Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 2. Упругопластическое деформирование // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. С. 30–42. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.03

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 2. Elastic-plastic deformation. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 3, pp. 30-42. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.03
УДК 539.375

О ВЛИЯНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ НА ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТА. ЧАСТЬ 2. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ

В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин

Тульский государственный университет, Тула, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 18 января 2023 г.
Одобрена: 12 апреля 2023 г.
Принята к публикации:
15 июня 2023 г.

Ключевые слова:

J-интеграл, энергетическое произведение, упругопластическое деформирование, полная пластичность, критерий Треска – Сен-Венана.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается предельное состояние тонкого адгезионного слоя при его нормальном разрыве в плоском напряженном и плоском деформированном состояниях. Поведение слоя описывается идеальной упругопластической моделью с условием текучести Треска – Сен-Венана. Деформация слоя осуществляется посредством консолей, работающих в рамках соотношений теории пластин Миндлина – Рейснера. В области пластического течения адгезионного слоя принимается условие полной пластичности. Учитывается наличие нескольких диагональных компонент тензора напряжений в слое, связанных с напряжениями консолей условиями равновесия. На основе поставленной задачи получены аналитические представления для поля перемещений консолей в области сопряжения со слоем. На основе экспериментальных данных по разрушению адгезионных слоев с заданными механическими свойствами найдены критические значения J-интегралов в зависимости от типа рассматриваемой плоской задачи для слоя. Показано, что уменьшение толщины адгезионного слоя приводит к неограниченному росту деформаций в его концевой зоне, однако значения J-интегралов стабилизируются. При этом в случае плоского деформированного состояния длина пластической зоны уменьшается и основной вклад в J-интеграл вносит энергетическая составляющая. В плоском напряженном состоянии длина пластической зоны растет, и диссипативная составляющая J-интеграла превышает энергетическую. Получено существенное различие в критических значениях J-интеграла, что является следствием развитой зоны пластичности в плоском напряженном состоянии. Для плоской деформации в предельно тонких адгезионных слоях учет их упругопластических свойств несущественен, и значения J-интеграла могут быть найдены в рамках линейно упругой модели поведения адгезива или в модели с жестким сцеплением сопрягаемых тел, что исключает из рассмотрения механические свойства адгезива.

© ПНИПУ

© **Богачева Виктория Эдуардовна** – асп., e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, ID: 0000-0002-6303-2160
Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: 0000-0003-0371-7704.
Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: len4ic92@gmail.com, ID: 0000-0003-2313-2084.
Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., проф., e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: 0000-0003-1456-8281.

Viktoriya E. Bogacheva – PhD student, e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, ID: 0000-0002-6303-2160
Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: 0000-0003-0371-7704.
Leonid V. Glagolev – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: len4ic92@gmail.com, ID: 0000-0003-2313-2084.
Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: 0000-0003-1456-8281.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ON THE INFLUENCE OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF A THIN ADHESION LAYER ON THE COMPOSITE STRENGTH. PART 2. ELASTIC-plastic DEFORMATION

V.E. Bogacheva[1], V.V. Glagolev[1], L.V. Glagolev[2], A.A. Markin[1]

[1]Tula State University, Tula, Russian Federation
[2]KBP named after academician A. Shipunov, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 18 January 2023
Approved: 12 April 2023
Accepted for publication:
15 June 2023

Keywords:

J-integral, energy product,
elastic-plastic deformation,
total plasticity,
Tresca – Saint-Venant criterion.

ABSTRACT

The limiting state of a thin adhesive layer at its normal rupture in the plane stressed and plane deformed states is considered. The behavior of the layer is described by an ideal elastoplastic model with the Tresca – Saint-Venant yield condition. The deformation of the layer is carried out by means of consoles operating within the framework of the relations of the Mindlin – Reissner plate theory. In the area of plastic flow of the adhesive layer, the condition of complete plasticity is assumed. The presence of several diagonal components of the stress tensor in the layer, which are related to the cantilever stresses by the equilibrium conditions, is taken into account. On the basis of the problem posed, analytical representations are obtained for the displacement field of cantilevers in the region of conjugation with the layer. On the basis of experimental data on the destruction of adhesive layers with given mechanical properties, the critical values of J-integrals are found depending on the type of the considered plane problem for the layer. It is shown that a decrease in the thickness of the adhesive layer leads to an unlimited growth of deformations in its end zone, however, the values of the J-integrals stabilize. In this case, in the case of a plane deformed state, the length of the plastic zone decreases and the main contribution to the J-integral is made by the energy component. In a plane stressed state, the length of the plastic zone increases, and the dissipative component of the J-integral exceeds the energy one. A significant difference in the critical values of the J-integral is obtained, which is a consequence of the developed plasticity zone in the plane stress state. For plane deformation in extremely thin adhesive layers, taking into account their elastoplastic properties is insignificant and the values of the J-integral can be found within the framework of a linearly elastic model of adhesive behavior or in a model with rigid coupling of mating bodies, which excludes the mechanical properties of the adhesive from consideration.

© PNRPU

Введение

Исследование предельных состояний адгезионных слоев композитов предполагает использование той или иной математической модели. Основу математической модели составляет геометрическое представление адгезионного слоя. Одним из наиболее используемых представлений является модель слоя нулевой толщины. В этом случае в зоне обрыва связей адгезива с сопрягающими телами образуется трещиноподобный дефект типа математического разреза. Для прогнозирования несущей способности поврежденного слоя используется аппарат механики квазихрупкого разрушения. При этом рассматриваются как чисто сингулярные модели [1–4], так и когезионные модели [5–17] с конечным распределением поля напряжений в вершине математического разреза. В зависимости от значения поля напряжений каждая из моделей имеет свой локальный критерий разрушения, основанный на энергетическом критерии в виде потока упругой энергии или раскрытии трещины. Критический поток упругой энергии определяется через формулу податливости [2–4], основанной на использовании линейно упругих свойств, сопрягаемых адгезионным слоем тел. Основу когезионных моделей составляет закон взаимодействия сил сцепления, вводимый априори на основании конечности напряженного состояния в тупиковой точке математического разреза. В том и другом вариантах механические свойства адгезивов исключаются из рассмотрения. Отметим, что адгезивы наряду с упругими свойствами могут проявлять и выраженные пластические свойства [18; 19], что предполагает использование соответствующего критерия перехода из упругого деформирования в упругопластическое.

Нагружение адгезива по схеме нормального разрыва в рамках плоской задачи подразумевает наличие нескольких диагональных компонент тензора напряжений. Так, для слоя нулевой толщины из асимптотического решения теории упругости следует равенство компоненты отрыва и осевой компоненты. Однако данное обстоятельство не учитывается при рассмотрении критерия перехода в пластичность для плоского деформированного состояния, в котором предел текучести по компоненте отрыва формально увеличивается в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с плоским напряженным состоянием [20; 21].

Для корректной постановки упругопластической задачи необходимо рассматривать определяющие соотношения адгезионного слоя. Это возможно только при конечной толщине адгезива [22–28]. В данной работе на основании концепции слоя взаимодействия [25–28] приводится постановка задачи нагружения нормальным

разрывом ДКБ-образца с упругопластическим адгезионным слоем. Используя экспериментальные данные [19], получено численно-аналитическое решение задачи. Состояние слоя рассматривается как при плоском деформировании, так и при плоском напряженном состоянии. Сопрягаемые слоем консоли описываются соотношениями теории пластин Миндлина – Рейснера [29–31]. В области пластического течения адгезионного слоя принимается условие полной пластичности [32-35] широко используемое для решения практических задач [36–39].

1. Постановка задачи

Рассматривается расчетная схема нагружения двухконсольной балки (ДКБ-образца) с консолями 1 и 2, имеющими одинаковые механические и геометрические характеристики. Упругие консоли толщиной h на рис. 1 сопряжены адгезионным слоем *3*, с конечной толщиной δ_0 и упругопластическими свойствами, по длине ℓ. Зона обрыва связей консолей имеет длину a. Предполагается жесткая заделка правого торца образца при действующей антисимметричной распределенной нагрузке интенсивностью $\boldsymbol{P}$ по левому торцу.

