Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С. Точное решение задачи об акустике в произвольной многослойной среде при контактном взаимодействии с клиновидным штампом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. С. 5–11. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.01

Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. Exact solution of the problem of acoustics in an arbitrary multilayer medium during contact interaction with a wedge shaped stamp. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 4, pp. 5-11. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.01

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.01
УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ АКУСТИКЕ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С КЛИНОВИДНЫМ ШТАМПОМ

В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов

Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 10 августа 2023 г.
Одобрена: 23 августа 2023 г.
Принята к публикации:
31 августа 2023 г.

Ключевые слова:

контактные задачи, интегральное уравнение Винера – Хопфа, клиновидная область, факторизация, акустика, поверхностные волны.

АННОТАЦИЯ

В работе впервые изучается поведение точного решения контактной задачи для штампа клиновидного в плане формы в анизотропной слоистой среде. Рассмотрена контактная задача о действии клиновидного, с прямым углом в плане, жесткого штампа на поверхность многослойной анизотропной среды. Случай остроугольного в плане штампа некоторым преобразованием сводится к рассматриваемому. Штамп предполагается действующим на многослойную среду без трения. Возможны случаи статического и динамического воздействия, вызываемого гармоническим колебанием штампа. Основное внимание уделено анализу поведения поверхности анизотропной слоистой среды вне зоны контакта. Построены формулы, описывающие поведение поверхности в дальней зоне и приведен пример вычисления необходимых параметров для их применения. Рассматриваемая смешанная задача приводится к решению двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа, преобразование Фурье, ядра которого представляют отношение двух аналитических функций. Изотропный случай наличия отношения двух целых функций в представлении ядра недавно был исследован универсальным методом моделирования, подсказавшим переход к малоизученному анизотропному случаю. В пространственных контактных задачах исследование проводится численными методами, малоэффективными для анизотропных сред. Точное решение удавалось построить лишь в случаях одномерных, или сводящихся к ним, интегральных уравнений. Разработанный в статье метод позволяет, наряду со статическими задачами, изучать акустические свойства поверхности вне зоны контакта штампа со средой в динамическом случае, которые имеют малоизученную специфику поведения по секторам. Впервые решенное двумерное интегральное уравнения Винера – Хопфа может быть использовано в задачах распространения радиоволн, при конструировании элементной базы радиоэлектроники, в проблеме прочности в механике, в многочисленных других важных областях.

© ПНИПУ

© **Бабешко Владимир Андреевич** – д. ф.-м. н., проф., академик, зав. кафедрой, e-mail: babeshko41@mail.ru.
Евдокимова Ольга Владимировна – д. ф.-м. н., гл. науч. сотр., e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.
Бабешко Ольга Мефодиевна – д. ф.-м. н., гл. науч. сотр., e-mail: babeshko49@mail.ru.
Евдокимов Владимир Сергеевич – магистрант, e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Vladimir A. Babeshko – Doctor of Physics, Academician, Head of Department, e-mail: babeshko41@mail.ru.
Olga V. Evdokimova – Doctor of Physics, Senior Researcher, e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.
Olga M. Babeshko – Doctor of Physics, Senior Researcher, e-mail: babeshko49@mail.ru.
Vladimir S. Evdokimov – Master student, e-mail: evdok_vova@mail.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM OF ACOUSTICS IN AN ARBITRARY MULTILAYER MEDIUM DURING CONTACT INTERACTION WITH A WEDGE SHAPED STAMP

V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko, V.S. Evdokimov

Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 10 August 2023
Approved: 23 August 2023
Accepted for publication:
31 August 2023

Keywords:

contact problems, Wiener – Hopf integral equation, wedge-shaped domain, factorization, acoustics, surface waves.

