Лекомцев С.В., Матвеенко В.П., Сенин А.Н. Собственные колебания и гидроупругая устойчивость пластины с пьезоэлементом, подключённым к внешней RL-цепи // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. С. 97–113. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.09

Lekomtsev S.V., Matveenko V.P., Senin A.N. Natural vibrations and hydroelastic stability of a plate with a piezoelectric element connected to an external RL-circuit. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 3, pp. 97-113. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.09

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.09
УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ГИДРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОМ, ПОДКЛЮЧЁННЫМ К ВНЕШНЕЙ RL-ЦЕПИ

С.В. Лекомцев, В.П. Матвеенко, А.Н. Сенин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 05 декабря 2022 г.
Одобрена: 24 апреля 2023 г.
Принята к публикации:
15 июня 2023 г.

Ключевые слова:

гидроупругость, электроупругость, пластина, пьезоэлемент, внешняя электрическая цепь, потенциальная сжимаемая жидкость, собственные колебания, устойчивость, демпфирование колебаний, метод конечных элементов.

АННОТАЦИЯ

Исследована возможность пассивного демпфирования гармонических колебаний и управления границей устойчивости пластины, взаимодействующей с текущей жидкостью. Механизм основан на шунтировании закреплённого на поверхности конструкции пьезоэлемента внешней электрической цепью. Подбор параметров такой цепи, обеспечивающих наибольшую скорость затухания колебаний или максимальное изменение критической скорости потока жидкости, осуществлён путём решения серии задач на собственные значения. Приведено две математических постановки. Первая из них основана на трёхмерных уравнениях линейной теории пьезоупругости, а вторая представляет упрощение данных уравнений с целью их совместного применения с теорией тонких пластин. Динамика идеальной жидкости в обоих случаях описана волновым уравнением, сформулированным относительно потенциала возмущения скорости. Совместно с условием непроницаемости, а также граничными условиями оно преобразовано к слабой форме. Гидродинамическое давление вычислено по линеаризованной формуле Бернулли. Выполнена верификация разработанных конечно-элементных алгоритмов и проведено сравнение их вычислительной эффективности. Проанализировано изменение комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от сопротивления и индуктивности последовательной электрической цепи, подключённой к пьезоэлементу. Из решения задачи оптимизации подобраны такие их величины, которые обеспечивают наилучшее демпфирование резонансных колебаний прямоугольной пластины, взаимодействующей с текущей жидкостью. Проведённые численные исследования показали, что использование данных значений приводит к меньшему изменению спектра частот исходной системы и обеспечивает более высокую скорость затухания колебаний, чем известные аналитические выражения. Рассмотрены два варианта граничных условий, задаваемых на краях конструкции. Продемонстрировано, что с помощью пассивной электрической цепи нельзя повлиять на потерю устойчивости в виде дивергенции, но можно изменить критическую скорость флаттера в пределах нескольких процентов.

© ПНИПУ

© **Лекомцев Сергей Владимирович –** к.ф.-м.н., зав. лаб., e-mail: lekomtsev@icmm.ru, iD: 0000-0002-8331-2979
Матвеенко Валерий Павлович – д.т.н., академик РАН, г.н.с., e-mail: mvp@icmm.ru, iD: 0000-0003-2787-6558
Сенин Александр Николаевич – м.н.с., e-mail: senin.a@icmm.ru, iD: 0000-0002-7537-0001

Sergey V. Lekomtsev – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department, e-mail: lekomtsev@icmm.ru, iD: 0000-0002-8331-2979
Valerii P. Matveenko – Doctor of Technical Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, e-mail: mvp@icmm.ru, iD: 0000-0003-2787-6558
Alexander N. Senin – Junior Researcher, e-mail: senin.a@icmm.ru, iD: 0000-0002-7537-0001

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

NATURAL VIBRATIONS AND HYDROELASTIC STABILITY OF A PLATE WITH A PIEZOELECTRIC ELEMENT CONNECTED TO AN EXTERNAL RL-CIRCUIT

S.V. Lekomtsev, V.P. Matveenko, A.N. Senin

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 05 December 2022
Approved: 24 April 2023
Accepted for publication:
15 June 2023

Keywords:

hydroelasticity, electroelasticity, plate, piezoelectric element, external electrical circuit, potential compressible fluid, natural vibrations, stability, vibration damping, finite element method.

ABSTRACT

The possibility of passive damping of harmonic vibrations and controlling the stability boundary of the plate interacting with the flowing fluid is investigated. The key idea behind the applied vibration control method is to connect the piezoelectric element located on the surface of the structure to an external shunt circuit. The selection of parameters for such circuit, providing the highest rate of vibration damping or the maximum change in the critical velocity of the fluid flow, is performed by solving a series of eigenvalue problems. Two mathematical formulations are considered. The first formulation is based on the three-dimensional equations of the linear theory of piezoelasticity, and the second one is a simplification of these equations with the aim of using them in conjunction with the theory of thin plates. The dynamics of an ideal fluid in both cases is described by a wave equation formulated for the perturbation velocity potential. Together with the impermeability condition and the boundary conditions it is transformed to the weak form. The hydrodynamic pressure is calculated by the linearized Bernoulli formula. The developed finite-element algorithms are verified and their computational efficiency is compared. A change in the complex eigenvalues of the electromechanical system is analyzed depending on the resistance and inductance of the electric circuit connected to the piezoelectric element. The values of these parameters providing the best damping of resonant vibrations of a rectangular plate interacting with the flowing liquid have been selected based on the solution of the optimization problem. The numerical studies have shown that the selected values lead to a smaller change in the frequency spectrum of the original system and provide a higher rate of vibration damping as compared to the values found by the known analytical expressions. The numerical investigation has been performed for two variants of boundary conditions set at the edges of the structure. It is demonstrated that the use of a passive electrical circuit cannot affect the loss of stability by divergence, but is able to change the critical flutter velocity by a few percent.

© PNRPU

Введение

Пластины нередко являются важными компонентами сложных конструкций, которые используются в условиях высоких эксплуатационных нагрузок, вибраций или сейсмических воздействий. Колебания, представляющие опасность для тонкостенных тел, часто возникают при их взаимодействии с текущей или неподвижной жидкостью. Наиболее распространёнными примерами являются: хранилища технологических и химически агрессивных жидкостей, находящиеся в зонах с повышенной сейсмической активностью; гибкие тонкостенные трубки, использующиеся в нефтедобывающей и авиационной промышленностях; пакеты пластин в охладителях АЭС и теплообменниках различных энергетических установок; трубы теплоносителя. Для предотвращения возникновения колебаний большой амплитуды во время резонанса или флаттера необходимо не только осуществлять мониторинг текущего состояния критически важного элемента, но и иметь возможность управлять протекающими в нём динамическими процессами. Это позволит предотвращать аварийные ситуации, вызывающие мгновенное или усталостное разрушение. Одним из способов демпфирования колебаний и вибраций является использование пьезоэлектрических элементов [1]. Основным преимуществом такого подхода является возможность управления динамическим поведением конструкций, находящихся в труднодоступных местах, ограниченном пространстве или под водой [2].

Традиционно выделяют два основных способа управления опасными колебаниями различной природы: активный и пассивный. В первом случае используется система, состоящая из сенсора и актуатора [3]. Один из них или оба могут быть выполнены из пьезоэлектрического материала, в том числе отечественного производства [4; 5]. Сенсор передаёт показания на контроллер, который вырабатывает управляющий сигнал и подаёт его на актуатор через усилитель. Управляющее воздействие рассчитывается таким образом, чтобы актуатор компенсировал и максимально снижал нежелательные колебания. Эффективность такой системы характеризуется отношением амплитуд вынужденных установившихся колебаний до и после подавления или скоростью затухания переходных процессов. В литературе представлены работы, посвящённые активному способу управления колебаниями тонких пластин [6–9] и оболочек [10–12], взаимодействующих с акустической средой или жидкостью.

При использовании пассивного механизма демпфирования к электродированным поверхностям пьезоэлемента подключается внешняя электрическая цепь, обла-

дающая импедансом [13–15]. Подбирая его величину, можно добиться существенного снижения амплитуды при резонансе, а также увеличения скорости затухания свободных колебаний на требуемой моде [15–20]. Данный метод хорошо зарекомендовал себя на практике, особенно в тех случаях, когда демпфирование колебаний осуществляется в воздушной среде. Впоследствии это побудило некоторых авторов использовать его для подавления шума подводных объектов или колебаний конструкций, взаимодействующих с жидкостью [21–26]. Основная трудность, возникающая при использовании техники пассивного демпфирования, связана с определением параметров электрической цепи. В ряде случаев, когда рассматривается система с одной степенью свободы, стержни или балки, возможно получение аналитических формул [15–18; 27; 28]. Здесь широкое распространение получил подход, основанный на анализе передаточной функции системы. В зависимости от способа её построения и выбора критерия оптимизации оптимальные параметры для одной и той же электрической цепи могут принимать различные значения.

В задачах пьезоупругости со сложной геометрией, в том числе представляющих реальный практический интерес, основным инструментом исследователей являются методы конечных [29–32] и граничных [33; 34] элементов. Уже на начало XXI в. число работ с их использованием превышало тысячу, о чём свидетельствуют опубликованные в то время обзоры [29–31]. В [30] систематизировано более 35 видов конечных элементов, предназначенных для моделирования пьезоэлектрических тел, оболочек, пластин и балок. Информация наглядно представлена в виде рисунков и таблиц с указанием особенностей используемых постановок и может быть использована при проектировании и расчёте smart-систем различной конфигурации. При необходимости сохранения компромисса между временем вычислений и точностью получаемых результатов при анализе слоистых пьезоэлектрических пластин и оболочек двойной кривизны в рамках трёхмерной постановки следует применять более современные конечные элементы [35–37]. Они не подвержены проблеме сдвигового запирания, обладают хорошей сходимостью на грубой сетке, а по производительности превосходят свои аналоги в коммерческих программных продуктах ANSYS [35] и ABAQUS [36] за счёт меньшего количества неизвестных в решаемой системе уравнений. Конкурентоспособно выглядит на фоне зарубежных аналогов отечественный комплекс для компьютерного дизайна композитов и активных материалов ACELAN-COMPOS [38–41]. В нём также имеются оболочечные пьезо- и магнитоэлектрические конечные элементы, которые автоматически размещаются на межфазных границах представительного объёма с целью имитации поверхностных эффектов для наноразмерных включений или пор. С его помощью определены эффективные характеристики различных композитных материалов на основе пьезокерамики: пористых [38], с включениями из α-корунда (α-Al_2O_3) [39], с неоднородной поляризацией [40] и др. Программный комплекс позволяет решать задачи на собственные значения с помощью метода Ланцоша. Некоторые аспекты его численной реализации для разреженных матриц большой размерности и верификация приведены в статье [42].

На сегодняшний день коммерческое программное обеспечение позволяет решать нестационарные и гармонические задачи пьезоупругости, в том числе и при наличии в модели внешней электрической цепи произвольной конфигурации [20; 43–45], однако для задач на собственные значения такая возможность отсутствует. Между тем в статьях [46–48] отмечалось, что эффективным инструментом при построении алгоритмов для определения оптимальных параметров шунтирующей цепи является модальный анализ. Он позволяет получить в явном виде спектр собственных частот и соответствующих им декрементов колебаний вне зависимости от вида возбуждающего воздействия. В большинстве конечно-элементных работ подбор параметров электрической цепи, обеспечивающих наилучшее демпфирование заданной моды колебаний конструкции, осуществляется с помощью предложенных в [15] аналитических выражений. Несмотря на то, что найденные с их помощью значения не всегда являются оптимальными [47], для разреженного спектра низких частот они дают достоверное приближение. С практической точки зрения этого оказывается достаточно, потому что точность конечно-элементных расчётов зависит от множества факторов (характеристики материала, корректность задания граничных условий и т.д.). В случае неподвижной жидкости или её отсутствия возможно заменить моделируемую систему эквивалентным электрическим аналогом [49–51] или применить технологию снижения размерности на основе разложения движения по собственным формам колебаний конструкции [52; 53]. Использование данных методик существенно сокращает время расчёта, но их реализация при взаимодействии конструкции с текущей жидкостью весьма затруднительна.

