Богачев И.В., Недин Р.Д. Моделирование сплошных и имеющих отверстия и включения неоднородных предварительно напряженных пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. С. 15–29. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.02

Bogachev I.V., Nedin R.D. Modeling of prestressed plates with material inhomogeneity, perforations and inclusions. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 3, pp. 15-29. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.02
УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛОШНЫХ И ИМЕЮЩИХ ОТВЕРСТИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПЛАСТИН

И.В. Богачев, Р.Д. Недин

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 25 марта 2022 г.
Одобрена: 19 мая 2023 г.
Принята к публикации:
15 июня 2023 г.

Ключевые слова:

предварительные напряжения, упругие пластины, неоднородность, перфорация, включения, анализ чувствительности, акустический метод, метод конечных элементов, FreeFem++.

АННОТАЦИЯ

Предложена модель планарных колебаний неоднородных предварительно напряженных пластин, как сплошных, так и имеющих набор отверстий и включений из других материалов. Свойства пластин и компоненты тензора предварительных напряжений (ПН) в рассмотренной плоской постановке считались функциями двух координат. Для формулировки краевых задач об установившихся планарных колебаниях пластин использована общая линеаризованная постановка задачи о колебаниях тела в условиях предварительного напряженно-деформированного состояния. Разработанная модель колебаний дает возможность задания произвольного типа предварительного состояния в пластине: как в виде аналитических зависимостей, так и численно – с помощью решения соответствующей задачи статики, в которой предварительные напряжения возникают в результате приложения некоторой начальной нагрузки. Для реализации конечно-элементного (КЭ) подхода к решению задач сформулирована слабая постановка задачи на основе проектирования исходных уравнений на поле возможных перемещений, удовлетворяющее главным граничным условиям. Для увеличения точности расчетов для пластин с отверстиями и включениями в этих областях использовалось локальное сгущение КЭ-сеток. Разработанный подход для расчета колебаний пластин реализован в виде программного комплекса в КЭ-пакете FreeFem++. Предложена методика оценки влияния ПН на динамические характеристики при различных видах нагрузок, с использованием которой был проведен комплексный анализ по выявлению наиболее чувствительных к изменению ПН-режимов зондирования, частотных диапазонов и областей считывания отклика для каждой из пластин. Полученные в процессе анализа результаты были систематизированы и обобщены, и был дан ряд практических рекомендаций по выбору режимов зондирования для каждого вида пластин, с помощью которых могут быть построены наиболее эффективные схемы идентификации трех компонент ПН.

© ПНИПУ

© **Богачев Иван Викторович** – к.т.н., н.с., e-mail: bogachev89@yandex.ru, ID: 0000-0002-4725-5102.
Недин Ростислав Дмитриевич – к.ф.-м.н., доц., e-mail: rdn90@bk.ru, ID: 0000-0003-4366-9591.

Ivan V. Bogachev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: bogachev89@yandex.ru, ID: 0000-0002-4725-5102.
Rostislav D. Nedin – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: rdn90@bk.ru), ID: 0000-0003-4366-9591.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MODELING OF PRESTRESSED PLATES WITH MATERIAL INHOMOGENEITY, PERFORATIONS AND INCLUSIONS

I.V. Bogachev, R.D. Nedin

Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 25 May 2022
Approved: 19 May 2023
Accepted for publication: 15 May 2023

Keywords:

prestress, elastic plates, inhomogeneity, perforation, inclusions, sensitivity analysis, acoustic method, finite element method, FreeFem++.

ABSTRACT

In the present article, we propose the model of in-plane oscillations of inhomogeneous prestressed plates, both solid ones and those containing a set of holes and inclusions made of different materials. We treat the plates' mechanical properties and the prestress tensor components in the considered 2D problem statement as functions of two coordinates. In order to formulate the boundary value problems of steady-state in-plane vibrations of plates, we employ the general linearized formulation for an elastic body under conditions of an initial stress-strain state. The developed vibration model makes it possible to specify an arbitrary type of prestress state in the plate in the form of analytical dependences, as well as numerically, by solving the corresponding static problem, in which prestresses arise as a result of applying some initial load. To implement the finite element (FE) approach to solving the problems, we formulated the weak problem statement by projecting the original governing equations on the field of test displacements satisfying the essential boundary conditions. To increase the accuracy of calculations for plates with holes and inclusions, the local refinement of FE meshes are used. The proposed approach to calculating plate vibrations is implemented as a software package via FreeFem++. A method for assessing the effect of prestress on dynamic plates' characteristics under various types of loads is described; a comprehensive analysis is carried out to identify the probing modes, frequency ranges and response pickup areas, most sensitive to the prestress changes, for each of the plates. We systematize and generalize the results obtained during the analysis, give a few practical recommendations on the choice of probing modes for each type of the plates considered, allowing to perform the most efficient schemes for identifying the prestress components.

© PNRPU

Введение

Ввиду активного применения в промышленности новых функционально-градиентных материалов (ФГМ) со сложными неоднородными физико-механическими свойствами, для которых характерно наличие предварительного напряженно-деформированного состояния, одной из наиболее актуальных задач современной механики деформируемого твердого тела является разработка и развитие моделей объектов, изготовленных из таких материалов. Современные технологии изготовления ФГМ, например 3D-печать, позволяют создавать объекты сложной геометрии, не используя классические технологии, в том числе литье, требующее дополнительного производства пресс-форм. Для изготовления ФГМ обычно используются высокотемпературные технологии [1; 2], такие как наплавка, спекание, нагартовка, ввиду чего после остывания в образцах присутствуют поля предварительных напряжений (ПН), достигающие уровней, оказывающих значительное влияние на их динамические характеристики [3]. Распределения механических свойств и полей ПН в объектах из ФГМ могут быть описаны функциями пространственных координат, и в современной литературе материалы с зависимостью свойств от двух и трех координат соответственно обозначаются как 2D и 3D ФГМ (two-dimensional and three-dimensional functionally graded materials) [4; 5]. Одним из классов конструкционных элементов, широко использующихся в различных областях производства, строительства, технологии и медицины, являются пластинчатые конструкции – как сплошные, так и имеющие отверстия и включения. Для неоднородных пластин характерна зависимость механических свойств и ПН от двух координат, в связи с этим их принято относить к 2D ФГМ. При этом полноценное моделирование преднапряженных 2D ФГМ-пластин в настоящее время достаточно слабо развито; вместе с тем создание адекватных моделей, описывающих их поведение, необходимо для практического анализа их напряженно-деформированного состояния при различных воздействиях и построения на его основе теоретических основ решения задач идентификации их физических характеристик и полей ПН с помощью акустического подхода.

Вопросам моделирования неоднородных пластин, в частности, функционально-градиентных (ФГ), посвящен ряд современных работ. Статья [6] представляют собой обзор методик измерения свойств ФГМ на основе изучения свободных колебаний и динамической устойчивости ФГ пластин. Рассмотрены различные виды смесей исходных материалов, из которых изготовлены пластины, и влияние их распределения по объему тела на динамические характеристики. Работы [7; 8] посвящены построению моделей колебаний ФГ пластин в конечно-элементных (КЭ) пакетах, в частности ANSYS,

с помощью которых исследуется влияние законов изменения свойств пластин на их динамические характеристики – прогиб и амплитудно-частотные характеристики (АЧХ).

Измерению предварительных напряжений посвящено большое количество исследований, опубликованных в последние годы. Во многих работах исследуются задачи по определению ПН, возникающих в процессе сварочных операций при обработке пластин. В работе [9] представлено моделирование трехмерного распределения остаточных напряжений в сварных швах в жаропрочных сплавах на основе никеля, используемых в разработке компонентов авиадвигателей. Для построения трехмерной модели «деформация – ползучесть» используются технологии искусственного интеллекта и методы нечеткой логики, демонстрирующие хорошее соответствие экспериментальным данным. В статье [10] изучалось ПНС в сварном шве кольцевой конструкции, моделируемой цилиндрическим обручем. Метод глухих отверстий использовался для проверки распределения остаточного напряжения в кольцевой конструкции, и результаты испытаний сравнивались с результатами расчета методом конечных элементов (МКЭ) с целью проверки достоверности результатов. Это позволило сформулировать рекомендации по оптимальному режиму сварки кольцевых конструкций. В статье [11] были исследованы остаточные напряжения, возникшие в двух образцах композитных трехслойных пластин при использовании газовой вольфрамовой дуговой сварки. Измерены значения растягивающих ПН на границах соединения материалов. Работа [12] посвящена оценке продольных и поперечных ПН, возникающих при сварке при различной температуре. Было показано, что при незначительном углублении в сварной шов продольные напряжения носят растягивающий характер, а поперечные – сжимающий, при этом сварка с более низкой температурой вызвала более высокий уровень ПН. Статья [13] содержит экспериментальное исследование по применению нового метода формирования остаточных напряжений – лазерной ударной обработки. Исследовано влияние толщины обрабатываемых пластин на сформированное ПНС. Показано, что в более толстых пластинах достигается значительно больший уровень ПН. Также стоит остановиться на других практических методах измерения ПН. В работе [14] авторами предложена ультразвуковая экспериментальная методика измерения распределения ПН. Исследования проводились для образцов рельса; изучалась задержка прохождения продольных волн, вызванная наличием растягивающих напряжений, что позволило оценивать их уровень при неразрушающей диагностике. Статья [15] посвящена экспериментальному исследованию авиационных тонкостенных рам, получаемых из пластин с помощью фрезерования, в которых из-за низкой жесткости существенное влияние на деформацию оказывают остаточные напряжения. На основе экспериментальных данных предложена модель прогнозирования остаточных напряжений при фрезеровании пластин из алюминиевого сплава 7075 на основе применения нейронной сети и генетического алгоритма. Модель была протестирована на реальных данных и показала неплохую точность прогнозирования. В статье [16] предложен неразрушающий подход к идентификации остаточного напряжения для тонких пластин с использованием комплексного подхода, использующего параметризацию ПНС с помощью функции напряжений Эри и определения введенных параметров путем решения задачи нелинейной оптимизации.

