Севастьянов Г.М., Бормотин К.С. Упругопластическое кручение с конечными деформациями: сравнение аналитического и МКЭ-моделирования для немонотонно упрочняющихся полимеров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. С. 124–136. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.11

Sevastyanov G.M., Bormotin K.S. Finite-strain elastic-plastic torsion: Analytical and FEM modeling for nonmonotonically hardening polymers. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 3, pp. 124-136. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.11

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 3, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.11
УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ: СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И МКЭ-МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕМОНОТОННО УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПОЛИМЕРОВ

Г.М. Севастьянов, К.С. Бормотин

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 06 июля 2022 г.
Одобрена: 20 марта 2023 г.
Принята к публикации:
15 июня 2023 г.

Ключевые слова:

кручение, конечные деформации, упругопластическая задача, изотропное упрочнение, полимеры, конечно-элементный анализ.

АННОТАЦИЯ

Полимерные материалы в зависимости от структуры и химического состава демонстрируют различные типы изотропного деформационного упрочнения. В том числе в диапазоне пластического деформирования на истинной кривой «деформация – напряжение» может присутствовать нисходящий участок разупрочнения, вызванный ослаблением межмолекулярных связей, сменяющийся далее степенным упрочнением. Законы деформирования материалов могут быть установлены из простых опытов, одним из которых часто выступает кручение. Для кручения тонкостенных цилиндрических образцов напряженно-деформированное состояние практически однородно, поэтому такие опыты просто интерпретировать. Однако при больших деформациях тонкостенных образцов возникают проблемы устойчивости. Для полнотелых цилиндрических образцов напряженное состояние неоднородно, интерпретация таких опытов возможна на базе МКЭ-моделирования или с использованием точных или приближенных аналитических решений соответствующих начально-краевых задач механики. В настоящем исследовании представлено точное аналитическое решение упругопластической задачи кручения цилиндрического образца, справедливое для произвольного закона изотропного упрочнения. В качестве кинематики упругопластического деформирования используется мультипликативная формулировка. Нелинейно-упругие свойства материала описываются моделью Муни – Ривлина. В условии пластического течения используется эквивалентное напряжение Треска, что позволяет получить замкнутое решение. Рассчитаны интегральные характеристики процесса – крутящий момент и осевая сила (эффект второго порядка). Аналитические результаты сопоставлены с результатами численного моделирования в MSC.Marc, а также с доступными экспериментальными данными. Аналитическое решение для крутящего момента очень близко соответствует численному решению методом конечных элементов. Также удовлетворительно совпадают кривые осевой силы. При умеренных деформациях аналитическое решение достаточно точно описывает экспериментальные результаты.

© ПНИПУ

© **Севастьянов Георгий Мамиевич** – к.ф.-м.н., в.н.с., e-mail: akela.86@mail.ru.
Бормотин Константин Сергеевич – д.ф.м.н., проф, e-mail: cvmi@knastu.ru.

Georgiy M. Sevastyanov – CSc of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: akela.86@mail.ru.
Konstantin S. Bormotin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: cvmi@knastu.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

FINITE-STRAIN ELASTIC-PLASTIC TORSION: ANALYTICAL AND FEM MODELING FOR NONMONOTONICALLY HARDENING POLYMERS

G.M. Sevastyanov, K.S. Bormotin

Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 06 July 2022
Approved: 20 March 2023
Accepted for publication:
15 June 2023

Keywords:

torsion, finite strain, elastoplasticity, isotropic hardening, polymers, FEA.

ABSTRACT

Polymeric materials, depending on the structure and chemical composition, exhibit various types of isotropic strain hardening. In particular, in the range of plastic deformation on the "true strain – true stress" curve, there may be a descending section of softening caused by the weakening of intermolecular bonds. This softening region is further replaced by a power-law hardening. The laws of deformation of materials can be established from simple experiments, one of which is often torsion. For torsion of thin-walled cylindrical specimens, the stress-strain state is practically uniform; therefore, such experiments are easy to interpret. However, stability problems arise at large deformations of thin-walled specimens. For solid cylindrical specimens, the stress state is inhomogeneous; interpretation of such experiments is possible on the basis of FEM modeling or using exact or approximate analytical solutions of the corresponding initial-boundary value problems of mechanics. In the present study, an exact analytical solution of the elastic-plastic problem of torsion of a cylindrical sample is presented, which is valid for an arbitrary law of isotropic hardening. The multiplicative decomposition is utilized as the kinematics of elastic-plastic deformation. The non-linear elastic properties of the material are described by the Mooney – Rivlin model. In the plasticity condition, the Tresca equivalent stress is used, which makes it possible to obtain a closed solution. The integral characteristics of the process (torque and axial force that represents a second order effect) are calculated. The analytical results are compared with the results of numerical simulations in MSC.Marc, as well as with the available experimental data. The analytical solution for torque corresponds very closely to the numerical solution obtained by the finite element method. Also, the curves of axial force coincide satisfactorily. At moderate strains, the analytical solution accurately describes the experimental results.

© PNRPU

Введение

Полимерные материалы в зависимости от структуры и химического состава демонстрируют различные типы изотропного деформационного упрочнения: линейное и степенное упрочнение, поведение, близкое к идеальной (неупрочняемой) пластичности, а также более сложное, немонотонное поведение, которое включает разупрочнение после достижения «внутреннего предела текучести» с последующим «повторным упрочнением» [1–5].

Кручение есть один из наиболее распространенных способов тестирования материалов, в том числе при больших деформациях. В частности это касается установления законов упрочнения. Образцы в виде тонкостенных полых цилиндров при кручении испытывают приблизительно однородную деформацию. Однако для достижения большой деформации тонкостенных образцов требуется специальная оснастка для того, чтобы предотвратить потерю устойчивости, коробление и искривление [6]. Полнотелый цилиндр сравнительно просто испытывать на кручение, однако его напряженное состояние неоднородно. Для материалов, упругие деформации которых пренебрежимо малы по сравнению с пластическими, есть простые формулы для описания кручения. Для полимерных материалов упругие и пластические деформации есть величины одного порядка. В этом случае желательно иметь аналитические формулы для крутящего момента и осевой силы. Такие формулы могут быть использованы для построения закона упрочнения по экспериментальным данным о кручении полнотелого образца. Например, аналитические зависимости могут быть полезны при определении параметров упрочнения методами оптимизации (в том числе Genetic Algorithms) [7–12].

В данной работе мы получаем такие зависимости для произвольного закона изотропного упрочнения. Был использован ряд упрощений, в частности кусочно-линейный пластический потенциал, который может рассматриваться как приближение потенциала Мизеса. Кроме того, для описания упругого поведения материала использован закон Муни – Ривлина, который для несжимаемого изотропного твердого тела является общим представлением упругой энергии с ошибкой четвертого порядка относительно градиента перемещения [13].

1. Определяющие соотношения

Для аналитического исследования использована кинематика упругопластического деформирования, предложенная в [14] и примененная в конечно-элементном и аналитическом моделировании различных проблем интенсивного деформирования [15–17]. Упомянутая кинематика основана на мультипликативном разложении тензора градиента деформации на упругую $\mathbf{F}^e$ и пластическую $\mathbf{F}^p$ составляющие

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}^e\mathbf{F}^p=\left(\mathbf{V}^e\mathbf{R}^e\right)\left(\mathbf{R}^p\mathbf{U}^p\right),\ \text{где}\ \mathbf{R}^p=\mathbf{I}.$$

Последнее равенство означает, что пластическая деформация осуществляется без вращения (подробнее см. [17; 18]). Здесь $\mathbf{R}^e$ и $\mathbf{R}^p$ есть ортогональные тензоры вращений; симметричные тензоры $\mathbf{V}^e$ и $\mathbf{U}^p$ – соответственно левый упругий и правый пластический тензоры растяжений.