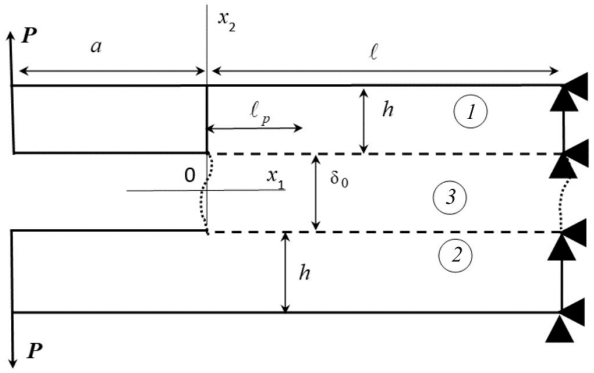


Рис. 1. Модель ДКБ-образца

Fig. 1. Model of a DCB sample

Зона пластического деформирования охватывает часть слоя длиной ℓ_p.

В силу симметрии задачи связанная система уравнений равновесия пластин *1* и *2* преобразуется в вариационное уравнение одной пластины [27; 28]:

$$\int_{S_1}\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{\varepsilon}ds+\int_{\ell}\overline{\sigma}_{22}\delta u_2^{+}dx_1+0{,}5\delta_0\int_{\ell}\overline{\sigma}_{11}\frac{\partial\delta u_1^{+}}{\partial x_1}dx_1=\int_{L_1}\mathbf{P}^1\cdot\delta\mathbf{u}dl\,, \quad (1)$$

где S_1 – площадь тела 1; $\mathbf{u}$ – векторное поле перемещений тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\overline{\sigma}$, $\overline{\varepsilon}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\overline{\sigma}_{11}(x_1)=\frac{1}{\delta_0}\int_{-0{,}5\delta_0}^{0{,}5\delta_0}\sigma_{11}(x_1,x_2)dx_2,$$

$$\overline{\sigma}_{22}(x_1)=\frac{1}{\delta_0}\int_{-0{,}5\delta_0}^{0{,}5\delta_0}\sigma_{22}(x_1,x_2)dx_2,\qquad \overline{\varepsilon}_{11}(x_1)=\frac{du_1^{+}(x_1)}{dx_1},$$

$\overline{\varepsilon}_{22}(x_1)=\dfrac{2u_2^{+}(x_1)}{\delta_0}$, u_s^{+} – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя; s = 1,2; L_1 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\cdot\cdot$ – двойное скалярное умножение; $\cdot$ – скалярное умножение.

Определяющие соотношения консоли принимаем в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij}=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu_1}{1-2\nu_1}\varepsilon\delta_{ij}\right), \quad (2)$$

где E_1, ν_1 – модуль упругости и коэффициент Пуассона пластины 1; $\varepsilon=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ – объемная деформация; δ_{ij} – символ Кронекера; $i,j=1,2,3$.

Для материала адгезионного слоя *3* определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций [25–28]. При упругом деформировании слоя связь средних напряжений и деформаций определяется законом Гука:

$$\overline{\sigma}_{ij}=\frac{E_3}{1+\nu_3}\left(\overline{\varepsilon}_{ij}+\frac{\nu_3}{1-2\nu_3}\overline{\varepsilon}\delta_{ij}\right), \quad (3)$$

где E_3, ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя.

В силу антисимметрии данного вида нагружения тензор средних напряжений слоя будет иметь диагональный вид. В области пластического деформирования адгезионного слоя предполагается выполнение критерия Треска – Сен-Венана [37; 40; 41] при условии полной пластичности – равенстве двух главных напряжений. Исходя из решения упругой задачи, рассмотренной в [27], для состояния плоской деформации будем предполагать выполнение следующего условия полной пластичности: $\overline{\sigma}_{11}=\overline{\sigma}_{33}$. В этом случае условие текучести запишем в виде:

$$\overline{\sigma}_{22}-\overline{\sigma}_{11}=2\tau_0\,. \quad (4)$$

В состоянии плоской деформации на участке $x_1\in(0;\ell_p)$ предполагаем линейную связь между объемной деформацией слоя и гидростатическим давлением p: $\overline{p}=3K\overline{\varepsilon}$, где K – модуль объемной деформации; $\overline{p}=\overline{\sigma}_{11}+\overline{\sigma}_{22}+\overline{\sigma}_{33}$. Таким образом получаем: $2\overline{\sigma}_{11}+\overline{\sigma}_{22}=3K\overline{\varepsilon}$, где $K=\dfrac{E_3}{3(1-2\nu_3)}$. Из последнего выражения и выражения (4) приходим к определяющим соотношениям на участке упругопластического деформирования слоя в состоянии плоской деформации:

$$\overline{\sigma}_{11}=K\overline{\varepsilon}-\frac{2}{3}\tau_0\,,\ \overline{\sigma}_{22}=K\overline{\varepsilon}+\frac{4}{3}\tau_0\,,\ \overline{\sigma}_{33}=\overline{\sigma}_{11}\,. \quad (5)$$

Для плоского напряжённого состояния слоя условие полной пластичности запишем в виде: $\bar{\sigma}_{11}=\bar{\sigma}_{22}$, а условие текучести принимает вид:

$$\bar{\sigma}_{22}=2\tau_0. \tag{6}$$

Определяющие соотношения на участке упругопластического деформирования слоя в плоском напряженном состоянии запишем:

$$\bar{\sigma}_{11}=\bar{\sigma}_{22}=2\tau_0,\ \bar{\sigma}_{33}=0. \tag{7}$$

Деформацию пластины рассматриваем в рамках теории Миндлина – Рейснера со следующим распределением поля перемещений:

$$u_1(x_1,x_2)=u_1^+(x_1)-\varphi(x_1)(x_2-\delta_0/2), \tag{8}$$

$$u_2(x_1,x_2)=u_2^+(x_1). \tag{9}$$

Подстановка распределений (8), (9) в (1) приводит к двум системам дифференциальных уравнений [27] для участка $x_1\in[-a;0)$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1}-Q_{12}=0,\ \frac{dQ_{11}}{dx_1}=0,\ \frac{dQ_{12}}{dx_1}=0, \tag{10}$$

и участка $x_1\in(0;\ell]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1}-Q_{12}=0,\ \frac{dQ_{11}}{dx_1}+0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1}=0,\ \frac{dQ_{12}}{dx_1}=\bar{\sigma}_{22}, \tag{11}$$

с условиями сопряжения для пластин, которые обеспечивают в том числе и сопряжение упругой и пластической частей адгезива в точке ℓ_p:

$$u_1^+\big|_{x_1=-0}=u_1^+\big|_{x_1=+0},\ u_2^+\big|_{x_1=-0}=u_2^+\big|_{x_1=+0},\ \varphi|_{x_1=-0}=\varphi|_{x_1=+0}, \tag{12}$$

$$M_{11}\big|_{x_1=-0}=M_{11}\big|_{x_1=+0},\ Q_{12}\big|_{x_1=-0}=Q_{12}\big|_{x_1=+0},$$
$$Q_{11}\big|_{x_1=-0}=\left(Q_{11}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=+0}, \tag{13}$$

$$u_1^+\big|_{x_1=\ell_p-0}=u_1^+\big|_{x_1=\ell_p+0},\ u_2^+\big|_{x_1=\ell_p-0}=u_2^+\big|_{x_1=\ell_p+0},$$
$$\varphi|_{x_1=\ell_p-0}=\varphi|_{x_1=\ell_p+0}, \tag{14}$$

$$M_{11}\big|_{x_1=\ell_p-0}=M_{11}\big|_{x_1=\ell_p+0},\ Q_{12}\big|_{x_1=\ell_p-0}=Q_{12}\big|_{x_1=\ell_p+0}, \tag{15}$$

$$\left(Q_{11}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=\ell_p-0}=\left(Q_{11}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=\ell_p+0}, \tag{16}$$

и естественными граничными условиями:

$$Q_{11}\big|_{x_1=-a}=0,\ Q_{12}\big|_{x_1=-a}=-Q_2,\ M_{11}\big|_{x_1=-a}=0, \tag{17}$$

где $Q_{11}(x_1)=\int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{11}dx_2$; $Q_{12}(x_1)=\int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{12}dx_2$; $M_{11}(x_1)=\int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2}\sigma_{11}(x_2-\delta_0/2)dx_2$.

