Fu Sh., Wang Ch., Liu W.W. Analitical solution for fracture problem of stope roof based on Pasternak foundation model. *Soil Mechanics and Foundation Engineering,* 2019, vol. 56, no 2, pp.142-150.

21. Non-Destructive Testing: Handbook in 7 Volumes. Edited by V.V. Klyuev. Volume 3: Ultrasonic Testing. *Moscow, Mashinostroenie.*2004. 864 p. (in Russian).

22. Butova S.V., Gerasimov S.I., Erofeev, V.I., Kamchatnyi V.G. Stability of high-speed objects moving along a rocket track guide. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability,* 2015, vol. 44, no 1, pp.1–5.

23. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G., Odzerikho I.A. The Sliding Contact Condition in Stability Analysis of Stage Motion for a Rocket Sled Track Facility. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability,* 2018, vol. 47, no 3, pp.221–226.

24. Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation and subject to a moving load. *Mechanics of. Solids*, 2021, vol. 56, no 7, pp.1295–1306.

25. Vesnitskii A.I. Selected Works on Mechanics. *Nizhny Novgorod, Nash Dom,*2010. 248 p. (in Russian)

26. Babeshko V.A., Glushkov E.V., ZinchenkoZh.F. Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. *Moscow, Nauka.* 1989. 344 p. (in Russian).

27. Gordon J.E. Structures: Or Why Things Don't Fall Down. *Penguin Books, Harmondsworth,* 1978.

28. Malkov V.P. Energy Intensity of Mechanical Systems. *Nizhny Novgorod, Publishing House of Nizhny Novgorod University.* 1995. 258 p. (in Russian).

29. Umov N.A. Selected Works. *Moscow - Leningrad, GITTL,* 1950. 575 p. (in Russian).

30. Gerasimov S.I., Erofeev V.I. Problems of Wave Dynamics of Structural Elements. *Sarov, RFNC-VNIIEF,*2015. 254 p. (in Russian).

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2021-2023 гг. по теме № 0030-2021-0025.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was carried out within the framework of the state task of the IAP RAS for fundamental scientific research for 2021-2023. on topic No. 0030-2021-0025.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.