Будем рассматривать симметричный эйлеров тензор полных деформаций (меру деформации Альманзи) $\mathbf{c}=\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}$, где $\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{I}-\left(\nabla\otimes\mathbf{u}\right)^T$, $\mathbf{u}$ есть вектор перемещения, связывающий начальную и актуальную конфигурации, ∇ – оператор Гамильтона в текущей конфигурации, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, а также положительно определенный тензор меры Альманзи упругой деформации

$$\mathbf{c}^e=\left(\mathbf{F}^e\right)^{-T}\left(\mathbf{F}^e\right)^{-1}.$$

Дифференцируя по времени разложение $\mathbf{F}=\mathbf{F}^e\mathbf{U}^p$, можно установить следующее равенство для производной Коттер – Ривлина тензора $\mathbf{c}^e$ [19]:

$$\dot{\mathbf{c}}^e+\mathbf{c}^e\mathbf{l}+\mathbf{l}^T\mathbf{c}^e=2\left(\mathbf{c}^e\right)^{1/2}\mathbf{D}^p\left(\mathbf{c}^e\right)^{1/2}=2\mathbf{c}^e\mathbf{D}^p=2\mathbf{D}^p\mathbf{c}^e,\quad(1)$$

где $\dot{\mathbf{c}}^e\equiv\partial\mathbf{c}^e/\partial t+\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{c}^e$; тензор скорости пластической деформации определен как $2\mathbf{D}^p=\mathbf{R}^e\left[\dot{\mathbf{U}}^p\left(\mathbf{U}^p\right)^{-1}+\left(\mathbf{U}^p\right)^{-1}\dot{\mathbf{U}}^p\right]\left(\mathbf{R}^e\right)^T$; $\mathbf{l}=\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)^T=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ есть пространственный градиент скорости; $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{u}}=\partial\mathbf{u}/\partial t+\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{u}$ есть вектор скорости. Последние два равенства в (1) следуют из соосности тензоров $\mathbf{D}^p$ и $\mathbf{c}^e$, если ассоциированный закон пластического течения принимается для тензора $\mathbf{D}^p$ и рассматривается гиперупругий материал (Green elastic material); $\det\mathbf{c}^e=1$ для несжимаемых материалов [19]. Здесь и далее точка над символом означает полную производную по времени. Отметим, что эволюционное уравнение для $\mathbf{c}^e$, аналогичное (1), было получено в [20] (стр. 89, второе из уравнений 2.4) для вязкоупругой среды.

Нелинейно-упругие соотношения несжимаемого изотропного материала для тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ имеют вид [14; 21; 22]

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{I}-2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}\mathbf{c}^e=-p\mathbf{I}-2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}+\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\operatorname{tr}\mathbf{c}^e\right)\mathbf{c}^e+2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\left(\mathbf{c}^e\right)^2,$$

$$I_1=\operatorname{tr}\mathbf{c}^e,\ 2I_2=\operatorname{tr}^2\mathbf{c}^e-\operatorname{tr}\left(\mathbf{c}^e\right)^2.\quad(2)$$

Здесь скалярная функция p вводится из-за ограничений несжимаемости. Как уже упоминалось, в представленном исследовании мы используем потенциал Муни – Ривлина

$$\Psi=C_1\left(I_2-3\right)+C_2\left(I_1-3\right)=\mu\left(\frac{1-\alpha}{4}I_1+\frac{1+\alpha}{4}I_2-\frac{3}{2}\right),$$

$$\mu=2\left(C_1+C_2\right),\ \alpha=\left(C_1-C_2\right)\left(C_1+C_2\right)^{-1},\ C_1>0,\ C_2\ge0,\ -1\le\alpha\le1.$$

Неогуковскому материалу соответствует $\alpha=1$.

Мы полагаем, что деформирование достаточно медленное. При этом отвод тепла пластической диссипации достаточно интенсивный и увеличение температуры материала несущественно. Для квазистатического деформирования выполнено уравнение равновесия

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}.\quad(3)$$

Используется условие пластичности Треска с произвольным изотропным упрочнением и ассоциированный с ним закон пластического течения:

$$\Phi=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}-\kappa\left(q\right)=0,\ \mathbf{D}^p=\Lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad(4)$$

здесь $\kappa=\kappa_0\left[1+H\left(q\right)\right]$ есть сдвиговой предел текучести, κ_0 начальный сдвиговой предел текучести, $H\left(q\right)$ функция упрочнения, $H\left(0\right)=0$, q – накопленная пластическая деформация, определяемая уравнением $\dot{q}=\left(2/3\right)^{1/2}\operatorname{tr}^{1/2}\left(\mathbf{D}^p\right)^2$; $\Lambda>0$ – скалярный пластический множитель; σ_1 и σ_3 – наибольшее и наименьшее главные напряжения. Эта модель, с одной стороны, может использоваться как некоторое приближение модели Мизеса, с другой стороны, ряд экспериментальных данных для полимеров соответствует поверхности текучести Треска [23–25]. Мы полагаем, что изначально изотропный материал остается изотропным при монотонном деформировании, хотя это вносит некоторую погрешность в учет эффектов второго порядка (осевая сила при кручении). Некоторые экспериментальные результаты, позволяющие оценить влияние анизотропии свойств, опубликованы, например, в [26].

2. Постановка и аналитическое решение начально-краевой задачи

Рассмотрим сплошной несжимаемый круговой цилиндр радиуса R_1, один торец которого полностью закреплен, а второй испытывает кручение вокруг оси симметрии. Образующая цилиндра является свободной поверхностью, $\sigma_{rr}\left(R_1\right)=0$, $\sigma_{r\varphi}\left(R_1\right)=\sigma_{rz}\left(R_1\right)=0$. Высота цилиндра постоянна, вектор перемещений материальных точек в цилиндрическом базисе есть

$$\mathbf{u}=r\left[1-\cos\left(z\theta\right)\right]\mathbf{e}_\mathbf{r}+r\sin\left(z\theta\right)\mathbf{e}_\boldsymbol{\varphi}.\quad(5)$$

где параметр нагружения $\theta\left(t\right)$ – угол закрутки подвижного торца, отнесенный к длине цилиндра. Тогда вектор

скорости есть просто $\mathbf{v}=rz\theta_t\,\mathbf{e}_\varphi$, а пространственный градиент скорости имеет вид $\mathbf{l}=-z\theta_t\left(\mathbf{e}_\mathbf{r}\otimes\mathbf{e}_\varphi-\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\mathbf{r}\right)+r\theta_t\,\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\mathbf{z}$. Чисто упругое кручение в этом случае описывается универсальным решением Ривлина [21; 27]. Компоненты тензора напряжений (2) удовлетворяют равенствам

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}=-\tilde{p}-\frac{1+\alpha}{2}-\Sigma+\Delta,\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}-\tilde{\sigma}_{zz}=2\Delta,$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}=-\tilde{p}-\frac{1-\alpha}{2}-(1+\alpha)\Sigma,\ \tilde{\sigma}_{\varphi z}=\sqrt{\Sigma^2-1-\Delta^2}. \qquad (6)$$

Функция $\tilde{p}$ определяется интегрированием уравнения равновесия $\partial\sigma_{rr}/\partial r+\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)\big/r=0$. Значок «~» над символом обозначает нормирование величины на модуль сдвига μ. Здесь введены обозначения

$$c^e_{zz}+c^e_{\varphi\varphi}=2\Sigma,\ c^e_{zz}-c^e_{\varphi\varphi}=2\Delta>0. \qquad (7)$$

При определенной величине $\theta=\theta^*$ начинается пластическое течение материала на поверхности $r=R_1$; при $\theta\ge\theta^*$ в образце есть упругопластическая граница $r=r_{ep}$, которая движется к оси симметрии. Радиальное напряжение и упругие деформации непрерывны на упругопластической границе. Мы полагаем, что вектор перемещений после наступления пластического течения имеет тот же вид (5), то есть точки материала движутся по дугам окружности [3; 6; 28–30]. Равенства (6), которые следуют из упругого закона (2), верны и в упругой, и в пластической областях с той разницей, что в упругой области компоненты тензора $\mathbf{c}^e$ совпадают с компонентами меры Альманзи полных деформаций $\mathbf{c}$, а в пластической области определяются эволюционным уравнением (1); функция $\tilde{p}$ также определяется отдельно в каждой области интегрированием уравнения равновесия и непрерывна на упругопластической границе.

Из (5) следует координатное представление в цилиндрическом базисе

$$(\nabla\otimes\mathbf{u})^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z}\\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} & \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1-\cos(z\theta) & -\sin(z\theta) & r\theta\sin(z\theta)\\ \sin(z\theta) & 1-\cos(z\theta) & r\theta\cos(z\theta)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

тогда представление тензора меры Альманзи есть

$$\mathbf{c}=\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}=\left[\mathbf{I}-(\nabla\otimes\mathbf{u})\right]\left[\mathbf{I}-(\nabla\otimes\mathbf{u})^T\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(z\theta) & -\sin(z\theta) & 0\\ \sin(z\theta) & \cos(z\theta) & 0\\ -r\theta\sin(z\theta) & -r\theta\cos(z\theta) & 1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos(z\theta) & \sin(z\theta) & -r\theta\sin(z\theta)\\ -\sin(z\theta) & \cos(z\theta) & -r\theta\cos(z\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -r\theta\\ 0 & -r\theta & 1+(r\theta)^2\end{pmatrix}.$$

В упругой области $r\le r_{ep}$ тензор меры Альманзи упругой деформации совпадает с мерой полной деформации, его ненулевые компоненты есть

$$c^e_{rr}=c_{rr}=1,\ c^e_{\varphi\varphi}=c_{\varphi\varphi}=1,\ c^e_{zz}=c_{zz}=1+(r\theta)^2,$$
$$c^e_{\varphi z}=c_{\varphi z}=-r\theta. \qquad (8)$$