Отдельно отметим статьи, где с помощью метода конечных элементов исследуются электроупругие пластины и оболочки, взаимодействующие с неподвижной [6; 11; 23; 25; 54–58] и текущей [12; 24; 59] жидкостью. Из приведённых публикаций только работа [24] посвящена пассивному демпфированию колебаний конструкции, взаимодействующей с потоком жидкости. В ней рассматривается морская подъёмная поверхность в виде пластины, которая является упрощённым аналогом подводного крыла, стабилизатора, руля направления и т.п. Проведённые эксперименты показали, что её собственные частоты очень слабо зависят от числа Рейнольдса. Это позволило авторам в конечно-элементных расчётах использовать модель неподвижной акустической среды. Подбор параметров электрической *RL*-цепи, шунтирующей пьезоэлементы, осуществлялся по формулам [15].

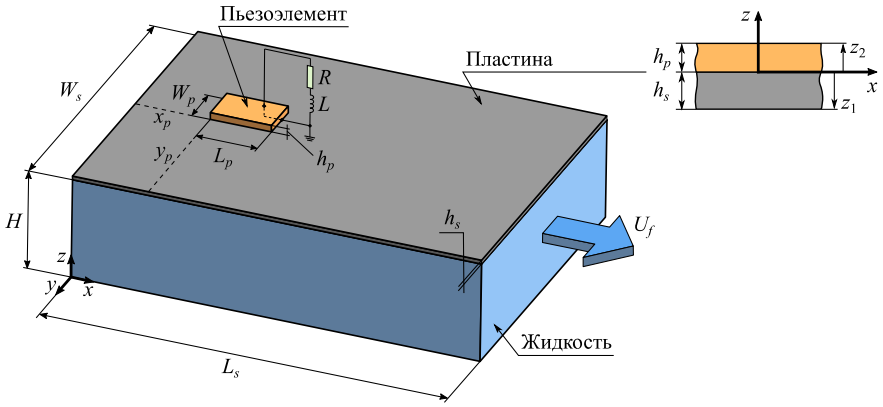


Рис. 1. Прямоугольная пластина с пьезоэлементом, взаимодействующая с текущей жидкостью

Fig. 1. Rectangular plate with a piezoelectric element and interacting with flowing fluid

Представленные результаты показали эффективность предложенного способа, но его применение в случае зависимости собственных частот колебаний пластины от скорости течения жидкости или при наличии в системе сильного механизма гидродинамического демпфирования не столь очевидно. В связи с этим актуальной является разработка инструмента для подбора параметров пассивной электрической цепи, обеспечивающих подавление гармонических колебаний конструкции, взаимодействующей с текущей жидкостью.

1. Математическая постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается прямоугольная пластина длиной L_s, шириной W_s и толщиной h_s, нижняя поверхность которой взаимодействует с жидкостью, текущей со скоростью U_f в направлении оси x (рис. 1). На верхней поверхности пластины расположен пьезоэлектрический элемент длиной L_p, шириной W_p и толщиной h_p, подключённый через электродированные поверхности к электрической цепи. Цепь состоит из последовательно соединённых резистора сопротивления R и катушки индуктивности L. Необходимо оценить возможность использования пьезоэлемента, шунтированного RL-цепью, для демпфирования гармонических колебаний пластины, взаимодействующей с потоком жидкости, а также для управления границей потери устойчивости.

1.1. Слабая постановка для уравнения движения жидкости

Основные уравнения, описывающие безвихревую динамику идеальной сжимаемой жидкости в случае малых возмущений, формулируются в терминах потенциала возмущения скорости ϕ [60; 61]. Соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка, записанное в связанной с упругой пластиной декартовой системе координат (x, y, z), совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуется к слабой форме [61]:

$$\int_{V_f} \nabla F_n \cdot \nabla \hat{\phi} \mathrm{d}V + \int_{V_f} F_n \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} \mathrm{d}V + \int_{V_f} F_n \frac{2U_f}{c_f^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t \partial x} \mathrm{d}V - \int_{V_f} F_n \frac{U_f^2}{c_f^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} F_n \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S - \int_{S_\sigma} F_n U_f \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = 0, \quad n = \overline{1, m_f}. \tag{1}$$

где ∇ – оператор Набла; $\hat{\phi}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ – пробные решения для потенциала скорости и вектора перемещений пластины $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^{\mathrm{T}}$, где u, v, w – его компоненты в направлении осей x, y, z декартовой системы координат; c_f – скорость звука в жидкой среде; t – время; F_n и m_f – базисные функции и их количество; $\mathbf{n}$ – внешний вектор единичной нормали к границе гидроупругого взаимодействия $S_\sigma = S_f \bigcap S_s$; S_f и S_s – поверхности, ограничивающие объёмы жидкости V_f и упругого тела V_s.

1.2. Соотношения на основе линейной теории пьезоупругости

При отсутствии внешних механических и электрических нагрузок вариационное уравнение движения кусочно-однородного электроупругого тела, состоящего из пластины и расположенного на её поверхности пьезоэлемента, формулируется на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла. С учётом допущения о малости вектора электрической индукции в области упругого тела по сравнению с его величиной в пьезоупругой части основные физические соотношения записываются в виде [62–64]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_p \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}\mathbf{E}, & \mathbf{x} \in V_p; \\ \mathbf{D} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{c}_s\boldsymbol{\varepsilon},\quad \mathbf{x}\in V_s, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – векторы, содержащие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций; $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\epsilon}$ – матрицы упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ – векторы электрической индукции и напряжённости электрического поля. Здесь и далее подстрочными индексами «*s*», «*p*» и «*f*» обозначена принадлежность величины к области конструкции, пьезоэлектрическому элементу и жидкости.

Полагается, что для электрического поля выполняется условие потенциальности

$$\mathbf{E}=-\nabla\psi, \tag{4}$$

где ψ – электрический потенциал.

Внешняя последовательная *RL*-цепь подключается к пьезоэлементу через его верхнюю и нижнюю поверхности, которые покрыты тонким токопроводящим слоем пренебрежимо малой массы (электродированы). С учётом работы электрического поля с разностью потенциалов U по перемещению любого возможного заряда q на элементах этой электрической цепи [43; 48] вариационное уравнение движения в матричной форме примет вид [47; 65; 66]

$$\begin{gathered}\int\limits_{V_p}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_p\boldsymbol{\varepsilon}-\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{E}-\delta\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}-\delta\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}\right)\mathrm{d}V+\\+\int\limits_{V_p}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_p\ddot{\mathbf{u}}\mathrm{d}V+\int\limits_{V_s}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_s\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V+\\+\int\limits_{V_s}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_s\ddot{\mathbf{u}}\mathrm{d}V-\int\limits_{S_\sigma}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}p\mathrm{d}S+\frac{1}{L}\iint\left(\psi_1^L-\psi_2^L\right)\delta\psi\mathrm{d}t\mathrm{d}t+\\+\frac{1}{R}\int\left(\psi_1^R-\psi_2^R\right)\delta\psi\mathrm{d}t=0,\end{gathered} \tag{5}$$

где V_p – объём, занимаемый пьезоэлектрическим элементом; ρ_s и ρ_p – плотности материалов пластины и пьезоэлемента; $\psi_1^L-\psi_2^L$ и $\psi_1^R-\psi_2^R$ – разности потенциалов на соответствующих элементах электрической цепи; p – гидродинамическое давление жидкости, которое вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p=-\rho_f\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_f\frac{\partial\phi}{\partial x}\right), \tag{6}$$

где ρ_f – плотность жидкой среды.

Формулировка задачи о собственных колебаниях кусочно-однородного электроупругого тела, взаимодействующего с текущей жидкостью, основана на представлении решения в форме экспоненты

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},t)=\left\{\phi(\mathbf{x},t),\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t),\,\psi(\mathbf{x},t)\right\}^{\mathrm{T}}=\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x})e^{\mathrm{i}\lambda t}. \tag{7}$$

Здесь: $\tilde{\mathbf{d}}=\left\{\tilde{\phi}(\mathbf{x}),\,\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}),\,\tilde{\psi}(\mathbf{x})\right\}^{\mathrm{T}}$ – функция, зависящая только от координат $\mathbf{x}$; $\lambda=\omega+\mathrm{i}\gamma$ – характеристический показатель, где ω – собственная частота колебаний, а γ – величина, отвечающая за демпфирование системы; i – мнимая единица.

Подстановка выражения (7) в уравнения (1) и (5) с учётом (6) позволяет получить (волнистая черта сверху опущена):

$$\begin{gathered}\int\limits_{V_f}\nabla F_n\cdot\nabla\hat{\phi}\mathrm{d}V-\lambda^2\int\limits_{V_f}F_n\frac{1}{c_f^2}\hat{\phi}\mathrm{d}V+\\+\mathrm{i}\lambda\int\limits_{V_f}F_n\frac{2U_f}{c_f^2}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\mathrm{d}V-\int\limits_{V_f}F_n\frac{U_f^2}{c_f^2}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}\mathrm{d}V-\\-\mathrm{i}\lambda\int\limits_{S_\sigma}F_n\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S-\int\limits_{S_\sigma}F_nU_f\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial x}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=0,\quad n=\overline{1,m_f};\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{V_p}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_p\boldsymbol{\varepsilon}-\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{E}-\delta\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}-\delta\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\right)\mathrm{d}V-\\-\lambda^2\int\limits_{V_p}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_p\mathbf{u}\mathrm{d}V+\int\limits_{V_s}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_s\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V-\\-\lambda^2\int\limits_{V_s}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_s\mathbf{u}\mathrm{d}V+\int\limits_{S_\sigma}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\rho_f\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}+U_f\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)\mathrm{d}S-\\-\frac{1}{\lambda^2L}\left(\psi_1^L-\psi_2^L\right)\delta\psi+\frac{1}{\mathrm{i}\lambda R}\left(\psi_1^R-\psi_2^R\right)\delta\psi=0.\end{gathered} \tag{9}$$

1.3. Соотношения на основе теории тонких пластин

В случае тонкостенных тел, поляризованных по толщине, исходная система уравнений (2)–(4) может быть упрощена с использованием допущений и гипотез, изложенных в работе [52]. В основе данного подхода лежит представление пьезоэлектрического элемента в виде тонкой накладки, в которой реализуется плоское напряжённое состояние, а в векторах напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и электрической индукции $\mathbf{D}$ отличными от нуля остаются только нормальные к электродированной поверхности компоненты D_3 и E_3. С учётом вышесказанного уравнения исходной системы (2) переписываются в виде [67; 68]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{c}_{11}&\tilde{c}_{12}&0\\\tilde{c}_{21}&\tilde{c}_{22}&0\\0&0&\tilde{c}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&\tilde{e}_{31}\\0&0&\tilde{e}_{32}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\E_3\end{Bmatrix},\tag{10}$$

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\D_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\tilde{e}_{31}&\tilde{e}_{32}&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\tilde{\epsilon}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\E_3\end{Bmatrix},$$

где константы для пьезоэлектрического материала преобразуются согласно [67]:

$$\begin{gathered}\tilde{c}_{ij}=c_{ij}-\frac{c_{i3}c_{j3}}{c_{33}},\quad\tilde{c}_{66}=c_{66},\quad\tilde{e}_{3j}=e_{3j}-\frac{e_{33}c_{j3}}{c_{33}},\\\tilde{\epsilon}_{33}=\epsilon_{33}+\frac{e_{33}^2}{c_{33}},\quad i,j=\overline{1,2}.\end{gathered} \tag{11}$$

Компоненты матрицы упругих констант $\tilde{\mathbf{c}}_s$ для изотропного материала пластины определяются известным образом через модуль Юнга E_s и коэффициент Пуассона ν_s:

$$\tilde{c}_{11}=\tilde{c}_{22}=\frac{E_s}{1-\nu_s^2},\quad \tilde{c}_{12}=\tilde{c}_{21}=\frac{\nu E_s}{1-\nu_s^2},\quad \tilde{c}_{66}=\frac{E_s}{2(1+\nu_s)}. \quad (12)$$

Полагается, что вектор электрического поля ортогонален к электродированным поверхностям, а его интенсивность однородна во всём пьезоэлектрическом теле [52]

$$E_3=-\frac{\psi_+-\psi_-}{h_p}=-\frac{U}{h_p}, \quad (13)$$

где $U=\psi_+-\psi_-$ – разность электрических потенциалов (напряжение) между верхней и нижней электродированными поверхностями пьезоэлектрического элемента.