Актуальным направлением прикладной механики является моделирование пластин с отверстиями и включениями. В работе [17] исследован вопрос оптимизации коэффициентов концентрации напряжений в ФГ-пластинах за счет выбора материалов, которые входят в состав ФГМ. В статье [18] рассмотрена двумерная задача изгиба тонких ФГ-пластин с круглым отверстием. Исследованы два различных случая: цельная ФГМ-пластина с круглым отверстием и ФГМ-кольцо, армированное однородной перфорированной пластиной. В работе также рассмотрен вопрос оптимизации коэффициентов концентрации напряжений за счет выбора материальных параметров пластин. Модели перфорированных пластин также находят применение в медицине и биомеханике, в частности, в технологиях накостного остеосинтеза, когда для сращивания переломов используется соединение и фиксация обломков кости с помощью титановых пластин компрессионного типа, имеющих специальные отверстия по всей длине [19; 20].

Стоит отметить работы, посвященные идентификации неоднородных полей ПНС в пластинах. Статья [21] посвящена исследованию прямоугольных пластин с ПН в рамках гипотез Тимошенко в декартовой системе координат. Были исследованы обратные задачи идентификации двумерного поля ПН с помощью нескольких методик, основанных на акустическом подходе с использованием МКЭ, также применявшемся в работе [22]. В работе [23] для пластины в рамках гипотез деформирования Тимошенко получена постановка задачи об установившихся планарно-изгибных колебаниях перфорированной пластины из ФГМ в условиях ПНС. Построен алгоритм численного решения прямой задачи с помощью МКЭ, исследованы возможности идентификации параметров плоского ПНС на основе данных измерения частотных характеристик пластины. В статье [24] представлены модели круглых сплошной и кольцевой неоднородных предварительно напряженных пластин в рамках гипотез Тимошенко. Для решения обратных задач идентификации ПН использован специальный проекционный подход, основанный на построенных слабых постановках задач, позволивший определять искомые характеристики в заданных классах функций.

Настоящая работа продолжает тематику ранее проведенных исследований [21; 23; 24] и других. К основным целям данного исследования отнесем:

- создание моделей колебаний сплошных и имеющих отверстия и включения неоднородных пластин с учетом неоднородного ПНС;
- разработка на основе этих моделей методики оценки влияния ПН на динамические характеристики при различных способах нагружения;
- проведение с ее помощью ряда вычислительных экспериментов и комплексного анализа их результатов с целью выявления наиболее чувствительных к изменению ПН режимов зондирования, частотных диапазонов и областей измерения отклика для каждой из рассматриваемых пластин.

1. Планарные колебания предварительно напряженной тонкой пластины с отверстиями и включениями

Для формулировки задач о колебаниях пластин будем исходить из общей линеаризованной постановки задачи об установившихся колебаниях трехмерного упругого тела с ПН [25], которая имеет вид:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{T}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0,\\ &\mathbf{T}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{0}}\cdot\nabla\mathbf{u}+\boldsymbol{\sigma},\\ &\mathbf{u}\big|_{\Omega_u}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\big|_{\Omega_\sigma}=\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{T}$ – несимметричный тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{u}$ – вектор малых перемещений, $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{0}}$ – симметричный тензор добавочных напряжений Кирхгофа, $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{0}}$ – симметричный тензор ПН, ρ – плотность, ω – частота колебаний; тело жестко защемлено на части поверхности Ω_u, на части Ω_σ действует периодическая нагрузка вида $\mathbf{P}e^{i\omega t}$, $\mathbf{n}$ – единичный вектора внешней нормали к поверхности тела. Данная модель позволяет описывать неоднородные поля ПН различной природы, в частности, возникающие при разгрузке после образования локализованных пластических зон.

На основе постановки (1.1) сформулируем задачу о колебаниях неоднородной предварительно напряженной изотропной тонкой пластины толщины h, занимающей область $S\times[-h/2,h/2]$, в которой имеются отверстия либо включения. Будем рассматривать случай плоского напряженного состояния, в котором отсутствуют напряжения на площадках, перпендикулярных оси x_3 ($T_{i3}=T_{3i}=0,\ \ i=1..3$), при этом отличными от нуля являются две компоненты вектора перемещений: $u_1(x_1,x_2)$ и $u_2(x_1,x_2)$. Для моделирования неоднородности материала и плоского поля ПН будем считать, что параметры Ламе, плотность, и компоненты тензора ПН являются функциями двух координат: $\lambda(x_1,x_2)$, $\mu(x_1,x_2)$, $\rho(x_1,x_2)$, $\sigma^0_{ij}(x_1,x_2)$. В случае рассмотрения пластин с отверстиями либо вставками данные функции могут задаваться в кусочно-аналитическом виде. В качестве граничных условий для границы области серединного сечения пластины $\partial S=l_u\cup l_\sigma$ используется жесткая заделка на части границы l_u и механическая нагрузка на l_σ, задаваемая компонентами P_1, P_2. Тогда линеаризованная постановка задачи об установившихся колебаниях пластины описывается следующей краевой задачей [25, 26]:

$$\begin{aligned} &T_{ij,j}+\rho\omega^2u_i=0,\\ &T_{ij}=\sigma_{ij}+u_{i,m}\sigma^0_{mj},\\ &\sigma_{ij}=\lambda^*\delta_{ij}u_{\mathrm{m},m}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\\ &u_i\big|_{l_u}=0,T_{ij}n_j\big|_{l_\sigma}=P_i,(\mathrm{i,j,m}=1..2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

В рамках плоского напряженного состояния использован параметр $\lambda^*=2\lambda\mu\left(\lambda+2\mu\right)^{-1}$.

В постановку (1.2) входят три независимые компоненты симметричного тензора ПН σ^0_{11}, σ^0_{12}, σ^0_{22}, которые удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma^0_{ij,j}=0$.

2. Конечно-элементная схема решения задач расчета колебаний

Для построения КЭ-схемы расчета колебаний пластин сформулируем слабую постановку задачи (1.2), спроектировав уравнения движения на поле возможных перемещений $\mathbf{v}$, удовлетворяющих главным граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\int_S\left(\sigma^0_{11}u_{i,1}v_{i,1}+\sigma^0_{12}\left(u_{i,1}v_{i,2}+u_{i,2}v_{i,1}\right)+\sigma^0_{22}u_{i,2}v_{i,2}\right)dS+\\ &+\int_S\left(\lambda u_{i,i}v_{j,j}+2\mu\varepsilon^u_{ij}\varepsilon^v_{ij}-\omega^2\rho u_iv_i\right)dS-\int_{l_\sigma}P_iv_idl=0,\\ &\varepsilon^u_{ij}\varepsilon^v_{ij}=u_{1,1}v_{1,1}+\frac{1}{2}\left(u_{1,2}+u_{2,1}\right)\left(v_{1,2}+v_{2,1}\right)+u_{2,2}v_{2,2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для определенности далее будем рассматривать прямоугольные пластины, серединные сечения которых ограничены областью $\left\{x_1\in[0,l],x_2\in[-a/2,a/2]\right\}$. Каждая из пластин может быть сплошной либо ослабленной набором отверстий (одним или несколькими), либо в ней может быть набор вставок. В работе будут приведены частные случаи: для сплошной пластины, для пластин с одним или двумя отверстиями, а также одной или двумя вставками. У каждой из пластин считается жестко защемленной грань $x_1=0$ (слева на всех последующих изображениях), к остальным граням приложены нормальные и касательные нагрузки. Схематичные изображения каждой из рассмотренных в исследовании пластин и общие схемы нагружения представлены на рис. 1. Случаи с большим количеством отверстий или вставок, либо иного их совместного расположения также могут быть исследованы на основе предлагаемой модели и разработанного КЭ-подхода, описанного далее.

