Земсков А.В., Хао Ле Ван Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли – Эйлера под действием распределенной поперечной нагрузки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. С. 75–85. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.07

Zemskov A.V., Hao Le Van Unsteady thermoelastic diffusion vibrations of the Bernoulli-Euler beam under the action of a distributed transverse load. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 3, pp. 75-85. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.07

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.07
УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕРМОУПРУГОДИФФУЗИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

А.В. Земсков[1,2], Ле Ван Хао[1]

[1]Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия
[2]Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 19 января 2023 г.
Одобрена: 15 апреля 2023 г.
Принята к публикации: 15 июня 2023 г.

Ключевые слова:

термоупругая диффузия, преобразование Лапласа, ряды Фурье, функции Грина, балка Бернулли – Эйлера, нестационарные задачи.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о нестационарных колебаниях балки Бернулли – Эйлера с учетом релаксации температурных и диффузионных процессов. Исходная математическая модель включает в себя систему уравнений нестационарных изгибных колебаний балки с учетом тепломассопереноса, которая получена из общей модели термомеханодиффузии для сплошных сред с помощью обобщенного принципа Даламбера. На основе полученных уравнений сформулирована постановка начально-краевой задачи об изгибе шарнирно-опертой ортотропной балки, находящейся под действием распределенных по поверхности термоупругодиффузионных возмущений.

Решения задачи о нестационарных термоупругодиффузионных колебаниях балки ищется в интегральной форме. Ядрами интегральных представлений являются функции Грина, для нахождения которых используются разложения в тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени. Трансформанты функций Грина представлены через рациональные функции параметра преобразования Лапласа. Переход в пространство оригиналов осуществляется аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Получены аналитические выражения для функций Грина рассматриваемой задачи.

На примере шарнирно-опертой трехкомпонентной балки, выполненной из сплава цинка, меди и алюминия, находящейся под действием распределенной по длине механической нагрузки, исследовано взаимодействие механического, температурного и диффузионного полей. Проанализировано влияние релаксационных эффектов на кинетику тепломассопереноса. Решение представлено в аналитической форме и в виде графиков зависимости искомых полей перемещения, приращений температуры и приращений концентрации компонент среды от времени и координат.

В заключение приведены основные выводы о влиянии связанности полей и релаксационных эффектов на напряженно-деформированное состояние и тепломассоперенос в изгибаемой балке.

© ПНИПУ

© **Земсков Андрей Владимирович** – д.ф.-м.н., доц., e-mail azemskov1975@mail.ru.
Ле Ван Хао – асп., e-mail vanhaovtl@gmail.com.

Andrei V. Zemskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: azemskov1975@mail.ru.
Hao Le Van – PhD student, email: vanhaovtl@gmail.com.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

UNSTEADY THERMOELASTIC DIFFUSION VIBRATIONS OF THE BERNOULLI – EULER BEAM UNDER THE ACTION OF A DISTRIBUTED TRANSVERSE LOAD

A.V. Zemskov[1,2], Le Van Hao[1]

[1]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
[2] Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 19 January 2023
Approved: 15 April 2023
Accepted for publication:
15 June 2023

Keywords:

thermoelastic diffusion, Laplace transform, Fourier series, Green's functions, Bernoulli – Euler beam, unsteady problems.

ABSTRACT

The paper deals with the problem of unsteady vibrations of the Bernoulli – Euler beam, taking into account relaxation of temperature and diffusion processes. The original mathematical model includes a system of equations of non-stationary bending oscillations of the beam taking into account heat and mass transfer, which is obtained from the general model of thermoelastic diffusion for continuum using variational D'Alembert principle. Based on the obtained equations, the statement of the initial-boundary problem concerning bending of the hinged orthotropic beam, which is under the action of thermoelastic diffusion perturbations distributed on the surface, is formulated.

Solutions of the problem of unsteady thermoelastic diffusion vibrations of the beam are sought in integral form. The kernels of integral representations are Green's functions, for finding of which decompositions into trigonometric Fourier series and Laplace transformation over time are used. Laplace transformants of Green's functions are represented through the rational functions of Laplace transformation parameter. Transition into the space of the originals is carried out analytically using deductions and tables of operational calculus. Analytical expressions for Green functions of the problem under consideration are obtained.

On the example of a simple supported three-component beam made of an alloy of zinc, copper, and aluminum, which is under the influence of mechanical load distributed along the length, the interaction of mechanical, temperature and diffusion fields is investigated. The influence of relaxation effects on the kinetics of heat and mass transfer is analyzed. The solution is presented in analytical form and in the form of graphs of the dependence of the desired fields of movement, temperature increments, and increments of concentration of medium components on time and coordinates.

In conclusion, the main conclusions concerning influence of field connectivity and relaxation effects on the stress-strain state and heat and mass transfer in the bendable beam are given.

© PNRPU

Введение

При проектировании конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий, важнейшим этапом в развитии физических представлений о прочности материалов является учет влияния теплового и диффузионного движения частиц в твердом теле на процесс деформирования. О том, что тела при нагреве расширяются, а при резком деформировании – нагреваются, известно с глубокой древности, но содержательная теория температурных напряжениях сформировалась только ко второй половине XIX в. [1].

Первые экспериментальные данные о взаимодействии механического и диффузионного полей появились в 30-х гг. XX в. [2]. На основе продолженных исследований [3; 4] в 60-х гг. XX в. была создана математическая теория термомеханодиффузионных процессов [5–11]. Данные исследования не потеряли актуальности и в настоящее время, о чем свидетельствует большое количество работ как российских, так и зарубежных ученых. Говоря о расчете тонкостенных элементов конструкций, в первую очередь следует отметить работы [12–23], в которых рассматриваются различные варианты постановок задач термомеханодиффузии для балок, пластин и оболочек.

В публикациях [15; 18] исследуются квазистатические термомеханодиффузионные процессы, что является полезным при расчете установившихся режимов работы технических систем. Для анализа кратковременных импульсных воздействий необходимо использовать нестационарные модели, которые должны описывать также и релаксационные диффузионные эффекты [20–23], обусловленные конечной скоростью распространения диффузионных потоков. Последнее учитывается введением релаксационных членов в законы Фурье и Фика, что приводит к появлению в уравнениях теплопроводности и диффузии дополнительных слагаемых с производными высших порядков по времени.

В настоящее время существует много моделей, обобщающих классическую модель термомеханодиффузии. Подробнее с этим вопросом можно ознакомиться в работах [24–31], а в качестве основного вывода здесь можно сказать следующее: релаксационные эффекты, описываемые различными моделями, проявляются только на сравнительно небольших промежутках времени и в дальнейшем затухают.

При решении связанных задач одной из основных трудностей является проблема обращения преобразования Лапласа, которое лежит в основе аналитических методов решения нестационарных задач. В известных публикациях, посвященных задачам термомеханодиф-

фузии, для обращения преобразования Лапласа используется в основном метод Дурбина и его модификации [30] или квадратурные формулы на основе ортогональных многочленов [19] или сумм Римана [21; 26]. Достаточно полно алгоритмы, использующиеся для приближенного обращения преобразования Лапласа, изложены в работе [32]. Однако изображения, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного метода для нахождения их оригиналов не всегда представляется возможным.