Соотношения, определяющие деформации в тонкой пластине, записываются с использованием классической теории пластин на основе гипотез Кирхгофа – Лява [69]

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\\ \gamma^1_{xy}\end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0=\left\{\varepsilon^0_{xx},\varepsilon^0_{yy},\gamma^0_{xy}\right\}^{\mathrm{T}}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1=\left\{\varepsilon^1_{xx},\varepsilon^1_{yy},\gamma^1_{xy}\right\}^{\mathrm{T}}=\left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right\}^{\mathrm{T}},$$

где под u, v, w следует понимать перемещения точек серединной поверхности пластины в направлении осей x, y, z декартовой системы координат.

Обобщённый вектор усилий и моментов $\mathbf{t}$ определяется выражениями

$$\mathbf{t}=\mathbf{S}_p\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{G}E=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}\\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{G}\frac{U}{h_p},\quad \mathbf{x}\in V_p, \quad (15)$$

$$\mathbf{t}=\mathbf{S}_s\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}}\\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon},\quad \mathbf{x}\in V_s, \quad (16)$$

где $\mathbf{G}=\left[h_p\tilde{e}_{31},h_p\tilde{e}_{32},0,\frac{1}{2}h_p^2\tilde{e}_{31},\frac{1}{2}h_p^2\tilde{e}_{32},0\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^0\\ \boldsymbol{\varepsilon}^1\end{Bmatrix}=$ $=\left\{\varepsilon^0_{xx},\varepsilon^0_{yy},\gamma^0_{xy},\varepsilon^1_{xx},\varepsilon^1_{yy},\gamma^1_{xy}\right\}^{\mathrm{T}}$, а коэффициенты, входящие в матрицы жёсткостей $\mathbf{S}_p$ и $\mathbf{S}_s$, вычисляются как

$$\left(\bar{A}_{lk},\bar{B}_{lk},\bar{C}_{lk}\right)=\int_h\left(1,z,z^2\right)\tilde{c}_{lk}\mathrm{d}z,\ (l,k=1,2,6). \quad (17)$$

С учётом соотношений (13), (15), (16) вариационный принцип возможных перемещений для электроупругого тела примет следующий вид [52]:

$$\begin{aligned}&\int_{S_p}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_p\boldsymbol{\varepsilon}+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\frac{U}{h_p}+\frac{\delta U}{h_p}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathrm{d}S-\\ &-\delta UC_pU+\int_{V_p}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_p\ddot{\mathbf{u}}\mathrm{d}V+\\ &+\int_{S_s}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_s\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}S+\int_{V_s}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_s\ddot{\mathbf{u}}\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}p\mathrm{d}S+\delta Uq=0.\end{aligned} \quad (18)$$

Здесь: S_p – поверхность, ограничивающая объём V_p; $\mathbf{S}_s$ и $\mathbf{S}_p$ определяются для упругого тела и накладки из пьезоэлектрического материала в соответствии с (10)–(12); $C_p=\tilde{\varepsilon}_{33}S/h_p$ – ёмкость пьезоэлемента, где S – площадь его нижней поверхности (основания).

При подключении к пьезоэлементу внешней электрической цепи, состоящей из последовательно соединённых резистора с сопротивлением R и катушки индуктивности L, напряжение U в таком контуре определяется следующим образом

$$U=R\frac{\partial q}{\partial t}+L\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Постановка задачи о собственных колебаниях на основе уравнений (18) и (19) осуществляется, как и ранее, за счёт представления решения в форме экспоненты

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},t)=\left\{\phi(\mathbf{x},t),\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t),\,U(\mathbf{x},t),\,q(\mathbf{x},t)\right\}^{\mathrm{T}}=\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x})e^{i\lambda t}. \quad (20)$$

Используя (20), получим (волнистая черта сверху опущена):

$$\begin{aligned}&\int_{S_p}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_p\boldsymbol{\varepsilon}+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\frac{U}{h_p}+\frac{\delta U}{h_p}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathrm{d}S-\\ &-\delta UC_pU-\lambda^2\int_{V_p}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_p\mathbf{u}\mathrm{d}V+\\ &+\int_{S_s}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_s\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}S-\lambda^2\int_{V_s}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\rho_s\mathbf{u}\mathrm{d}V+\\ &+\int_{S_\sigma}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\rho_f\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}+U_f\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)\mathrm{d}S+\delta Uq=0,\\ &\lambda^2Lq-\mathrm{i}\lambda Rq+U=0.\end{aligned} \quad (21)$$

Применяемые в расчётах кинематические граничные условия, задаваемые на краях пластины, обозначаются согласно рис. 2 с помощью следующих сокращений: C – жёсткое закрепление, F – свободный край.

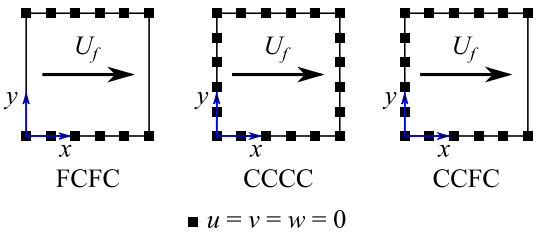


Рис. 2. Граничные условия для пластины

Fig. 2. Boundary conditions for plate

2. Численная реализация

Решение задачи осуществляется методом конечных элементов. При использовании трёхмерных определяющих соотношений (9) для описания поведения кусочно-однородного электроупругого тела дискретизация всех расчётных подобластей осуществляется с использованием 20-узловых конечных элементов в форме призмы с квадратичной аппроксимацией всех компонент вектора перемещений **u**, электрического потенциала ψ, базисных функций F_n и потенциала возмущения скорости ϕ. В подходе на основе уравнений (21) для представления областей жидкости и пластины с пьезоэлементом применяются пространственные 8-узловые призматические и плоские четырёхугольные конечные элементы соответственно. Потенциал возмущения скорости ϕ, базисные функции F_n, разность электрических потенциалов U, свободный заряд q, мембранные перемещения u и v упругого тела и его пьезоэлектрической части описываются с использованием Лагранжевых функций формы с линейной аппроксимацией, а для изгибных перемещений w применяются несовместные функции формы Эрмита с кубической аппроксимацией.

После выполнения известных процедур [66] конечно-элементный аналог системы уравнений (8), (9) в матричном виде примет вид:

$$\left(-\lambda^2\mathbf{M}+\mathrm{i}\lambda\mathbf{C}-\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{C}_L+\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\mathbf{C}_R+\mathbf{K}+\mathbf{A}\right)\tilde{\mathbf{d}}=0, \qquad (22)$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{M}_s+\mathbf{M}_p & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{fs} & 0\\ \mathbf{C}_{sf} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_f & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{K}_s+\mathbf{K}_p & \mathbf{K}_{p\psi}\\ 0 & \mathbf{K}_{p\psi}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}_{\psi}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_f & \mathbf{A}_{fs} & 0\\ \mathbf{A}_{sf} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{d}}=\left\{\tilde{\boldsymbol{\phi}},\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\}^{\mathrm{T}}$, а типовые матрицы масс **M**, демпфирования **C**, жёсткости **K** и гидродинамической жёсткости **A** для каждого конечного элемента формируются следующим образом

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_s=\int_{V_s}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\rho_s\mathbf{N}\mathrm{d}V,\quad \mathbf{M}_p=\int_{V_p}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\rho_p\mathbf{N}\mathrm{d}V,\\ \mathbf{K}_s=\int_{V_s}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_s\mathbf{B}\mathrm{d}V,\quad \mathbf{K}_p=\int_{V_p}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_p\mathbf{B}\mathrm{d}V,\\ \mathbf{K}_{\psi}=-\int_{V_p}\left(\nabla\mathbf{H}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}\left(\nabla\mathbf{H}\right)\mathrm{d}V,\quad \mathbf{K}_{p\psi}=\int_{V_p}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\left(\nabla\mathbf{H}\right)\mathrm{d}V,\\ \mathbf{M}_f=\int_{V_f}\frac{1}{c_f^2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathrm{d}V,\quad \mathbf{C}_f=\int_{V_f}\frac{2U_f}{c_f^2}\frac{\partial\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\mathbf{F}\mathrm{d}V,\\ \mathbf{K}_f=\int_{V_f}\left(\nabla\mathbf{F}\right)^{\mathrm{T}}\nabla\mathbf{F}\mathrm{d}V,\quad \mathbf{A}_f=-\int_{V_f}\frac{U_f^2}{c_f^2}\frac{\partial\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\mathrm{d}V,\end{gathered} \qquad (23)$$

$$\begin{gathered}\mathbf{C}_{sf}=\int_{S_\sigma}\rho_f\mathbf{N}_w^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathrm{d}S,\quad \mathbf{A}_{sf}=\int_{S_\sigma}\rho_f U_f\mathbf{N}_w^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\mathrm{d}S,\\ \mathbf{C}_{fs}=-\int_{S_\sigma}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_w\mathrm{d}S,\quad \mathbf{A}_{fs}=-\int_{S_\sigma}U_f\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{N}_w}{\partial x}\mathrm{d}S,\\ \mathbf{C}_L=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_R=\frac{1}{R}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.\end{gathered}$$

Здесь: $\mathbf{H},\mathbf{F},\mathbf{N},\mathbf{N}_w$ – функции формы для электрического потенциала ψ, потенциала возмущения скорости жидкости ϕ, вектора перемещений электроупругого тела **u** и его нормальной составляющей; **B** – матрица градиентов, определяющая связь деформаций с узловыми перемещениями.

Неклассическая проблема на собственные значения (22) решается методом Мюллера с использованием библиотеки Intel® Math Kernel Library для основных операций с разреженными матрицами. Несмотря на применение технологии параллельных вычислений, расчёты занимают длительное время из-за необходимости несколько раз находить определитель системы (22) на каждой итерации.