ABSTRACT

This paper is the first to study the behavior of the exact solution of the contact problem for a wedge-shaped stamp in terms of shape in an anisotropic layered medium. We consider the contact problem of the action of a wedge-shaped, right-angled, rigid stamp on the surface of a multilayer anisotropic medium. The case of a sharp-angled stamp in terms of some transformation is reduced to the one under consideration. The stamp is assumed to act on a multilayer medium without friction. There may be cases of static and dynamic effects caused by harmonic oscillations of the stamp. The main attention is paid to analyzing the surface behavior of an anisotropic layered medium outside the contact zone. Formulas describing the behavior of the surface in the far zone are constructed and an example of calculating the necessary parameters for their application is given. The considered mixed problem is reduced to solving the two-dimensional Wiener – Hopf integral equation, the Fourier transform of the kernel of which represents the ratio of two analytical functions. The isotropic case of the presence of the ratio of two integer functions in the representation of the kernel has recently been investigated by a universal modeling method, which prompted the transition to the little-studied anisotropic case. In spatial contact problems, the study is carried out by numerical methods that are ineffective for anisotropic media. The exact solution could be constructed only in cases of one-dimensional or integral equations reducible to them. Along with static tasks, the method developed in the article allows studying the acoustic properties of the surface outside the contact zone of the stamp with the medium in the dynamic case, which have little-studied specifics of behavior by sectors. The two-dimensional Wiener-Hopf integral equation solved for the first time can be used in problems of radio wave propagations, in the design of the element base of radio electronics, in the problem of strength in mechanics, and in numerous other important areas.

© PNRPU

Введение

Анизотропия свойственна многим материалам, применяемым в инженерной практике [1], электронике [2], кристаллофизике [3], науках о Земле [4; 5] и во многих других областях. Анизотропия всегда возникает в задачах при рассмотрении движущегося объекта в упругой среде [6; 7]. Смешанные задачи математической физики, к числу которых относится ряд задач о распространении радиоволн [8; 9], контактные задачи [10; 11], задачи акустики [12; 13], теории прочности [14] и других областей, часто приводятся к решению интегральных уравнений Винера – Хопфа [15]. Этим методом удается точно решать только одномерные смешанные задачи, или некоторые пространственные, сводящиеся к одномерным. Двумерные смешанные задачи решаются приближенно, асимптотическими [16] или численными методами [17], в частности, используя для их развития точные решения одномерных интегральных уравнений Винера – Хопфа. В случае анизотропных сред эти методы неэффективны [10]. Прогресс в этой области может дать построение точного решения двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа в анизотропном случае. В работе [18] универсальным методом моделирования для случая изотропной среды впервые было построено точное решение двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа в первом квадранте. В настоящей работе другим подходом, развитым в [19], впервые построено точное решение интегрального уравнения Винера – Хопфа в анизотропном случае. Как частный случай, анизотропные материалы включают композитные материалы и кристаллы, монокристаллы с изменяющимися свойствами при горизонтальном повороте осей координат. Также к ним относятся волокнистые и пленочные материалы, армированные пластики, пьезокварц, графит и другие природные и искусственно созданные материалы с горизонтально изменяющимися свойствами.

1. Постановка задачи

Рассматривается интегральное уравнение Винера – Хопфа, заданное в первом квадранте [18]. Оно имеет вид

$$\mathbf{K}q = \int_0^\infty\int_0^\infty k(x-\xi, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y),$$

$$0 \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le \infty;$$

$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta, \qquad (1)$$

$$Q(\alpha,\beta) = \int_0^\infty\int_0^\infty q(\xi,\eta)e^{i(\alpha\xi+\beta\eta)}d\xi d\eta,$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,\mu)e^{-i(\lambda x+\mu y)}d\lambda d\mu.$$

Функция $K(\alpha,\beta)$, в общем случае комплекснозначная, порождается решением анизотропной граничной задачи в многослойной среде, является непрерывной и суммируемой на осях по обоим аргументам, с поведением на бесконечности вида

$$K(\alpha,\beta)=O(\alpha^{-1}),\quad \beta=\text{const};$$
$$K(\alpha,\beta)=O(\beta^{-1}),\quad \alpha=\text{const},\quad |\alpha|,|\beta|\to\infty. \tag{2}$$

Для интегрального уравнения (1) справедливы теоремы единственности [10].

Теорема 1. *Пусть вещественная или мнимая составляющие функции* $K(\alpha,\beta)$ *знакопостоянные на вещественных осях* α,β. *Тогда интегральное уравнение (1) имеет единственное решение.*

Для случая динамических контактных задач справедлива приведенная ниже теорема единственности [10].

Теорема 2. *Пусть вещественные полюсы мероморфной функции* $K(\alpha,\beta)$ *последовательно чередуются с нулями при движении по контурам* Γ_1,Γ_2. *Тогда интегральное уравнение (1) имеет единственное решение.*

Анализ решения двумерного интегрального уравнений Винера – Хопфа, построенного для случая изотропной среды в [18], показал, что для перехода к решению двумерного интегрального уравнения (1) в анизотропном случае необходимы некоторые преобразования в представлении правой части $f(x,y)$ рассматриваемого уравнений.