В данной работе предложена модель нестационарных термомеханодиффузионных колебаний балки, основанная на гипотезах Бернулли – Эйлера [33], и предложен метод решения, основанный на использовании преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Данный подход позволяет существенно упростить проблему обращения преобразования Лапласа, сведя ее к обращению рациональных функций с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о нестационарных поперечных колебаниях балки Бернулли – Эйлера, выполненной из однородного многокомпонентного материала. На балку в общем случае действует распределенная поперечная нагрузка при наличии распределенных по длине источников тепла и массы. Края имеют шарнирное закрепление (рис. 1).

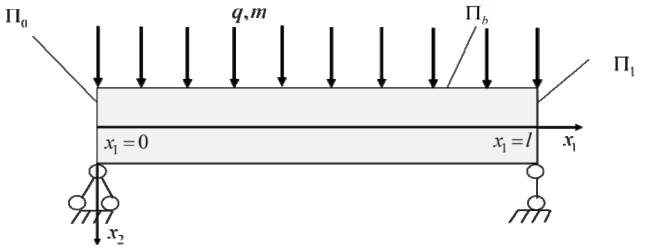


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи

Fig. 1. Illustration to the problem formulation

Под действием приложенной механической нагрузки происходит деформационный нагрев балки, и в ней возникает восходящий диффузионный поток (эффект Горского [2]), т.е. перераспределение концентрации компонентов твердого раствора под действием упругой деформации. При этом тепломассоперенос вследствие вызываемых им объемных изменений также влияет на напряженно-деформированное состояние балки. Для простоты полагаем, что материал балки представляет собой идеальный твердый раствор, в котором не учитываются перекрестные диффузионные эффекты, обусловленные взаимным влиянием диффузионных потоков каждой компоненты раствора друг на друга.

Для описания указанных физических процессов на начальном этапе используется линейная модели термомеханодиффузии для сплошных сред [6–8]

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i, \quad \rho c_0 \dot{\theta} + b_{ij} T_0 \dot{\varepsilon}_{ij} + \sum_{q=1}^{N} \upsilon^{(q)} \dot{\eta}^{(q)} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho Q^{(J)},$$
$$\dot{\eta}^{(q)} = -\frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} + Y^{(q)} \quad \left(q = \overline{1,N}\right), \quad \eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^{N} \eta^{(q)}, \tag{1}$$

где σ_{ij}, q_i и $J_i^{(q)}$ – компоненты тензора напряжений и векторов теплового диффузионного потоков, которые определяются следующим образом

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - b_{ij}\theta - \sum_{q=1}^{N} \alpha_{ij}^{(q)} \eta^{(q)}, \quad \sum_{k=0}^{M} \frac{\left(\tau_T\right)^k}{k!} \frac{\partial^k q_i}{\partial t^k} = -\kappa_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j},$$
$$\sum_{k=0}^{K} \frac{\left(\tau^{(q)}\right)^k}{k!} \frac{\partial^k J_i^{(q)}}{\partial t^k} =$$
$$= -D_{ij}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x_j} + \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + M_{ij}^{(q)} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad \left(q = \overline{1,N}\right), \tag{2}$$
$$\upsilon^{(q)} = \rho R T_0 \frac{\ln\left[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right]}{m^{(q)}},$$
$$M_{ij}^{(q)} = n_0^{(q)} D_{ij}^{(q)} \ln\left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right), \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ij}^{(q)} \alpha_{kl}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0}.$$

Здесь t – время; x_i – прямоугольные декартовы координаты; u_i – компоненты вектора перемещений; l – длина балки; T – актуальная температура среды, T_0 – начальная температура среды; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе $N+1$ – компонентной среды; $n^{(q)}$ и $n_0^{(q)}$ – актуальная и начальная концентрации q-го вещества; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность; κ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; b_{ij} – температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты диффузии; R – газовая постоянная; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества; τ_T и $\tau^{(q)}$ – времена релаксации тепловых и диффузионных потоков; $\gamma^{(q)}$ – коэффициент активности; F_i, $Y^{(q)}$ и $Q^{(J)}$ – внешние массовые возмущения.

Пределы суммирования K и M в равенствах (2) определяется на основе заданной точности вычислений. Однако, как показывают расчеты [31], практически всегда можно ограничится значением $K, M = 2$, а в большинстве случаев приемлемая точность обеспечивается

даже при $K, M = 1$ (модель Каттанео). Случай $K, M = 0$ соответствует классической модели тепломассопереноса с бесконечной скоростью распространения тепловых и диффузионных возмущений.

Перейдем в задаче (1), (2) к безразмерным величинам, выбрав в качестве характерных масштабов: длину балки l, скорость волны растяжения – сжатия в упругой среде C и начальную температуру среды T_0

$$x_i^* = \frac{x_i}{l},\ u_i^* = \frac{u_i}{l},\ \theta^* = \frac{\theta}{T_0},\ \tau = \frac{Ct}{l},\ C_{ijkl}^* = \frac{C_{ijkl}}{C_{1111}},\ C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho},\ \alpha_{ij}^{*(q)} = \frac{\alpha_{ij}^{(q)}}{C_{1111}},$$
$$b_{ij}^* = \frac{b_{ij}T_0}{C_{1111}},\ \kappa_{ij}^* = \frac{\kappa_{ij}}{\rho c_0 C l},\ B_{ij} = \frac{b_{ij}}{\rho c_0},\ \tau_0 = \frac{C\tau_T}{l},\ \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l},\ D_{ij}^{*(q)} = \frac{D_{ij}^{(q)}}{Cl},$$
$$\upsilon^{*(q)} = \frac{\upsilon^{(q)}}{\rho c_0 T_0},\ M_{ij}^{*(q)} = \frac{M_{ij}^{(q)}}{T_0},\ \Lambda_{ijkl}^{*(q)} = \frac{\Lambda_{ijkl}^{(q)}}{Cl},\ F_i^* = \frac{\rho l F_i}{C_{1111}},\ Y^{*(q)} = \frac{lY^{(q)}}{C},$$
$$Q^{*(J)} = \frac{lQ^{(J)}}{T_0 c_0 C},\ \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{C_{1111}},\ q_i^* = \frac{q_i}{\rho c_0 C T_0},\ J_i^{*(q)} = \frac{J_i^{(q)}}{C}.$$

В результате уравнения (1), (2) запишутся так (символ «$*$» в дальнейшем изложении опускается):

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i,\ \dot{\theta} + B_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sum_{q=1}^{N} \upsilon^{(q)}\dot{\eta}^{(q)} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = Q^{(J)},$$
$$\dot{\eta}^{(q)} = -\frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} + Y^{(q)},\ \eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^{N}\eta^{(q)}; \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - b_{ij}\theta - \sum_{q=1}^{N}\alpha_{ij}^{(q)}\eta^{(q)},\ \sum_{k=0}^{M}\frac{(\tau_0)^k}{k!}\frac{\partial^k q_i}{\partial \tau^k} = -\kappa_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{K}\frac{(\tau_q)^k}{k!}\frac{\partial^k J_i^{(q)}}{\partial \tau^k} = -\sum_{t=1}^{N} D_{ij}^{(q)} g^{(qt)}\frac{\partial \eta^{(t)}}{\partial x_j} + \Lambda_{ijkl}^{(q)}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + M_{ij}^{(q)}\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\ \ \left(q = \overline{1,N}\right).$$