Использование подхода на основе уравнений (21) в рамках упрощённой постановки на основе гипотез работы [52] позволяет получить квадратичную задачу на собственные значения

$$\left(-\lambda^2\mathbf{M}+\mathrm{i}\lambda\mathbf{C}+\mathbf{K}+\mathbf{A}\right)\tilde{\mathbf{d}}=0, \qquad (24)$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{M}_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & L\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{fs} & 0 & 0\\ \mathbf{C}_{sf} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -R\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_f & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sp} & 0\\ 0 & \mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_p & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_f & \mathbf{A}_{fs} & 0 & 0\\ \mathbf{A}_{sf} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{d}}=\left\{\tilde{\boldsymbol{\phi}},\tilde{\mathbf{u}},\tilde{U},\tilde{q}\right\}^{\mathrm{T}}$, а типовые матрицы для каждого конечного элемента определяются аналогично (23), за исключением следующих:

$$\begin{gathered}\mathbf{K}_s=\int_{S_s}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_s\mathbf{B}\mathrm{d}S+\int_{S_p}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_p\mathbf{B}\mathrm{d}S,\\ \mathbf{M}_s=\int_{V_s}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\rho_s\mathbf{N}\mathrm{d}V+\int_{V_p}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\rho_p\mathbf{N}\mathrm{d}V,\\ \mathbf{K}_p=C_p,\quad \mathbf{K}_{sp}=\int_{S_p}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\frac{1}{h_p}\mathrm{d}S,\quad \mathbf{K}_{ps}=\int_{S_p}\frac{1}{h_p}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathrm{d}S.\end{gathered} \qquad (25)$$

С целью учёта электродирования верхней и нижней поверхностей пьезоэлемента в матричной системе (24) выполняется суммирование строк и столбцов, относящихся к степеням свободы разности электрических по-

тенциалов U и свободного заряда q. В результате этой операции все конечные элементы, принадлежащие к области V_p, имеют всего две общие узловые неизвестные.

Уравнение (24) сводится к обобщённой задаче на собственные значения для несимметричных матриц удвоенной размерности [70], которая решается с использованием неявно перезапускаемого метода Арнольди [71]:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K}+\mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathrm{i}\lambda\tilde{\mathbf{d}} \\ \tilde{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} = 0, \qquad (26)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Оценка устойчивого состояния системы основывается на вычислении и анализе характеристических чисел λ, получаемых из решения задачи на собственные значения (22) или (24) при последовательно возрастающей скорости течения жидкости. Численная реализация приведённых выше постановок выполнена в программном обеспечении MATLAB с привлечением возможностей пакета ANSYS для создания конечно-элементной сетки.

3. Тестирование численных алгоритмов

В зависимости от кинематических граничных условий, задаваемых на краях тонкой пластины, при превышении скорости течения жидкости некоторой критической величины конструкция может терять устойчивость в виде дивергенции или флаттера по одной моде колебаний [61; 72; 73]. В первом случае действительная часть ω одного из собственных значений обращается в ноль, а его мнимая часть γ становится отрицательной. Наступление флаттера по одной моде характеризуется ненулевой частотой колебаний ω и отрицательным значением γ. Ввиду существенного качественного различия между упомянутыми видами потери устойчивости, каждый из них проанализирован в отдельности. В текущем разделе и далее в расчётах использовались следующие параметры, если не указано иное:

$$L_s = 150 \text{ мм};\ W_s = 115 \text{ мм};\ H = 10 \text{ мм};\ h_s = 0{,}5 \text{ мм};$$

$$L_p = 50 \text{ мм};\ W_p = 20 \text{ мм};\ h_p = 0{,}3 \text{ мм};\ x_p = 50 \text{ мм};$$

$$y_p = 47{,}5 \text{ мм};$$

$$E_s = 68{,}5 \text{ ГПа};\ \nu_s = 0{,}3;\ \rho_s = 2714 \text{ кг/м}^3;\ \rho_f = 997 \text{ кг/м}^3;$$

$$c_f = 1500 \text{ м/с};$$

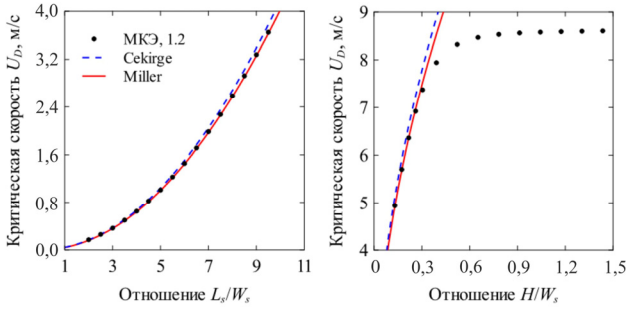
$$c_{11} = c_{22} = 109 \text{ ГПа};\ c_{12} = 61 \text{ ГПа};\ c_{13} = c_{23} = 54 \text{ ГПа};$$

$$c_{33} = 93 \text{ ГПа};\ c_{44} = c_{55} = c_{66} = 24 \text{ ГПа};\ e_{31} = e_{32} = -4{,}9 \text{ Кл/м}^2;$$

$$e_{33} = 14{,}9 \text{ Кл/м}^2;\ \epsilon_{11}/\epsilon_0 = \epsilon_{22}/\epsilon_0 = 820;\ \epsilon_{33}/\epsilon_0 = 840;$$

$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};\ \rho_p = 7500 \text{ кг/м}^3.$$

В первом примере рассмотрена задача гидроупругой устойчивости прямоугольной пластины, которая жёстко закреплена на краях вдоль направления потока (см. рис. 2, FCFC). Из литературы известно, что такая конструкция теряет устойчивость в виде дивергенции [74–76]. Критическая скорость течения, при которой наступает это явление, может быть определена с помощью предложенных в [74] или [75] выражений. Сравнение численных и аналитических результатов приведено на рис. 3 при разных отношениях L_s/W_s ($L_s = 1150$ мм, $H = 10$ мм) и H/W_s ($L_s = 1150$ мм, $W_s = 115$ мм). Расчёты выполнялись в трёхмерной постановке с использованием определяющих соотношений линейной теории упругости (3), (9) для описания динамического поведения пластины (см. п. 1.2). Пьезоэлемент и электрическая цепь отсутствовали. Представленные на рис. 3, *a*, зависимости качественно и количественно совпадают. При малом отношении L_s/W_s относительная разница между численным и аналитическим решением [74] составляет около 6 %. Она постепенно снижается при уменьшении ширины пластины W_s (длина L_s остаётся неизменной) и не превышает 1 % при $L_s/W_s > 6$. Такое поведение объясняется тем, что в работах [74] и [75] используется двумерная постановка задачи и допущение, что $L_s \gg W_s$. Качественно разные решения наблюдаются при увеличении высоты слоя жидкости H, с которым взаимодействует конструкция (рис. 3, *b*). Очевидно, что с помощью двумерной формулировки задачи не представляется возможным достоверно описать асимптотическую зависимость критической скорости от отношения H/W_s. Между тем наличие такой особенности отмечается в работе [76].



a *b*

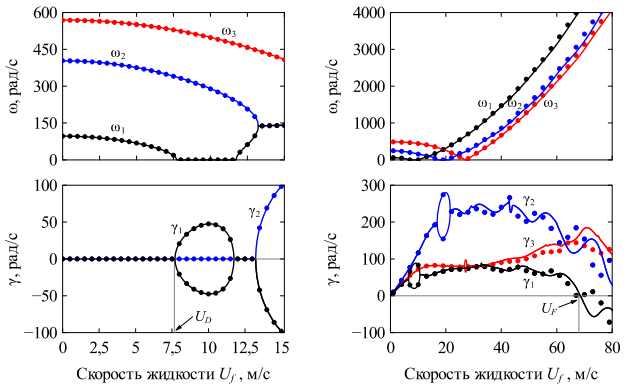
Рис. 3. Сравнение критических скоростей дивергенции при разных геометрических параметрах

Fig. 3. Comparison of critical velocities of divergence for different geometrical parameters

При отсутствии электрической цепи обе постановки позволяют получить обобщённую задачу на собственные значения вида (26). Более эффективным в этом случае будет подход на основе теории пластин (см. раздел 1.3), поскольку в этом случае решаемая система уравнений имеет меньшее количество неизвестных.

Типичные зависимости, демонстрирующие потерю устойчивости пластины, представлены на рис. 4 для

вариантов закрепления CCCC и CCFC (см. рис. 2). На графиках приведено изменение действительных и мнимых частей нескольких собственных значений в зависимости от скорости течения жидкости. Её критическая величина, после которой наступает дивергенция или флаттер по одной моде, обозначены через U_D и U_F соответственно. Результаты, полученные с помощью обоих подходов, совпадают. Некоторые количественные и качественные различия наблюдаются для демпфирования γ при скоростях выше U_F (рис. 4, *b*).



a *b*

Рис. 4. Изменение действительных и мнимых частей комплексных собственных значений λ в зависимости от скорости течения жидкости: *a* – CCCC; *b* – CCFC. Сплошные линии – постановка из п. 1.2, круглые символы – постановка из п. 1.3

Fig. 4. Dependencies of real and imaginary parts of complex eigenvalues λ on the fluid velocity: *a* – CCCC, *b* – CCFC. Solid lines – equations from section 1.2, circle markers – equations from section 1.3

Последний пример посвящён собственным колебаниям жёстко закреплённой по всем краям пластины ($h_s = 0{,}937$ мм, $H = 50$ мм), на верхней поверхности которой в точке с координатами (x_p, y_p) расположен элемент из пьезокерамики ЦСТ-19. К его электродированным поверхностям подключена последовательная *RL*-цепь. В табл. 1 приведены величины действительных и мнимых частей комплексных собственных значений λ, полученные в рамках описанных выше подходов. Представленные данные демонстрируют совпадение частот колебаний ω в пределах относительной погрешности менее 1 %, в то же время показатели демпфирования γ различаются более значительно. Несмотря на это, постановка из п. 1.3 качественно верно описывает появление в спектре новой собственной частоты колебаний. Она возникает в результате образования резонансного *RLC*-контура при шунтировании пьезоэлемента внешней *RL*-цепью. Соответствующая мода колебаний выделена жирным начертанием в табл. 1. При отсутствии в системе других механизмов диссипации энергии её отличительной чертой является большая величина мнимой части γ.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний пластины с пьезоэлементом и *RL*-цепью (Гц)

Table 1

Natural vibration frequencies of a plate fixed along all edges

i	Пластина в вакууме, $R = 200$ Ом, $L = 1{,}7$ Гн				Пластина на слое идеальной жидкости, $R = 6000$ Ом, $L = 20$ Гн			
	Уравнения 1.2		Уравнения 1.3		Уравнения 1.2		Уравнения 1.3	
	ω_i	γ_i	ω_i	γ_i	ω_i	γ_i	ω_i	γ_i
1	471,349	0,503	471,808	0,502	135,935	0,754	135,761	0,738
2	**630,575**	**8,812**	**630,284**	**8,780**	**181,074**	**23,062**	**181,048**	**23,042**
3	840,043	0,000	842,726	0,002	267,997	0,000	269,273	0,005
4	1160,426	0,000	1164,124	0,004	383,315	0,000	385,759	0,005
5	1458,605	0,028	1457,740	0,024	533,783	0,038	535,543	0,032

Ранее отмечалось, что решение неклассической проблемы на собственные значения (22) даже с применением современных технологий параллельных вычислений занимает длительное время. Использование уравнения (21) вместо (9) позволяет получить модальную задачу вида (26), решение которой требует меньше вычислительных ресурсов и позволяет сократить время расчетов в двести раз и более. По этой причине все следующие расчёты будут проводиться с её помощью.

4. Результаты

В данном разделе оценивается возможность применения пьезоэлектрического элемента, подключённого к внешней *RL*-цепи, для демпфирования гармонических колебаний пластины, взаимодействующей с потоком жидкости, и управления границей потери устойчивости. Оба направления исследования требуют предварительного определения оптимального расположения пьезоэлемента на поверхности пластины. В данной работе такой выбор осуществляется из условия максимума коэффициента электромеханической связи K_m, полученного для *m*-й частоты (формы) колебаний [15]

$$K_m(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\omega_m^{o/c}}{\omega_m^{s/c}}\right)^2 - 1} \to \max, \qquad (27)$$

где $\omega_m^{o/c}$ и $\omega_m^{s/c}$ – собственные частоты колебаний системы с разомкнутыми (open circuit, o/c) и замкнутыми (short circuit, s/c) электродами, имеющие номер *m* в возрастающем спектре.