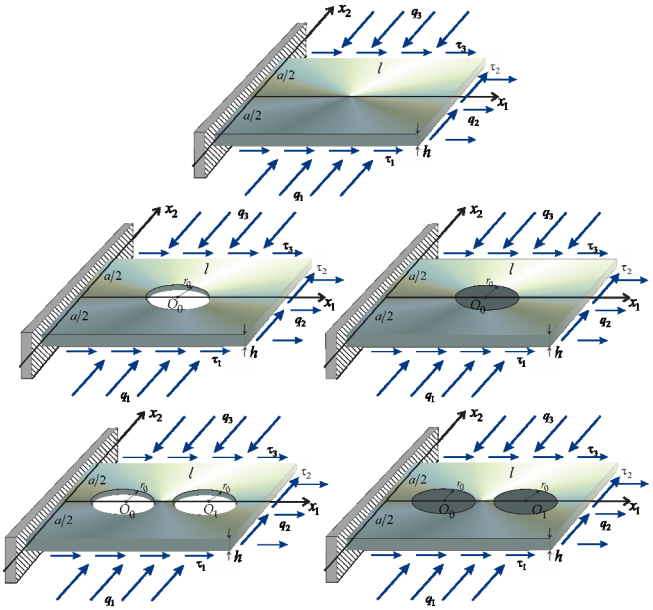


Рис. 1. Схематичные изображения рассмотренных пластин

Fig. 1. Schematic representations of the considered plates

Реализация КЭ-схемы решения задач расчета планарных колебаний на основе слабой постановки (2.1) проводилась в пакете FreeFem++ [27]. При расчетах была использована КЭ-сетка с квадратичной аппроксимацией с разбиением не менее 250×150. При этом для пластин с отверстиями и включениями в этих областях использовалось локальное сгущение сетки для увеличения точности расчетов. Предложенная модель позволила задавать ПН как в аналитическом виде, так и в численном – как результат решения соответствующей задачи статики, в которой ПН возникают в результате приложения некоторой начальной нагрузки.

3. Анализ решения прямых задач для выявления оптимальных режимов зондирования

На практике функции ПН $\sigma_{ij}^0(x_1,x_2)$, возникшие в результате некоторого начального воздействия на пластину, являются неизвестными, и важной задачей является их идентификация, позволяющая определить уровень ПН и характер его распределения в пластине. Для этого необходимо изучать соответствующие обратные задачи [28; 29], в которых используется некоторая дополнительная информация, получаемая в результате специальных экспериментов по зондированию. Если для идентификации применяется неразрушающий акустический подход, то в качестве дополнительной информации используется акустический отклик – например, значения АЧХ, измеренные в некоторых точках пластины в заданных частотных диапазонах. При доступности измерения акустического отклика на части границы в конечном наборе частот обратные задачи являются нелинейными и существенно некорректными, а для их решения требуются специальные подходы [28; 30]. В рамках этих подходов для построения эффективной процедуры идентификации необходим оптимальный выбор следующих параметров эксперимента по зондированию:

1) видов прикладываемой зондирующей нагрузки;

2) областей, в которых будет измеряться акустический отклик;

3) частотных диапазонов, в которых будет проводиться идентификация.

Таким образом, эксперимент должен быть организован так, чтобы процедура зондирования была максимально чувствительна к изменениям искомых функций ПН. Конкретизируя данное условие, можно выразить следующим образом: перечисленные параметры эксперимента должны быть выбраны таким образом, чтобы их сочетание давало наибольшую по абсолютной величине разницу в значениях амплитуд перемещения для пластины с ПН относительно амплитуд перемещения пластины без ПН. Для оценки влияния параметров эксперимента на амплитуды перемещения в настоящей работе использовался подход, при котором в качестве меры была принята величина разницы длин векторов перемещений $|\mathbf{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$ для пластины без ПН и пластины с ПН в процентном соотношении. Величина влияния вычислялась по формуле, аналогичной формуле для относительной погрешности [31]:

$$\delta(x_1,x_2)=\frac{\big\|\mathbf{u}|-|\mathbf{u}_0\big\|}{\max\limits_{x_1,x_2\in S}|\mathbf{u}_0|}\cdot100\,\%. \qquad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор перемещения в заданной точке области при наличии ПНС выбранного типа, $\mathbf{u}_0$ – при отсутствии ПНС. В знаменателе формулы (3.1) находится максимальная амплитуда перемещения в области при отсутствии ПНС. Данный подход позволяет эффективно сравнивать влияние ПНС на амплитуды перемещения для каждого из видов нагружений – по максимальному значению функции $\delta(x_1,x_2)$, а также выявлять области для измерения акустического отклика – в которых эта величина наибольшая.

Ниже представлены результаты анализа влияния приведенных параметров эксперимента на функцию $\delta(x_1,x_2)$ и АЧХ. В КЭ-расчетах для рассматриваемых пластин выбраны следующие размеры $l=1$ м, $a=0{,}5$ м. Для пластин с отверстиями и вставками их радиус составляет $r_0=0{,}2$ м. Пластины считались изготовленными из стали, которой соответствуют параметры $E=198$ ГПа, $\nu=0{,}28$, $\rho=7{,}88$ тн/м^3. Для вставок выбран существенно более жесткий материал – кубический нитрид бора, ему соответствуют параметры $E=706$ ГПа, $\nu=0{,}26$, $\rho=3{,}44$ тн/м^3. В программной реализации МКЭ свойства пластины в таком случае задавались в виде кусочно-заданных функций. Пласти-

ны рассматривались с жестко защемленной левой гранью $x_1 = 0$. К пластинам прикладывались различные виды нагружения, представленные в следующем разделе, их общая форма имеет вид:

$$\left(T_{11}n_1 + T_{12}n_2\right)\Big|_{l_\sigma} = P_1, \quad \left(T_{21}n_1 + T_{22}n_2\right)\Big|_{l_\sigma} = P_2. \qquad (3.2)$$

В экспериментах в следующих разделах для определенности уровень ПН задавался как результат решения предварительной задачи статики, в которой к пластинам прикладывалась нормальная распределенная по правой боковой грани растягивающая по оси x_1 начальная нагрузка и уровень вычисляемых ПН соответствовал уровню значений $\tilde{\sigma}^0_{\gamma\beta} = 10^{-3} \cdot E$, входящему в диапазон наиболее часто встречающихся на практике значений ПН [25]. При проведении исследования также были рассмотрены другие случаи задания ПН: как результат применения сжимающей, изгибной, сдвиговой начальных нагрузок, а также их комбинаций.

3.1. Анализ чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки. Выбор областей, в которых будет сниматься акустический отклик

В первой части анализа исследовалось влияние типа зондирующей нагрузки на функцию $\delta(x_1, x_2)$ на основе серии вычислительных экспериментов по растяжению по оси x_1, сжатию по оси x_2, изгибу, сдвигу. Ниже представлены табл. 1–5, соответствующие каждой из рассмотренных пластин, в которых для каждого из экспериментов по зондированию приведены изображения деформации пластин, а также 2D-графики функции влияния $\delta(x_1, x_2)$, шкалы ее изменения в процентном выражении и максимальное значение функции влияния. Для удобства функция $\delta(x_1, x_2)$ на 2D-графиках отображается оттенками синего цвета – от светлого (минимальное значение) до темного (максимальное значение).