Для построения уравнений изгибных колебаний балки воспользуемся обобщенным принципом виртуальных перемещений, согласно которому уравнения (3) и (4) записываются в виде следующего вариационного равенства [33]:

$$\int_G \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i\right)\delta u_i dG + \sum_{q=1}^{N}\int_G \sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}\left(\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial \tau} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)}\right)\delta\eta^{(q)} dG +$$
$$+ \int_G \sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial \tau^k}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + B_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sum_{q=1}^{N}\upsilon^{(q)}\eta^{(q)} - Q^{(J)}\right)\times$$
$$\times \delta\theta dG + \iint_{\Pi_\sigma}\left(\sigma_{ij}n_j - P_i\right)\delta u_i dS +$$
$$+ \sum_{q=1}^{N}\iint_{\Pi_J}\left(\sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k J_i^{(q)}}{\partial \tau^k} - I_i^{(q)}\right)n_i\delta\eta^{(q)} dS +$$
$$+ \iint_{\Pi_q}\left(\sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k q_i}{\partial \tau^k} - Q_i\right)n_i\delta\theta dS = 0, \tag{5}$$

где P_i, Q_i, $I_i^{(q)}$ – внешние поверхностные динамические возмущения, δu_i – виртуальные перемещения, $\delta\theta$ – виртуальные приращения температуры, $\delta\eta^{(q)}$ – виртуальные приращения концентрации, G – область, занятая телом, Π_σ – часть поверхности, к которой приложены механические нагрузки, Π_q – часть поверхности, на которой заданы тепловые потоки, Π_J – часть поверхности, на которой заданы диффузионные потоки, n_i – нормаль к поверхности балки.

Далее полагаем, что:

1) материал балки ортотропный. Для записи упругих физических постоянных будем использовать нотацию Фойгта

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\alpha\beta\beta},\ C_{66} = C_{1212},\ b_\alpha = b_{\alpha\alpha},\ B_\alpha = B_{\alpha\alpha},\ \kappa_\alpha = \kappa_{\alpha\alpha},$$
$$D_\alpha^{(q)} = D_{\alpha\alpha}^{(q)},\ \alpha_\beta^{(q)} = \alpha_{\beta\beta}^{(q)},\ \Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} = \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^{(q)},\ M_\alpha^{(q)} = M_{\alpha\alpha}^{(q)}; \tag{6}$$

2) изгиб балки осуществляется в плоскости x_1Ox_2. Тогда $u_k = u_k(x_1, x_2, \tau)$, $k = 1,2$, $u_3 = 0$, $\varepsilon_{i3} = 0$. Массоперенос и теплоперенос также осуществляются в плоскости x_1Ox_2, т.е. $\eta^{(q)} = \eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau)$ и $\theta = \theta(x_1, x_2, \tau)$;

3) поперечные прогибы являются малыми. Считаем, что поперечные сечения после деформации остаются плоскими (гипотеза плоских сечений) и нормальными к изогнутой оси балки (гипотеза Бернулли – Эйлера). В этом случае линеаризация искомых величин по переменной x_2 будет иметь вид (приближенное равенство заменяется точным, штрих означает производную по переменной x_1)

$$u_1(x_1, x_2, \tau) = u(x_1, \tau) - x_2 v'(x_1, \tau),\ u_2(x_1, x_2, \tau) = v(x_1, \tau),$$
$$\theta(x_1, x_2, \tau) = \varphi(x_1, \tau) + x_2\vartheta(x_1, \tau),$$
$$\eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau) = N_q(x_1, \tau) + x_2 H_q(x_1, \tau). \tag{7}$$

С учетом (6) и (7) компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока записываются следующим образом:

$$\sigma_{11} = (u' - x_2 v'') - b_1(\varphi + x_2\vartheta) - \sum_{q=1}^{N}\alpha_1^{(q)}\left(N_q + x_2 H_q\right),\ \sigma_{12} = 0,$$
$$\sigma_{22} = C_{12}(u' - x_2 v'') - b_2(\varphi + x_2\vartheta) - \sum_{q=1}^{N}\alpha_2^{(q)}\left(N_q + x_2 H_q\right),$$
$$\sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k q_1}{\partial \tau^k} = -\kappa_1(\varphi' + x_2\vartheta'),\ \sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k q_2}{\partial \tau^k} = -\kappa_2\vartheta, \tag{8}$$
$$\sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k J_1^{(q)}}{\partial \tau^k} = -\sum_{r=1}^{N} D_1^{(qr)}\left(N_r' + x_2 H_r'\right) + \Lambda_{11}^{(q)}(u'' - x_2 v''') + M_1^{(q)}(\varphi' + x_2\vartheta'),$$
$$\sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k J_2^{(q)}}{\partial \tau^k} = -\sum_{r=1}^{N} D_2^{(qr)} H_r - \Lambda_{21}^{(q)} v'' + M_2^{(q)}\vartheta \quad \left(q = \overline{1,N}\right).$$

Подставляя формулы (6)–(8) в вариационное равенство (5), получаем уравнения поперечных колебаний балки Бернулли – Эйлера с учетом тепломассопереноса:

$$\begin{gathered}\ddot{v}''-a\ddot{v}=v^{IV}+b_1\vartheta''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j''-\frac{q+m'}{J_3},\\ H_{N+1}=-\sum_{q=1}^{N}H_q,\quad a=\frac{F}{J_3},\\ \sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\left(\dot{\vartheta}-B_1\dot{v}''+\sum_{q=1}^{N}\upsilon^{(q)}\dot{H}_q\right)=\kappa_1\vartheta''+\frac{\varphi}{J_3},\\ \sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k\dot{H}_q}{\partial\tau^k}=D_1^{(q)}H_q''+\Lambda_{11}^{(q)}v^{IV}+M_1^{(q)}\vartheta''+\frac{z_q}{J_3}.\end{gathered}\tag{9}$$

Здесь F – площадь сечения, J_3 – момент инерции балки относительно оси Ox_3, m – распределённый погонный момент, q – распределённая погонная поперечная нагрузка, φ и z_q – линейные плотности источников теплопереноса и массопереноса.

Уравнения (9) дополняются краевыми условиями, которые также получаются из вариационного равенства (5). В случае шарнирного опирания они имеют вид:

$$\begin{gathered}\left(v''+b_1\vartheta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_j\right)\Big|_{x_1=0}=0,\\ \left(v''+b_1\vartheta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(q)}H_j\right)\Big|_{x_1=1}=0,\\ v\big|_{x_1=0}=0,\quad v\big|_{x_1=1}=0,\quad \vartheta\big|_{x_1=0}=0,\\ \vartheta\big|_{x_1=1}=0,\quad H_q\big|_{x_1=0}=0,\quad H_q\big|_{x_1=1}=0.\end{gathered}\tag{10}$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

2. Метод решения

Решение задачи (9), (10) ищется в интегральной форме

$$\begin{Bmatrix}v(x,\tau)\\ \vartheta(x,\tau)\\ H_q(x,\tau)\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{N+2}\int_0^{\tau}\int_0^{1}\begin{Bmatrix}G_{1k}(x,\xi,\tau-t)\\ G_{2k}(x,\xi,\tau-t)\\ G_{q+2,k}(x,\xi,\tau-t)\end{Bmatrix}F_k(\xi,t)\,d\xi dt,\tag{11}$$