Исследование проводится в несколько этапов:

– находится критическая скорость потери устойчивости U_{cr} пластины без пьезоэлемента;

– при скорости потока жидкости $U_f = U_{cr}$ или в её окрестности строится форма колебаний, по которой осуществляется потеря устойчивости;

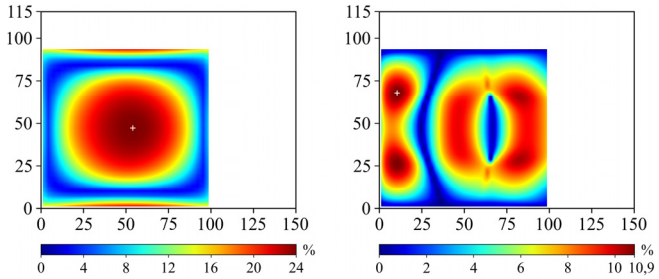
– из решения задачи оптимизации (27) определяется такое положение пьезоэлемента на поверхности конст-

рукции, в котором он функционирует наиболее эффективно;

– находятся критические скорости потери устойчивости для режимов работы пьезоэлемента с разомкнутыми и замкнутыми электродами;

– по аналитическим формулам [15] и на основе конечно-элементных расчётов подбираются значения параметров сопротивления R и индуктивности L внешней электрической цепи, обеспечивающие наибольшую скорость затухания гармонических колебаний на заданной частоте (моде);

– определяются критические скорости потери устойчивости конструкции с пьезоэлементом, подключённым к внешней RL-цепи с оптимальными параметрами.



a *b*

Рис. 5. Распределение коэффициента электромеханической связи в окрестности критической скорости для моды, по которой осуществляется потеря устойчивости: *a* – CCCC; *b* – CCFC

Fig. 5. Distribution of the electromechanical coupling coefficient in the vicinity of the critical velocity for the mode shape at which stability loss: *a* – CCCC; *b* – CCFC

В исследованиях рассматриваются пластины с граничными условиями вида CCCC и CCFC. Данный выбор обусловлен как разными типами потери устойчивости (дивергенция для первого варианта и флаттер по одной моде для второго), так и значительным отличием величин мнимой части γ у комплексных собственных значений (см. рис. 4). Последнее говорит о том, что система обладает высокими диссипативными характеристиками. Данный случай представляет определённый интерес, поскольку не является очевидным, каким образом будет функционировать шунтирующая RL-цепь в таких условиях. Проведённая серия расчётов при разной высоте слоя жидкости H показала, что граница дивергенции повышается на 7–10 % только за счёт прикрепления пьезоэлемента к пластине. Причиной этого изменения является увеличение жёсткости конструкции в целом, так как относительная разница между критическими скоростями течения для режимов работы пьезоэлемента с разомкнутыми и замкнутыми электродами не превышает 1 %. При исследовании флаттера обнаружено, что наличие пьезоэлемента на поверхности конструкции приводит к изменению формы колебаний, по которой осуществляется потеря устойчивости. По этой причине критические скорости повышаются на 20 %. В рассмотренных вариантах оптимальное расположение пьезоэлемента определялось из решения задачи оптимизации (27). На поверхности $K(x, y)$, приведённой в качестве примера для $H/L = 1/15$ на рис. 5, оно обозначено символом «+». В случае дивергенции частота колебаний ω становилась равной нулю, поэтому вычисления осуществлялись в некоторой окрестности критической скорости $U \approx U_D$.

Анализ изменения комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от сопротивления R и индуктивности L электрической цепи позволяет подобрать их оптимальные величины для подавления резонансных колебаний пластины или управления границей гидроупругой устойчивости. Проведённые численные исследования показали, что традиционно используемые для этой цели аналитические выражения, предложенные в [15], дают менее точные результаты в случае текущей жидкости. Тем не менее они могут быть использованы в качестве начального приближения при решении задачи оптимизации. В табл. 2, 3 приведены параметры, обеспечивающие пассивное демпфирование колебаний пластин ($H/L = 1/15$, CCCC и CCFC), взаимодействующих с потоком жидкости.

Таблица 2

Оптимальные параметры внешней RL-цепи, рассчитанные различными способами, и комплексные собственные значения (рад/с) (CCCC, $U_f = 7$ м/с)

Table 2

Optimal parameters of the external RL-circuit calculated in various ways and complex eigenvalues (rad/s) (CCCC, $U_f = 7$ m/s)

№ п/п	Вариант расчёта	Параметр цепи		λ_1		λ_{1c}	
		R, Ом	L, Гн	ω_1	γ_1	ω_{1c}	γ_{1c}
1	Условие (28)	324252	18781	34,886	4,284	34,937	4,349
2	Hagood, PP [20]	342682	19855	32,948	5,842	35,859	2,788
3	Hagood, TF [20]	249497	21050	31,060	3,671	37,304	2,256
4	Short circuit	0	0	34,164	0,001	–	–

Таблица 3

Оптимальные параметры внешней RL-цепи, рассчитанные различными способами, и комплексные собственные значения (рад/с) (CCFC, $U_f = 1$ м/с)

Table 3

Optimal parameters of the external RL-circuit calculated in various ways and complex eigenvalues (rad/s) (CCFC, $U_f = 1$ m/s)

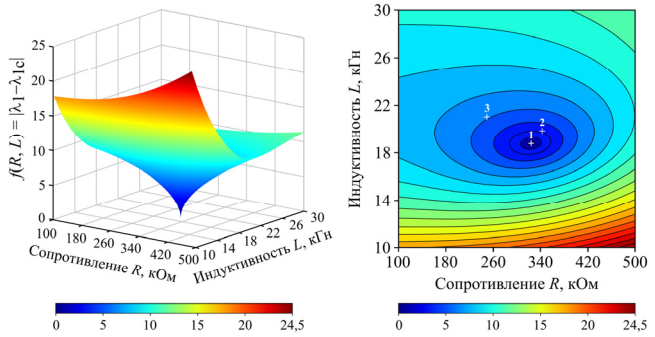
№ п/п	Вариант расчёта	Параметр цепи		λ_7		λ_{7c}	
		R, Ом	L, Гн	ω_7	γ_7	ω_{7c}	γ_{7c}
1	Условие (28)	4296,32	13,3203	1364,766	83,272	1365,227	83,647
2	Hagood, PP [20]	3889,40	13,1780	1336,800	66,940	1402,312	86,218
3	Hagood, TF [20]	2766,20	13,3310	1309,895	50,866	1425,805	57,724
4	Short circuit	0	0	1359,984	10,273	–	–

В качестве критерия использовалось условие

$$f(R,L)=\left|\lambda_m-\lambda_{mc}\right|\to\min, \qquad (28)$$

где λ_m и λ_{mc} – комплексные собственные значения, соответствующие демпфируемой (m-й) моде колебаний и моде электрической цепи, подключённой к пьезоэлементу.

Варианты Hagood, PP и Hagood, TF вычислены по формулам, полученным в [15] с использованием техники размещения полюсов и передаточной функции одномассовой системы соответственно. Первый из них, по мнению авторов, должен обеспечить совпадение собственных частот колебаний конструкции и электрической цепи, а также максимальную скорость затухания. Второй вариант приводит к наибольшему снижению амплитуды вынужденных установившихся гармонических колебаний. В публикациях [25; 47] показано, что сформулированные в [15] аналитические выражения не позволяют получить действительно оптимальные значения индуктивности и сопротивления. Приведённые в табл. 2, 3 результаты подтверждают это заключение и в случае взаимодействия конструкции с текущей жидкостью. Параметры, определённые по условию (28), обеспечивают наименьшую разницу между частотами ω_m и ω_{mc} (менее 0,2 %). При этом возросшая мнимая часть γ_m свидетельствует об увеличении скорости затухания гармонических колебаний. Характерный вид поверхности $f(R, L)$ приведён на рис. 6, *a*, в окрестности экстремума. Значения параметров, вычисленные разными способами, показаны точками *1–3* на изолиниях (рис. 6, *b*).

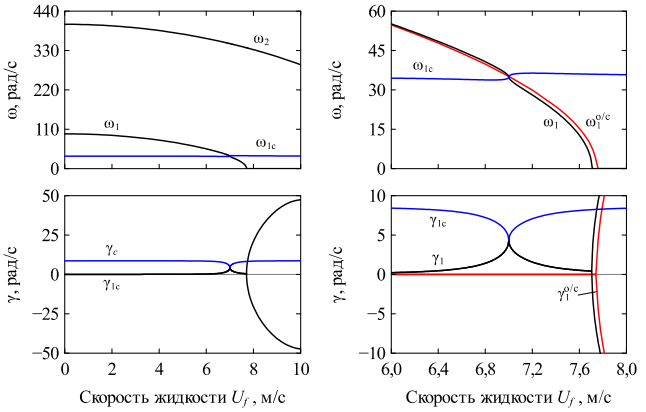


a *b*

Рис. 6. Поверхность $f(R, L)$ (*a*) и её изолинии (*b*), полученные для пластины при скорости течения жидкости 7 м/с (CCCC)

Fig. 6. Surface $f(R, L)$ (*a*) and its isolines (*b*) obtained for a plate at a fluid velocity 7 m/s (CCCC)

Изменение действительных и мнимых частей комплексных значений λ, жёстко закреплённой по всем краям прямоугольной пластины, в зависимости от скорости течения жидкости приведено на рис. 7. Параметры *RL*-цепи, подключённой к пьезоэлементу, определены численно с использованием условия (28) (см. табл. 2). Представленные на рис. 7, *b*, результаты продемонстрировали возможность повышения демпфирующих характеристик рассматриваемой системы не только при скорости течения, на которую настраивалась электрическая цепь (7 м/с), но и в её окрестности. Исследования показали, что пассивная электрическая цепь не влияет на границу дивергенции. При наличии ненулевой мнимой части γ_1 в области устойчивости она резко принимает отрицательное значение при превышении скорости течения жидкости некоторой критической величины (рис. 7, *b*). Максимальный эффект достигается при значениях сопротивления и индуктивности порядка 10^{15}, что соответствует режиму работы пьезоэлемента с разомкнутыми электродами (рис. 7, *b*, кривая «о/с»).



a *b*

Рис. 7. Зависимости действительных и мнимых частей комплексных собственных значений λ пластины (CCCC) от скорости течения жидкости: *a* – общий вид; *b* – отрезок в окрестности сближения частот

Fig. 7. Dependences of the real and imaginary parts of the complex eigenvalues λ of the plate (CCCC) on the flow velocity: *a* – general view; *b* – segment in the vicinity of frequency coaleance

При другом варианте закрепления пластины (H/L = 1/15, CCFC) наступает потеря устойчивости в виде флаттера по одной моде колебаний (см. рис. 4, *b*). В этом случае за счёт *RL*-цепи удалось оказать незначительное влияние на критические скорости течения в большую и меньшую стороны. Резкий излом поверхности, приведённой на рис. 8, вдоль линии $L \approx 1.6$ Гн связан со сменой моды потери устойчивости. Как отмечалось выше, при подсоединении к пьезоэлементу внешней *RL*-цепи образуется резонансный *RLC*-контур. Он приводит к появлению в спектре новой собственной частоты и соответствующей ей формы колебаний. В случае сближения частоты электрической цепи с частотой моды, по которой происходит флаттер, потеря устойчивости наступает по одной из этих мод. Из рис. 8 видно, что критические скорости практически не зависят от величины сопротивления, потому что дополнительная диссипация энергии на резистивном элементе электрической цепи на порядок меньше величины гидродинамического демпфирования и нивелируется на его фоне.