Таблица 1

Анализ чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки для сплошной пластины

Table 1

Analysis of the sensitivity of prestress to the types of probing load for a solid plate

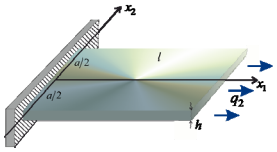
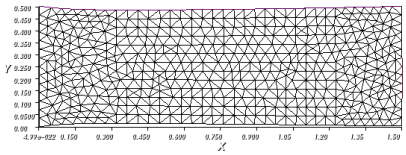
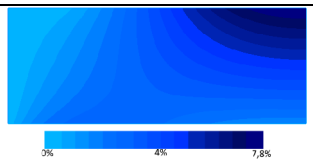
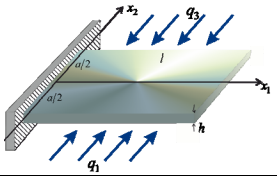
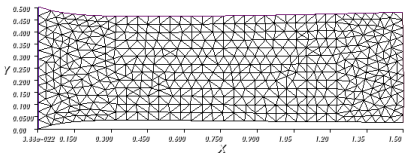
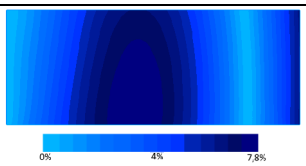
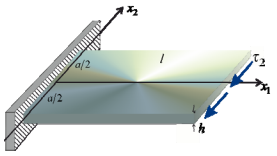
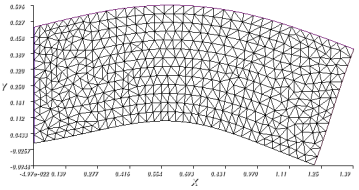
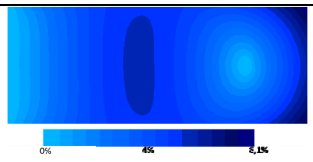
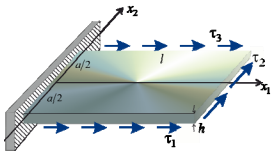
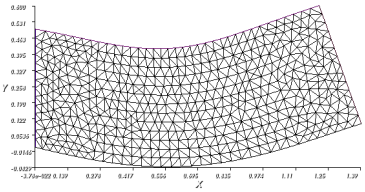
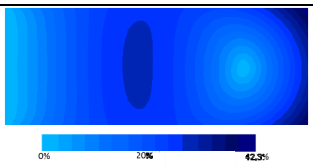
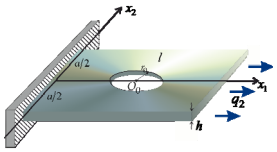
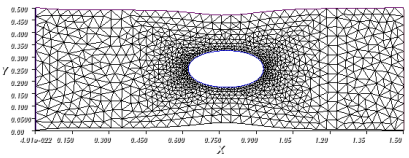
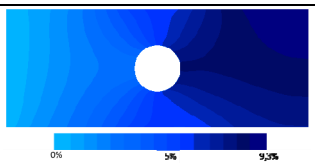
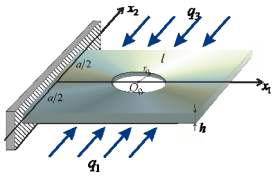
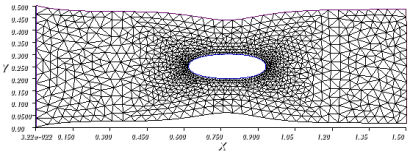
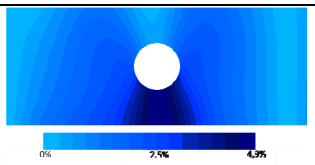
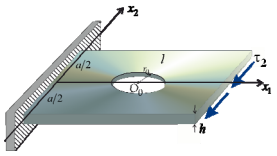
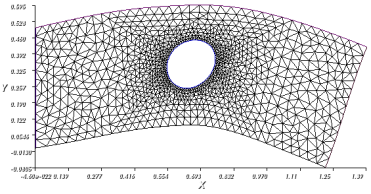
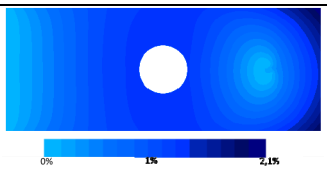
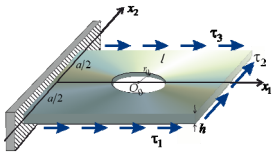
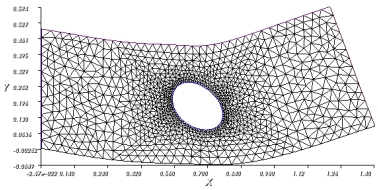
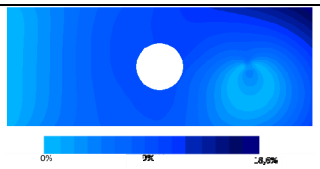
Схема нагружения	Деформация пластины	Чувствительность $\delta(x_1, x_2)$
Растяжение по x_1 		 $\max_{x_1,x_2 \in S} \lvert\delta(x_1, x_2)\rvert = 7{,}8\,\%$
Сжатие по x_2 		 $\max_{x_1,x_2 \in S} \lvert\delta(x_1, x_2)\rvert = 7{,}8\,\%$
Изгиб 		 $\max_{x_1,x_2 \in S} \lvert\delta(x_1, x_2)\rvert = 8{,}1\,\%$
Сдвиг 		 $\max_{x_1,x_2 \in S} \lvert\delta(x_1, x_2)\rvert = 42{,}3\,\%$

Таблица 2

Анализ чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки для пластины с одним отверстием

Table 2

Analysis of the sensitivity of prestress to the types of probing load for a plate with one hole

Схема нагружения	Деформация пластины	Чувствительность $\delta(x_1,x_2)$
Растяжение по x_1 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=9{,}3\,\%$
Сжатие по x_2 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=4{,}9\,\%$
Изгиб 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=2{,}1\,\%$
Сдвиг 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=18{,}6\,\%$

Вычисления проводились для частоты колебаний $\omega=850$ Гц, находящейся в окрестности (ниже) второй резонансной частоты пластин.

Результаты экспериментов для сплошной пластины (см. табл. 1) показывают, что наиболее эффективным является зондирование с использованием сдвиговой нагрузки. При этом другие виды нагружения также дают достаточную чувствительность отклика, и при выборе области, в которой будет сниматься акустический отклик, наиболее эффективным будет выбор точек, расположенных в правом верхнем углу пластины.

Результаты экспериментов для пластины с одним отверстием (см. табл. 2) показывают аналогичные данные: зондирование сдвиговой нагрузкой дает наибольший эффект. При его использовании следует снимать отклик в точках, расположенных в правом верхнем углу пластины. Данная область также подходит для экспериментов с изгибной и растягивающей нагрузками. При использовании сжимающей нагрузки наиболее чувствительной является область под отверстием на нижней грани пластины.

Эксперименты для пластины с двумя отверстиями (см. табл. 3) также показывают наибольшую эффективность зондирования сдвиговой нагрузкой. При этом в дополнение к областям наибольшей чувствительности, совпадающим с областями для пластины с одним отверстием, в данном случае отклик следует снимать на верхней и нижней гранях пластины в точках между отверстиями. Лишь для эксперимента по растяжению следует выбирать точки в правом верхнем углу пластины.

Результаты экспериментов для пластин с одной или двумя жесткими вставками (см. табл. 4 и 5) качественно совпадают с результатами экспериментов для сплошной пластины: как и там наибольшую эффективность показало зондирование сдвиговой нагрузкой. Область, в которой наиболее эффективным будет анализ акустического отклика, также находится в правом верхнем углу. При этом, как и для пластин с отверстиями, в обоих случаях для экспериментов по сжатию отклик можно снимать в средней части верхней или нижней граней пластин.

Таблица 3

Анализ чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки для пластины с двумя отверстиями

Table 3

Analysis of the sensitivity of prestress to the types of probing load for a plate with two holes

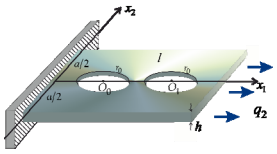
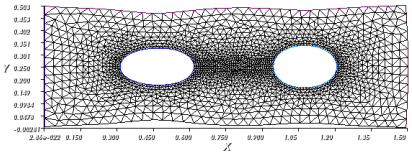
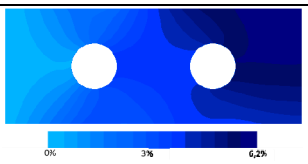
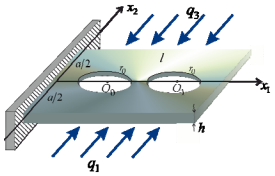
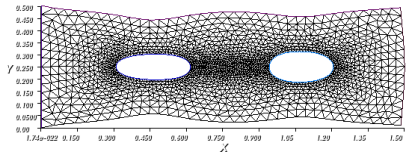
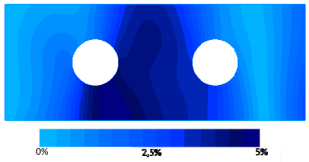
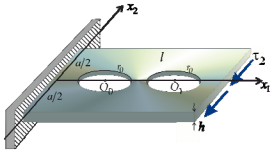
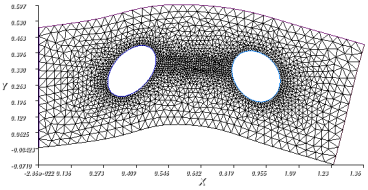
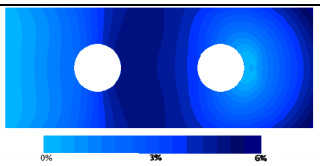
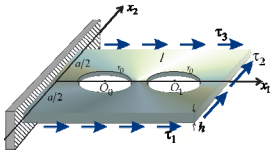
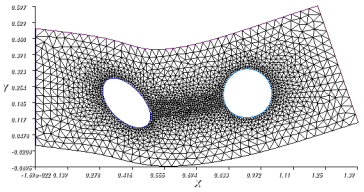
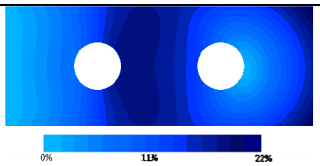
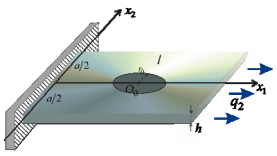
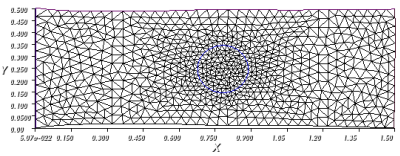
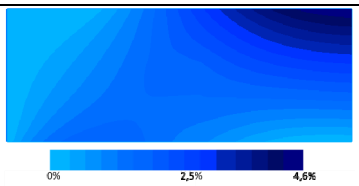
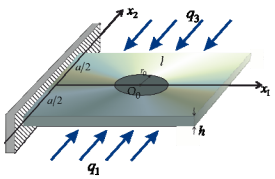
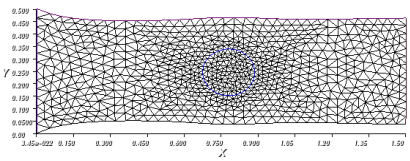
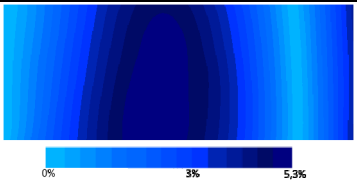
Схема нагружения	Деформация пластины	Чувствительность $\delta(x_1,x_2)$
Растяжение по x_1 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=6{,}2\,\%$
Сжатие по x_2 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=5\,\%$
Изгиб 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=6\,\%$
Сдвиг 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=22{,}0\,\%$