На правом торце рассматриваются граничные условия:

$$u_1^+\big|_{x_1=\ell}=0,\ u_2^+\big|_{x_1=\ell}=0,\ \varphi\big|_{x_1=\ell}=0. \tag{18}$$

Определяющие соотношения теории Миндлина – Рейснера при упругом деформировании запишем в виде:

$$\sigma_{11}=D\left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}-\varphi'(x_1)(x_2-\delta_0/2)\right),$$
$$\sigma_{12}=L\left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1}-\varphi(x_1)\right), \tag{19}$$

где $L=k\frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$; $k=\frac{5}{6}$; $D=\frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$.

Из выражения (3) и представлений средних деформаций слоя через его граничные перемещения получим выражение напряженного состояния в слое на участке $x_1\in(\ell_p;\ell]$:

$$\bar{\sigma}_{11}=D_1\frac{du_1^+}{dx_1}+D_2u_2^+,\ \bar{\sigma}_{22}=C_1u_2^++C_2\frac{du_1^+}{dx_1}, \tag{20}$$

где $D_1=\frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $D_2=\frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$ – для плоской деформации; $D_1=\frac{E_3}{(1-\nu_3^2)}$, $D_2=\frac{2E_3\nu_3}{(1-\nu_3^2)\delta_0}$ – для плоского напряженного состояния; $C_1=\frac{2D_1}{\delta_0}$, $C_2=\frac{\delta_0D_2}{2}$.

Выражения обобщенных сил и моментов запишем в виде:

$$Q_{11}(x_1)=D\left(h\frac{du_1^+}{dx_1}-\frac{h^2}{2}\varphi'\right),\ Q_{12}(x_1)=Lh\left(\frac{du_2^+}{dx_1}-\varphi\right),$$
$$M_{11}(x_1)=D\left(\frac{h^2}{2}\frac{du_1^+}{dx_1}-\frac{h^3}{3}\varphi'\right). \tag{21}$$

В результате задача (10)–(21) становится замкнутой относительно трех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$ с учетом (5) для состояния плоской деформации и с учетом (7) для случая плоского напряженного состояния адгезионного слоя.

2. Метод решения задачи

Используя систему (10), перенесем граничные условия (17). С учетом условий сопряжения решений (20) в точке $x_1=0$ получим:

$$\left(Q_{11}+0{,}5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=+0}=0,\ Q_{12}\big|_{x_1=+0}=-Q_2,$$
$$M_{11}\big|_{x_1=+0}=-Q_2a. \tag{22}$$

Из (11) с учетом (20) и (21) получим систему из трех дифференциальных уравнений на участке $\left(\ell_p;\ell\right]$:

$$\begin{cases} Dh^2\left(\frac{1}{2}u_1^{+\prime\prime}-\frac{h}{3}\varphi''\right)-Lh\left(u_2^{+\prime}-\varphi\right)=0; \\ Dh\left(u_1^{+\prime\prime}-\frac{h}{2}\varphi''\right)+0.5\delta_0\left(D_1u_1^{+\prime\prime}+D_2u_2^{+\prime}\right)=0; \\ Lh\left(u_2^{+\prime\prime}-\varphi'\right)=C_1u_2^{+}+C_2u_1^{+\prime}. \end{cases} \quad (23)$$

Из (11) с учетом (5), (21) получим систему дифференциальных уравнений на участке $\left(0;\ell_p\right]$ для случая плоской деформации:

$$\begin{cases} Dh^2\left(\frac{1}{2}u_1^{+\prime\prime}-\frac{h}{3}\varphi''\right)-Lh\left(u_2^{+\prime}-\varphi\right)=0; \\ Dh\left(u_1^{+\prime\prime}-\frac{h}{2}\varphi''\right)+0,5\delta_0\left(\frac{2K}{\delta_0}u_2^{+\prime}+Ku_1^{+\prime\prime}\right)=0; \\ Lh\left(u_2^{+\prime\prime}-\varphi'\right)=\frac{2K}{\delta_0}u_2^{+}+Ku_1^{+\prime}+\frac{4}{3}\tau_0 \end{cases} \quad (24)$$

и плоского напряженного состояния с учетом (7), (21):

$$\begin{cases} Dh^2\left(\frac{1}{2}u_1^{+\prime\prime}-\frac{h}{3}\varphi''\right)-Lh\left(u_2^{+\prime}-\varphi\right)=0; \\ Dh\left(u_1^{+\prime\prime}-\frac{h}{2}\varphi''\right)=0; \\ Lh\left(u_2^{+\prime\prime}-\varphi'\right)=2\tau_0. \end{cases} \quad (25)$$

На участке $\left(\ell_p;\ell\right]$, согласно работе [28], общее решение (23) запишем в виде:

$$\begin{cases} u_1^{+}=\left(\frac{Lh\mu_1}{C_2}-\frac{Lh}{C_2}\frac{\left(\mu_1^2-m_2\right)}{m_1\mu_1}-\frac{C_1}{\mu_1C_2}\right)\tilde{C}_{14}e^{\mu_1x_1}- \\ -\left(\frac{Lh\mu_1}{C_2}+\frac{Lh}{C_2}\frac{\left(\mu_2^2-m_2\right)}{m_1\mu_2}-\frac{C_1}{\mu_1C_2}\right)\tilde{C}_{15}e^{-\mu_1x_1}+ \\ +\left(\frac{Lh\mu_3}{C_2}-\frac{Lh}{C_2}\frac{\left(\mu_3^2-m_2\right)}{m_1\mu_3}-\frac{C_1}{\mu_3C_2}\right)\tilde{C}_{16}e^{\mu_3x_1}- \\ -\left(\frac{Lh\mu_3}{C_2}+\frac{Lh}{C_2}\frac{\left(\mu_4^2-m_2\right)}{m_1\mu_4}-\frac{C_1}{\mu_3C_2}\right)\tilde{C}_{17}e^{-\mu_3x_1}+ \\ +\frac{C_1}{C_2}\frac{\tilde{C}_{13}x_1}{C_1S_2-0,5\delta_0D_2}+\tilde{C}_{18}; \\ u_2^{+}=\tilde{C}_{14}e^{\mu_1x_1}+\tilde{C}_{15}e^{-\mu_1x_1}+\tilde{C}_{16}e^{\mu_3x_1}+ \\ +\tilde{C}_{17}e^{-\mu_3x_1}-\frac{\tilde{C}_{13}}{C_1S_2-0,5\delta_0D_2}; \\ \varphi=\frac{\left(\mu_1^2-m_2\right)}{m_1\mu_1}\tilde{C}_{14}e^{\mu_1x_1}+\frac{\left(\mu_2^2-m_2\right)}{m_1\mu_2}\tilde{C}_{15}e^{-\mu_1x_1}+ \\ +\frac{\left(\mu_3^2-m_2\right)}{m_1\mu_3}\tilde{C}_{16}e^{\mu_3x_1}+\frac{\left(\mu_4^2-m_2\right)}{m_1\mu_4}\tilde{C}_{17}e^{-\mu_3x_1}, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$m_1=1+\frac{Dh}{2LS_2};\ m_2=\frac{C_1S_2-0.5\delta_0D_2}{LhS_2};$$

$$m_3=-\frac{3\delta_0D_2Dh+12LC_2S_2}{Dh\left(4hC_2S_2-3Dh^2\right)};\ m_4=\frac{12LC_2S_2}{Dh\left(4hC_2S_2-3Dh^2\right)};$$

$$S_2=\frac{Dh+0.5\delta_0D_1}{C_2};\ d^2=\left(m_2+m_1m_3+m_4\right)^2-4m_2m_4;$$

$$\mu_1=\sqrt{\frac{m_2+m_1m_3+m_4+d}{2}};\ \mu_2=-\mu_1;\ \mu_3=\sqrt{\frac{m_2+m_1m_3+m_4-d}{2}};$$