где $F_1(x,\tau)=(q+m')/J_3$, $F_2(x,\tau)=\varphi/J_3$ и $F_{q+2}(x,\tau)=z_q/J_3$ – распределенные по длине термомеханодиффузионные нагрузки, входящие в уравнения (9); $x=x_1$; G_{ik} – функции Грина задачи (9), (10), которые удовлетворяют краевой задаче с нулевыми начальными условиями

$$\begin{gathered}\ddot{G}_{1k}''-a\ddot{G}_{1k}=G_{1k}^{IV}+b_1G_{2k}''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,k}''-\delta_{1k}\delta(x-\xi)\delta(\tau),\\ \sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\left(\dot{G}_{2k}-B_1\dot{G}_{1k}''+\sum_{q=1}^{N}\upsilon^{(q)}\dot{G}_{q+2,k}\right)=\\ =\kappa_1G_{2k}''+\delta_{2k}\delta(x-\xi)\delta(\tau),\\ \sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k\dot{G}_{q+2,k}}{\partial\tau^k}=\sum_{r=1}^{N}D_1^{(qr)}G_{r+2,k}''+\\ +\Lambda_{11}^{(q)}G_{1k}^{IV}-M_1^{(q)}G_{2k}''+\delta_{q+2,k}\delta(x-\xi)\delta(\tau);\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left(G_{1k}''+b_1G_{2k}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,k}\right)\Big|_{x=0}=0,\\ \left(G_{1k}''+b_1G_{2k}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,k}\right)\Big|_{x=1}=0,\\ G_{1k}\big|_{x=0}=0,\quad G_{1k}\big|_{x=1}=0,\quad G_{2k}\big|_{x=0}=0,\\ G_{2k}\big|_{x=1}=0,\quad G_{q+2,k}\big|_{x=0}=0,\quad G_{q+2,k}\big|_{x=1}=0.\end{gathered}\tag{13}$$

Для построения функций Грина применяем к задаче (12) и (13) преобразование Лапласа по времени. Затем домножаем каждое уравнение на $\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\pi n$ и интегрируем в промежутке $[0,1]$. Получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}k_{1n}(s)G_{1kn}^L(\xi,s)-b_1\lambda_n^2G_{2kn}^L(\xi,s)-\\ -\lambda_n^2\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,kn}^L(\xi,s)=2\delta_{1k}\sin\lambda_n\xi,\\ B_1k_0(s)\lambda_n^2G_{1kn}^L(\xi,s)+k_{2n}(s)G_{2kn}^L(\xi,s)+\\ +k_0(s)\sum_{j=1}^{N}\upsilon^{(j)}G_{j+2,kn}^L(\xi,s)=2\delta_{2k}\sin\lambda_n\xi,\\ -\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n^4G_{1kn}^L(\xi,s)-M_1^{(q)}\lambda_n^2G_{2kn}^L(\xi,s)+\\ +k_{q+2,n}(s)G_{q+2,kn}^L(\xi,s)=2\delta_{q+2,k}\sin\lambda_n\xi.\end{gathered}\tag{14}$$

Здесь

$$\begin{gathered}k_{1n}(s)=s^2\lambda_n^2+as^2+\lambda_n^4,\quad k_{2n}(s)=k_0(s)+\kappa_1\lambda_n^2,\\ k_{q+2,n}(s)=\sum_{k=0}^{K}\frac{s^{k+1}\tau_q^k}{k!}+D_1^{(q)}\lambda_n^2,\quad k_0(s)=\sum_{k=0}^{M}\frac{s^{k+1}\tau_0^k}{k!},\\ G_{ikn}^L(\xi,s)=2\int_0^1G_{ik}^L(x,\xi,s)\sin\lambda_n x\,dx,\\ G_{ik}^L(x,\xi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{ikn}^L(\xi,s)\sin\lambda_n x,\quad \lambda_n=\pi n.\end{gathered}\tag{15}$$

Решение системы (14) находится методом Крамера и имеет вид ($i=1,2$, $q=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,N+2}$)

$$\begin{gathered}G_{ikn}^L(\xi,s)=\frac{2P_{ikn}(s)}{P_n(s)}\sin\lambda_n\xi,\\ G_{q+2,kn}^L(\xi,s)=\frac{2\delta_{q+2,k}}{k_{q+2,n}(s)}\sin\lambda_n\xi+\frac{2P_{q+2,kn}(s)}{Q_{qn}(s)}\sin\lambda_n\xi,\end{gathered}\tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}P_n(s)=\left[k_{1n}(s)k_{2n}(s)+k_0(s)\lambda_n^4B_1b_1\right]\Pi_n(s)+\\ +k_{1n}(s)k_0(s)\lambda_n^2\sum_{j=1}^{N}\upsilon^{(j)}M_1^{(j)}\Pi_{jn}(s)-\end{gathered}$$

$$-k_{2n}(s)\lambda_n^6\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s)+$$
$$+k_0(s)\lambda_n^6 B_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}M_1^{(j)}\Pi_{jn}(s)+$$
$$+k_0(s)\lambda_n^6 b_1\sum_{j=1}^{N}\upsilon^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s)+ \quad (17)$$
$$+k_0(s)\lambda_n^8\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\upsilon^{(i)}\alpha_1^{(j)}M^{(ji)}\Pi_{ijn}(s),$$
$$Q_{qn}(s)=k_{q+2,n}(s)P_n(s),$$

$$P_{11n}(s)=k_{2n}\Pi_n(s)+k_0(s)\lambda_n^2\sum_{j=1}^{N}\upsilon^{(j)}M_1^{(j)}\Pi_{jn}(s),$$
$$P_{12n}(s)=\lambda_n^2\left[b_1\Pi_n(s)+\lambda_n^2\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}M_1^{(j)}\Pi_{jn}(s)\right],$$
$$P_{1,q+2,n}(s)=\lambda_n^2\left[k_{2n}\alpha_1^{(q)}-b_1k_0(s)\upsilon^{(q)}\right]\Pi_{qn}(s)-$$
$$-k_0(s)\lambda_n^4\sum_{j=1}^{N}M_1^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)}\upsilon^{(q)}-\alpha_1^{(q)}\upsilon^{(j)}\right)\Pi_{jqn}(s),$$

$$P_{21n}(s)=-k_0(s)\lambda_n^2\left[B_1\Pi_n(s)+\lambda_n^2\sum_{j=1}^{N}\upsilon^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s)\right],$$
$$P_{22n}(s)=k_{1n}\Pi_n(s)-\lambda_n^6\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s),$$

$$P_{2,q+2,n}(s)=-k_0(s)\left(k_{1n}\upsilon^{(q)}+\lambda_n^4B_1\alpha_1^{(q)}\right)\Pi_{qn}(s)+$$
$$+k_0(s)\lambda_n^6\sum_{j=1}^{N}\Lambda_{11}^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)}\upsilon^{(q)}-\alpha_1^{(q)}\upsilon^{(j)}\right)\Pi_{jqn}(s),$$

$$\Pi_n(s)=\prod_{j=1}^{N}k_{j+2,n}(s),\ \Pi_{jn}(s)=$$
$$=\prod_{r=1,r\neq j}^{N}k_{r+2}(s),\ \Pi_{ijn}(s)=\prod_{r=1,r\neq i,j}^{N}k_{r+2,n}(s).$$