Таблица 4

Анализ чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки для пластины с одной вставкой

Table 4

Analysis of the sensitivity of prestress to the types of probing load for a plate with one insert

Схема нагружения	Деформация пластины	Чувствительность $\delta(x_1,x_2)$
Растяжение по x_1 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=4{,}6\,\%$
Сжатие по x_2 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=5{,}3\,\%$

Окончание табл. 4

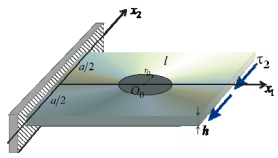
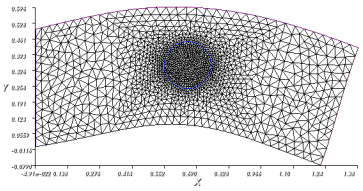
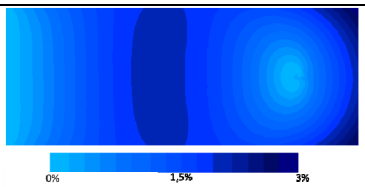
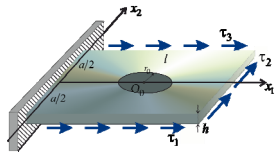
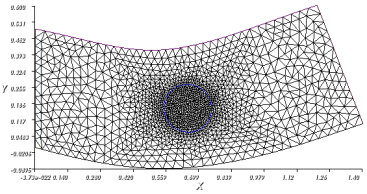
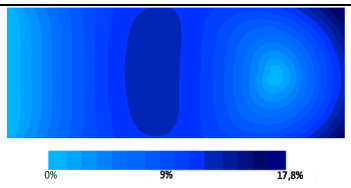
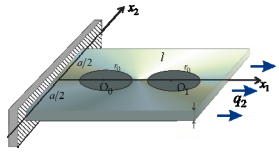
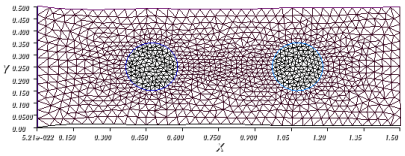
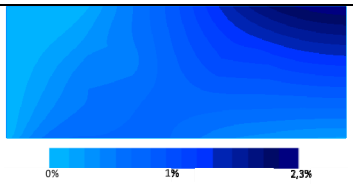
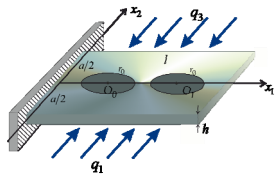
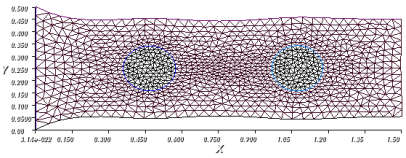
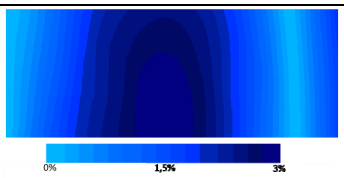
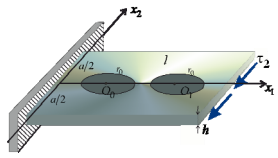
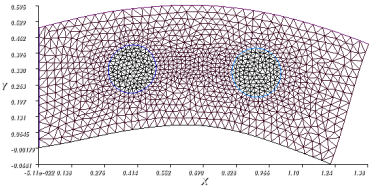
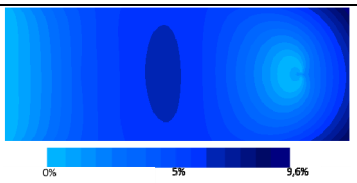
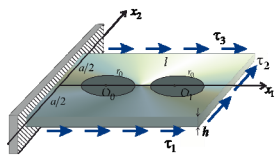
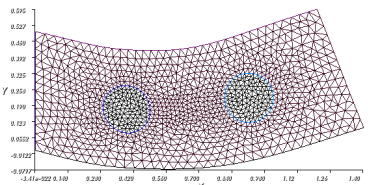
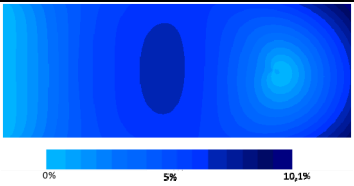
Схема нагружения	Деформация пластины	Чувствительность $\delta(x_1,x_2)$
Изгиб 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=3\,\%$
Сдвиг 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=17{,}8\,\%$

Таблица 5

Анализ чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки для пластины с двумя вставками

Table 5

Analysis of the sensitivity of prestress to the types of probing load for a plate with two inserts

Схема нагружения	Деформация пластины	Чувствительность $\delta(x_1,x_2)$
Растяжение по x_1 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=2{,}3\,\%$
Сжатие по x_2 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=3\,\%$
Изгиб 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=9{,}6\,\%$
Сдвиг 		 $\max\limits_{x_1,x_2\in S}\lvert\delta(x_1,x_2)\rvert=10{,}1\,\%$

Замечание. Отметим, что эксперименты, подобные описанным в данном разделе, были проведены и для других наборов начальных нагружений, приводящих к другим типам ПНС в пластине. Кроме растягивающей начальной нагрузки при решении задач статики рассматривалась изгибающая, сдвиговая и комплексная (с приложением одновременно нормальных и касательных нагрузок к различным граням). Затем для каждого из полученных полей ПНС был проведен анализ, аналогичный представленному в данном разделе. Было выявлено, что характер неоднородности ПН во всех этих случаях, даже с учетом наличия локальных концентраторов напряжений для отверстий и включений, не оказывает качественного влияния на вид функции чувствительности $\delta(x_1,x_2)$, и представленные выше результаты анализа по выбору области для измерения акустического отклика являются обобщающими для всех рассмотренных в исследовании распределений ПНС. В связи с незначительной относительной разницей в результатах сравнения характера чувствительности для различных рассмотренных типов ПН эти результаты не приведены в настоящей работе.

3.2. Выбор частотных диапазонов зондирования

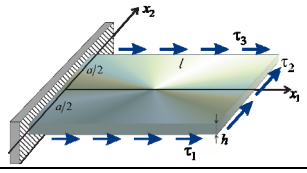
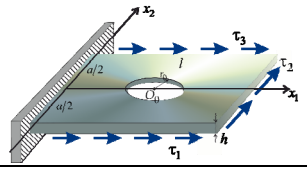
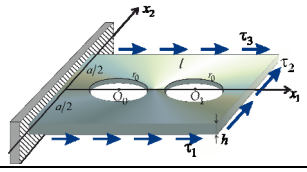
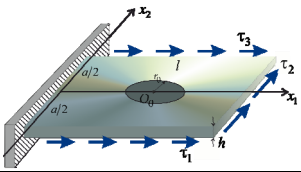
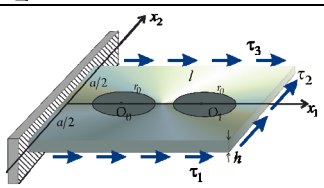
В проведенных ранее исследованиях [21; 24; 32; 34] для одномерных и двумерных тел было выявлено, что наибольшее влияние на динамические характеристики тел ПН оказывают при зондировании в частотных диапазонах, находящихся в достаточно малых окрестностях резонансных частот. В данном разделе изучено влияние ПН на значения первых трех резонансных частот для каждой из пластин при зондировании сдвиговой нагрузкой, которая показала наибольшую эффективность в предыдущем разделе. Результаты исследования представлены в табл. 6.