Представим правую часть $f(x,y)$ в форме

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda,\mu)e^{-i(\lambda x+\mu y)}d\lambda d\mu. \tag{3}$$

В силу линейности интегрального уравнения достаточно рассмотреть правую часть в форме $F(\lambda,\mu)e^{-i(\lambda x+\mu y)}$. Решив интегральное уравнение с этой правой частью, после этого интегрированием по параметрам λ,μ получим решение с правой частью (3). Не нарушая общности, возьмем представление подынтегральной функции в виде, которое осуществимо разными способами.

$$F(\lambda,\mu)e^{-i(\lambda x+\mu y)}=f_1(x,\lambda,\mu)+f_2(y,\lambda,\mu)\equiv f(x,y,\lambda,\mu).$$

Как показано в [18], это позволит построить решение двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа избранным подходом.

Для решения применим подход, использованный в работе [19].

Для этого заданное в первом квадранте Ω_{11} уравнение (2) продолжим новыми неизвестными $\varphi_{12}(x,y),\varphi_{21}(x,y),\varphi_{22}(x,y)$, с носителями $\Omega_{12},\Omega_{21},\Omega_{22}$ соответственно на всю плоскость. Тогда получим интегральное уравнение (2) в виде

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}f(x,y,\lambda,\mu)d\lambda d\mu+\varphi_{12}(x,y)+$$
$$+\varphi_{21}(x,y)+\varphi_{22}(x,y). \tag{4}$$

После применения преобразования Фурье продолженное интегральное уравнение (4) принимает вид

$$K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)-\Phi_{12}(\alpha,\beta)-\Phi_{21}(\alpha,\beta)-$$
$$-\Phi_{22}(\alpha,\beta)-F(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=0.$$

Здесь $F(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=\{F(\alpha,\beta)\}_\alpha^+ + \{F(\alpha,\beta)\}_\beta^+$.

В дальнейшем ради краткости параметры λ,μ в (4) опустим и вернемся к ним лишь при описании решения с правой частью $f(x,y)$.

В результате выполненных построений, аналогичных использованным в [18], получено точное решение интегрального уравнения (1) в виде

$$q(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(x,y,\lambda,\mu)e^{-i(\lambda x+\mu y)}d\lambda d\mu, \tag{5}$$

$$q(x,y,\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}Q(\alpha,\beta,\lambda,\mu)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta,$$
$$Q(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=Q_1(\alpha,\beta,\lambda,\mu)+Q_2(\alpha,\beta,\lambda,\mu).$$

Здесь приняты обозначения

$$Q_1(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=-K^{-1}(\alpha,\beta)\{\ K_{-\beta}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\{F(\alpha,\beta)\}_\beta^+\right\}_\beta^-\ \}_\alpha^+ +$$
$$+K_{+\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\{F(\alpha,\beta)\}_\alpha^+\right\}_\alpha^+ \tag{6}$$
$$Q_2(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=-K^{-1}(\alpha,\beta)\{\ K_{-\alpha}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\alpha}^{-1}(\alpha,\beta)\{F(\alpha,\beta)\}_\alpha^+\right\}_\alpha^-\ \}_\beta^+ +$$
$$+K_{+\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\left\{K_{-\beta}^{-1}(\alpha,\beta)\{F(\alpha,\beta)\}_\beta^+\right\}_\beta^+.$$

Операторы в фигурных скобках в (6) детально описаны в [19] и имеют вид

$$\{G(\alpha,\beta)\}_\alpha^+=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^+,$$
$$\{G(\alpha,\beta)\}_\alpha^-=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^-.$$

$$\{G(\alpha,\beta)\}_\beta^+=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^+,$$
$$\{G(\alpha,\beta)\}_\beta^-=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^-.$$

$$K_{+\alpha}(\alpha,\beta)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi,\quad \alpha\in\Pi_\alpha^+,$$
$$K_{-\alpha}(\alpha,\beta)=\exp\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}d\xi\Big),\quad \alpha\in\Pi_\alpha^-, \tag{7}$$

$$K_{+\beta}(\alpha,\beta)=\exp\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\quad \beta\in\Pi_\beta^+,$$

$$K_{-\beta}(\alpha,\beta)=\exp\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta\Big),\quad \beta\in\Pi_\beta^-.$$

Здесь Π_α^+, Π_α^- – комплексные области выше, плюс, и ниже, минус контура Γ_1, а Π_β^+,Π_β^- – области правее, плюс, и левее, минус контура Γ_2.