$$\mu_4=-\mu_3.$$

Общее решение (24) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} u_1^{+}=\left(\frac{Lh}{K}\left(R_1-\frac{2LS}{VR_1}\left(R_1^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\right)-\frac{2}{\delta_0R_1}\right)\tilde{C}_8e^{R_1x_1}- \\ -\left(\frac{Lh}{K}\left(R_1-\frac{2LS}{VR_1}\left(R_1^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\right)-\frac{2}{\delta_0R_1}\right)\tilde{C}_9e^{-R_1x_1}+ \\ +\left(\frac{Lh}{K}\left(R_2-\frac{2LS}{VR_2}\left(R_2^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\right)-\frac{2}{\delta_0R_2}\right)\tilde{C}_{10}e^{R_2x_1}- \\ -\left(\frac{Lh}{K}\left(R_2-\frac{2LS}{VR_2}\left(R_2^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\right)-\frac{2}{\delta_0R_2}\right)\tilde{C}_{11}e^{-R_2x_1}+ \\ +\left(\frac{1}{Dh}\left(\tilde{C}_7+\frac{4}{3}\tau_0S\right)-\frac{4}{3K}\tau_0\right)x_1+\tilde{C}_{12}; \\ u_2^{+}=\tilde{C}_8e^{R_1x_1}+\tilde{C}_9e^{-R_1x_1}+\tilde{C}_{10}e^{R_2x_1}+\tilde{C}_{11}e^{-R_2x_1}-\frac{\delta_0}{2Dh}\left(\tilde{C}_7+\frac{4}{3}\tau_0S\right); \\ \varphi=\frac{2LS}{VR_1}\left(R_1^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\tilde{C}_8e^{R_1x_1}-\frac{2LS}{VR_1}\left(R_1^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\tilde{C}_9e^{-R_1x_1}+ \\ +\frac{2LS}{VR_2}\left(R_2^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\tilde{C}_{10}e^{R_2x_1}-\frac{2LS}{VR_2}\left(R_2^2-\frac{2D}{LS\delta_0}\right)\tilde{C}_{11}e^{-R_2x_1}, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$R_1=\sqrt{\frac{DhS_1\left(Dh-6L\delta_0+\Delta/(2h)\right)}{L\delta_0}};$$

$$R_2=\sqrt{\frac{DhS_1\left(Dh-6L\delta_0-\Delta/(2h)\right)}{L\delta_0}};$$

$$\Delta^2=4h^2\left(D^2h^2-12L\delta_0\left(2LS+Dh\right)\right);$$

$$S_1=\left(Dh^2\left(\frac{Dh}{K}+2\delta_0\right)\right)^{-1};\ V=2LS+Dh;\ S=\frac{Dh}{K}+\frac{\delta_0}{2}.$$

Отметим, что для рассматриваемых механических и геометрических характеристик образца условия $\Delta^2, d^2\ge 0$ и вещественные корни соответствующих характеристических уравнений имеют место при относительных толщинах $\delta_0/h\le 10^{-3}$. В данной работе будем рассматривать только такие толщины.

Общее решение (25) получим в виде:

$$\begin{cases} u_1^+ = -\dfrac{2\tau_0}{Dh^2}x_1^3 - \dfrac{3}{Dh^2}\tilde{C}_7 x_1^2 + \dfrac{4}{Dh}\tilde{C}_8 x_1 + \dfrac{6}{Dh^2}\tilde{C}_9 x_1 + \tilde{C}_{11}; \\ u_2^+ = -\dfrac{\tau_0}{Dh^3}x_1^4 + \dfrac{\tau_0}{Lh}x_1^2 - \dfrac{2}{Dh^3}\tilde{C}_7 x_1^3 + \dfrac{1}{Lh}\tilde{C}_7 x_1 + \\ \quad + \dfrac{3}{Dh^2}\tilde{C}_8 x_1^2 + \dfrac{6}{Dh^3}\tilde{C}_9 x_1^2 + \tilde{C}_{10} x_1 + \tilde{C}_{12}; \\ \varphi = -\dfrac{4\tau_0}{Dh^3}x_1^3 - \dfrac{6}{Dh^3}\tilde{C}_7 x_1^2 + \dfrac{6}{Dh^2}\tilde{C}_8 x_1 + \dfrac{12}{Dh^3}\tilde{C}_9 x_1 + \tilde{C}_{10}. \end{cases} \quad (28)$$

В решениях (26), (27) или (28) в случае плоского напряженного состояния адгезионного слоя имеем 12 постоянных интегрирования. Граничные условия (22), (18) и условия сопряжения (14)–(16) определяют 12 уравнений для их нахождения.

В работе [17] показано, что для упругого решения (26) при относительно больших значениях ℓ/δ_0 разрешающая система линейных уравнений плохо обусловлена. В этом случае из граничных условий (18) в решении (26) для $\ell/\delta_0 \to \infty$ положим:

$$\tilde{C}_{13} = \tilde{C}_{14} = \tilde{C}_{16} = \tilde{C}_{18} = 0.$$

При этом последнее условие (22) выполняется тождественно и не влияет на решение упругой задачи [17].

Для нахождения 8 постоянных для решений (26), (27) или (28) имеем 8 условий: два первых условия (22), (14)–(16). При этом предполагается известной длина пластической зоны. Таким образом находится решение упругопластической задачи определения напряженно-деформированного состояния.

Однако параметр ℓ_p определяется условием (4) или (6), что, согласно решению (26), приводит к нелинейному уравнению.

В этом случае постановку задачи сформулируем в следующей форме: при заданной длине пластической зоны ℓ_p найти обобщенную силу, обеспечивающую соответствующую длину зоны пластичности. Для этого силу Q_2 будем рассматривать в качестве неизвестной, а ℓ_p известной величиной. Таким образом, в дополнении к заданным 8 условиям используем уравнение (4) для состояния плоской деформации или (6) для плоского напряженного состояния, в результате чего приходим к системе 9 линейных уравнений с 9 неизвестными.

При заданной обобщённой силе Q_2 найдем значение длины пластической зоны ℓ_p, обеспечивающей выполнение граничных условий (22). В этом случае из решения системы 9 линейных уравнений необходимо подобрать два значения длины пластической зоны ℓ_p^1 и ℓ_p^2, при которых имеет место неравенство: $Q_2\left(\ell_p^1\right) < Q_2 < Q_2\left(\ell_p^2\right)$. Найти значение $\ell_p \in \left[\ell_p^1; \ell_p^2\right]$ методом дихотомии, соответствующее величине Q_2 с заданной степенью точности. В работе для Q_2 используем относительную погрешность 0,001.

3. Нахождение J-интеграла

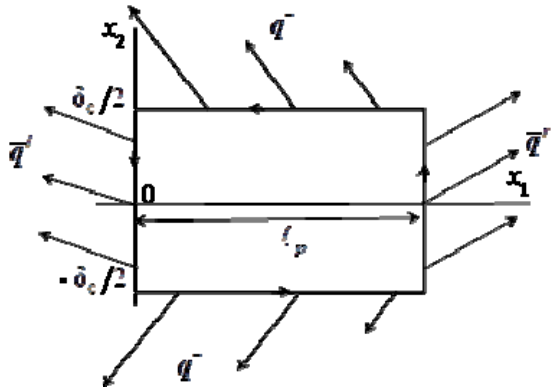


Рис. 2. Равновесие упругопластического элемента слоя

Fig. 2. Equilibrium of the elastic-plastic element of the layer

На рис. 2 показан элемент слоя взаимодействия, находящийся в пластическом состоянии. Данный элемент находится в равновесии под воздействием распределенной внешней нагрузки $\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}^+$ – нагрузка по верхней границе слоя; $\mathbf{q}^-$ – нагрузка по нижней границе слоя; $\overline{\mathbf{q}}^r$ – нагрузка по правому торцу слоя; $\overline{\mathbf{q}}^l$ – нагрузка по левому торцу слоя. Замкнутый контур z охватывает область диссипации в слое. Следуя работе [25], запишем термомеханическое соотношение в следующем виде:

$$\oint_z \left(n_1\psi - \mathbf{q}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}\right) dz = -\int_S \frac{\partial w}{\partial x_1} ds, \quad (29)$$

где ψ – удельная свободная энергия; w – удельная диссипация; n_1 – проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси x_1.

В левой части равенства (29) стоит интеграл по замкнутому контуру с одного берега консоли на другой, охватывающий область диссипации и проходящий по левому торцу слоя.