Таблица 6

Значения первых трех резонансных частот для каждой из пластин в экспериментах со сдвиговой нагрузкой

Table 6

The values of the first three resonant frequencies for the plates during experiments with shear loading

Пластина (случай сдвиговой нагрузки)	ПН	Первая резонансная частота, Гц	Вторая резонансная частота, Гц	Третья резонансная частота, Гц
	Без ПН	217,278	939,784	966,797
	С ПН	223,605	947,206	967,323
	Разница, %	*2,91*	*0,79*	*0,05*
	Без ПН	212,587	907,034	971,336
	С ПН	218,598	907,714	979,181
	Разница, %	*2,83*	*0,07*	*0,81*
	Без ПН	211,552	846,054	871,146
	С ПН	217,335	853,99	871,882
	Разница, %	*2,73*	*0,94*	*0,08*
	Без ПН	220,39	966,185	1002,67
	С ПН	226,784	973,598	1003,22
	Разница, %	*2,90*	*0,77*	*0,05*
	Без ПН	225,22	992,735	1042,27
	С ПН	231,721	1000,1	1042,83
	Разница, %	*2,89*	*0,74*	*0,05*

Полученные результаты показывают, что наибольшим образом наличие ПН влияет на значение первой резонансной частоты: для пластин с ПН ее значение увеличивается на 2,7–2,9 % относительно пластин без ПН. Значения второй и третьей резонансных частот увеличиваются значительно меньше.

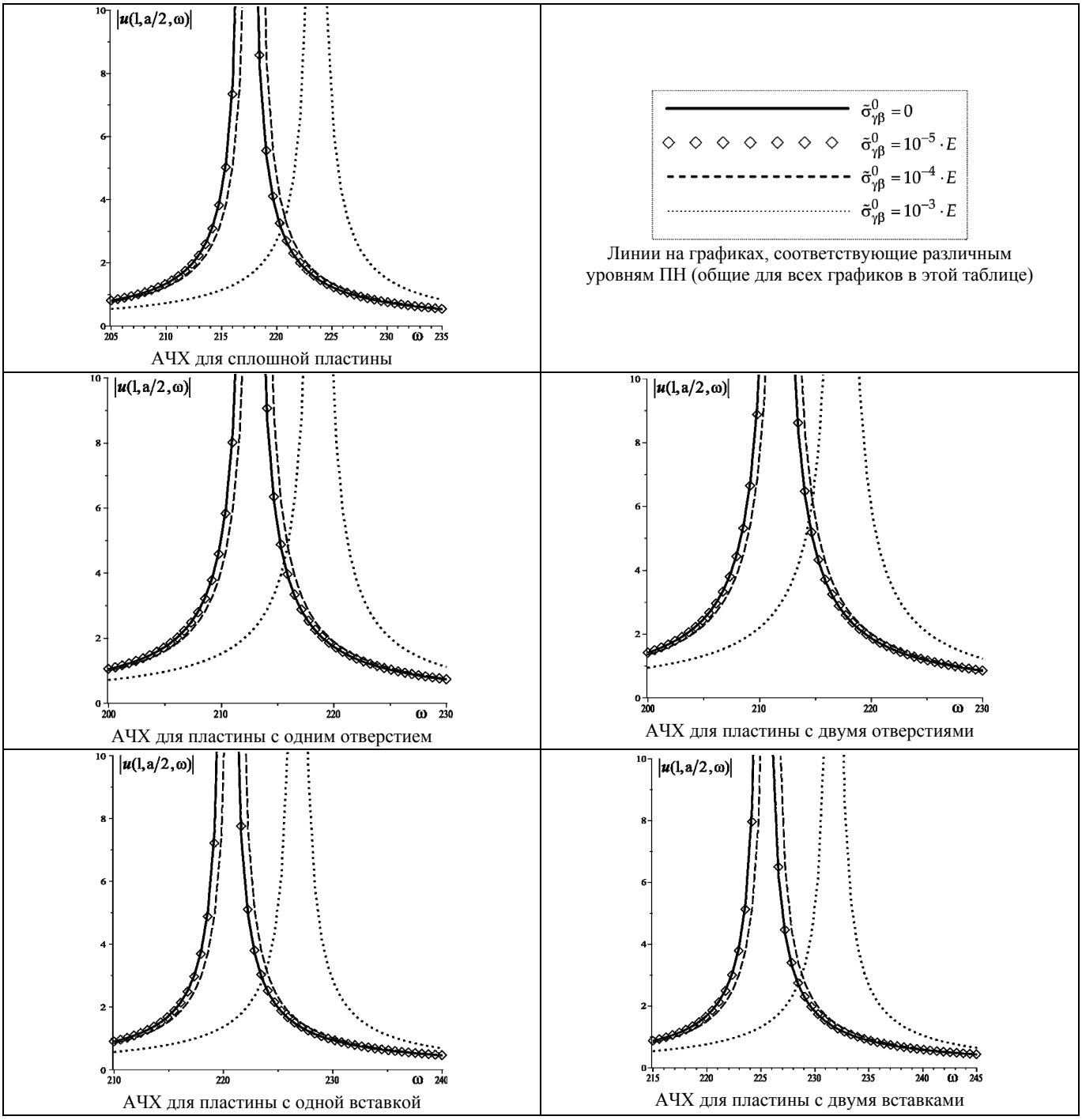
Замечание. Эксперименты по анализу чувствительности ПН к типам зондирующей нагрузки из табл. 1–5 были также проведены для частоты, находящейся в окрестности первого резонанса $\omega=180$, его результаты совпадают с приведенными выше по влиянию вида нагрузки на функцию меры чувствительности $\delta(x_1,x_2)$.

Таблица 7

Наборы графиков АЧХ для каждой из рассматриваемых пластин при отсутствии ПН и для случаев различных его уровней

Table 7

Sets of frequency response graphs for each of the plates under consideration in the absence of PS and for cases of its various levels



Линии на графиках, соответствующие различным уровням ПН (общие для всех графиков в этой таблице)

АЧХ для сплошной пластины

АЧХ для пластины с одним отверстием

АЧХ для пластины с двумя отверстиями

АЧХ для пластины с одной вставкой

АЧХ для пластины с двумя вставками

Проиллюстрируем полученные результаты путем анализа влияния уровня ПН для каждой из пластин на акустический отклик – на функции АЧХ в окрестности первой резонансной частоты в точке $(x,y)=(l,a/2)$, находящейся в правом верхнем углу и являющейся информативной для всех рассмотренных пластин, в случае приложения сдвиговой нагрузки. В табл. 7 представлены наборы графиков АЧХ для различных значений уровня ПН: $\tilde{\sigma}^0_{\gamma\beta}=0$ (отсутствие ПН, сплошная линия) и $\tilde{\sigma}^0_{\gamma\beta}=\{10^{-5},10^{-4},10^{-3}\}\cdot E$ (точки и пунктирные) для каждой из рассматриваемых пластин для модельного случая однородного ПНС, заданного тремя постоянными значениями компонент тензора ПН.

Из графиков видно, что различия в АЧХ наиболее существенным образом проявляются вблизи первой резонансной частоты. Во всех случаях при увеличении уровня ПН значения этой резонансной частоты сдвигаются вправо, что видно как из графиков, приведенных в табл. 7, так и из данных о значения резонансных частот, приведенных в табл. 6. Иными словами, при увеличении уровня ПН возрастает эффективная жесткость пластин. Схожая ситуация возникала и при исследовании ряда других задач по моделированию ПН [21; 24; 34; 35]. Также отметим, что для пластин с отверстиями значения резонансных частот снижаются, а для пластин с жесткими включениями увеличиваются, что также соответствует изменению эффективной жесткости [23].

4. Выводы и обобщения

Подведем некоторые итоги проведенных исследований по анализу влияния параметров экспериментов на результаты зондирования.

1. Выбор вида зондирующей нагрузки.

- Наиболее эффективным с точки зрения чувствительности акустического отклика к ПН во всех исследованных пластинах оказался режим зондирования сдвиговой нагрузкой.
- Для сплошных пластин примерно с одинаковой эффективностью могут применяться и растягивающая/сжимающая и изгибающая зондирующие нагрузки.
- Для пластин с одним отверстием или одной вставкой более эффективно воздействие сжимающей или растягивающей зондирующей нагрузками, чем изгибающей.
- Для пластин с двумя и более отверстиями или вставками более эффективным оказалось воздействие изгибающей нагрузкой, чем растягивающей или сжимающей.