В результате подстановки построенного решения в левую часть уравнения (1), взятого в форме

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta=f(x,y),$$

несложно убедиться, использовав свойства операторов (6), (7), в его точном удовлетворении.

2. Исследование акустических свойств поверхности вне зоны контакта

В том случае, когда функция $K(\alpha,\beta)$ является анизотропной мероморфной по обоим комплексным переменным [10], нулевые и полярные множества которой представляют аналитические кривые двух комплексных переменных. Предполагается, что полярные множества разрешимы относительно параметров и представимы в виде $\alpha_n=\alpha_n(\beta),\ \beta_n=\beta_n(\alpha)$. В динамических смешанных граничных задачах вещественным может быть конечное число полюсов [10]. Контуры Γ_1,Γ_2 лежат на вещественной оси комплексных плоскостей α,β всюду, кроме зон появления на вещественных осях вещественных полюсов функции $K(\alpha,\beta)$. В этом случае в достаточно узких зонах вещественных осей они отклоняются в комплексную плоскость, обходя полюса. Контуры выбираются таким образом, чтобы в случаях гармонических по времени смешанных граничных задач была бы физически оправданная постановка граничных задач – на бесконечности обязан правильно выполняться принцип излучения, состоящий в направленности фазовых скоростей на бесконечность для нормальных материалов и из бесконечности – для мезоматериалов электроники [10]. В первом случае в первом квадранте вещественные полюса символа $K(\alpha,\beta)$ обходятся контурами сверху, если при переходе к комплексным амплитудам принята функция $\exp(-i\omega t)$, ω – частота колебаний, t – время. Во втором случае обход в первом квадранте осуществляется снизу. Во втором квадранте положение контуров противоположное. В то же время решение указанного интегрального уравнения и ему подобных имеет важные применения в фундаментостроении, сейсмологии, в устройствах элементной базы электроники, при изучении смешанных граничных задач о поведении плазмы в разных состояниях и в ряде других важных технических областях.

Исследование свойств решения смешанной граничной задачи на поверхности вне штампа осуществляется оценкой поведения соответствующих функций. Для этого используем следующие представления поверхности вне зоны контакта

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta=$$
$$=\varphi_{12}(x,y)+\varphi_{21}(x,y)+\varphi_{22}(x,y).$$

Дальние зоны носителей функций $\varphi_{12}(x,y)$, $\varphi_{21}(x,y)$, $\varphi_{22}(x,y)$ по отношению к источнику характеризуются следующими неравенствами

$$\varphi_{12}(x,y):\quad x<0,\ y>0,\quad |x|<<1$$
$$\varphi_{21}(x,y):\quad x<0,\ y<0,\quad |x|<<1,\quad |y|<<1$$
$$\varphi_{22}(x,y):\quad x>0,\ y<0,\quad |y|<<1.$$

С учетом этих свойств исследуем волновое поле вне штампа. Воспользуемся свойством разложимости мероморфной функции $K(\alpha,\beta)$ по простейшим рациональным с помощью полюсов [10]. Справедливы формулы

$$K(\alpha,\beta)=\sum_n\frac{C_{n\alpha+}}{\alpha-\alpha_{n+}(\beta)}+\sum_n\frac{C_{n\alpha-}}{\alpha-\alpha_{n-}(\beta)},$$
$$K(\alpha,\beta)=\sum_n\frac{C_{n\beta+}}{\beta-\beta_{n+}(\alpha)}+\sum_n\frac{C_{n\beta-}}{\beta-\beta_{n-}(\alpha)}.$$