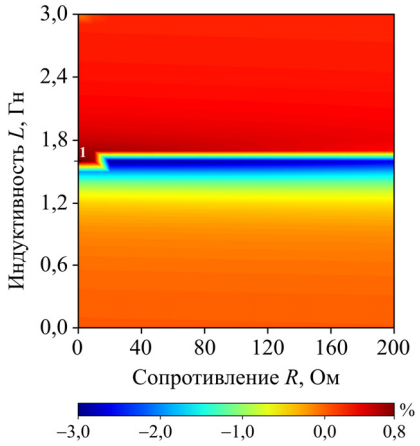


Рис. 8. Изменение критической скорости флаттера в зависимости от параметров *RL*-цепи относительно варианта s/c (CCFC)

Fig. 8. Change of the critical flutter velocity depending on the *RL*-circuit parameters relative to short circuit mode (CCFC)

На рис. 9 приведены формы колебаний пластины, по которым осуществляется флаттер. Параметры *RL*-цепи соответствуют точкам на рис. 8, расположенным в зонах до и после излома поверхности.

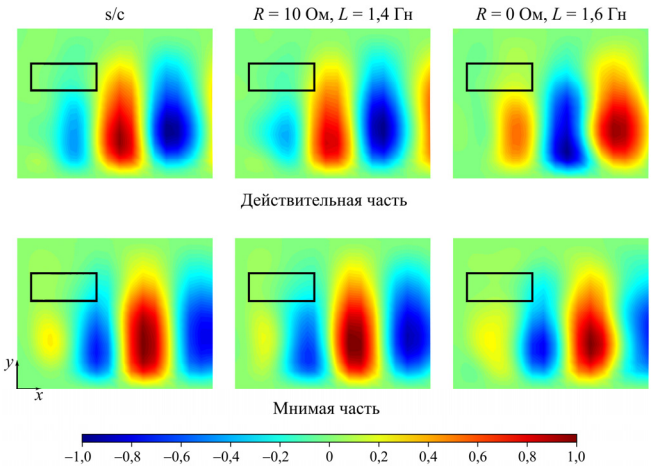


Рис. 9. Собственные формы колебаний пластины (CCFC), по которым осуществляется потеря устойчивости, в зависимости от параметров *RL*-цепи

Fig. 9. Mode shapes of plate (CCFC), along which the stability is lost, depending on the *RL*-circuit parameters

Заключение

Сформулирована математическая постановка задачи и разработан конечно-элементный алгоритм её численной реализации, предназначенные для анализа собственных колебаний и устойчивости взаимодействующей с текущей жидкостью пластины с пьезоэлементом, расположенным на её поверхности и подключённым к внешней электрической цепи. В рассматриваемом подходе используется модель тонкого пьезоупругого тела, основанная на гипотезе плоского напряжённого состояния и равенстве нулю всех компонент векторов напряжённости электрического поля и электрической индукции за исключением нормальных к электродированной поверхности пьезоэлемента. В отличие от трёхмерной постановки в рамках линейной теории пьезоупругости, также представленной в работе, данная модель позволяет получить обобщённую проблему на собственные значения. Её решение осуществляется неявно перезапускаемым методом Арнольди и требует значительно меньше вычислительных ресурсов.

С помощью разработанного конечно-элементного алгоритма исследована возможность пассивного демпфирования гармонических колебаний и управления границей устойчивости пластины, взаимодействующей с текущей жидкостью. Механизм основан на шунтировании закреплённого на поверхности конструкции пьезоэлемента внешней электрической цепью, состоящей из последовательно соединённых резистора и катушки индуктивности. Проведён анализ изменения комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от параметров такой цепи, который позволил подобрать их оптимальные величины для подавления гармонических колебаний пластины с точки зрения скорости их затухания. Результаты исследования показали, что традиционно используемые для этой цели аналитические выражения не приводят к оптимальному результату.

В ходе проведения серии расчётов установлено, что предложенный пассивный способ управления границей устойчивости является неэффективным. С его помощью не удалось повлиять на критические скорости дивергенции, а наибольшее изменение границы флаттера составило всего 3 %. Фактически это означает, что максимальная производительность шунтирующей *RL*-цепи в задачах данного класса очень низка, поэтому её применение нецелесообразно.

Библиографический список

1. Fleming A.J., Moheimani S.O.R. Piezoelectric transducers for vibration control and damping, 1st ed. – London: Springer, 2006. – XVI+271 p.

2. A review of PZT patches applications in submerged systems / A. Presas [et al.] // Sensors. – 2018. – Vol. 18, no. 7. – 2251. DOI: 10.3390/s18072251

3. Fuller R.C., Elliott J.S., Nelson A.P. Active control of vibration, 1st ed. – London: Academic Press, 1996. – 332 p.

4. Shivashankar P., Gopalakrishnan S. Review on the use of piezoelectric materials for active vibration, noise, and flow control // Smart Mater. Struct. – 2020. – Vol. 29. – P. 053001. DOI: 10.1088/1361-665X/ab7541

5. Дайнеко А.В., Никифоров В.Г. Обзор состояния и перспектив развития и применения отечественных многослойных пьезоактюаторов для ракетно-космической техники и наземной космической инфраструктуры // Нано- и микросистемная

техника. – 2022. – Т. 24, № 6. – С. 307–322. DOI: 10.17587/nmst.24.307-322

6. Li S., Zhao D. Numerical simulation of active control of structural vibration and acoustic radiation of a fluid-loaded laminated plate // J. Sound Vib. – 2004. – Vol. 272, no. 1–2. – P. 109–124. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00321-3

7. Carra S., Amabili M., Ohayon R. Broadband active vibration control of a rectangular flexible wall of an empty and a water-filled tank // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2007. – Vol. 18, no. 7. – P. 637–651. DOI: 10.1177/1045389X06068064

8. Li S. Active modal control simulation of vibro-acoustic response of a fluid-loaded plate // J. Sound Vib. – 2011. – Vol. 330, no. 23. – P. 5545–5557. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.07.001

9. Kwak M.K., Yang D.-H. Dynamic modelling and active vibration control of a submerged rectangular plate equipped with piezoelectric sensors and actuators // J. Fluids Struct. – 2015. – Vol. 54. – P. 848–867. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.001

10. Kwak M.K., Yang D.-H. Active vibration control of a ring-stiffened cylindrical shell in contact with unbounded external fluid and subjected to harmonic disturbance by piezoelectric sensor and actuator // J. Sound Vib. – 2013. – Vol. 332, no. 20. – P. 4775–4797. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.04.014

11. Ray M.C., Balaji R. Active structural-acoustic control of laminated cylindrical panels using smart damping treatment // Int. J. Mech. Scienc. – 2007. – Vol. 49, no. 9. – P. 1001–1017. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2007.02.001

12. Ray M.C., Reddy J.N. Active damping of laminated cylindrical shells conveying fluid using 1-3 piezoelectric composites // Compos. Struct. – 2013. – Vol. 98. – P. 261–271. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.09.051

13. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: a review / [K. Marakakis et al.] // Front. Built Environ. – 2019. – Vol. 5. – P. 64. DOI: 10.3389/fbuil.2019.00064

14. Gripp J.A.B., Rade D.A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review // Mech. Syst. Signal Process. – 2018. – Vol. 112. – P. 359–383. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.04.041

15. Hagood N.W., von Flotow A.H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // J. Sound Vib. – 1991. – Vol. 146, no. 2. – P. 243–268. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90762-9

16. Wu S.-Y. Piezoelectric shunts with a parallel *R-L* circuit for structural damping and vibration control // Proc. SPIE. – 1996. – Vol. 2720. – P. 259–269. DOI: 10.1117/12.239093

17. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers / [O. Heuss et al.] // Arch. Appl. Mech. – 2016. – Vol. 86, no. 12. – P. 1715–1732. DOI: 10.1007/s00419-014-0972-5

18. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: an exact solution / [P. Soltani et al.] // Smart Mater. Struct. – 2014. – Vol. 23, no. 12. – 125014. DOI: 10.1088/0964-1726/23/12/125014

19. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction // Smart Mater. Struct. – 2012. – Vol. 21, no. 1. – P. 015008. DOI: 10.1088/0964-1726/21/1/015008

20. Toftekær J.F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2020. – Vol. 27, no. 22. – P. 1908–1922. DOI: 10.1080/15376494.2018.1549297

21. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings / [J. Zhang et al.] // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10, no. 2. – P. 414–420. DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/404

22. Semi-active control of piezoelectric coating's underwater sound absorption by combining design of the shunt impedances / Y. Sun [et al.] // J. Sound Vib. – 2015. – Vol. 355. – P. 19–38. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.06.036

23. Larbi W. Numerical modeling of sound and vibration reduction using viscoelastic materials and shunted piezoelectric patches // Comput. Struct. – 2020. – Vol. 232. – P. 105822. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.024

24. Vibration damping of marine lifting surfaces with resonant piezoelectric shunts / L. Pernod [et al.] // J. Sound Vib. – 2021. – Vol. 496. – P. 115921. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115921

25. Lekomtsev S.V., Oshmarin D.A., Sevodina N.V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2021. – Vol. 28, no. 19. – P. 1957–1964. DOI: 10.1080/15376494.2020.1716120

26. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid / M.A. Iurlov [et al.] // Int. J. Struct. Stabil. Dynam. – 2022. – Vol. 22, no. 9. – P. 2250101. DOI: 10.1142/S0219455422501012

27. Sales T., Rade D., de Souza L. Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers // Aerosp. Sci. Technol. – 2013. – Vol. 29, no. 1. – P. 403–412. DOI: 10.1016/j.ast.2013.05.001

28. Ikegame T., Takagi K., Inoue T. Exact solutions to H_∞ and H_2 optimizations of passive resonant shunt circuit for electromagnetic or piezoelectric shunt damper // J. Vib. Acoust.- Trans. ASME. – 2019. – Vol. 141, no. 3. – P. 031015. DOI: 10.1115/1.4042819

29. Mackerle J. Smart materials and structures – a finite-element approach: a bibliography (1986–1997) // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. – 1998. – Vol. 6, no. 3. – P. 293–334. DOI: 10.1088/0965-0393/6/3/007

30. Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey // Comput. Struct. – 2000. – Vol. 76, no. 1. – P. 347–363. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00151-0

31. Mackerle J. Smart materials and structures – a finite element approach – an addendum: a bibliography (1997–2002) // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. – 2003. – Vol. 11, no. 5. – P. 707–744. DOI: 10.1088/0965-0393/11/5/302

32. Generalized multiscale finite element method for piezoelectric problem in heterogeneous media / D. Ammosov [et al.] // // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2022. – Vol. 135. – P. 12–25. DOI: 10.1016/j.enganabound.2021.09.014

33. Kögl M., Gaul L. A boundary element method for transient piezoelectric analysis // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2000. – Vol. 24, no. 7–8. – P. 591–598. DOI: 10.1016/S0955-7997(00)00039-4

34. Wang G., Guo F. A stochastic boundary element method for piezoelectric problems // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2018. – Vol. 95. – P. 248–254. DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.08.002

35. Kulikov G.M., Plotnikova S.V., Glebov A.O. Assessment of nonlinear exact geometry sampling surfaces solid-shell elements and ANSYS solid elements for 3D stress analysis of piezoelectric shell structures // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2020. – Vol. 121. – P. 3795–3823. DOI: 10.1002/nme.6382