2. Выбор областей измерения акустического отклика (функции перемещения).

- Для всех видов рассмотренных пластин при зондировании сдвиговой нагрузкой наиболее чувствительной к ПН оказалась свободная (правая) грань пластины, следовательно, измерять акустический отклик следует в наборе точек на ней.
- Для всех видов рассмотренных пластин при зондировании растягивающей нагрузкой измерять перемещение наиболее эффективно на правой либо верхней гранях пластины в окрестности 10 % отдаления от правого верхнего угла.
- Для сплошных пластин при воздействии сжимающей либо изгибной зондирующей нагрузками для измерения отклика также следует выбирать правую грань.
- Для всех видов пластин при использовании сжимающей нагрузки также весьма информативной является область в середине нижней грани пластины. Наиболее явно это проявляется для пластин с отверстиями и вставками.

3. Выбор частотного диапазона для зондирования.

Для всех видов рассмотренных пластин наибольшее влияние ПН на АЧХ проявляется в окрестности первой резонансной частоты.

Как уже отмечалось выше, основной целью проведенного анализа является выявление наиболее эффективных режимов зондирования, позволяющих построить схемы решения обратных задач определения уровня ПН и характера распределения его компонент в каждой из рассмотренных пластин. При этом общая постановка обратных задач [28; 36] в данном случае заключается в определении трех функций-компонент тензора ПН $\sigma^0_{11}(x_1,x_2)$, $\sigma^0_{12}(x_1,x_2)$, $\sigma^0_{22}(x_1,x_2)$ с использованием информации об измеренной в экспериментах с применением зондирующей периодической нагрузки функции перемещения $u_i|_{l_\sigma}=f_i$ на некоторой части границы в заданном частотном диапазоне $\omega\in[\omega_-,\omega_+]$. При этом, так как одновременно определить все три искомые функции-компоненты $\sigma^0_{11}(x_1,x_2)$, $\sigma^0_{12}(x_1,x_2)$, $\sigma^0_{22}(x_1,x_2)$ из одного эксперимента не представляется возможным, необходим выбор трех различных видов зондирующей нагрузки.

Исходя из этого, для обобщения полученных результатов выделим наиболее эффективные комбинации режимов нагружения и соответствующие области измерения акустического отклика для каждой из пластин.

I. Сплошная пластина. Выбранные режимы зондирования (см. табл. 1):

1. Растяжение по x_1. Измерение отклика в правом верхнем углу.

2. Изгиб. Измерение отклика на правой грани (например, в верхней части).

3. Сдвиг. Измерение отклика на правой грани (например, в верхней части).

Таким образом, для сплошной пластины при реализации всех трех экспериментов можно ограничиться расположением считывающих датчиков, измеряющих перемещение пластины, в верхней части правой грани, что упрощает практическую реализацию.

II. Пластины с одним отверстием либо вставкой. Выбранные режимы зондирования (см. табл. 2 и 4):

1. Растяжение по x_1. Измерение отклика в правом верхнем углу.

2. Сжатие по x_2. Измерение отклика на средней части нижней грани.

3. Сдвиг. Измерение отклика на верхней части правой грани.

Для пластин с одним отверстием или вставкой при реализации первого и третьего экспериментов необходимо размещение считывающих датчиков в верхней части правой грани, для второго – потребуются дополнительные датчики на нижней грани.

III. Пластины с двумя и более отверстиями/вставками. Выбранные режимы зондирования (см. таб. 3 и 5):

1. Сжатие по x_2. Измерение отклика в средней части верхней или нижней грани.

2. Изгиб. Измерение отклика на правой грани.

3. Сдвиг. Измерение отклика на правой грани.

Для пластин с двумя и более отверстиями или вставками также потребуется размещение считывающих датчиков на правой грани (в любой ее части) для второго и третьего экспериментов, и дополнительных датчиков на середине верхней или нижней грани для первого эксперимента.

Частотный диапазон, как было выявлено выше, для каждой из комбинаций экспериментов необходимо выбирать в окрестности первой резонансной частоты (не включая ее для устойчивости вычислительной схемы).

Замечание. Также стоит отметить, что наличие отверстий или включений в пластинах при различных видах воздействия значительно меняет деформационную картину и местоположение областей, в которых наиболее эффективно измерять акустический отклик. В связи с этим с точки зрения построения схем идентификации полей ПН перед рассмотрением каждой конкретной обратной задачи для пластин различной формы и с различным взаимным расположением отверстий и включений обоснованным будет проведение анализа, подобного предложенному в данной работе с использованием разработанного программного комплекса.

Заключение

Результаты анализа чувствительности акустического отклика к изменению предварительных напряжений, проведенного в данной работе для сплошных, а также имеющих отверстия и включения пластин, могут быть использованы для построения методик идентификации функций двумерного распределения компонент ПН в пластинах. В работе даны практические рекомендации по выбору наиболее эффективных режимов зондирования и областей размещения считывающих датчиков, измеряющих акустический отклик в пластинах, используемый в качестве дополнительной информации при постановке обратных задач идентификации ПН.

Библиографический список

1. Carpinteri A., Pugno N. Thermal loading in multi-layer and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size e□ects // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 828–841.

2. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // Materials Science and Engineering: A. – 2003. – Vol. 362. – P. 81–106.

3. Schajer G.S. Practical Residual Stress Measurement Methods. – Wiley, 2013. – 560 p.

4. Nemat-Alla M., Khaled A., Hassab-Allah I.M. Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46. – P. 2774–2786.

5. Cho J-R. A Numerical Evaluation of SIFs of 2-D Functionally Graded Materials by Enriched Natural Element Method // Applied Sciences. – 2019. – No. 9. – P. 3581.

6. Loja M., Barbosa J.I. In-plane functionally graded plates: A study on the free vibration and dynamic instability behaviours // Composite Structures. – 2020. – Vol. 237. – P. 111905.

7. Deepak S.A., Shetty R.A. Static and free vibration analysis of functionally graded rectangular plates using ANSYS // Materials Today: Proceedings. – 2021. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.76

8. Vinh P.V., Huy L.Q. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via a new hyperbolic shear deformation theory // Defence Technology. – 2021. DOI: 10.1016/j.dt.2021.03.006

9. Uzun F., Korsunsky A.M. The use of eigenstrain theory and fuzzy techniques for intelligent modeling of residual stress and creep relaxation in welded superalloys // Materials Today: Proceedings. – 2020. – No. 33(4). – P. 1880–1883.

10. Study on Residual Stress of Welded Hoop Structure / W. Ma, H. Zhang, W. Zhu, F. Xu, C. Yang // Applied Sciences. – 2021. – No. 10(8). – P. 2838.

11. Experimental investigation on residual stress distribution in zirconium/titanium/steel tri-metal explosively welded composite plate after cutting and welding of a cover plate / N. Li, M. Zhang, J.-L.Ye, C. Liu // Journal of Manufacturing Proc. – 2021. – No. 64. – P. 55–63.

12. Evaluation of residual stresses in isothermal friction stir welded 304L stainless steel plates / M. Bhattacharyya, T. Gnaupel-Herold, K. Raja, J. Darsell, S. Jana, I. Charit // Materials Science and Engineering: A. – 2021. – Vol. 826. – P. 141982.

13. Experimental research on global deformation and through-thickness residual stress in laser peen formed aluminum plates / Z. Zhang, Y. Zhang, M. O'Loughlin, J. Kong // Surfaces and Interfaces. – 2021. – Vol. 25. – P. 101241.

14. Experimental Measurement of Residual Stress Distribution in Rail Specimens Using Ultrasonic LCR Waves / Y.-I. Hwang, G. Kim, Y.-I. Kim, J.-H. Park, M.Y. Choi, K.-B. Kim // Applied Sciences. – 2021. – No. 11(19). – P. 9306.

15. Experimental Analysis and Prediction Model of Milling-Induced Residual Stress of Aeronautical Aluminum Alloys / S. Yi,

Y. Wu, H. Gong, C. Peng, Y. He // Applied Sciences. – 2021. – No. 11(13). – P. 5881.

16. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis // International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Vol. 236–237. – P. 111350.

17. Enab T.A. Stress concentration analysis in functionally graded plates with elliptic holes under biaxial loadings // Ain Shams Engineering Journal. – 2014. – Vol. 5. – P. 839–850.

18. Out-of-Plane Bending of Functionally Graded Thin Plates with a Circular Hole / Q. Yang, H. Cao, Y. Tang, B. Yang // Applied Sciences. – 2020. – No. 10(7). – P. 2231.