С учетом рассмотрения средних термомеханических характеристик по толщине слоя имеем:

$$-\int_S \frac{\partial w}{\partial x_1} ds = \delta_0 w_c, \ \oint_z (n_1\psi) dz = \delta_0 (\psi_e - \psi_c), \quad (30)$$

где $w_c = w\big|_{x_1=0}$; $\psi_c = \psi\big|_{x_1=0}$; $\psi_e = \psi\big|_{x_1=\ell_p}$.

Из (29), (30) приходим к следующему определению J-интеграла:

$$\mathrm{J} = \delta_0(\psi_c + w_c) = \delta_0\psi_e - \delta_0\overline{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} - \delta_0\overline{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1}\right) dx_1, \quad (31)$$

где $\overline{\mathbf{u}}=0.5\left(\mathbf{u}^{+}+\mathbf{u}^{-}\right)$ – вектор средних перемещений; $\mathbf{q}^{+}=\sigma_{12}^{+}\mathbf{e}_1+\sigma_{22}^{+}\mathbf{e}_2$; $\mathbf{q}^{-}=-\sigma_{12}^{-}\mathbf{e}_1-\sigma_{22}^{-}\mathbf{e}_2$; $\overline{\mathbf{q}}^{r}=\overline{\sigma}_{11}\mathbf{e}_1+\overline{\sigma}_{12}\mathbf{e}_2$; $\overline{\mathbf{q}}^{l}=-\overline{\sigma}_{11}\mathbf{e}_1-\overline{\sigma}_{12}\mathbf{e}_2$; $\sigma_{12}^{\pm}$, $\sigma_{22}^{\pm}$ – граничные напряжения слоя; $\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{12}$ – средние напряжения на торцах слоя.

Рассмотрим условия равновесия слоя [25]

$$\delta_0\frac{\partial\overline{\sigma}_{11}}{\partial x_1}=\sigma_{12}^{-}-\sigma_{12}^{+}, \tag{32}$$

$$\delta_0\frac{\partial\overline{\sigma}_{12}}{\partial x_1}=\sigma_{22}^{-}-\sigma_{22}^{+}. \tag{33}$$

Для случая нормального отрыва имеем: $\overline{\sigma}_{12}=0$, $\sigma_{12}^{-}=-\sigma_{12}^{+}$, $u_1^{+}=u_1^{+}$, $u_2^{+}=-u_2^{-}$. Из (32), (33) получаем:

$$\sigma_{12}^{+}=-0.5\delta_0\frac{\partial\overline{\sigma}_{11}}{\partial x_1},\ \sigma_{22}^{+}=\sigma_{22}^{-}. \tag{34}$$

С учетом определения средних напряжений посредством граничных: $\overline{\sigma}_{22}=0.5\left(\sigma_{22}^{+}+\sigma_{22}^{-}\right)$ и (34) из (31) приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}=\delta_0\psi_e+\delta_0\overline{\sigma}_{11}\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}-\delta_0\overline{\sigma}_{11}\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\ell_p}-\\ -2\int_0^{\ell_p}\left(\overline{\sigma}_{22}\frac{\partial u_2^{+}}{\partial x_1}-0.5\delta_0\frac{\partial\overline{\sigma}_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\right)dx_1.\end{aligned} \tag{35}$$

Используя представление удельной свободной энергии слоя: $\psi_e=0.5\left(\overline{\sigma}_{22}\overline{\varepsilon}_{22}+\overline{\sigma}_{11}\overline{\varepsilon}_{11}\right)\big|_{x_1=\ell_p}$, определяющие соотношения (5) и связи средних деформаций слоя с граничными перемещениями, преобразуем выражения:

$$\begin{aligned}\delta_0\left(\psi_e+\overline{\sigma}_{11}\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}-\overline{\sigma}_{11}\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\ell_p}\right)=\\ =\delta_0\left(\frac{1}{2}K\left(\overline{\varepsilon}_{22}^2-\overline{\varepsilon}_{11}^2\right)\big|_{x_1=\ell_p}+\frac{\tau_0}{3}\left(2\overline{\varepsilon}_{22}+\overline{\varepsilon}_{11}\right)\big|_{x_1=\ell_p}+\right.\\ \left.+\left(K\left(\overline{\varepsilon}_{11}^2+\overline{\varepsilon}_{22}\overline{\varepsilon}_{11}\right)-\frac{2\tau_0}{3}\overline{\varepsilon}_{11}\right)\bigg|_{x_1=0}\right),\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}2\int_0^{\ell_p}\left(\overline{\sigma}_{22}\frac{\partial u_2^{+}}{\partial x_1}-0.5\delta_0\frac{\partial\overline{\sigma}_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\right)dx_1=\\ =-\delta_0\left(\frac{1}{2}K\left(\overline{\varepsilon}_{22}^2-\overline{\varepsilon}_{11}^2\right)\Big|_{x_1=\ell_p}^{x_1=0}+\frac{4\tau_0}{3}\overline{\varepsilon}_{22}\Big|_{x_1=\ell_p}^{x_1=0}\right).\end{aligned} \tag{37}$$

Из (35)–(37) приходим к представлению для случая плоской деформации:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}^{d}=\delta_0\left(\frac{1}{2}K\left(\overline{\varepsilon}_{22}+\overline{\varepsilon}_{11}\right)^2\bigg|_{x_1=0}+\frac{\tau_0}{3}\times\right.\\ \left.\times\left(2\left(2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11}\right)\big|_{x_1=0}+\left(\overline{\varepsilon}_{11}-2\overline{\varepsilon}_{22}\right)\big|_{x_1=\ell_p}\right)\right).\end{aligned} \tag{38}$$

В плоском напряженном состоянии слоя из (7) и (35) получаем:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}^{s}=\delta_0\psi_e+2\tau_0\delta_0\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}-2\tau_0\delta_0\frac{\partial u_1^{+}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\ell_p}+\\ +4\tau_0\left(u_2^{+}\big|_{x_1=0}-u_2^{+}\big|_{x_1=\ell_p}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

Из (39) при $\delta_0=0$ перемещение $u_2^{+}\big|_{x_1=\ell_p}=0$, полагая $2\tau_0=\sigma_0$, $2u_2^{+}\big|_{x_1=0}=\delta$, приходим к классическому выражению J-интеграла через раскрытие пластической зоны [1,2]: $\mathrm{J}=\sigma_0\delta$.

Отметим, что для линейно упругого поведения адгезива в рамках определяющих соотношений (20) из представления (35) при любой длине ℓ_p выделенного элемента слоя приходим к представлению J-интеграла через энергетическое произведение [26]:

$$\mathrm{J}^{e}=\frac{\delta_0}{2}\left(D_1\left(\overline{\varepsilon}_{11}^2+\overline{\varepsilon}_{22}^2\right)+\delta_0 D_2\overline{\varepsilon}_{22}\overline{\varepsilon}_{11}\right)\Big|_{x_1=0}=\delta_0\psi_c. \tag{40}$$

В работе [28] для упругого поведения адгезива, модуль упругости которого значительно меньше соответствующего модуля сопрягаемых тел, при нулевом коэффициент Пуассона получено следующее аналитическое выражение J-интеграла:

$$\mathrm{J}^{a}=\frac{12Q_2^2\left(1-\nu_1^2\right)}{hE_1}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}}\left(\frac{h}{a}\right)\right)^2,$$

совпадающее с результатами [42] с случае изотропных пластин, полученными на основе представления слоя в виде связей Прандтля.

4. Результаты решения задачи

Согласно данным работ [18; 19] рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками консолей: $a=0{,}055$ м, $h=0{,}0127$ м, $b=0{,}025$ м, $E_1=2{,}04\cdot10^{11}$ Па, $\nu_1=0{,}33$, где b – толщина образца в направлении нормали к рассматриваемому сечению. Механические свойства адгезивов представим в табл. 1.