После начала пластического течения в точке материала упругие деформации начинают изменяться в соответствии с уравнением эволюции (1) и больше не определяются равенствами (8). Поскольку при упругом деформировании радиальное напряжение σ_{rr} есть промежуточное главное напряжение [28–30], разумно полагать, что в пластической области это остается верным, по крайней мере в пределах некоторого угла поворота. Этот случай соответствует наиболее простому варианту уравнений упругопластической задачи, для которых мы выводим точное аналитическое решение. Тогда радиальная компонента скорости пластической деформации по (4) равна нулю, $D^p_{rr}=0$. Тогда по (1) с учетом (7) и условия несжимаемости $\det\mathbf{c}^e=1$ имеем

$$\left(c^e_{rr}\right)_t=0,\ c^e_{rr}=1,\ c^e_{\varphi z}=-\sqrt{c^e_{\varphi\varphi}c^e_{zz}-1}=-\sqrt{\Sigma^2-1-\Delta^2}. \qquad (9)$$

Этого достаточно, чтобы заключить, что главные значения тензора напряжений

$$\tilde{\sigma}_2=\tilde{\sigma}_{rr},\ \tilde{\sigma}_{1,3}=\frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}+\tilde{\sigma}_{zz}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}-\tilde{\sigma}_{zz}}{2}\right)^2+\tilde{\sigma}^2_{\varphi z}} \qquad (10)$$

при $-1\le\alpha\le1$ и $\Sigma>1$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{\sigma}_1-\tilde{\sigma}_2=\alpha(\Sigma-1)+\sqrt{\Sigma^2-1}>0,$$
$$\tilde{\sigma}_2-\tilde{\sigma}_3=-\alpha(\Sigma-1)+\sqrt{\Sigma^2-1}>0.$$

Таким образом, при развитии пластического течения не может произойти смена грани в условии текучести Треска, радиальное напряжение σ_{rr} остается промежуточным главным на протяжении всего процесса деформирования. Пластическое течение в любой точке

образца начинается, когда $\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3 = 2\tilde{\kappa}_0$. Закон движения упругопластической границы $r_{ep}(\theta)$ есть

$$\left(r_{ep}\theta\right)^2 = 2\left(\sqrt{1+\tilde{\kappa}_0^{\,2}} - 1\right). \tag{11}$$

Из (11) видно, что образец не может полностью перейти в пластическое состояние при конечном угле поворота θ.

Теперь мы будем искать решение эволюционного уравнения (1) для тензора упругой деформации в пластической области $r > r_{ep}(\theta)$. Для этого понадобятся некоторые предварительные заключения.

Во-первых, мы выведем конвективную производную в (1) как

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{c}^e = z\theta_t\left(c^e_{rr} - c^e_{\varphi\varphi}\right)\left(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_r\right) - \\ - z\theta_t c^e_{\varphi z}\left(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_r\right).$$

Во-вторых, из ассоциированного закона (4) и равенства (10) мы можем заключить, что ненулевые компоненты скорости пластической деформации $\boldsymbol{D}^p$ есть

$$D^p_{\varphi\varphi} = -D^p_{zz} = \frac{\Lambda}{2\tilde{\kappa}}\frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}_{zz}}{2},\ D^p_{\varphi z} = \frac{\Lambda}{2\tilde{\kappa}}\tilde{\sigma}_{\varphi z}. \tag{12}$$

Две независимые компоненты уравнения (1) представляют собой связанную систему ОДУ, которая содержит пространственную переменную r в качестве параметра:

$$\left(c^e_{\varphi\varphi}\right)_t = -\frac{\Lambda}{2\tilde{\kappa}}\left[c^e_{\varphi\varphi}\left(c^e_{\varphi\varphi} + c^e_{zz}\right) - 2\right],$$

$$\left(c^e_{zz}\right)_t = -\frac{\Lambda}{2\tilde{\kappa}}\left[c^e_{zz}\left(c^e_{\varphi\varphi} + c^e_{zz}\right) - 2\right] + 2r\theta_t\sqrt{c^e_{\varphi\varphi}c^e_{zz} - 1}. \tag{13}$$

Мы будем искать решение в пластической области в виде функций $\Sigma(q)$ и $\Delta(q)$, полагая, что накопленная пластическая деформация в свою очередь есть функция автомодельной переменной $\xi = r\theta$, то есть $q = q(\xi)$. Прежде всего, по определению q, с учетом того, что для рассматриваемой задачи $\dot{q} = \partial q/\partial t$, имеем согласно (12) с учётом (6):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{tr}\left(\mathbf{D}^p\right)^2} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}\tilde{\kappa}}\sqrt{\Sigma^2 - 1}.$$

С учетом (9) и предыдущего выражения полусумма и полуразность уравнений (13) задают следующие уравнения для Σ и Δ:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi} = -\sqrt{3}\frac{\partial q}{\partial\xi}\sqrt{\Sigma^2 - 1} + \sqrt{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2},$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\xi} = -\sqrt{3}\frac{\partial q}{\partial\xi}\frac{\Sigma}{\sqrt{\Sigma^2 - 1}}\Delta + \sqrt{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2}. \tag{14}$$

Исключая $\sqrt{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2}$ из этих уравнений и переходя к независимой переменной q, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d\Delta}{dq} + \frac{\Sigma}{\sqrt{\Sigma^2 - 1}}\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d\Sigma}{dq} + \sqrt{\Sigma^2 - 1}. \tag{15}$$

Далее условие пластичности с учетом (6) приводит к равенству

$$\Sigma = \sqrt{1 + \tilde{\kappa}^2}, \tag{16}$$

где $\tilde{\kappa}$ есть известная функция накопленной пластической деформации q. Тогда (15) есть линейное ОДУ относительно функции $\Delta(q)$. Его решение есть

$$\Delta(q) = \sqrt{1+\tilde{\kappa}^2} - e^{-\sqrt{3}\int_0^q f(\zeta)d\zeta}\left[1 + \sqrt{3}\int_0^q \tilde{\kappa}^{-1}e^{\sqrt{3}\int_0^\zeta f(\zeta)d\zeta}d\zeta\right],$$

$$f(q) = \tilde{\kappa}^{-1}\sqrt{1+\tilde{\kappa}^2}. \tag{17}$$

Это решение удовлетворяет условию $\Delta(0) = \sqrt{1+\tilde{\kappa}_0^{\,2}} - 1$ на упругопластической границе $r = r_{ep}$, которое следует из (8) и (11).

Теперь нам известны Σ и Δ в пластической области как функции накопленной пластической деформации q (уравнения (16) и (17)). Пространственное распределение q устанавливается из (14) непосредственным интегрированием:

$$\int_0^q\left(\frac{d\tilde{\kappa}}{dq}\frac{\tilde{\kappa}}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}^2}} + \sqrt{3}\tilde{\kappa}\right)\frac{dq}{\sqrt{\tilde{\kappa}^2 - \Delta^2}} = r\theta - r_{ep}\theta, \tag{18}$$

здесь $r_{ep}\theta$ есть константа, определяемая по (11).

3. Напряженное состояние. Крутящий момент и осевая сила

С учетом (6) уравнение равновесия (3) $r(\partial\sigma_{rr}/\partial r) = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \Delta + \alpha(\Sigma - 1)$ с граничным условием $\sigma_{rr}(R_1) = 0$ позволяет найти функцию $\tilde{p}$:

$$\tilde{p} = -(1+\alpha)\Sigma - \frac{1-\alpha}{2} + \int_r^R \frac{\Delta + \alpha(\Sigma - 1)}{r}dr.$$

Это выражение справедливо как в пластической, так и в упругой области (при этом, естественно, выражения для $\Delta(r)$ и $\Sigma(r)$ в этих областях различаются).