36. Multi-layered plate finite element models with node-dependent kinematics for smart structures with piezoelectric com-

ponents / G. Li [et al.] // Chinese J. Aeron. – 2021. – Vol. 34, no. 8. – P. 164–175. DOI: 10.1016/j.cja.2021.01.005

37. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Exact geometry SaS-based solid–shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties // Acta Mech. – 2023. – Vol. 234. – P. 163–189. DOI: 10.1007/s00707-021-03086-2

38. Models of porous piezocomposites with 3-3 connectivity type in ACELAN finite element package / A.B. Kudimova [et al.] // Mater. Phys. Mech. – 2018. – Vol. 37, no. 1. – P. 16–24. DOI: 10.18720/MPM.3712018_3

39. Finite element homogenization models of bulk mixed piezocomposites with granular elastic inclusions in ACELAN package / A.B. Kudimova [et al.] // Mater. Phys. Mech. – 2018. – Vol. 37, no. 1. – P. 25–33. DOI: 10.18720/MPM.3712018_4

40. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package / T.E. Gerasimenko [et al.] // Advanced Structured Materials. Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials: Theoretical and Experimental Methods / Sumbatyan M., eds. – Cham: Springer, 2019. – Vol. 109. – P. 113–131. DOI: 10.1007/978-3-030-17470-5_8

41. Nasedkin A.V. Finite element modelling of active composite materials in ACELAN-COMPOS package // Advanced Materials. Springer Proceedings in Materials / Parinov I., Chang SH., Long B., eds. – Cham: Springer, 2020. – Vol. 6. – P. 311–323. DOI: 10.1007/978-3-030-45120-2_26

42. The numerical solution of large-scale generalized eigenvalue problems arising from finite-element modeling of electroelastic materials / T. Martynova [et al.] // Symmetry. – 2023. – Vol. 15, no. 1. – P. 171. DOI: 10.3390/sym15010171

43. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации / В.П. Матвеенко [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 476–485. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40

44. Шорр Б.Ф., Бортников А.Д. Применение пьезоэлементов для активного гашения резонансных колебаний лопаток турбомашин // Авиационные двигатели. – 2020. – № 4. – С. 33–42. DOI: 10.54349/26586061_2020_4_33

45. ANSYS Inc. Release 2022 R1 Documentation. – Canonsburg, 2022.

46. Вариант мультимодального демпфирования колебаний электроупругих конструкций за счет соответствующего подбора параметров внешней электрической цепи / Д.А. Ошмарин [и др.] // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 20, № 3. – С. 475–495. DOI: 10.14498/vsgtu1509

47. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations / V.P. Matveenko [et al.] // Int. J. Smart Nano Mater. – 2018. – Vol. 9, no. 2. – P. 135–149. DOI: 10.1080/19475411.2018.1461144

48. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data / N. Iurlova [et al.] // Int. J. Smart Nano Mater. – 2019. – Vol. 10, no. 2. – P. 156–176. DOI: 10.1080/19475411.2018.1542356

49. Sherrit S. An accurate equivalent circuit for the unloaded piezoelectric vibrator in the thickness mode // J. of Phys. D: Appl. Phys. – 1997. – Vol. 30, no. 16. – P. 2354–2363. DOI: 10.1088/0022-3727/30/16/014

50. Решение задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога / М.А. Юрлов [и др.] // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 4. – С. 266–277. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.24

51. Electrical analogs of curved beams and application to piezoelectric network damping / R. Darleux [et al.] // Math. Mech. Solids. – 2022. – Vol. 27, no. 4. – P. 578–601. DOI: 10.1177/10812865211027622

52. Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2009. – Vol. 80, no. 2. – P. 235–268. DOI: 10.1002/nme.2632

53. Hoareau C., Deü J.-F., Ohayon R. Construction of reduced order operators for hydroelastic vibrations of prestressed liquid–structure systems using separated parameters decomposition // Comput. Meth. Appl. Mech. Engn. – 2022. – Vol. 402. – P. 115406. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115406

54. Kaljevic I., Saravanos D.A. Steady-state response of acoustic cavities bounded by piezoelectric composite shell structures // J. Sound Vib. – 1997. – Vol. 204, no. 3. – P. 459–476. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0911

55. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости / А.В. Белоконь [и др.] // ПММ. – 2000. – Т. 64, № 3. – С. 381–393.

56. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2007. – Vol. 71, no. 12. – P. 1412–1435. DOI: 10.1002/nme.1987

57. Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R. Piezoelectric structural acoustic problems: Symmetric variational formulations and finite element results // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2008. – Vol. 197, no. 19. – P. 1715–1724. DOI: 10.1016/j.cma.2007.04.014

58. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid // Compos. Struct. – 2012. – Vol. 94, no. 2. – P. 501–509. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.08.010

59. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–48. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.04

60. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969. – 182 с.

61. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеенко В.П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. – 2016. – № 6. – С. 108–120. DOI: 10.7868/S0568528116060049

62. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

63. IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI/IEEE Std176-1987. – New York: IEEE, 1988. doi: 10.1109/IEEESTD.1988.79638

64. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.

65. Allik H., Hughes J.R. Finite element method for piezoelectric vibration // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1970. – Vol. 2. – P. 151–157.

66. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1024 с.

67. Sheng G.G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells //

Appl. Math. Model. – 2010. – Vol. 34, no. 9. – P. 2630–2643. DOI: 10.1016/j.apm.2009.11.024

68. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow // J. Intel. Mat. Sys. Struct. – 2014. – Vol. 25, no. 3. – P. 259–270. DOI: 10.1177/1045389X13491020

69. Reddy J.N. An introduction to nonlinear finite element analysis, 2nd edn: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. – Oxford: Oxford University Press, 2015. – 768 p.

70. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem // SIAM Rev. – 1988. – Vol. 43, no. 2. – P. 235–286. DOI: 10.1137/S0036144500381988

71. Lehoucq R.B., Sorensen D.C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1996. – Vol. 17, no. 4. – P. 789–821. DOI: 10.1137/S0895479895281484

72. Weaver D.S., Unny T.E. The hydroelastic stability of a flat plate // J. Appl. Mech.-Trans. ASME. – 1970. – Vol. 37, no. 3. – P. 823–827. DOI: 10.1115/1.3408615

73. Païdoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow, vol. 2, 2nd edn. – London: Elsevier Academic Press, 2016. – 944 p. DOI: 10.1016/C2011-0-08058-4

74. Miller D.R. Critical flow velocities for collapse of reactor parallel-plate fuel assemblies // J. Eng. Power-Trans. ASME. – 1960. – Vol. 82, no. 2. – P. 83–95. DOI: 10.1115/1.3672746

75. Cekirge H.M., Ural E. Critical coolant flow velocities in reactors having parallel fuel plates // Comp. Math. Applicat. – 1978. – Vol. 4, no. 2. – P. 153–156. DOI: 10.1016/0898-1221(78)90025-1

76. Kerboua Y., Lakis A.A., Thomas M., Marcouiller L. Modeling of plates subjected to a flowing fluid under various boundary conditions // Eng. Appl. Comp. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 2, no. 4. – P. 525–539. DOI: 10.1080/19942060.2008.11015249

References

1. Fleming A.J., Moheimani S.O.R. Piezoelectric transducers for vibration control and damping, 1st ed. London, Springer, 2006. XVI+271 p.

2. Presas A., Luo Y., Wang Z., Valentin D., Egusquiza M. A review of PZT patches applications in submerged systems. *Sensors*, 2018, vol. 18, no. 7, 2251. doi: 10.3390/s18072251

3. Fuller R.C., Elliott J.S., Nelson A.P. Active control of vibration, 1st ed. London, Academic Press, 1996, 332 p.

4. Shivashankar P., Gopalakrishnan S. Review on the use of piezoelectric materials for active vibration, noise, and flow control. *Smart Mater. Struct*., 2020, vol. 29, 053001. doi: 10.1088/1361-665X/ab7541

5. Daineko A.V., Nikiforov V.G. Review of the state and prospects of development and application of domestic multilayer piezoactuator for rocket and space technology and ground space infrastructure. *Nano microsyst. technol.*, 2022, vol. 24, no. 6. pp. 307–322. doi: 10.17587/nmst.24.307-322

6. Li S., Zhao D. Numerical simulation of active control of structural vibration and acoustic radiation of a fluid-loaded laminated plate. *J. Sound Vib*., 2004, vol. 272, no. 1–2, pp. 109–124. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00321-3

7. Carra S., Amabili M., Ohayon R. Broadband active vibration control of a rectangular flexible wall of an empty and a water-filled tank. *J. Intell. Mater. Syst. Struct*., 2007, vol. 18, no. 7, pp. 637–651. doi: 10.1177/1045389X06068064

8. Li S. Active modal control simulation of vibro-acoustic response of a fluid-loaded plate. *J. Sound Vib*., 2011, vol. 330, no. 23, pp. 5545–5557. doi: 10.1016/j.jsv.2011.07.001

9. Kwak M.K., Yang D.-H. Dynamic modelling and active vibration control of a submerged rectangular plate equipped with piezoelectric sensors and actuators. *J. Fluids Struct*., 2015, vol. 54, pp. 848–867. doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.001

10. Kwak M.K., Yang D.-H. Active vibration control of a ring-stiffened cylindrical shell in contact with unbounded external fluid and subjected to harmonic disturbance by piezoelectric sensor and actuator. *J. Sound Vib*., 2013, vol. 332, no. 20, pp. 4775–4797. doi: 10.1016/j.jsv.2013.04.014

11. Ray M.C., Balaji R. Active structural-acoustic control of laminated cylindrical panels using smart damping treatment. *Int. J. Mech. Scienc*., 2007, vol. 49, no. 9, pp. 1001–1017. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2007.02.001

12. Ray M.C., Reddy J.N. Active damping of laminated cylindrical shells conveying fluid using 1-3 piezoelectric composites. *Compos. Struct*., 2013, vol. 98, pp. 261–271. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.051

13. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: a review. *Front. Built Environ*., 2019, vol. 5, 64. doi: 10.3389/fbuil.2019.00064

14. Gripp J.A.B., Rade D.A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review. *Mech. Syst. Signal Process*., 2018, vol. 112, pp. 359–383. doi: 10.1016/j.ymssp.2018.04.041

15. Hagood N.W., von Flotow A.H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *J. Sound Vib*., 1991, vol. 146, no. 2, pp. 243–268. doi: 10.1016/0022-460X(91)90762-9

16. Wu S.-Y. Piezoelectric shunts with a parallel *R-L* circuit for structural damping and vibration control. *Proc. SPIE*, 1996, vol. 2720, pp. 259–269. doi: 10.1117/12.239093

17. Heuss O., Salloum R., Mayer D., Melz T. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers. *Arch. Appl. Mech*., 2016, vol. 86, no. 12, pp. 1715–1732. doi: 10.1007/s00419-014-0972-5

18. Soltani P., Kerschen G., Tondreau G., Deraemaeker A. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: an exact solution. *Smart Mater. Struct*., 2014, vol. 23, no. 12, 125014. doi: 10.1088/0964-1726/23/12/125014

19. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Mater. Struct*., 2012, vol. 21, no. 1, 015008. doi: 10.1088/0964-1726/21/1/015008

20. Toftekær J.F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2020. – vol. 27, no. 22. – pp. 1908–1922. doi: 10.1080/15376494.2018.1549297

21. Zhang J., Chang W., Varadan V., Varadan V. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings. *Smart Mater. Struct*., 2001, vol. 10, no. 2, pp. 414–420. doi: 10.1088/0964-1726/10/2/404