Оригиналы в (16) находим с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления (здесь штрих обозначает производную по параметру s) [34]

$$G_{ikn}(\xi,\tau)=2\sum_{j=1}^{\Sigma}A_{ikn}^{(j)}e^{s_{jn}\tau}\sin\lambda_n\xi$$
$$\left(i=1,2,\ \Sigma=(K+1)N+M+3,\ j=\overline{1,\Sigma}\right),$$
$$G_{q+2,kn}(\xi,\tau)=2\sum_{l=1}^{K+1}\left(\frac{\delta_{q+2,k}}{k'_{q+2,n}(\chi_{qln})}+A_{q+2,kn}^{(\Sigma+l)}\right)e^{\chi_{qln}\tau}\sin\lambda_n\xi+$$
$$+2\sum_{j=1}^{\Sigma}A_{q+2,kn}^{(j)}e^{s_{jn}\tau}\sin\lambda_n\xi, \quad (18)$$
$$A_{ikn}^{(j)}=\frac{P_{ikn}(s_{jn})}{P'_n(s_{jn})},\ A_{q+2,kn}^{(j)}=\frac{P_{q+2,kn}(s_{jn})}{Q'_{qn}(s_{rn})},$$
$$A_{q+2,kn}^{(\Sigma+l)}=\frac{P_{q+2,kn}(\chi_{qln})}{Q'_{qn}(\chi_{qln})}\ \left(k=\overline{1,N+2},\ l=\overline{1,K+1}\right).$$

Здесь s_{jn}, $j=\overline{1,\Sigma}$ – нули полинома $P_n(s)$, χ_{qln} – дополнительные нули многочлена $Q_{qn}(s)$. В случае $K=1$ эти корни равны

$$\chi_{q1n}=\frac{-1-\sqrt{1-4\tau_qD_1^{(q)}\lambda_n^2}}{2\tau_q},\ \chi_{q2n}=\frac{-1+\sqrt{1-4\tau_qD_1^{(q)}\lambda_n^2}}{2\tau_q}.$$

Подставляя найденные функции Грина (18) в свертки (11), получаем решение задачи об изгибе балки (9), (10).

3. Переход к бесконечным скоростям распространения тепловых и диффузионных возмущений и к классическим задачам теории упругости

Любая математическая модель задачи является приближением к реальности. При этом в зависимости от требуемой точности расчетов возможны различные степени идеализации реальных процессов. Так, если промежуток времени, на котором рассматривается функционирование системы, много больше времен релаксации τ_0 и τ_q (среднее время возвращения системы в равновесное состояние), то можно пренебречь и соответствующими релаксационными эффектами. Для этого в полученных ранее выражениях для функций Грина (17) и (18) необходимо выполнить предельный переход при $\tau_0,\tau_q\to 0$. Количество нулей многочлена $P_n(s)$ при $\tau_0,\tau_q\to 0$ сокращается до $N+3$ и при этом

$$\Sigma\to N+3,\ k_{q+2,n}(s)\to s+D_1^{(q)}\lambda_n^2,\ k_{2n}(s)\to s+\kappa_1\lambda_n^2. \quad (19)$$

Поэтому многочлен $Q_{qn}(s)$ имеет только один дополнительный нуль $-D_1^{(q)}\lambda_n^2$ Тогда формулы (18) запишутся следующим образом $\left(i=1,2,\ m=\overline{1,N+2}\right)$:

$$G_{mk}(x,\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{mkn}(\xi,\tau)\sin\lambda_n x,$$
$$G_{ikn}(\xi,\tau)=2\sum_{j=1}^{N+3}A_{ikn}^{(j)}e^{s_{jn}\tau}\sin\lambda_n\xi,$$
$$G_{q+2,kn}(\xi,\tau)=2\left(1+A_{q+2,kn}^{(N+4)}\right)e^{-D_1^{(q)}\lambda_n^2\tau}\sin\lambda_n\xi+ \quad (20)$$
$$+2\sum_{j=1}^{N+3}A_{q+2,kn}^{(j)}(\lambda_n)e^{s_{jn}\tau}\sin\lambda_n\xi,$$

где коэффициенты $A_{mkn}^{(j)}$ находятся по формулам (18) с учетом (19).

Полагая далее в равенствах (16) и (17) $\alpha_1^{(q)}=0$ и $b_1=0$, получаем трансформанты функций Грина для классической задачи для балки Бернулли – Эйлера

$$G^{L(el)}(x,\xi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{11n}^{L}(\xi,s)\sin\lambda_n x=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n\xi\sin\lambda_n x}{(\lambda_n^2+a)s^2+\lambda_n^4}.$$

Оригинал находим по таблицам операционного исчислений [34]

$$G^{(el)}(x,\xi,\tau)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n\sin\gamma_n\tau\sin\lambda_n\xi\sin\lambda_n x}{\lambda_n^4},\quad \gamma_n=\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{\lambda_n^2+a}}. \quad (21)$$

4. Пример

Возьмем для расчета балку длины $l=0{,}01$ м и сечением $h\times b=0{,}05l\times 0{,}05l$, выполненную из трехкомпонентного (N = 2) материала – дюралюминия [35] (равномерно распределенные внутри сплава компоненты цинк (1 %) и медь (4,5 %) диффундируют в алюминии):

$$C_{1122}=6{,}93\cdot10^{10}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2},\ C_{1212}=2{,}56\cdot10^{10}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$
$$\rho=2780\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ c_\varepsilon=920\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}},$$
$$\kappa_{11}=134\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}},\ b_{11}=4{,}94\cdot10^{6}\frac{\text{Н}}{\text{К}\cdot\text{м}^2},$$
$$D_{11}^{(1)}=2{,}62\cdot10^{-12}\frac{\text{м}^2}{\text{с}},\ D_{11}^{(2)}=2{,}89\cdot10^{-15}\frac{\text{м}^2}{\text{с}},$$
$$\alpha_{11}^{(1)}=6{,}55\cdot10^{7}\frac{\text{Дж}}{\text{кг}},\ \alpha_{11}^{(2)}=6{,}14\cdot10^{7}\frac{\text{Дж}}{\text{кг}},$$
$$m^{(1)}=0{,}065\frac{\text{кг}}{\text{моль}},\ m^{(2)}=0{,}064\frac{\text{кг}}{\text{моль}},$$
$$n_0^{(1)}=0{,}01,\ n_0^{(2)}=0{,}045,\ h=b=0{,}05l,\ T_0=700\,\text{К}.$$

Для того, чтобы исследовать влияние деформаций на температурное и диффузионное поля, будем предполагать, что поверхностные источники тепла и массы отсутствуют ($F_2(x,\tau)=F_{q+2}(x,\tau)=0$), а балка находится только под действием распределенной по длине поперечной механической нагрузки, которую задаем в виде:

$$F_1(x,\tau)=H(\tau)H(x), \quad (22)$$

где $H(\bullet)$ – функция Хевисайда.