Тогда осевое напряжение определяется по формуле

$$\tilde{\sigma}_{zz} = -\Delta + \alpha(\Sigma - 1) - \int_r^{R_1}\frac{\Delta + \alpha(\Sigma - 1)}{r}dr.$$

Интегрируя это выражение по частям, найдем среднее осевое напряжение как

$$\langle\tilde{\sigma}_{zz}\rangle=\frac{2}{R_1^2}\int_0^{R_1}\tilde{\sigma}_{zz}rdr=-\frac{1}{R_1^2}\int_0^{R_1}\left[3\Delta-\alpha(\Sigma-1)\right]rdr.$$

Крутящий момент есть

$$\tilde{M}=2\pi\int_0^{R_1}\tilde{\sigma}_{\varphi z}r^2dr=2\pi\int_0^{R_1}r^2\sqrt{\Sigma^2-1-\Delta^2}\,dr.$$

Поскольку в упругой области функции $\Delta(r)$ и $\Sigma(r)$ известны в явном виде по (8), а в пластической области только в параметрической форме (с накопленной пластической деформацией q в качестве параметра), запишем выражения для крутящего момента и среднего осевого напряжения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\sigma}_{zz}\rangle&=-\frac{3-\alpha}{2\theta^2R_1^2}\int_0^{r_{ep}}\zeta^3d\zeta-\\&-\frac{1}{\theta^2R_1^2}\int_{r_{ep}\theta}^{R_1\theta}\left[3\Delta-\alpha(\Sigma-1)\right](r\theta)\frac{d(r\theta)}{dq}dq=\\&=-\frac{3-\alpha}{8\theta^2R_1^2}(r_{ep}\theta)^4-\\&-\frac{1}{\theta^2R_1^2}\int_{r_{ep}\theta}^{R_1\theta}(r\theta)\frac{3\Delta-\alpha\left(\sqrt{1+\tilde{\kappa}^2}-1\right)}{\sqrt{\tilde{\kappa}^2-\Delta^2}}\left(\frac{d\tilde{\kappa}}{dq}\frac{\tilde{\kappa}}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}^2}}+\sqrt{3}\tilde{\kappa}\right)dq;\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}&=2\pi\theta\int_0^{r_{ep}}r^3dr+\frac{2\pi}{\theta^3}\int_{r_{ep}\theta}^{R_1\theta}(r\theta)^2\sqrt{\Sigma^2-1-\Delta^2}\,d(r\theta)=\\&=\frac{\pi\theta r_{ep}^4}{2}+\frac{2\pi}{\theta^3}\int_0^{q(R_1\theta)}(r\theta)^2\left(\frac{d\tilde{\kappa}}{dq}\frac{\tilde{\kappa}}{\sqrt{1+\tilde{\kappa}^2}}+\sqrt{3}\tilde{\kappa}\right)dq.\end{aligned}\tag{20}$$

Первые слагаемые в формулах (19) и (20) соответствуют вкладу упругой зоны, вторые – пластической. В этих формулах $(r\theta)$ как функция q определяется равенством (18), $\Delta(q)$ задана формулой (17); $r_{ep}\theta$ есть константа, определяемая по (11). Значение накопленной пластической деформации на внешней поверхности образца $q(R_1\theta)$ может быть вычислено как корень алгебраического уравнения (18) при $r=R_1$. До начала пластического течения $\langle\tilde{\sigma}_{zz}\rangle=-(1/8)(3-\alpha)(R_1\theta)^2$ и $\tilde{M}=(1/2)\pi\theta R_1^4$.

4. Результаты и их обсуждение

4.1. Сопоставление аналитической модели и результатов FEA-пакета MSC.Marc

Тестовые расчеты проведены для следующих моделей нелинейного упрочнения (рис. 1):

– квадратичное упрочнение

$$H(q)=hq^2;\tag{21}$$

– немонотонное упрочнение [5]

$$H(q)=\frac{q}{q_0}\left(\frac{1}{1+\xi(q/q_0)^2}+\frac{q}{\eta}\right).\tag{22}$$

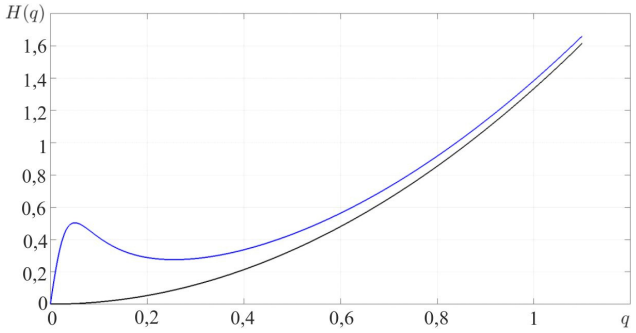


Рис. 1. Кривые законов упрочнения. Черная линия – уравнение (21) с параметром $h=4/3$, синяя линия – уравнение (22) с параметрами $\xi=1$, $\eta=15$, $q_0=0{,}05$

Fig. 1. Hardening curves: the black line corresponds to Eq. (21) with the parameter $h=4/3$, the blue line corresponds to Eq. (22) with the parameters $\xi=1$, $\eta=15$, $q_0=0.05$

Аналитическое решение задачи сравнивается с численным, полученным методом конечных элементов в системе MSC.Marc. Так как анализ предполагает большие повороты относительно оси симметрии, то, согласно рекомендациям [31], будет использоваться полная трехмерная модель. Кроме того, необходимость использования трехмерной модели вызвана также способом задания определяющих соотношений, который недоступен для других типов элементов. Геометрические размеры образца: радиус $R_1=1$ м, высота 1 м. Конечно-элементная модель цилиндрического образца представлена на рис. 2.

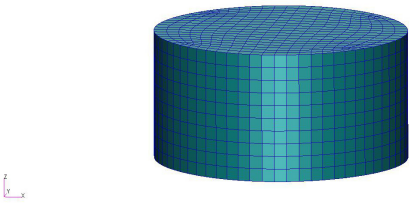


Рис. 2. Конечно-элементная модель образца

Fig. 2. Finite element model of the sample

Для решения задачи кручения используется элемент типа 7, который представляет собой восьмиузловой, изопараметрический, произвольный шестигранник. Поскольку в этом элементе используются трилинейные функции интерполяции, деформации имеют тенденцию быть постоянными по всему элементу. Это приводит к плохому представлению поведения сдвига. Характеристики сдвига (или изгиба) улучшаются, если использовать альтернативные функции интерполяции с помощью процедуры *Assumed strain* [31].

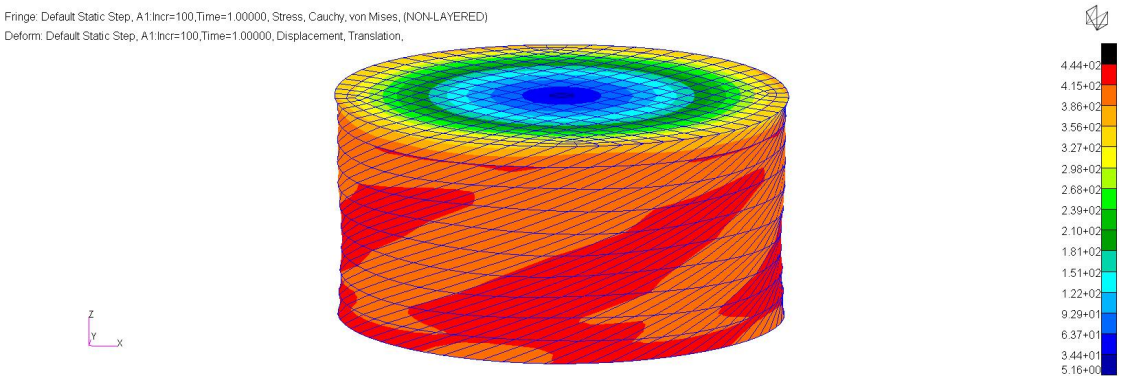


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений по Мизесу в результате кручения цилиндрического образца

Fig. 3. The von Mises stress intensity distribution as a result of torsion of a cylindrical sample

Для почти несжимаемого поведения, включая пластичность или ползучесть, используется альтернативная процедура интегрирования (опция *Constant dilatation*) [31]. На основе анализа решений задачи кручения с разными сетками выбран вариант модели с 3840 элементами и количеством шагов по параметру нагружения, равным 100 (рис. 2, 3).

Материал цилиндрического образца задается потенциалом Муни – Ривлина $\Psi = C_1(I_2 - 3) + C_2(I_1 - 3)$ с константами $C_1 = 25$ МПа, $C_2 = 0$ МПа. Предел текучести по критерию Мизеса равен $\sigma_y = \sqrt{3}k_0 = 17{,}32$ МПа, при этом выполняется условие $\kappa_0 / \mu = 0{,}2$, где $\mu = 50$ МПа, $\kappa_0 = 10$ МПа. Пластическое упрочнение задается законами (21) или (22) (см. рис. 1).

Граничные условия:

– вдоль оси цилиндра перемещения $u_x = u_y = 0$;

– на торце цилиндра снизу $u_x = u_y = u_z = 0$;

– на торце цилиндра сверху $u_z = 0$.

– перемещения u_x, u_y, обеспечивающие кручение, задаются на верхнем торце.

Решение конечно-элементных уравнений выполняется пошаговым интегрированием, поэтому перемещения должны задаваться в приращениях, которые могут быть получены через скорость в текущей системе координат: $\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\Delta t = rz\theta_t \Delta t \boldsymbol{e}_\varphi = -yz\theta^* \Delta t \boldsymbol{e}_x + xz\theta^* \Delta t \boldsymbol{e}_y$, $\sum \Delta t = 1$ (Δt – приращение параметра нагружения, $\theta(t) = \theta^* \cdot t$). Таким образом, $\Delta u_x = -yz\theta^* \Delta t$, $\Delta u_y = xz\theta^* \Delta t$, где максимальный угол закручивания задан величиной 2,5 радиан.