В работе [19] приведены экспериментальные значения внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве, которые составили $P_{cr}=1.1$ кН для смолы Araldite AV138, $P_{cr}=1{,}5$ кН для смолы Araldite 2015. В этом случае $Q_2=Q_{cr}=P_{cr}/b$, где Q_{cr} – критическое значение обобщенной силы. Для заданных критических нагрузок проведем расчеты критических значений J-интеграла в зависимости от толщины слоя, рассматривая поведения слоя в состоянии плоской деформации и плоском напряженном состоянии. Для определения J-интеграла по заданной критической силе в случае плос-

кого деформированного состояния используем выражение (38) совместно с решениями (26), (27). В случае плоского напряженного состояния используем представление (39) совместно с решениями (26), (28).

Таблица 1

Механические свойства адгезивов

Table 1

Mechanical properties of adhesives

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015
E_3, GPa	4,9	1,85
$2\tau_0$, MPa	25,1	14,6
σ_f, MPa	39,45	21,63
ν_3	0,35	0,33
ε_f, %	1,21	4,77
G_{IC}, N/m	200	430

В табл. 2 поместим результаты расчета для рассматриваемых адгезивов в состоянии плоской деформации при различных толщинах адгезива, где $\varepsilon_{22}^{e}\big|_{x_1=0}$ и $\varepsilon_{22}^{d}\big|_{x_1=0}$ деформации отрыва, найденные соответственно по упругой и упругопластической моделям.

Из результатов расчета табл. 2 видим, что стремление толщины слоя к нулю дает практическое совпадение результатов расчета J_C-интеграла по чисто упругой модели и упругопластической модели при гипотезе полной пластичности, что предполагает преобладание удельной свободной энергии в формировании J-интеграла для состояния плоской деформации. При этом результаты немного занижены относительно заявленных характеристик табл. 1, что можно объяснить погрешностью, вводимой гипотезами пластин.

Распределение напряжений в слое адгезива Araldite AV138 толщиной 10^{-5} м при плоской деформации показано на рис. 3. Графики *1* и *2* определяют напряжения $\overline{\sigma}_{11}$ и $\overline{\sigma}_{22}$ для адгезива в модели полной пластичности, а графики *3*, *4* определяют соответствующие напряжения для линейно упругой модели.

Из анализа напряженного состояния адгезива Araldite 2015 на рис. 3 и табл. 1 видим, что максимальные главные напряжения при толщине разрушаемого слоя $\delta_0 = 10^{-5}$ м на порядок превышают критериальные прочностные значения. Однако в рамках деформационного критерия по максимальным главным деформациям толщина разрушаемого слоя может находиться в пределах $10^{-7} \div 10^{-8}$ м.

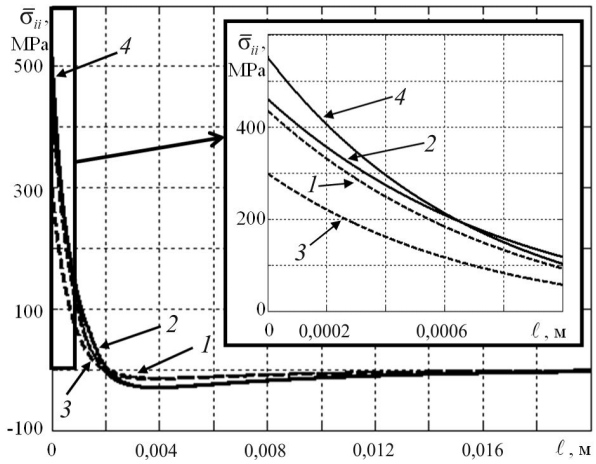


Рис. 3. Напряженное состояние зоны предразрушения при плоской деформации

Fig. 3. Stress state of the pre-fracture zone under plane deformation

В табл. 3 поместим результаты расчета для рассматриваемых адгезивов в плоском напряженном состоянии при различных толщинах адгезива.

Распределение напряжений в слое толщиной 10^{-5} м для адгезивов при плоском напряженном состоянии показано на рис. 4 в модели с упругопластическими свойствами. Графики *1* и *2* определяют напряжения $\overline{\sigma}_{11}$ и $\overline{\sigma}_{22}$ для адгезива Araldite AV138, а графики *3*, *4* определяют соответствующие напряжения для адгезива Araldite 2015.

Таблица 2

Значение J-интеграла при плоской деформации

Table 2

The value of the J-integral under plane strain

Параметр	Araldite AV138					Araldite 2015				
J_C^a, N/m	190,06					353,42				
δ_0, m	ℓ_p, 10^{-4} m	J_C^d, N/m	J_C^e, N/m	$\varepsilon_{22}^{d}\big\|_{x_1=0}$	$\varepsilon_{22}^{e}\big\|_{x_1=0}$	ℓ_p, 10^{-4} m	J_C^d, N/m	J_C^e, N/m	$\varepsilon_{22}^{d}\big\|_{x_1=0}$	$\varepsilon_{22}^{e}\big\|_{x_1=0}$
10^{-5}	14,48	201,89	194,27	0,08	0,07	25,1	378,31	366,36	0,2	0,16
10^{-6}	7,47	193,9	191,44	0,26	0,22	12,62	361,64	357,71	0,63	0,51
10^{-7}	3,32	191,29	190,5	0,83	0,7	5,6	356,07	354,8	1,98	1,61
10^{-8}	1,36	190,45	190,2	2,64	2,2	2,3	354,26	353,86	6,24	5,08
10^{-9}	0,53	190,19	190,11	8,36	6,95	0,9	353,69	353,56	19,74	16,06
10^{-10}	0,2	190,1	190,08	26,42	21,99	0,34	353,51	353,47	62,43	50,78

Таблица 3

Значение J-интеграла при плоском напряженном состоянии

Table 3

The value of the J-integral under a plane stress state

Парметр	Araldite AV138					Araldite 2015				
J_C^a, N/m	190,06					353,42				
δ_0, m	ℓ_p, 10^{-4} m	J_C^d, N/m	J_C^e, N/m	$\varepsilon_{22}^d\big\|_{x_1=0}$	$\varepsilon_{22}^e\big\|_{x_1=0}$	ℓ_p, 10^{-4} m	J_C^d, N/m	J_C^e, N/m	$\varepsilon_{22}^d\big\|_{x_1=0}$	$\varepsilon_{22}^e\big\|_{x_1=0}$
10^{-5}	96,31	227,58	195,03	0,91	0,08	186,31	496,78	368,17	3,41	0,19
10^{-6}	101,72	227,46	191,69	9,06	0,26	194,82	496,55	358,33	34,01	0,59
10^{-7}	103,52	227,45	190,58	90,62	0,83	197,72	496,53	355	340,09	1,85

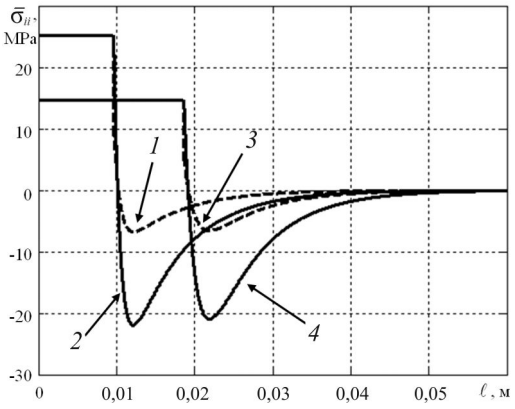


Рис. 4. Распределение напряжений в зоне предразрушения при плоском напряженном состоянии

Fig. 4. Stress distribution in the pre-fracture zone in a plane stress state

Из распределений напряжений за зоной пластических деформаций из рис. 4 видно, что для адгезива Araldite 2015 напряжения отрыва превышают предел текучести. Данная тенденция прослеживается и для адгезива Araldite AV138 при уменьшении толщины слоя. Таким образом, при предельном стремлении толщины слоя к нулю в плоском напряженном состоянии будет прослеживаться область пластических деформаций со сжимающими напряжениями длиной ℓ_p^-. В этом случае общая длина пластической области будет равна $\ell_p = \ell_p^+ + \ell_p^-$, где ℓ_p^+ определяет область пластических деформаций с положительными напряжениями. Основной проблемой в данной задаче будет являться задача нахождения зон ℓ_p^+ и ℓ_p^-.