Подставляя (18) и (22) в свертки (11), получаем

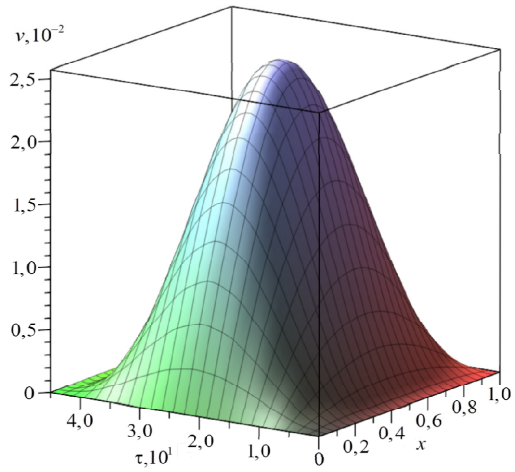
$$v(x,\tau)=\int_0^\tau\int_0^1 G_{11}(x,\xi,\tau-t)F_1(\xi,t)\,d\xi dt=$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\Sigma}\left[1-(-1)^n\right]A_{11n}^{(j)}\frac{e^{s_{jn}\tau}-1}{\lambda_n s_{jn}}\sin\lambda_n x,$$

$$\vartheta(x,\tau)=\int_0^\tau\int_0^1 G_{21}(x,\xi,\tau-t)F_1(\xi,t)\,d\xi dt=$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\Sigma}\left[1-(-1)^n\right]A_{21n}^{(j)}\frac{e^{s_{jn}\tau}-1}{\lambda_n s_{jn}}\sin\lambda_n x,$$

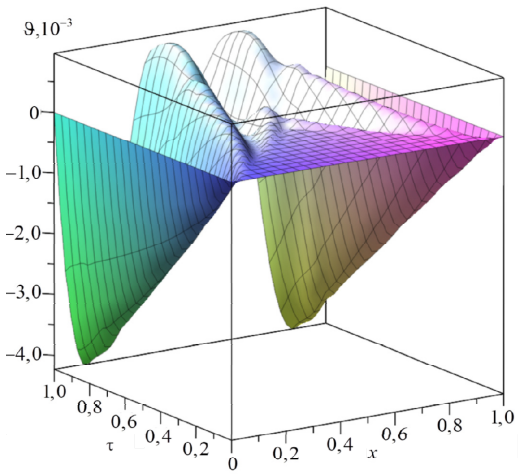
$$H_q(x,\tau)=\int_0^\tau\int_0^1 G_{q+2,1}(x,\xi,\tau-t)F_1(\xi,t)\,d\xi dt=$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\Sigma}\left[1-(-1)^n\right]A_{q+2,1n}^{(j)}\frac{e^{s_{jn}\tau}-1}{\lambda_n s_{jn}}\sin\lambda_n x+ \quad (23)$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{K+1}\left[1-(-1)^n\right]A_{q+2,1n}^{(\Sigma+j)}\frac{e^{\chi_{qjn}\tau}-1}{\lambda_n\chi_{qjn}}\sin\lambda_n x.$$

Результаты вычислений представлены на рис. 2–5. Для расчета использовалось 100 членов ряда Фурье.

Расчетный пример демонстрирует влияние механических нагрузок на тепломассоперенос в балке. На рис. 2 показано температурное поле, инициированное заданными механическими нагрузками. На рис. 3 изображены пространственно-временные распределения приращений концентраций цинка (*a*) и меди (*b*), инициированные изгибом балки.



a

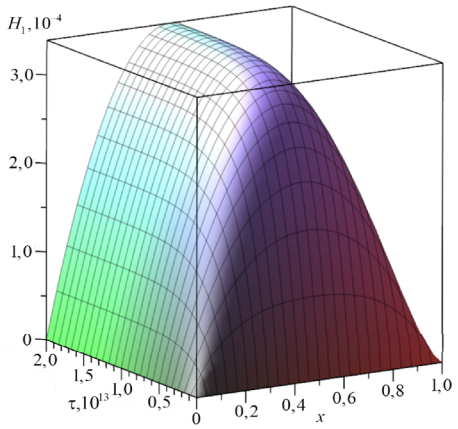


b

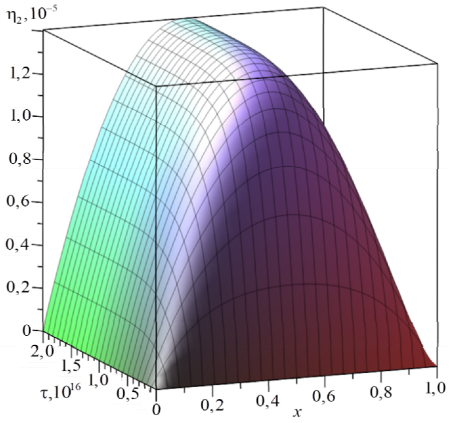
Рис. 2. Поперечные смещения балки $v(x,\tau)$ (*a*), приращение температуры $\vartheta(x,\tau)$ (*b*)

Fig. 2. The beam deflections $v(x,\tau)$ (*a*), the temperature increment $\vartheta(x,\tau)$ (*b*)

Как видим, упругие деформации очень слабо влияют на диффузионное поле в изгибаемой балке, что на качественном уровне совпадает с известными результатами экспериментальных исследований [3; 4].



a



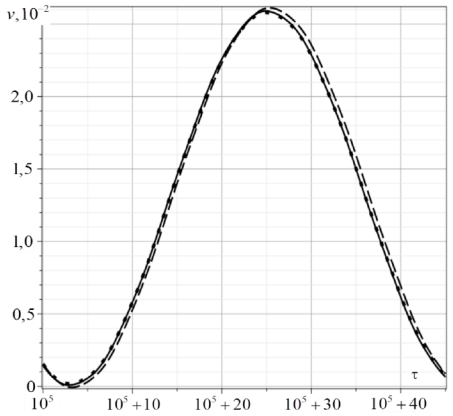
b

Рис. 3. Приращение концентрации цинка $H_1(x, \tau)$ (*a*) и меди $H_2(x_1, \tau)$ (*b*)

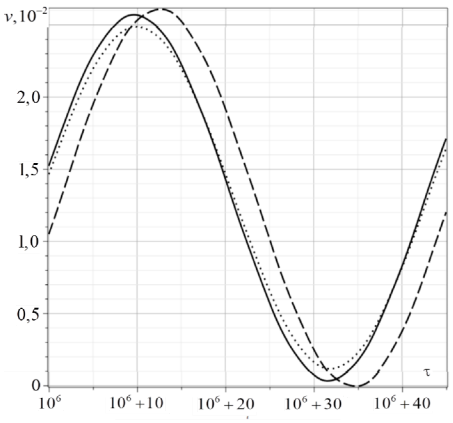
Fig. 3. The concentration increment of zinc $H_1(x, \tau)$ (*a*) and copper $H_2(x_1, \tau)$ (*b*)

На рис. 4 приводится сравнение прогибов балки для моделей с релаксацией (сплошная линия), без релаксации (пунктирная линия) и упругого решения при $\alpha_q = 0$ и $b = 0$ (штриховая линия). Видно, что различия начинают проявляться не сразу, а по истечении некоторого промежутка времени порядка $\tau = 10^5$ (в размерных единицах $1{,}61 \cdot 10^{-1}$ с).