Для учета пластических деформаций в законе Муни – Ривлина можно воспользоваться реализованной в системе Marc моделью параллельной реологической структуры – Parallel Rheological Framework (PRF) [31], в которой каждая ветвь может представлять нелинейную вязкоупругую модель (в том числе основная ветвь) или нелинейную упругопластическую модель материала. Подобный способ используется для построения определяющих уравнений модели упруговязкопластических свойств термопластических полимеров [32]. В данном случае будет рассматриваться схема модели (рис. 4) состоящая из двух параллельных ветвей, одна из которых, являющаяся основной, содержит упругий элемент (*1*), а другая – упругий (*2*) и пластический (*3*) элементы. Упругий элемент (*1*) моделирует закон Муни – Ривлина, упругий элемент (*2*) – материал OGDEN, но с константами, обеспечивающими идентичность материала упругого элемента (*1*). В качестве условия пластичности в элементе (*3*) используется критерий Мизеса. При этом для данной ветви предполагается мультипликативное разложение градиента деформации на упругую и пластическую часть. Выбор такой схемы вызван ограничениями в определении определяющих соотношений по модели параллельной реологической структуры в системе Marc [31].

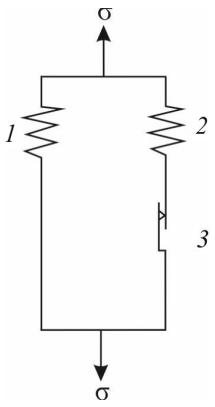


Рис. 4. Схема упругопластической модели

Fig. 4. Scetch on the elastoplastic model

При данной комбинации в каждой из ветвей напряжения в элементах одинаковы, а в материале в целом общее напряжение есть сумма напряжений в ветвях: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2$, где $\boldsymbol{\sigma}^1$ – напряжения, образующиеся вызванной деформацией по модели Муни – Ривлина, $\boldsymbol{\sigma}^2$ – образующиеся напряжения по модели материала Муни – Ривлина с учетом пластических деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – на-

пряжения всей системы. Общая деформация системы равна деформациям, возникающим в каждой из ветвей.

Таким образом, для определения зависимости напряжений от деформаций или угла скручивания по модели материала Муни – Ривлина с учетом пластических деформаций необходимо решить задачи кручения с определяющими соотношениями по модели материала Муни – Ривлина и по модели, реализованной схемой на рис. 4, а затем вычислить напряжения для соответствующих деформаций:

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^1 . \qquad (23)$$

После решения задачи в Marc результаты для узлов конечных элементов выводятся в декартовой системе координат, тогда выражения для крутящего момента и среднего осевого напряжения будут определяться формулами

$$M = 2\pi\int_0^{R_1} \sigma_{\varphi z} r^2 dr = 2\pi\int_0^{R_1} (\sigma_{yz}\cos\varphi - \sigma_{xz}\sin\varphi) r^2 dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{R_1} (\sigma_{yz}x - \sigma_{xz}y) r dr = \int_S (\sigma_{yz}x - \sigma_{xz}y) dS,$$

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = \frac{2}{R_1^2}\int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr = \frac{1}{\pi R_1^2}\int_S \sigma_{zz} dS ,$$

где S – площадь верхнего торца цилиндра.

Используя формулу Ньютона – Котесса [33] для торцевых элементов (для граней восьмиузловых элементов, находящаяся на торце), вычисляется момент и осевая сила по узловым значениям напряжений:

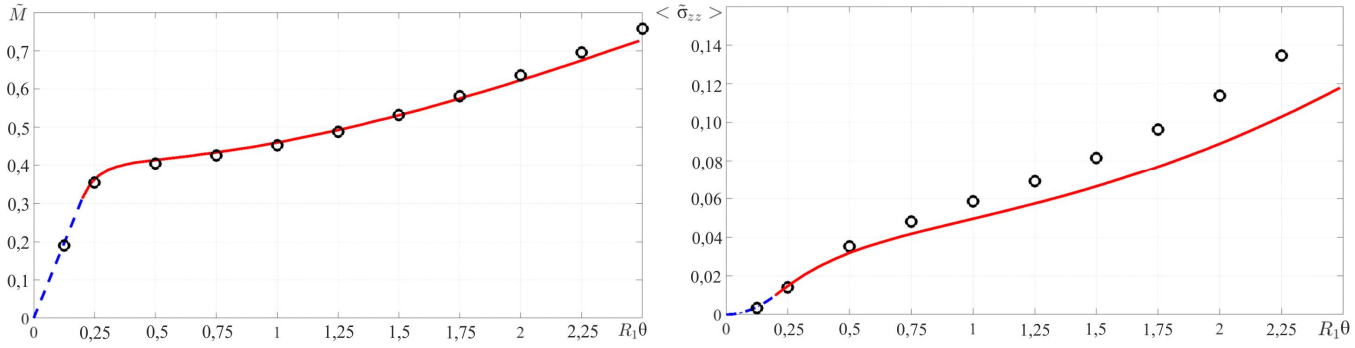
$$M \approx \frac{1}{4}\sum_e \sum_{i=1}^{4} (\sigma_{yz}(x_i, y_i)x_i - \sigma_{xz}(x_i, y_i)y_i) S^e$$

$$\langle \sigma_{zz} \rangle \approx \frac{1}{\pi R_1^2}\frac{1}{4}\sum_e \sum_{i=1}^{4} \sigma_{zz}(x_i, y_i) S^e ,$$

где S^e – площадь четырехузловой грани элемента с номером e, x_i, y_i – координаты узлов элемента e. Суммирование проводится по всем граням элементов, расположенных на торце цилиндра.

В итоге искомые значения нормированных величин крутящего момента и среднего осевого напряжения для каждого значения деформации, с учетом (23) могут быть найдены по формулам: $\tilde{M} = \left(M - M^1\right)\Big/\mu$, $\langle \tilde{\sigma}_{zz} \rangle = \left(\langle \sigma_{zz} \rangle - \langle \sigma_{zz} \rangle^1\right)\Big/\mu$.

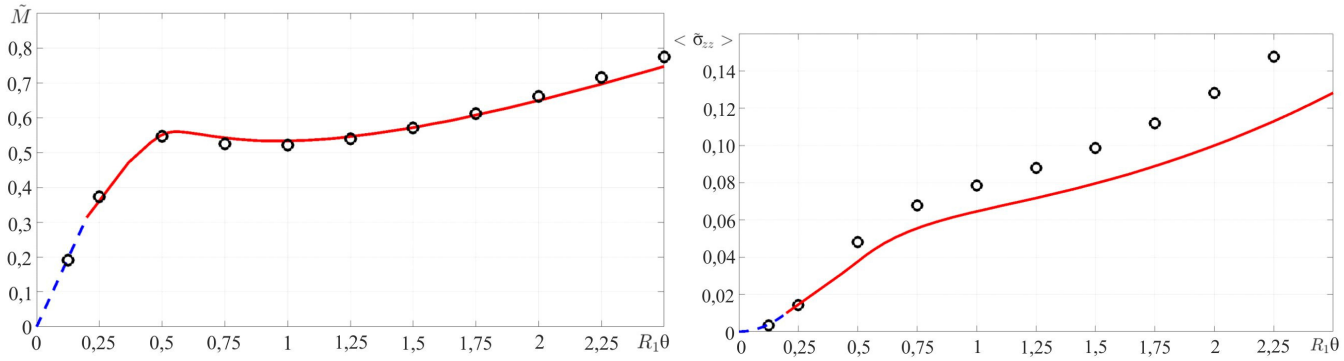
Результаты расчета в MSC. Marc сопоставлены с аналитическими результатами на рис. 5 и 6. Для крутящего момента аналитические и численные результаты находятся в хорошем согласовании. Осевая сила несколько выше в численных результатах. Это может быть вызвано тем, что аналитическое решение основано на модели Треска, которая не учитывает влияние промежуточного главного напряжения и соответствующей ему радиальной компоненты скорости пластической деформации.



a *b*

Рис. 5. Кривые крутящего момента (*a*) и среднего осевого напряжения (*b*). Упругая модель неогуковского тела с $\mu = 50$ МПа. Монотонное квадратичное упрочнение (21) с параметром $h = 4/3$; начальный сдвиговой предел текучести $\kappa_0 = 10$ МПа. Красная сплошная линия – после начала пластического течения в образце, синяя штриховая линия – чисто упругое деформирование образца. Круговые маркеры соответствуют численному решению в MSC. Marc, линии соответствуют аналитическому решению