22. Sun Y., Li Z., Huang A., Li Q. Semi-active control of piezoelectric coating's underwater sound absorption by combining design of the shunt impedances. *J. Sound Vib*., 2015, vol. 355, pp. 19–38. doi: 10.1016/j.jsv.2015.06.036

23. Larbi W. Numerical modeling of sound and vibration reduction using viscoelastic materials and shunted piezoelectric

patches. *Comput. Struct*., 2020, vol. 232, 105822. doi: 10.1016/j.compstruc.2017.07.024

24. Pernod L., Lossouarn B., Astolfi J.-A., Deü J.-F. Vibration damping of marine lifting surfaces with resonant piezoelectric shunts. *J. Sound Vib*., 2021, vol. 496, 115921. doi: 10.1016/j.jsv.2020.115921

25. Lekomtsev S.V., Oshmarin D.A., Sevodina N.V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem. *Mech. Adv. Mater. Struct*., 2021, vol. 28, no. 19, pp. 1957–1964. doi: 10.1080/15376494.2020.1716120

26. Iurlov M.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid. *Int. J. Struct. Stabil. Dynam*., 2022, vol. 22, no. 9, 2250101. doi: 10.1142/S0219455422501012

27. Sales T., Rade D., de Souza L. Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers. *Aerosp. Sci. Technol*., 2013, vol. 29, no. 1, pp. 403–412. doi: 10.1016/j.ast.2013.05.001

28. Ikegame T., Takagi K., Inoue T. Exact solutions to H_∞ and H_2 optimizations of passive resonant shunt circuit for electromagnetic or piezoelectric shunt damper. *J. Vib. Acoust.- Trans. ASME*, 2019, vol. 141, no. 3, 031015. doi: 10.1115/1.4042819

29. Mackerle J. Smart materials and structures – a finite-element approach: a bibliography (1986–1997). *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*., 1998, vol. 6, no. 3, pp. 293–334. doi: 10.1088/0965-0393/6/3/007

30. Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Comput. Struct*., 2000, vol. 76, no. 1, pp. 347–363. doi: 10.1016/S0045-7949(99)00151-0

31. Mackerle J. Smart materials and structures – a finite element approach – an addendum: a bibliography (1997–2002). *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*., 2003, vol. 11, no. 5, pp. 707–744. doi: 10.1088/0965-0393/11/5/302

32. Ammosov D., Vasilyeva M., Nasedkin A., Efendiev Y. Generalized multiscale finite element method for piezoelectric problem in heterogeneous media // *Eng. Anal. Bound. Elem*., 2022, vol. 135, pp. 12–25. doi: 10.1016/j.enganabound.2021.09.014

33. Kögl M., Gaul L. A boundary element method for transient piezoelectric analysis. *Eng. Anal. Bound. Elem*., 2000, vol. 24, no. 7–8, pp. 591–598. doi: 10.1016/S0955-7997(00)00039-4

34. Wang G., Guo F. A stochastic boundary element method for piezoelectric problems. *Eng. Anal. Bound. Elem*., 2018, vol. 95, pp. 248–254. doi: 10.1016/j.enganabound.2018.08.002

35. Kulikov G.M., Plotnikova S.V., Glebov A.O. Assessment of nonlinear exact geometry sampling surfaces solid-shell elements and ANSYS solid elements for 3D stress analysis of piezoelectric shell structures. *Int. J. Numer. Methods Engng*., 2020, vol. 121, pp. 3795–3823. doi: 10.1002/nme.6382

36. Li G., Carrera E., Hou Y., Kulikov G.M. Multi-layered plate finite element models with node-dependent kinematics for smart structures with piezoelectric components. *Chinese J. Aeron*., 2021, vol. 34, no. 8, pp. 164–175. doi: 10.1016/j.cja.2021.01.005

37. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Exact geometry SaS-based solid–shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties. *Acta Mech*., 2023, vol. 234, pp. 163–189. doi: 10.1007/s00707-021-03086-2

38. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganesyan P.A., Soloviev A.N. Models of porous piezocomposites with 3-3 connectivity type in ACELAN finite element package. *Mater. Phys. Mech*., 2018, vol. 37, no. 1, pp. 16–24. doi: 10.18720/MPM.3712018_3

39. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Oganesyan P.A., Soloviev A.N. Finite element homogenization models of bulk mixed piezocomposites with granular elastic inclusions in ACELAN package. *Mater. Phys. Mech*., 2018, vol. 37, no. 1, pp. 25–33. doi: 10.18720/MPM.3712018_4

40. Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganesyan P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package. *Advanced Structured Materials. Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials: Theoretical and Experimental Methods*, vol. 109, Sumbatyan M. eds., Cham, Springer, 2019. pp. 113–131. doi: 10.1007/978-3-030-17470-5_8

41. Nasedkin A.V. Finite element modelling of active composite materials in ACELAN-COMPOS package. *Advanced Materials. Springer Proceedings in Materials*, vol. 6, Parinov I., Chang SH., Long B. eds., Cham, Springer, 2020, pp. 311–323. doi:10.1007/978-3-030-45120-2_26

42. Martynova T., Muratova G., Oganesyan P., Shtein O. The numerical solution of large-scale generalized eigenvalue problems arising from finite-element modeling of electroelastic materials. *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 1, 171. doi: 10.3390/sym15010171

43. Matveenko V.P., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Yurlova N.A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation. *Comput. Contin. Mech*., 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476–485. doi: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40

44. Shorr B.F., Bortnikov A.D. Application of piezoelectric elements for active damping of resonant vibrations of turbomachine blades. *Aviation engines*, 2020, no. 4, pp. 33–42. doi: 10.54349/26586061_2020_4_33

45. ANSYS Inc. Release 2022 R1 Documentation, Canonsburg, 2022.

46. Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Yurlov M.A., Yurlova N.A. Variant of multimodal vibration damping of electroviscoelastic structures by appropriate choice of external electric circuit parameters. *J. Samara State Technical University, Ser. Phys. Math. Scienc.*, 2016, vol. 20, no 3, pp. 475–495. doi: 10.14498/vsgtu1509

47. Matveenko V.P., Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations. *Int. J. Smart Nano Mater*., 2018, vol. 9, no. 2, pp. 135–149. doi: 10.1080/19475411.2018.1461144

48. Yurlova N.A., Sevodina N.V., Oshmarin D.A., Iurlov M.A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data. *Int. J. Smart Nano Mater*., 2019, vol. 10, no. 2, pp. 156–176. doi: 10.1080/19475411.2018.1542356

49. Sherrit S. An accurate equivalent circuit for the unloaded piezoelectric vibrator in the thickness mode. *J. of Phys. D: Appl. Phys*., 1997, vol. 30, no. 16, pp. 2354–2363. doi: 10.1088/0022-3727/30/16/014

50. Iurlov M.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlova N.A. The problem solution of natural vibrations of electroelastic bodies with external electric circuits based on their electrical analogue. *PNRPU Mech. Bull.*, 2018, no. 4, pp. 266–277. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.24

51. Darleux R., Lossouarn B., Giorgio I., dell'Isola F., Deü J-F. Electrical analogs of curved beams and application to piezoelectric network damping. *Math. Mech. Solids*, 2022, vol. 27, no. 4, pp. 578–601. doi: 10.1177/10812865211027622

52. Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Engng*., 2009, vol. 80, no. 2, pp. 235–268. doi: 10.1002/nme.2632

53. Hoareau C., Deü J.-F., Ohayon R. Construction of reduced order operators for hydroelastic vibrations of prestressed liquid–structure systems using separated parameters decomposition. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*., 2022, vol. 402, 115406. doi: 10.1016/j.cma.2022.115406

54. Kaljevic I., Saravanos D.A. Steady-state response of acoustic cavities bounded by piezoelectric composite shell structures. *J. Sound Vib*., 1997, vol. 204, no. 3, pp. 459–476. doi: 10.1006/jsvi.1996.0911

55. Belokon' A.V., Eremeyev V.A., Nasedkin A.V., Solov'yev A.N. Partitioned schemes of the finite-element method for dynamic problems of acoustoelectroelasticity. *J. Appl. Maths. Mechs*., 2000, vol. 64, no. 3, pp. 367–377.

56. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid. *Int. J. Numer. Meth. Eng*., 2007, vol. 71, no. 12, pp. 1412–1435. doi: 10.1002/nme.1987

57. Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R. Piezoelectric structural acoustic problems: Symmetric variational formulations and finite element results. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*., 2008, vol. 197, no. 19, pp. 1715–1724. doi: 10.1016/j.cma.2007.04.014

58. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid. *Compos. Struct*., 2012, vol. 94, no. 2, pp. 501–509. doi: 10.1016/j.compstruct.2011.08.010

59. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells made of piezoelectric material. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 35–48. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.04

60. Il'gamov M.A. Kolebaniia uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' i gaz [Vibrations of elastic shells containing liquid and gas]. M.: Nauka, 1969, 182 p.

61. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dyn*., 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821–833. doi: 10.1134/S0015462816060132

62. Parton V.Z., Kudriavtsev B.A. *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*. New York, Gordon & Breach Science Publishers, 1988, xix+503 pp.

63. IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI/IEEE Std176-1987. New York, IEEE, 1988. doi: 10.1109/IEEESTD.1988.79638

64. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. *Mekhanika svyazannyh polej v elementah konstrukcij*. *T*. 5. *Elektrouprugost'* [Mechanics of Coupled Fields in Elements of Structures. vol. 5. Electroelasticity]. Naukova Dumka, Kiev, 1989, 280 p.

65. Allik H., Hughes J.R. Finite element method for piezoelectric vibration. *Int. J. Numer. Meth. Engng*., 1970, vol. 2, pp. 151–157.

66. Bathe K.J. Finite element procedures, 2nd ed. Watertown, K.-J. Bathe, 2014. 1023 p.

67. Sheng G.G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells. *Appl. Math. Model*., 2010, vol. 34, no. 9, pp. 2630–2643. doi: 10.1016/j.apm.2009.11.024

68. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow. *J. Intel. Mat. Sys. Struct*., 2014, vol. 25, no. 3, pp. 259–270. doi: 10.1177/1045389X13491020

69. Reddy J.N. An introduction to nonlinear finite element analysis, 2nd edn: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. Oxford, Oxford University Press, 2015, 768 p.

70. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Rev*., 1988, vol. 43, no. 2, pp. 235–286. doi: 10.1137/S0036144500381988

71. Lehoucq R.B., Sorensen D.C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM J. Matrix Anal. Appl*., 1996, vol. 17, no. 4, pp. 789–821. doi: 10.1137/S0895479895281484

72. Weaver D.S., Unny T.E. The hydroelastic stability of a flat plate. *J. Appl. Mech.-Trans. ASME*., 1970, vol. 37, no. 3, pp. 823–827. doi:10.1115/1.3408615

73. Païdoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow, vol. 2, 2nd edn. London, Elsevier Academic Press, 2016, 944 p. doi: 10.1016/C2011-0-08058-4

74. Miller D.R. Critical flow velocities for collapse of reactor parallel-plate fuel assemblies. *J. Eng. Power-Trans. ASME*., 1960, vol. 82, no. 2, pp. 83–95. doi: 10.1115/1.3672746

75. Cekirge H.M., Ural E. Critical coolant flow velocities in reactors having parallel fuel plates. *Comp. Math. Applicat*. 1978, vol. 4, no. 2, pp. 153–156. doi: 10.1016/0898-1221(78)90025-1

76. Kerboua Y., Lakis A.A., Thomas M., Marcouiller L. Modeling of plates subjected to a flowing fluid under various boundary conditions. *Eng. Appl. Comp. Fluid Mech*., 2008, vol. 2, no. 4, pp. 525–539. doi: 10.1080/19942060.2008.11015249

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10054).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 18-71-10054).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.