Влияние релаксационных эффектов на кинетику массопереноса продемонстрировано на рис. 5. Хорошо видно, что, начиная с некоторого момента времени $\tau \sim 10^8$, релаксационные эффекты начинают затухать (рис. 5, *b*). Результаты, представленные на рис. 4 и 5, совпадают с аналогичными для упругодиффузионной задачи, полученными в работе [23].



a



b

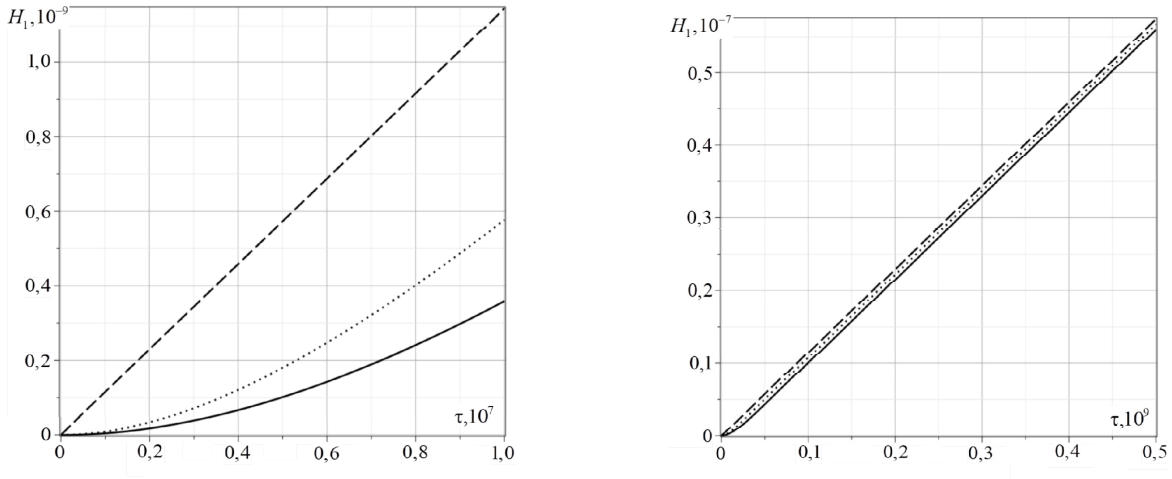
Рис. 4. Прогибы балки $v(0{,}5l, \tau)$ с учетом тепломассопереноса с релаксацией $\tau_t = 2 \cdot 10^{-5}$ с , $\tau^{(q)} = 200$ с (сплошная линия), без релаксации (пунктирная линия), решение упругой задачи (штриховая линия): *a* – $\tau \in [10^5, 10^5 + 50]$; *b* – $\tau \in [10^6, 10^6 + 50]$

Fig. 4. The beam deflections $v(0.5l, \tau)$ with heat and mass transfer $\tau_t = 2 \cdot 10^{-5}$ s , $\tau^{(q)} = 200$ s (solid line), without relaxation (dotted line) and without heat and mass transfer (dashed line): *a* – $\tau \in [10^5, 10^5 + 50]$; *b* – $\tau \in [10^6, 10^6 + 50]$

Заключение

В работе построена математическая модель термоупругодиффузионных нестационарных колебаний балки Бернулли – Эйлера с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков, описывающая взаимосвязь между механическими, температурными и диффузионными полями в сплошных средах. Предложен алгоритм построения функций Грина, основанный на использовании преобразования Лапласа и разложений в тригонометрические ряды Фурье.

На примере изгиба балки под действием распределенной по поверхности механической нагрузки продемонстрирован эффект взаимодействия механического, температурного и диффузионного полей.



a *b*

Рис. 5. Приращение концентрации $H_1(0,1l,\tau)$ первой компоненты (цинк) с учетом релаксации $\tau_t = 2\cdot10^{-5}$ с, $\tau^{(q)} = 200$ с (сплошная линия), $\tau_t = 10^{-5}$ с, $\tau^{(q)} = 100$ с (пунктирная линия), без релаксации (штриховая линия): *a* – $\tau\in[0,10^7]$; *b* – $\tau\in[0,\ 5\cdot10^8]$

Fig. 5. The concentration increment $H_1(0.1l,\tau)$ of the first component (zinc) $\tau_t = 2\cdot10^{-5}$ s, $\tau^{(q)} = 200$ s (solid line), $\tau_t = 10^{-5}$ s, $\tau^{(q)} = 100$ s (dotted line), without relaxation (dashed line): *a* – $\tau\in[0,10^7]$; *b* – $\tau\in[0,\ 5\cdot10^8]$

Показано, что, с одной стороны, нестационарный изгиб инициирует процесс тепломассопереноса. С другой стороны, температура и диффузия влияют на поле перемещений, что проявляется в виде запаздывания термомеханодиффузионных колебаний по отношению к чисто механическим. Отмечено также, что релаксационные эффекты, обуславливающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений, проявляются только на конечном промежутке времени, соизмеримым с временем релаксации тепловых и диффузионных потоков. Указанные результаты представлены в аналитической и графической формах.

Библиографический список

1. Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1879. – Vol. 170. – P. 231–256.
2. Горский В.С. Исследование упругого последействия в сплаве Cu-Au с упорядоченной решеткой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1936. – Т. 6, № 3. – С. 272–276.
3. Nachtrieb N.H., Handler G.S A relaxed vacancy model for diffusion incrystalline metals // Acta Metallurgica. – 1954. – Vol. 2, no. 6. – P. 797–802.
4. Petit J., Nachtrieb N.H. Self-Diffusion in Liquid Gallium // Journal of Chemical Physics. – 1956. – Vol. 24. – P. 1027.
5. Prussin S. Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion // J. Appl. Phys. – 1961. – Vol. 32. – P. 1876–1881.
6. Подстригач Я.С., Павлина В.С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в N-компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 4. – С. 383–389.
7. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
8. Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. – Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
9. Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Диффузия примеси в материале под действием вибрационных нагрузок // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18, № 3. – С. 292–305.
10. Парфенова Е.С., Князева А.Г. Влияние параметров химической реакции на взаимодействие тепловых, диффузионных и механических волн в условиях обработки поверхности потоком частиц // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 77–90.
11. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // Coupled Systems Mechanics. – 2019. – Vol. 8, no. 1. – P. 39–53.
12. Швец Р.Н., Флячок В.М. Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // Мат. физ. и нелинейная механика. – 1991. – № 16. – С. 39–43.
13. Швец Р.Н., Флячок В.М. Уравнения механодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // Математические методы и физико-механические поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 54–61.
14. Aouadi M., Copetti M.I.M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – P. 1–24. DOI: 10.1002/zamm.201400285
15. Copetti M.I.M., Aouadi M. A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – Vol. 109. – P. 157–183.
16. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin's model // Asymptotic Analysis. – 2015. – Vol. 95. – P. 129–160.

17. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. – 2015. – Vol. 3, no. 5. – P. 619–632.

18. Aouadi M., Miranville A. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // Evolution equations and control theory. – 2015. – Vol. 4, no. 3. – P. 241–263.

19. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR). – 2014. – Vol. 2, iss. 5. – P. 151–159.

20. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects / M. Huang, P. Wei, L. Zhao, Y. Li // Composite Structures. – 2021. – Vol. 270 – P. 114104. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114104.

21. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of Nanoscale Beam due to Various Sources in Modified Couple Stress Thermoelastic Diffusion with Phase Lags // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 23. – P. 36–49.

22. Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation // Math. Comput. Appl. – 2019. – Vol. 24, iss. 1. – 23. DOI: 10.3390/mca24010023

23. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V. Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. – 2021. – Vol. 141. – P. 487–499.

24. Кумар Р., Каушал С., Викрам. Отклик нелокальных и фазовых запаздываний на нагружения линейного типа в теориях термоупругих моментных напряжений с учетом диффузии // Изв. РАН. МТТ. – 2021. – № 4. – С. 151–164.

25. Комар Л.А., Свистков А.Л. Термодинамика упругого материала с релаксирующим потоком тепла // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – № 4. – С. 152–157.

26. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // CMST. – 2019. – Vol. 25, no. 4. – P. 167–176.