Fig. 5. Torque (*a*) and average axial stress (*b*). Elastic model of a neo-Hookean solid with $\mu = 50$ MPa. Monotonic quadratic hardening (21) with parameter $h = 4/3$; initial shear yield strength $\kappa_0 = 10$ Mpa. Red solid line corresponds to elastoplastic deformation of the sample, blue dashed line corresponds to purely elastic deformation of the sample. The circle markers correspond to the numerical solution in MSC. Marc, the lines correspond to the analytical solution



a *b*

Рис. 6. Кривые крутящего момента (*a*) и среднего осевого напряжения (*b*). Упругая модель неогуковского тела с $\mu = 50$ МПа. Немонотонное упрочнение (22) с параметрами $\xi = 1$, $\eta = 15$, $q_0 = 0{,}05$; начальный сдвиговой предел текучести $\kappa_0 = 10$ МПа. Красная сплошная линия – после начала пластического течения в образце, синяя штриховая линия – чисто упругое деформирование образца. Круговые маркеры соответствуют численному решению в MSC. Marc, линии соответствуют аналитическому решению

Fig. 6. Torque (*a*) and average axial stress (*b*). Elastic model of a neo-Hookean solid with $\mu = 50$ MPa. Nonmonotonic hardening (22) with parameters $\xi = 1$, $\eta = 15$, $q_0 = 0.05$; initial shear yield strength $\kappa_0 = 10$ MPa. Red solid line corresponds to elastoplastic deformation of the sample, blue dashed line corresponds to purely elastic deformation of the sample. The circle markers correspond to the numerical solution in MSC. Marc, the lines correspond to the analytical solution

4.2. Сравнение с экспериментальными данными

Мы провели сравнение аналитической модели с доступными экспериментальными данными о кручении полнотелых цилиндров без изменения их высоты (стесненное кручение, fixed-end torsion). Это данные из [34] для поликарбоната (PC), а также из [35] для полиметилметакрилата (PMMA).

В первой из указанных работ кручению был подвергнут образец (PC) диаметром 31,75 мм и высотой 8,89 мм; угловая скорость испытания 0,25 град/с. Это соответствует скорости деформации на внешней поверхности образца $R_1(\partial\theta/\partial t)/\sqrt{3} = 0.04c^{-1}$. Максимальная достигнутая величина $R_1\theta$ в эксперименте составляла 1,4 (эквивалентная пластическая деформация меньше $R_1\theta/\sqrt{3} = 0{,}81$).

Во второй работе испытаны образцы (PMMA) диаметром 10 мм и высотой 42 мм; угловая скорость испытания 25 град/с. Это соответствует скорости деформации на внешней поверхности образца $R_1(\partial\theta/\partial t)/\sqrt{3} = 0.03c^{-1}$. Отметим, что в [35] испытывались предварительно деформированные осевым усилием образцы. Максимальная достигнутая в эксперименте величина $R_1\theta = 0.63$ до разрушения образца (для образца с начальным осевым сжатием 1.25 МПа). Эквивалентная пластическая деформация меньше $R_1\theta/\sqrt{3} = 0.36$.

В (24) (таблица) мы модифицировали закон упрочнения [5], главным образом для учета неквадратичного роста предела текучести материала при больших деформациях. В расчетах использована упругая модель неогуковского тела. Модули сдвига определены согласно [36] как $\mu = E/3$, где E есть модуль Юнга. Параметры закона упрочнения и начальный предел текучести определены по экспериментальным кривым [34], которые получены при испытании материалов на одноосное сжатие. Все указанные параметры соответствуют указанным скоростям деформации кручения и температуре 25 °C. Отметим, что скорость деформации меняется по радиусу образца и выбор фиксированной величины скорости деформации вносит некоторую погрешность в модель (в меньшей степени для PC, поскольку при скорости деформации, меньшей 0,04, этот материал проявляет более стабильные величины упругих и пластических параметров).

Параметры материалов, использованные при моделировании

Materials parameters used in the simulation

Материал	Модуль сдвига μ, МПа	Начальный предел текучести на сдвиг κ_0, МПа	Параметры закона упрочнения $\kappa = \kappa_0\left[1 + H(q)\right]$, $H(q) = \frac{\kappa_* - \kappa_0}{\kappa_0}\frac{2(q/q_*)}{1+(q/q_*)^2} + Aq^n$ (24)			
			κ_*, МПа	q_*	A	n
PC	550	22,5	37,5	0,05	2,0	2,6
PMMA	1100	44	75	0,05	0,6	2,4

Кроме того, даже при стандартизированной предварительной обработке образцов, включающей отжиг и выдержку, экспериментальные данные имеют некоторый разброс (см., например [37]). Поэтому расчет для PC можно прогнозировать как более точный, поскольку параметры материала и экспериментальные данные по кручению взяты из одного и того же исследования. Истинные кривые «деформация – напряжение» в работе [35] не приведены. На рис. 7 приведены кривые, построенные по модели (24) (см. таблицу).

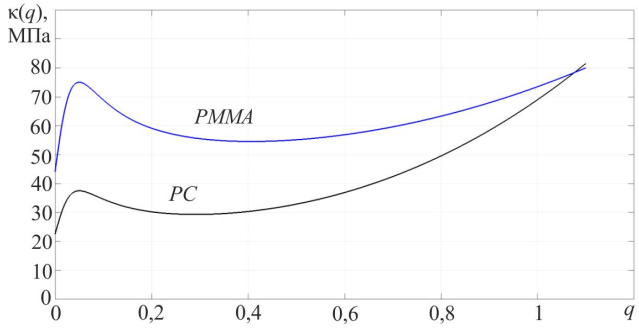


Рис. 7. Кривые предела текучести на сдвиг PC и PMMA по модели (24)

Fig. 7. Curves of the shear yield strength of PC and PMMA according to the model (24)

На рис. 8–11 результаты аналитической модели сопоставлены с экспериментальными данными. По осям абсцисс везде отложена величина поверхностной деформации образца $R_1\theta$. Мы уже упоминали, что в исследовании [35] образцы нагружались осевым усилием в дополнение к крутящей нагрузке. Мы выбрали для сопоставления наименее сжатый образец (с начальным осевым давлением 1,25 МПа). Судя по графику [34] экспериментально зафиксированного осевого усилия, к образцу также была приложена малая начальная нагрузка (в этом случае растягивающая, порядка 200 Н).

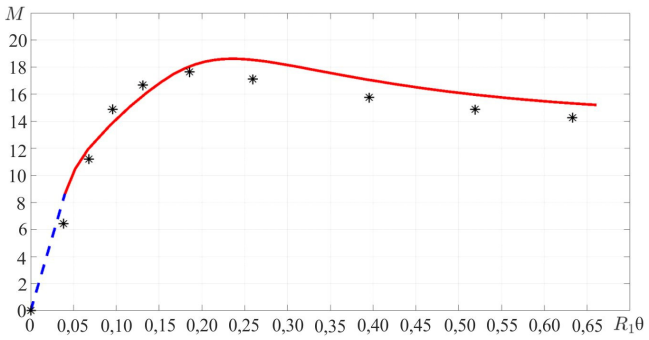


Рис. 8. Крутящий момент (в $\text{Н}\cdot\text{м}$) для полиметилметакрилата (PMMA). Точками отмечены экспериментальные данные (воспроизведены по [35, рис. 6])

Fig. 8. Torque (in $\text{Н}\cdot\text{м}$) for polymethyl methacrylate (PMMA). Dots mark experimental data (reproduced after [35, Fig. 6])

В целом прогноз крутящего момента более точный, чем прогноз осевого усилия. Экспериментально зафиксированный рост осевого усилия для образца из PMMA с начальным осевым давлением 1,25 МПа при $R_1\theta > 0{,}3$ [35] соответствует участку разупрочнения материала и не прогнозируется аналитическим решением. Отметим, что для остальных образцов, сильнее нагруженных предварительным осевым давлением [35], на этом участке кривой деформирования осевое усилие падает.