При решении задачи будем считать, что длина ℓ_p^+ не будет претерпевать изменений при появлении участка ℓ_p^- и определяться решением упругопластической задачи, построенной на распределениях (26), (28). В этом случае ℓ_p^+ будет равно ℓ_p из табл. 3. Определяющие соотношения на участке ℓ_p^- деформирования слоя в плоском напряженном состоянии запишем в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = -2\tau_0\,,\ \bar{\sigma}_{33} = 0\,. \tag{41}$$

Распределение поля перемещений на данном участке будет иметь аналогичную (28) структуру с заменой τ_0 на $-\tau_0$. В точках ℓ_p^+ и $\ell_p = \ell_p^+ + \ell_p^-$ рассматриваем 12 условий сопряжения решений типа (14)–(16) с учетом (7) и (41). Значение J-интеграла (35) в этом случае будет определяться следующим представлением:

$$J^d = 2\tau_0\delta_0 \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} + 4\tau_0\left(u_2^+\big|_{x_1=0} - 2u_2^+\big|_{x_1=\ell_p^+}\right) + 2\tau_0 u_2^+\big|_{x_1=\ell_p} + \tau_0\delta_0 \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\ell_p}\,.$$

На рис. 5 показано распределение напряжений в слое для адгезива Araldite 2015 с учетом сжимающих напряжений в области пластических деформаций при условиях расчета, соответствующих рис. 4.

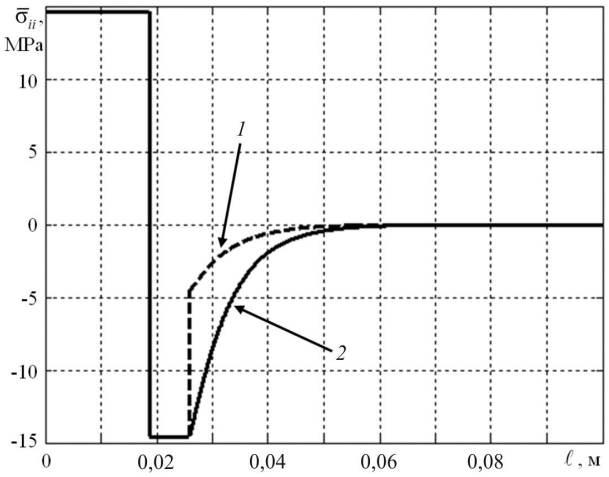


Рис. 5. Распределение напряжений в зоне предразрушения при плоском напряженном состоянии с учетом области пластического сжатия

Fig. 5. Stress distribution in the pre-fracture zone in a plane stress state, taking into account the region of plastic compression

Таблица 4

Значение J-интеграла при плоском напряженном состоянии с учетом пластического сжатия слоя

Table 4

The value of the J-integral in the plane stress state, taking into account the plastic compression of the layer

Параметр	Araldite AV138					Araldite 2015				
δ_0, m	J_C^d, N/m	ℓ_p, 10^{-4} m	ℓ_p^+, 10^{-4} m	ℓ_p^-, 10^{-4} m	$\varepsilon_{22}^d\big\|_{x_1=0}$	J_C^d, N/m	ℓ_p, 10^{-4} m	ℓ_p^+, 10^{-4} m	ℓ_p^-, 10^{-4} m	$\varepsilon_{22}^d\big\|_{x_1=0}$
10^{-5}	227,58	96,31	96,31	0	0,91	498,59	259,01	186,31	72,7	3,49
10^{-6}	227,46	101,72	101,72	0	9,06	485,53	346,84	194,82	152,02	27,59
10^{-7}	227,48	115,86	103,52	12,34	90,75	479,09	367,14	197,72	169,42	237,13

В табл. 4 поместим результаты расчетов модели поведения адгезивов с учетом их пластического сжатия.

Из табл. 2 и 4 видно, что предельные деформации в адгезиве при критической нагрузке соответствуют диапазону толщин слоя $10^{-5} \div 10^{-7}$ м. Данная оценка была получена в работе [43] из анализа поверхностной энергии через предел упругости и межатомное расстояние. Отметим, что в данном диапазоне критические значения J-интеграла меняются несущественно, однако при этом определяющее значение на величину линейного параметра и J-интеграла имеет тип плоской задачи.

Заключение

В рамках модели упругопластического деформирования адгезионного слоя при условии полной пластичности получена зависимость напряженно-деформированного состояния слоя от его толщины при плоском деформированном и напряженном состояниях. Построены J-интегралы с учетом диссипативной составляющей. Из анализа экспериментальных данных для двух композитов по известному деформационному критерию торцевого сечения определены соответствующие (пороговые) значения толщин адгезива и J-интегралов.

Дальнейшее уменьшение толщины приводит к неограниченному росту деформаций и превышению деформационного критерия, однако значения J-интегралов стабилизируются. При этом в случае плоского деформированного состояния длина пластической зоны уменьшается и основной вклад в J-интеграл вносит энергетическая составляющая. В плоском напряженном состоянии длина пластической зоны растет, и диссипативная составляющая J-интеграла существенно превышает энергетическую. Полагая внешнюю критическую нагрузку одинаковой для рассмотренных типов плоской задачи, получаем существенное различие в критических значениях J-интеграла, что является следствием развитой зоны пластичности в плоском напряженном состоянии. Для плоской деформации в предельно тонких адгезионных слоях учет их упругопластических свойств несущественен и значения J-интеграла могут быть найдены в рамках линейно упругой модели поведения адгезива или в модели с жестким сцеплением сопрягаемых тел, что фактически исключает из рассмотрения механические свойства адгезива.

Библиографический список

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

2. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 502 с.

3. Broberg K.B. Cracks and fracture. – London: Academic Press, UK, 1999. – 752 p.

4. Kanninen M.F., Popelar C.H. Advanced Fracture Mechanics. – United Kingdom: Oxford UniversityPress, 1985. – 563 p.

5. Xiangting Su, Zhenjun Yang, Guohua Liu. Finite element modelling of complex 3D static and dynamic crack propagation by embedding cohesive elements in Abaqus // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2010. – Vol. 23, no. 3. – P. 271–282. DOI: 10.1016/S0894-9166(10)60030-4

6. Sua X.T, Yang Z.J., Liu G.H. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials: A 3D study // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47, no. 17. – P. 2336–2345. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.031

7. De Moura M.F.S.F., Gonçalves J.P.M. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51, no. 5. – P. 1123–1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0

8. Zhenjun Yang, X. Frank Xu. A heterogeneous cohesive model for quasi-brittle materials considering spatially varying random fracture properties // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – Vol. 197, no. 45–48. – P. 4027–4039. DOI: 10.1016/j.cma.2008.03.027

9. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 3. – С. 434–444.

10. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2015. – Vol. 22, no. 8. – P. 681–696. DOI: 10.1080/15376494.2013.855852

11. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method / G. Lélias, E. Paroissien, F. Lachaud, J. Morlier // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 90–115. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005

12. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half–plane with a cohesive edge crack // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 973, no. 1. – id. 12020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020

13. Лавит И.М. Об устойчивом росте трещины в упруго-пластическом материале // Проблемы прочности. – 1988. – № 7. – С. 18–23.

14. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges / M. Elices, G.V. Guinea, J. Gómez, J. Planas // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – Vol. 69, no. 2. – P. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2

15. Перельмутер М.Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 1. – С. 152–171

16. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.

17. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1960. – Vol. 8, no. 2. – P. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2

18. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // International Journal of Fracture. – 2017. – Vol. 207, no. 1. – P. 55–71. DOI: 10.1007/s10704-017-0219-x

19. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R.M. Lopes, R.D.S.G. Campilho, F.J.G. da Silva, T.M.S. Faneco // Journal of Adhesion and Adhesives. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032

20. Irwin G.R. Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness // 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference. – 1960. – P. 63–78.

21. Irwin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engineering Fracture Mechanics. – 1968. – Vol. 1, no. 2. – P. 241–257. DOI: 10.1016/0013-7944(68)90001-5

22. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. – 2011. – Vol. 171, no. 2. – P. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3

23. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

24. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия // К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 180 с.

25. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between Jc and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224, no. 2. – P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0

26. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

27. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 22–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

28. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование / В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 116–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12

29. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29

30. Reissner E. Reflections on the Theory of Elastic Plates // Applied Mechanics Reviews. – 1985. – Vol. 38, no. 11. – P. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699

31. Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Vol. 5, no. 1. – P. 55–68. DOI: 10.1090/qam/20440

32. Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности: сб. статей. – М.: Государственное издательство иностранной литературы. – 1948. – С. 41–56.

33. Аннин Б.Д. Двумерные подмодели идеальной пластичности при условии полной пластичности // Проблемы механики: сб. статей. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – С. 94–99.

34. Зубчанинов В.Г. Обобщенный критерий полной и неполной пластичности сплошных сред // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 161–171.

35. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности: Учебное пособие. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2004. – 142 с.

36. Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224.

37. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

38. Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549.

39. Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Прикладная механика и техническая физика. – 1963. – № 3. – С. 102–104.

40. Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides // Mem pres par div savants. – 1868. – Vol. 18. – P. 733–799.

41. Tresca H. Writings on the Machining of Metals // Bull. Soc. d'Encouragement pour l'Industrie Nationale. – 1873. – P. 585–685.

42. Bruno D., Greco F. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38, no. 50–51. – P. 9149–9177. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00179-2

43. Глаголев В.В., Маркин А.А. Модель установившегося разделения материального слоя // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 121–129.

References

1. Cherepanov G.P. Mekhanika hrupkogo razrusheniya [Mechanics of brittle failure]. Moscow, Nauka, 1974, 640 p.

2. Parton V. Z., Morozov E. M. Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniia [Mechanics of Elastoplastic Fracture]. Moscow, Nauka, 1985, 502 p.

3. Broberg K.B. Cracks and fracture. London, Academic Press, UK, 1999, 752 p.

4. Kanninen M.F., Popelar C.H. Advanced Fracture Mechanics. United Kingdom, Oxford UniversityPress, 1985, 563 p.

5. Xiangting Su, Zhenjun Yang, Guohua Liu. Finite element modelling of complex 3D static and dynamic crack propagation by embedding cohesive elements in Abaqus, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2010, vol. 23, no. 3, pp. 271–282. DOI: 10.1016/S0894-9166(10)60030-4

6. Sua X.T, Yang Z.J., Liu G.H. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials: A 3D study, *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 47, no. 17, pp. 2336–2345. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.031

7. De Moura M.F.S.F., Gonçalves J.P.M. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading, *International Journal of Solids and Structures*, 2014, no. 5, pp. 1123–1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0

8. Zhenjun Yang, X. Frank Xu. A heterogeneous cohesive model for quasi-brittle materials considering spatially varying random fracture properties, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, vol. 197, no. 45–48, pp. 4027–4039.

9. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 622–636. DOI: 10.1016/0021-8928(59)90157-1

10. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2015, vol. 22, no. 8, pp. 681–696. DOI: 10.1080/15376494.2013.855852

11. Lélias G. Paroissien E., Lachaud F., Morlier J. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method, *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 158, pp. 90–115. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005

12. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half–plane with a cohesive edge crack, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 973, no. 1, id. 12020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020.

13. Lavit I.M. Stable crack growth in an elastoplastic material, *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, no. 7, pp. 854–860. DOI: 10.1007/BF01528695

14. Elices M., Guinea G.V., Gómez J., Planas J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges, *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, vol. 69, no. 2, pp. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2

15. Perelmuter M.N. A criterion for the growth of cracks with bonds in the end zone, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no. 1, pp. 137–151. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.002

16. Leonov M. YA., Panasyuk V. V. Razvitie mel'chajshih treshchin v tverdom tele [Development of the smallest cracks in a solid]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391–401.

17. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2

18. Santos M. A. S., Campilho R. D. S. G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility, *International Journal of Fracture*, 2017, vol. 207, no. 1, pp. 55–71. DOI: 10.1007/s10704-017-0219-x

19. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints, *Journal of Adhesion and Adhesives*, 2016, vol. 67, pp. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032

20. Irwin G. R. Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness, *7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference*, 1960, pp. 63–78.

21. Irwin G. R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control, *Engineering Fracture Mechanics*, 1968, vol. 1, no. 2, pp. 241–257. DOI: 10.1016/0013-7944(68)90001-5

22. Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids, *International Journal of Fracture*, 2011, vol. 171, no. 2, pp. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3

23. Entov V. M., Salganik R. L. K modeli hrupkogo razrusheniya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1968, no. 6, pp. 87–99.

24. Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Model' treshchiny Prandtlya i ee primenenie dlya resheniya zadachi mekhaniki kontaktnogo vzaimodejstviya [Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics]. Izhevsk, Institut komp'yuternyh issledovanij, 2012, 180 p.

25. Berto, F., Glagolev, V.V., Markin, A.A. Relationship between Jc and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite, *International Journal of Fracture*, 2020, vol. 224, no. 2, pp. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0

26. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter, *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 158, pp. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002

27. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Stress state and condition for crack initiation in the adhesion layer of the composite, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 3, pp. 22–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

28. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 3, pp. 116–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12

29. Mindlin R. D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, pp. 31–38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29

30. Reissner E. Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 1985, vol. 38, no. 11, pp. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699

31. Reissner E. On Bending of Elastic Plates, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1947, vol. 5, no. 1, pp. 55–68. DOI: 10.1090/qam/20440

32. Haar A., Karman T. K teorii napryazhennyh sostoyanij v plasticheskih i sypuchih sredah [On the theory of stress states in plastic and granular media]. *Teoriya plastichnosti. Sbornik statej –*

Theory of plasticity. Digest of articles, Moscow, Gosudarctvennoe izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1948, pp. 41–56.

33. Annin B.D. Dvumernye podmodeli ideal'noj plastichnosti pri uslovii polnoj plastichnocti [Two-dimensional submodels of ideal plasticity under the condition of complete plasticity]. *Problemy mehaniki. Sbornik statej – Problems of mechanics. Digest of articles*, Moscow, FIZMATLIT, 2003, pp. 94–99.

34. Zubchaninov V.G. Obobshtennyj kriterij polnoj i nepolnoj plastichnosti sploshnyh sred [Generalized criterion for complete and incomplete plasticity of continuous media]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2010, no. 2 (8), pp. 161–171.

35. Radaev Yu.N. Prostranstvennaya zadacha matematicheskoj teorii plastichnocti: Uchebnoe posobie [Spatial problem of the mathematical theory of plasticity: Study guide]. Samara, Izdatel'stvo « Samarskij universitet», 2004, 142 p.

36. Ishlinskij A.Yu. Osesimmetricheskaya zadacha plastichnocti i proba Brinellya [Axisymmetric plasticity problem and Brinell test]. *Prikladnaya matematika i mehanika – Applied Mathematics and Mechanics*, 1944, vol. 8, no. 3, pp. 201–224.

37. Ishlinskij A.Yu., Ivlev D.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 704 p.

38. Ivlev D.D. O sootnosheniyah, opredelyayushtih plasticheskoe techenie pri uslovii plastichnosti Treska, i ego obobshteniyah [On the relationships determining plastic flow under Tresca's plasticity condition and its generalizations]. *Dokl. AN SSSR*, 1959, vol. 124, no. 3, pp. 546–549.

39. Ivlev D.D., Martynova T.N. Ob uslovii polnoj plastichnosti dlya osesimmetrichnogo sostoyaniya [On the condition of complete plasticity for an axisymmetric state]. *Prikladnaya mehanika i tehnicheskaya fizika – Applied Mechanics and Engineering Physics*, 1963, no. 3, pp. 102–104.

40. Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides, *Mem pres par div savants*, 1868, vol. 18, pp. 733–799.

41. Tresca H., Writings on the Machining of Metals, *Bull. Soc. d'Encouragement pour l'Industrie Nationale*, 1873, pp. 585–685.

42. Bruno D., Greco F. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, no. 50–51, pp. 9149–9177. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00179-2

43. Glagolev V.V., Markin A.A. Model' ustanovivshegosya razdeleniya material'nogo sloya [Model of the established separation of the material layer]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics*, 2004, no. 5, pp. 121–129.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, https://rscf.ru/project/23-21-00017/ в Тульском государственном университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-21-00017, https://rscf.ru/project/23-21-00017/ at Tula State University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.