19. Биомеханика остеосинтеза накостными пластинами четырехфрагментарного перелома плечевой кости / С.А. Линник, М.М. Ранков, Ю.А. Шукейло, О.В. Щеглов // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1(51). – С. 52–64

20. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния эндопротеза / Л.Б. Маслов, А.Ю. Дмитрюк, М.А. Жмайло, А.Н. Коваленко // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 4. – С. 414–433.

21. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // Math. Meth. Appl. Sci. – 2018. – Vol. 41, no. 4. – P. 1600–1618.

22. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 375–383.

23. Недин Р.Д. Моделирование и частотный анализ предварительно напряженных функционально-градиентных пластин с отверстиями // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 192–201.

24. Bogachev I.V. Determination of Prestress in Circular Inhomogeneous Solid and Annular Plates in the Framework of the Timoshenko Hypotheses // Applied Sciences. – 2021. – No. 11. – P. 9819.

25. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация: монография. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 206 с.

26. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore – Maryland: The John Hopkins University, 1972. – 417 p.

27. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2008. – 256 с.

28. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.

29. Ватульян А.О., Недин Р.Д. К восстановлению характеристик плоского начального напряженного состояния // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – № 5. – С. 27–37.

30. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

31. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.

32. Detection of nonuniform residual strain in a pipe / I.V. Bogachev, V.V. Dudarev, R.D. Nedin, A.O. Vatulyan // International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vol. 139–140. – P. 121–128.

33. The Investigation of the Initial Stress-Strain State Influence on Mechanical Properties of Viscoelastic Bodies / I.V. Bogachev, A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev, R.D. Nedin // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – No 2. – P. 15–24.

34. Богачев И.В. Совместная идентификация механических характеристик функционально-градиентных пластин в рамках моделей Кирхгофа и Тимошенко // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 4. – С. 19–28.

35. Богачев И.В., Ватульян А.О. О моделировании тел с отслаивающимися покрытиями при учете полей предварительных напряжений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 2. – С. 5–16.

36. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // ZAMM. – 2014. – Vol. 94. – P. 142–149.

References

1. Carpinteri A., Pugno N. Thermal loading in multi-layer and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects. *International Journal of Solids and Structures,* 2006, Vol. 43, pp. 828–841.

2. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, Vol. 362, pp. 81-106.

3. Schajer G.S. Practical Residual Stress Measurement Methods. Wiley, 2013, 560 p.

4. Nemat-Alla M., Khaled A., Hassab-Allah I.M. Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading. *International Journal of Solids and Structures,* 2009, Vol. 46, pp. 2774-2786.

5. Cho J-R. A Numerical Evaluation of SIFs of 2-D Functionally Graded Materials by Enriched Natural Element Method. *Applied Sciences*, 2019, No. 9, pp. 3581.

6. Loja M., Barbosa J.I. In-plane functionally graded plates: A study on the free vibration and dynamic instability behaviours. *Composite Structures*, 2020, Vol. 237, pp. 111905.

7. Deepak S.A., Shetty R.A. Static and free vibration analysis of functionally graded rectangular plates using ANSYS. *Materials Today: Proceedings*, 2021. doi: 10.1016/j.matpr.2020.12.76

8. Vinh P.V., Huy L.Q. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via a new hyperbolic shear deformation theory. *Defence Technology*, 2021. doi: 10.1016/j.dt.2021.03.006

9. Uzun F., Korsunsky A.M. The use of eigenstrain theory and fuzzy techniques for intelligent modeling of residual stress and creep relaxation in welded superalloys. *Materials Today: Proceedings,* 2020, Vol. 33(4), pp. 1880-1883.

10. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on Residual Stress of Welded Hoop Structure. *Applied Sciences.* 2021, Vol. 10(8), pp.2838.

11. Li N., Zhang M., Ye J.-L., Liu C. Experimental investigation on residual stress distribution in zirconium/titanium/steel tri-metal explosively welded composite plate after cutting and welding of a cover plate*. Journal of Manufacturing Processes*, 2021, No. 64, pp. 55-63.

12. Bhattacharyya M., Gnaupel-Herold T., Raja K., Darsell J., Jana S., Charit I. Evaluation of residual stresses in isothermal friction stir welded 304L stainless steel plates. *Materials Science and Engineering: A,* 2021, Vol. 826, pp. 141982.

13. Zhang Z., Zhang Y., O'Loughlin M., Kong J. Experimental research on global deformation and through-thickness re-

sidual stress in laser peen formed aluminum plates. *Surfaces and Interfaces,* 2021, Vol. 25, – pp. 101241.

14. Hwang Y.-I., Kim G., Kim Y.-I., Park J.-H., Choi M.Y. Kim K.-B. Experimental Measurement of Residual Stress Distribution in Rail Specimens Using Ultrasonic LCR Waves. *Applied Sciences,* 2021, No. 11(19), pp. 9306.

15. Yi S., Wu Y., Gong H., Peng C., He, Y. Experimental Analysis and Prediction Model of Milling-Induced Residual Stress of Aeronautical Aluminum Alloys. *Applied Sciences*, 2021, No. 11(13), pp. 5881.

16. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, Vol. 236-237, pp. 111350.

17. Enab T.A. Stress concentration analysis in functionally graded plates with elliptic holes under biaxial loadings. *Ain Shams Engineering Journal,* 2014, Vol. 5, pp. 839-850.

18. Yang Q., Cao H., Tang Y., Yang B. Out-of-Plane Bending of Functionally Graded Thin Plates with a Circular Hole. *Applied Sciences,* 2020, No. 10(7), pp. 2231.

19. Linnik S.A., Rankov M.M., Shukeilo Yu.A., Shcheglov O.V. Biomekhanika osteosinteza nakostnymi plastinami chetyrekhfragmentarnogo pereloma plechevoj kosti [Biomechanics of osteosynthesis with bone plates of a four-fragment fracture of the humerus]. *Russian Journal of Biomechanics*, 2011, Vol. 15, No.1(51), pp. 52–64.

20. Maslov L.B., Dmitryuk A.Yu., Zhmailo M.A., Kovalenko A.N Konechno-elementnyj analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya endoproteza [Finite element analysis of the stress-strain state of the endoprosthesis]. *Russian Journal of Biomechanics*, 2021, Vol. 25, No.4, pp. 414–433.

21. R.D. Nedin, A.O. Vatulyan., I.V. Bogachev. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Math. Meth. Appl. Sci.,* 2018, Vol. 41, No. 4, pp. 1600–1618.

22. Zhamakochyan K.A., Sargsyan C.O. Finite element method for calculation of bending of micropolar elastic thin plates. *Comp. Continuum Mechanics*, 2016, Vol. 9(3), pp. 375–383.

23. Nedin R.D. Modeling and frequency analysis of prestressed functionally graded plates with holes. *Comp. Continuum Mechanics*, 2019, Vol. 12(2), 192–201.

24. Bogachev, I.V. Determination of Prestress in Circular Inhomogeneous Solid and Annular Plates in the Framework of the Timoshenko Hypotheses. *Applied Sciences,* 2021, No. 11, pp. 9819.

25. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D., Predvaritel'nye napriazheniia: modelirovanie i identifikatsiia. Monografiia [Prestresses: modeling and identification. Monograph], Rostov-on-Don: Publishing House of SFU, 2015, 206 p.

26. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972, 417 p.

27. Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. Ispol'zovanie paketa konechnyh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii: uchebnoe posobie [Using the FreeFem++ Finite Element Package for Problems in Fluid Dynamics, Electrophoresis and Biology: A Tutorial.], Rostov-on-Don: Publishing House of SFU, 2008, 256 p.

28. Vatulyan A.O. Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki. [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019, 272 p.

29. Vatulyan A., Nedin R. On the Reconstruction of the Characteristics of the Plane Initial Stress State. *Mechanics of Solids*, 2020, Vol. 55, pp. 624-632.

30. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyh zadach. [Methods of ill-posed problems solving]. Moscow, Nauka, 1986, 288 p.

31. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 2005, 512 p.

32. Bogachev I.V., Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *International Journal of Solids and Structures,* 2018, Vol. 139-140, pp. 121–128.

33. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D. The Investigation of the Initial Stress-Strain State Influence on Mechanical Properties of Viscoelastic Bodies. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, No. 2, pp. 15-24.

34. Bogachev I.V. Simultaneous identification of mechanical properties of functionally graded plates under the Kirchhoff and Tymoshenko models. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, No. 4, pp. 19-28.

35. Bogachev I.V., Vatulyan A.O. On modeling bodies with delaminating coatings taking into account the fields of prestresses. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, No. 1, pp. 5-16.

36. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate. *ZAMM*, 2014, Vol. 94, pp. 142-149.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-71-10045, https://rscf.ru/project/18-71-10045/, в Южном федеральном университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was supported by the Russian Science Foundation (project code 18-71-10045), https://rscf.ru/project/18-71-10045/, in the Southern Federal University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.