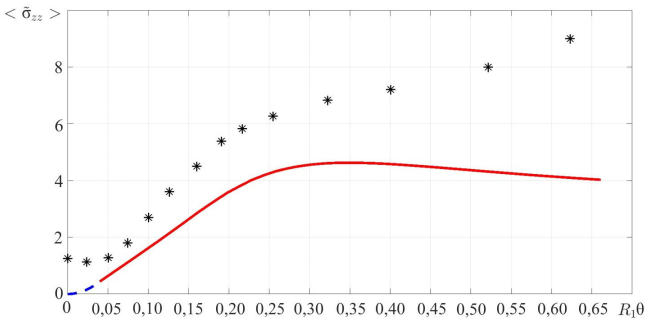


Рис. 9. Среднее осевое давление $\langle\sigma_{zz}\rangle$, МПа для полиметилметакрилата (PMMA). Точками отмечены экспериментальные данные (воспроизведены по [35, рис. 6])

Fig. 9. Average axial pressure $\langle\sigma_{zz}\rangle$, MPa for polymethyl methacrylate (PMMA). Dots mark experimental data (reproduced after [35, Fig. 6])

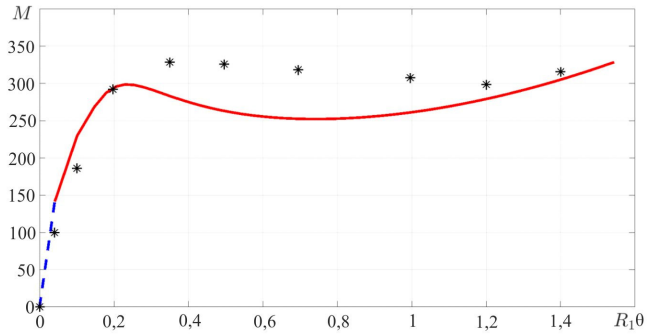


Рис. 10. Крутящий момент ($\text{Н}\cdot\text{м}$) для поликарбоната (PC). Точками отмечены экспериментальные данные (воспроизведены по [34, рис. 7, *d*])

Fig. 10. Torque ($\text{Н}\cdot\text{м}$) for polycarbonate (PC). Dots mark experimental data (reproduced after [34, Fig. 7, *d*])

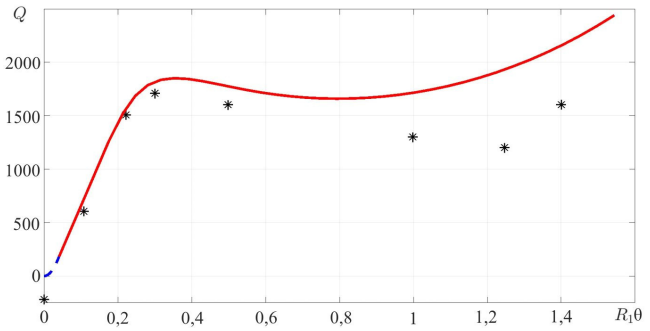


Рис. 11. Осевое усилие $Q = \pi R_1^2 \mu \langle\tilde{\sigma}_{zz}\rangle$ (в ньютонах) для поликарбоната (PC). Точками отмечены экспериментальные данные (воспроизведены по [34, рис. 7, *e*])

Fig. 11. Axial force $Q = \pi R_1^2 \mu \langle\tilde{\sigma}_{zz}\rangle$ (in newtons) for polycarbonate (PC). Dots mark experimental data (reproduced after [34, Fig. 7, *e*])

Наблюдаемые расхождения лишь отчасти объясняются упомянутой разницей в свойствах реального образца в [35] и использованными для моделирования

данными об одноосном сжатии PMMA из [34]. Главной причиной может являться то, что кривые упрочнения полимерных материалов при сдвиге, вообще говоря, могут существенно отличаться от соответствующих кривых при одноосной деформации сжатия или растяжения [38] из-за изменения микроструктуры материала. В таком случае модели упрочнения для сдвиговой деформации могут быть построены с использованием полученного в настоящем исследовании аналитического решения с помощью методов оптимизации.

Библиографический список

1. Haward R.N., Thackray G. The use of a mathematical model to describe isothermal stress-strain curves in glassy thermoplastics // Proceedings of the Royal Society of London A. – 1967. – Vol. 302, no. 1471. – P. 453–72. DOI: 10.1098/rspa.1968.0029

2. Wu P.D., Van Der Giessen E. On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41. – P. 427–456. DOI: 10.1016/0022-5096(93)90043-F

3. Wu P.D., Van der Giessen E. On large-strain inelastic torsion of glassy polymers // International Journal of Mechanical Sciences. – 1993. – Vol. 35, no. 11. – P. 935–951. DOI: 10.1016/0020-7403(93)90031-O

4. Meijer H.E.H., Govaert L.E. Mechanical performance of polymer systems: The relation between structure and properties // Progress in Polymer Science. – 2005. – Vol. 30. – P. 915–938. DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2005.06.009

5. Cheng L., Guo T.F. Void interaction and coalescence in polymeric materials // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 1787–1808. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.08.007

6. Wu P.D., Neale K.W., Van der Giessen E. Large strain torsion of axially-constrained solid rubber bars // Acta Mechanica Sinica. –1994. – Vol. 10. – P. 136–149. DOI: 10.1007/BF02486584

7. Material parameters identification: Gradient-based, genetic and hybrid optimization algorithms / B.M. Chaparro, S. Thuillier, L.F. Menezes, P.Y.Manach, J.V. Fernandes // Computational Materials Science. – 2008. – Vol. 44, no. 2. – P. 339–346. DOI: 10.1016/j.commatsci.2008.03.028

8. Hosseinzadeh A.R., Mahmoudi A.H. Determination of mechanical properties using sharp macro-indentation method and genetic algorithm // Mechanics of Materials. – 2017. – Vol. 114. – P. 57–68. DOI: 10.1016/j.mechmat.2017.07.004

9. Sevenois R.D.B., Van Paepegem W. Fatigue Damage Modeling Techniques for Textile Composites: Review and Comparison with Unidirectional Composite Modeling Techniques // Applied Mechanics Reviews. – 2015. – Vol. 67, iss. 2. – P. 020802.

10. Optimization of Chaboche kinematic hardening parameters for 20MnMoNi55 reactor pressure vessel steel by sequenced genetic algorithms maintaining the hierarchy of dependence / S. Mal, S. Bhattacharjee, M. Jana, P. Das, S.K. Acharyya // Engineering Optimization. – 2021. – Vol. 53, no. 2. – P. 335–347. DOI: 10.1080/0305215X.2020.1726340

11. Sener B. Description of anomalous behavior of aluminum alloys with Hill48 yield criterion by using different experimental inputs and weight coefficients // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7, no. 3. – P. 1606–1619. DOI: 10.22055/jacm.2021.36297.2821

12. Grabski J.K., Mrozek A. Identification of elastoplastic properties of rods from torsion test using meshless methods and a metaheuristic // Computers & Mathematics with Applications. – 2021. – Vol. 92. – P. 149–158. DOI: 10.1016/j.camwa.2021.03.024

13. Liu I.-S. A note on the Mooney – Rivlin material model // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2012. – Vol. 24. – P. 583–590. DOI: 10.1007/s00161-011-0197-6

14. Levitas V.I. Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. – New York: Nova Science Publishers, 1996.

15. Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains / V.A. Levin, V.I. Levitas, K.M. Zingerman, E.I. Freiman // International Journal of Solids and Structures. – 2013. – Vol. 50, no. 19. – P. 2914–2928. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.003

16. Feng B., Levitas V.I., Li W. FEM modeling of plastic flow and strain-induced phase transformation in BN under high pressure and large shear in a rotational diamond anvil cell // International Journal of Plasticity. – 2019. – Vol. 113. – P. 236–254. DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.10.004

17. Sevastyanov G.M. Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2021. – Vol. 87. – Article 104223. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104223

18. Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 144–153.

19. Sevastyanov G.M. Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol. 206. – P. 383–395. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028

20. Leonov A.I. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media // Rheologica Acta. – 1976. – Vol. 15. – P. 85–98. DOI: 10.1007/BF01517499

21. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М: Наука, 1980.

22. Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 84. – P. 33–57. DOI: 10.1016/j.ijplas.2016.04.017

23. Bowden P.B., Jukes J.A. The plastic flow of isotropic polymers // Journal of Materials Science. – 1972. – Vol. 7. – P. 52–63. DOI: 10.1007/BF00549550

24. Yield criteria for amorphous glassy polymers / R. Quinson, J. Perez, M. Rink, A. Pavan // Journal of Materials Science. – 1997. – Vol. 32. – P. 1371–1379. DOI: 10.1023/A:1018525127466

25. Rottler J., Robbins M.O. Yield conditions for deformation of amorphous polymer glasses // Physical Reviews E. – 2001. – Vol. 64. – Article 051801. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.051801

26. Anisotropic mechanical behavior of semi-crystalline polymers: Characterization and modeling of non-monotonic loading including damage / R.B. Arieby, K. Mrabet, O.A. Terfas, C. Laurent, R. Rahouadj // Journal of Applied Polymer Science. – 2017. – Vol. 134, no. 7. – Article 44468. DOI: 10.1002/app.44468

27. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 1949. – Vol. 242. – P. 173–195. DOI: 10.1098/rsta.1949.0009

28. Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // Прикладная математика и механика. – 1989. – Т. 53, № 6. – С. 1014–1022.

29. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 482, № 3. – С. 285–287.

30. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 6. – С. 149–161.

31. Marc. Volume B: Element Library. MSC.Software Corporation, 2021 [Электронный ресурс]. – URL: http://www.mscsoftware.com/product/marc (дата обращения: 04.09.2022).