27. Zenkour A.M. Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model // Journal of Ocean Engineering and Science. – 2020. – Vol. 5, no. 3. – P. 214–222. DOI: 10.1016/j.joes.2019.12.001

28. Ailawaliar P., Budhiraja S. Dynamic Problem in Thermoelastic Solid Using Dual-Phase-Lag Model with Internal Heat Source // J. of Math. Sci. and App. – 2014. – Vol. 2, no. 1. – P. 10–16.

29. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.

30. Abbas A.I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // Journal of measurements in engineering. – 2014. – Vol. 2, no. 4. – P. 175–184.

31. Davydov S.A., Zemskov A.V. Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2022. – Vol. 183, part C. – P. 122213. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122213

32. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа (справочная книга). – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. – 224 с.

33. Земсков А.В., Ле Ван Хао. Модель нестационарного изгиба балки Бернулли – Эйлера с учетом тепломассопереноса // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва, 23 – 25 ноября 2021 г. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. – С. 280–289.

34. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 586 с.

35. Физические величины: справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский [и др.]; под общ. ред. И.С. Григорьева, И.З. Мелихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

References

1. Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1879, V. 170, pp. 231–256.

2. Gorskij V.S. Issledovanie uprugogo posledejstviya v splave Cu-Au s uporyadochennoj reshetkoj [Study of elastic aftereffect in Cu-Au alloy with an ordered lattice]. *Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki*, 1936, V. 6, No 3, pp. 272–276 [in Russian].

3. Nachtrieb N.H., Handler G.S. A relaxed vacancy model for diffusion incrystalline metals. *Acta Metallurgica*, 1954, V. 2, No 6, pp. 797–802.

4. Petit J., Nachtrieb N. H. Self-Diffusion in Liquid Gallium. *Journal of Chemical Physics*, 1956, V. 24, P. 1027.

5. Prussin S. Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion. *J. Appl. Phys*., 1961, V.32, pp.1876–1881.

6. Podstrigach Ya.S., Pavlina B.C. Differencial'nye uravneniya termodinamicheskih processov v N-komponentnom tvyordom rastvore [Differential Equations of Thermodynamic Processes in an N-Component Solid Solution]. *Fiziko-himicheskaya mekhanika materialov*, 1965, No 4, pp. 383–389.

7. Eremeev V.S. Diffuziya i napryazheniya [Diffusion and stress]. Energoatomizdat. – Moscow, 1985, 182 p. [In Russian].

8. Knyazeva A.G. Vvedenie v termodinamiku neobratimy`x processov [Introduction to the thermodynamics of irreversible processes], Ivan Fedorov publishing house, Tomsk, 2014, 172 p. [in Russian].

9. Indeytsev D.A., Mochalova Yu.A. Impurity diffusion in material under vibration loads. *Chebyshevskii Sbornik*, 2017, V. 18, No 3, pp. 290–303. [In Russian].

10. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. The influence of chemical reaction parameters on the interaction of thermal, diffusion and mechanical waves under surface treatment by a particle beam. *Computational Continuum Mechanics*, 2021, V. 14, No 1, pp. 77–90.

11. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // *Coupled Systems Mechanics*, 2019, V. 8, No 1, pp. 39–53.

12. Shvets R.N., Flyachok V.M. Variacionny`j podxod k resheniyu dinamicheskix zadach mexanotermodiffuzii anizotropny`x obolochek [A variational approach to solving dynamic problems of mechanothermal diffusion of anisotropic shells]. *Mat. fiz. i nelinejnaya mexanika*, 1991, No 16, pp. 39–43. [In Russian].

13. Shvets R.N., Flyachok V.M.: Uravneniya mexanodiffuzii anizotropny`x obolochek s uchetom poperechny`x deformacij [The equations of mechanothermodiffusion of anisotropic shells taking

account of transverse strains]. *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya*, 1984, No 20, pp. 54–61. [In Russian].

14. Aouadi M., Copetti M.I.M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*., 2015, pp. 1–24. DOI: 10.1002/zamm.201400285.

15. Copetti M.I.M., Aouadi M. A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory. *Applied Numerical Mathematics*, 2016, V.109, pp. 157–183.

16. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin's model. *Asymptotic Analysis*, 2015, V.95, pp. 129–160.

17. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, 2015, V.3, No.5, pp. 619–632.

18. Aouadi M., Miranville A. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory. *Evolution equations and control theory*, 2015, V. 4, – No 3, pp. 241–263.

19. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell. *International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR)*, 2014, V. 2, Is. 5, pp. 151–159.

20. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects, *Composite Structures*, 2021, V. 270, 114104. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104.

21. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of Nanoscale Beam due to Various Sources in Modified Couple Stress Thermoelastic Diffusion with Phase Lags. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2019, V. 23, pp. 36–49.

22. Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation. *Math. Comput. Appl*., 2019, V. 24, Is. 1, 23. DOI:10.3390/mca24010023.

23. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V. Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action. *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials*, 2021, V. 141, pp. 487–499.

24. Kumar R., Kaushal S., Vikram D. Response of Non-Local and Phase-Lags due to Ramp-Type Loading in Modified Couple Stress Thermoelastic with Mass Diffusion. *Mech. Solids,* 2021, V. 56, No 4, pp. 559-570.

25. Komar L.A., Svistkov A.L. Thermodynamics of Elastic Material with Relaxing Heat Flux. *Mech. Solids*, 2020, V. 55, No 4, pp. 584-588.

26. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources. *CMST*, 2019, V. 25, No 4, pp. 167–176.

27. Zenkour A.M. Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2020, V. 5, No 3, pp. 214–222. https://doi.org/10.1016/j.joes.2019.12.001.

28. Ailawaliar P., Budhiraja S. Dynamic Problem in Thermoelastic Solid Using Dual-Phase-Lag Model with Internal Heat Source. *J. of Math. Sci. and App*., 2014, V. 2, No 1, pp. 10–16.

29. Formalev V.F. Teploperenos v anizotropnyh tverdyh telah. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, thermal waves, inverse problems]. FIZMATLIT, Moscow, 2015.

30. Abbas A.I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium. *Journal of measurements in engineering*, 2014, V. 2, No 4, pp. 175–184.

31. Davydov S.A., Zemskov A.V. Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2022, V. 183, Part C, 122213. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122213.

32. Krylov V.I., Skoblya N.S. Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'e i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa (spravochnaya kniga) [Approximate Fourier Transform Methods and Laplace Transform Inversion (Reference Book)]. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury izdatel'stva «Nauka», Moscow, 1974, 224 p.

33. Zemskov A.V., Le Van Hao. Model' nestacionarnogo izgiba balki Bernulli-Ejlera s uchetom teplomassoperenosa [Model of unsteady bending of a Bernoulli-Euler beam taking into account heat and mass transfer]. *Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij, slozhnyh i geterogennyh sred. Sbornik trudov 11-j Vserossijskoj nauchnoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem.* Sam Poligrafist, Moscow, 2021, pp. 280–289. [In Russian]

34. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu [Operational Calculus Handbook]. «Vy`sshaya shkola», Moscow, 1965, 586 P. [In Russian]

Fizicheskie velichiny: Spravochnik [Physical quantities: Handbook] / Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskij A.M. ets. Edited by Grigor`ev I.S., Melixov I.Z. Energoatomizdat, Moscow, 1991, 1232 P. [In Russian]

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№ 23-21-00189, https://rscf.ru/project/23-21-00189/).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was carried out with the financial support of the RGNF (No. 23-21-00189, https://rscf.ru/project/23-21-00189/).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.