32. Гаришин О.К., Корляков А.С., Шадрин В.В. Моделирование упруго-вязко-пластических свойств термопластических полимеров. Комплексный экспериментально-теоретический подход // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 208–218. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.21

33. Bathe K.-J. Finite element procedures. – New Jersey: Prentice Hall, 1982.

34. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part II: Applications / N.M. Ames, V. Srivastava, S.A. Chester, L. Anand // International Journal of Plasticity. – 2009. – Vol. 25, no. 8. – P. 1495–1539. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.11.005

35. Карпов Е.В., Ларичкин А.Ю. Влияние осевого сжатия и крутящего момента на локализацию деформаций и разрушение при сложном циклическом нагружении стержней из оргстекла // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 115–126.

36. Mulliken A.D., Boyce M.C. Mechanics of the rate-dependent elastic-plastic deformation of glassy polymers from low to high strain rates // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43, no. 5. – P. 1331–1356. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.016

37. Influence of temperature and strain rate on the mechanical behavior of three amorphous polymers: Characterization and modeling of the compressive yield stress / J. Richeton, S. Ahzi, K.S. Vecchio, F.C. Jiang, Adharapurapu R.R. // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 2318–2335. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.040

38. G'Sell C., Boni S., Shrivastava S. Application of the plane simple shear test for determination of the plastic behaviour of solid polymers at large strains // Journal of Materials Science. – 1983. – Vol. 18. – P. 903–918. DOI: 10.1007/BF00745590

References

1. Haward R.N., Thackray G. The use of a mathematical model to describe isothermal stress-strain curves in glassy thermoplastics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1967, 302(1471), pp. 453–72. doi: 10.1098/rspa.1968.0029

2. Wu P.D., Van Der Giessen E. On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, 41, pp. 427–456. doi: 10.1016/0022-5096(93)90043-F

3. Wu P.D., Van der Giessen E. On large-strain inelastic torsion of glassy polymers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1993, 35(11), pp. 935–951. doi: 10.1016/0020-7403(93)90031-O

4. Meijer H.E.H., Govaert L.E. Mechanical performance of polymer systems: The relation between structure and properties. *Progress in Polymer Science*, 2005, 30, pp. 915–938. doi: 10.1016/j.progpolymsci.2005.06.009

5. Cheng L., Guo T.F. Void interaction and coalescence in polymeric materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44, pp. 1787–1808. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.08.007

6. Wu P.D., Neale K.W., Van der Giessen E. Large strain torsion of axially-constrained solid rubber bars. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10, pp. 136–149. doi: 10.1007/BF02486584

7. Chaparro B.M., Thuillier S., Menezes L.F., Manach P.Y., Fernandes J.V. Material parameters identification: Gradient-based, genetic and hybrid optimization algorithms. *Computational Materials Science*, 2008, 44(2), pp. 339–346. doi: 10.1016/j.commatsci.2008.03.028

8. Hosseinzadeh A.R., Mahmoudi A.H. Determination of mechanical properties using sharp macro-indentation method and genetic algorithm. *Mechanics of Materials*, 2017, 114, pp. 57–68. doi: 10.1016/j.mechmat.2017.07.004

9. Sevenois R.D.B., Van Paepegem W. Fatigue Damage Modeling Techniques for Textile Composites: Review and Comparison with Unidirectional Composite Modeling Techniques // Applied Mechanics Reviews. – 2015. – Vol. 67, iss. 2. – P. 020802.

10. Mal S., Bhattacharjee S., Jana M., Das P., Acharyya S.K. Optimization of Chaboche kinematic hardening parameters for 20MnMoNi55 reactor pressure vessel steel by sequenced genetic algorithms maintaining the hierarchy of dependence. *Engineering Optimization*, 2021, 53(2), pp. 335–347. doi: 10.1080/0305215X.2020.1726340

11. Sener B. Description of anomalous behavior of aluminum alloys with Hill48 yield criterion by using different experimental inputs and weight coefficients. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, 7(3), pp. 1606–1619. doi: 10.22055/jacm.2021.36297.2821

12. Grabski J.K., Mrozek A. Identification of elastoplastic properties of rods from torsion test using meshless methods and a metaheuristic. *Computers & Mathematics with Applications*, 2021, 92, pp. 149–158. doi: 10.1016/j.camwa.2021.03.024

13. Liu I.-S. A note on the Mooney – Rivlin material model. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2012, 24, pp. 583–590. doi: 10.1007/s00161-011-0197-6

14. Levitas V.I. Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. New York, Nova Science Publishers, 1996.

15. Levin V.A., Levitas V.I., Zingerman K.M., Freiman E.I. Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50(19), pp. 2914–2928. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.003

16. Feng B., Levitas V.I., Li W. FEM modeling of plastic flow and strain-induced phase transformation in BN under high pressure and large shear in a rotational diamond anvil cell. *International Journal of Plasticity*, 2019, 113, pp. 236–254. doi: 10.1016/j.ijplas.2018.10.004

17. Sevastyanov G.M. Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2021, 87, 104223. doi: 10.1016/j.euromechsol.2021.104223

18. Rogovoi A.A. Thermodynamics of finite strain elastic-inelastic deformation. *Jornal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 2007, 48(4), 591–598. doi: 10.1007/s10808-007-0074-z

19. Sevastyanov G.M. Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 206, pp. 383–395. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028

20. Leonov A.I. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica Acta*, 1976, 15, pp. 85–98. doi: 10.1007/BF01517499

21. Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. New York, North-Holland, 1990.

22. Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *International Journal of Plasticity*, 2016, 84, pp. 33–57. doi: 10.1016/j.ijplas.2016.04.017

23. Bowden P.B., Jukes J.A. The plastic flow of isotropic polymers. *Journal of Materials Science*, 1972, 7, pp. 52–63. doi: 10.1007/BF00549550

24. Quinson R., Perez J., Rink M., Pavan A. Yield criteria for amorphous glassy polymers. *Journal of Materials Science*, 1997, 32, pp. 1371–1379. doi: 10.1023/A:1018525127466

25. Rottler J., Robbins M.O. Yield conditions for deformation of amorphous polymer glasses. *Physical Reviews E*, 2001, 64, 051801. doi: 10.1103/PhysRevE.64.051801

26. Arieby R.B., Mrabet K., Terfas O.A., Laurent C., Rahouadj R. Anisotropic mechanical behavior of semi-crystalline polymers: Characterization and modeling of non-monotonic loading including damage. *Journal of Applied Polymer Science*, 2017, 134(7), 44468. doi: 10.1002/app.44468

27. Sevastyanov G.M., Burenin A.A. Finite strain upon elastic-plastic torsion of an incompressible circular cylinder. *Doklady Physics*, 2018, 63, pp. 393–395. doi: 10.1134/S1028335818090094

28. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1949, 242, pp. 173–195. doi: 10.1098/rsta.1949.0009

29. Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N. Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 1989, 53(6), pp. 804–811. doi: 10.1016/0021-8928(89)90090-7

30. Sevast'yanov G.M., Burenin A.A. Local adiabatic heating effect in finite-strain elastic-plastic torsion. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, 60(6), pp. 1104–1114. doi: 10.1134/S0021894419060166

31. Marc. Volume B: Element Library. MSC.Software Corporation, 2021 (http://www.mscsoftware.com/product/marc)

32. Garishin O.K., Korlyakov A.S., Shadrin V.V. Modelirovanie uprugo-vyazko-plasticheskih svojstv termoplasticheskih polimerov. Kompleksnyj eksperimental'no-teoreticheskij podhod [Modeling of elastic-viscoplastic properties of thermoplastic polymers. Integrated experimental-theoretical approach]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2014, 7(2), c. 208–218. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.21

33. Bathe K.-J., 1982. Finite element procedures. New Jersey, Prentice Hall, 1982.

34. Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A., Anand L. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part II: Applications. *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(8), pp. 1495–1539. doi: 10.1016/j.ijplas.2008.11.005

35. Karpov E.V., Larichkin A.Y. Impact of axial compression and torque on strain localization and fracture under complex cyclic loading of Plexiglas rods. *Jornal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, 55(1), pp. 95–104. doi: 10.1134/S0021894414010131

36. Mulliken A.D., Boyce M.C. Mechanics of the rate-dependent elastic-plastic deformation of glassy polymers from low to high strain rates. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(5), pp. 1331–1356. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.016

37. Richeton J., Ahzi S., Vecchio K.S., Jiang F.C., Adharapurapu R.R. Influence of temperature and strain rate on the mechanical behavior of three amorphous polymers: Characterization and modeling of the compressive yield stress. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43, pp. 2318–2335. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.040

38. G'Sell C., Boni S., Shrivastava S. Application of the plane simple shear test for determination of the plastic behaviour of solid polymers at large strains. *Journal of Materials Science*, 1983, 18, pp. 903–918. doi: 10.1007/BF00745590

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-11-00165).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. This work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 21-11-00165).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.