В том случае, если материал анизотропной среды не обладает мезосвойствами, имеют место следующие свойств полюсов [10]

$$\mathrm{Re}\,\alpha_{n+}(\beta)\ge 0,\ \mathrm{Im}\,\alpha_{n+}(\beta)\ge 0,\ \mathrm{Re}\,\alpha_{n-}(\beta)\le 0,\ \mathrm{Im}\,\alpha_{n-}(\beta)\le 0,$$
$$\mathrm{Re}\,\beta_{n+}(\alpha)\ge 0,\ \mathrm{Im}\,\beta_{n+}(\alpha)\ge 0,\ \mathrm{Re}\,\beta_{n-}(\alpha)\le 0,\ \mathrm{Im}\,\beta_{n-}(\alpha)\le 0.$$

Полученный интеграл в дальней зоне при $x\to-\infty$ можно оценить методом стационарной фазы [20]. В результате получаем представление вида

$$\varphi_{12}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta\sim$$
$$\sim\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\sum_n\frac{C_{n\alpha+}Q(\alpha,\beta)}{\alpha-\alpha_{n+}(\beta)}e^{-i(\alpha x+\beta y)}Q(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\sum_n C_{n\alpha+}Q(\alpha_{n+}(\beta),\beta)e^{-i(\alpha_{n+}(\beta)x+\beta y)}d\beta.$$

В результате преобразований находим

$$\varphi_{12}(x,y)=\sum_n\sqrt{\frac{2\pi}{-xS''(\beta_0)}}f(\beta_0)$$
$$\exp\Big[-ixS(\beta_0)+\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\,S''(\beta_0)\Big]\Big[1+O(x^{-1})\Big],\quad x<0,\quad |x|>>1\quad (8)$$
$$f(\beta)=\frac{i}{2\pi}C_{n\alpha+}Q[\ \alpha_{n+}(\beta),\beta\ ],\quad S(\beta)=\alpha_{n+}(\beta)-\beta k_1,$$
$$S'(\beta_0)=0,\quad S''(\beta_0)\ne 0,\quad y=-k_1x,\quad k_1>0$$

Аналогично имеем

$$\varphi_{22}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}K(\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta\sim$$

$$\sim\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\sum_n\frac{C_{n\beta+}}{\beta-\beta_{n+}(\alpha)}e^{-i(\alpha x+\beta y)}Q(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\sum_n C_{n\beta+}Q(\alpha,\beta_{n+}(\alpha))e^{-i(\alpha x+\beta_{n+}(\alpha)y)}d\alpha.$$

$$\varphi_{22}(x,y)=\sum_n\sqrt{\frac{2\pi}{-yS''(\alpha_0)}}f(\alpha_0)$$

$$\exp\left[-iyS(\alpha_0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(\alpha_0)\right]\left[1+O(y^{-1})\right],$$

$$y<0,\quad |y|>>1, \tag{9}$$

$$f(\alpha)=\frac{i}{2\pi}C_{n\beta+}Q[\ \alpha,\beta_{n+}(\alpha)\ ],\quad S(\alpha)=-\alpha k_2+\beta_{n+}(\alpha),$$

$$S'(\alpha_0)=0,\quad S''(\beta_0)\neq 0,\quad x=-k_2y,\quad k_2>0.$$

Несложный анализ позволяет получить асимптотическое поведение поверхности $\varphi_{21}(x,y)$. Для $y=kx$ главный член асимптотики в дальней зоне на выбранных прямых получается описанным ранее способом и имеет вид

$$\varphi_{21}(x,y)\sim\sum_n\sqrt{\frac{2\pi}{-xS''(\beta_0)}}f(\beta_0)\times$$

$$\times\exp\left[-ixS(\beta_0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(\beta_0)\right]\left[1+O(x^{-1})\right]+$$

$$+\sum_n\sqrt{\frac{2\pi}{-yS''(\alpha_0)}}f(\alpha_0)\exp\left[-iyS(\alpha_0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(\alpha_0)\right]\times \tag{10}$$

$$\times\left[1+O(y^{-1})\right],$$

$$S(\beta)=\alpha_{n+}(\beta)+\beta k,\quad S(\alpha)=\alpha k^{-1}+\beta_{n+}(\alpha).$$

Среди $\alpha_{n+}(\beta_0),\ \ \beta_{n+}(\alpha_0)$ следует выбрать имеющие минимальную мнимую составляющие, они будут представлять главные члены асимптотики в дальней зоне. В частности, возникающие при достаточно высокой частоте вещественные нули [10] описывают акустические свойства поверхности многослойной анизотропной среды вне области контакта.

Пример

В качестве примера рассмотрим наиболее сложный случай вычисления комплексных нулей этой функции, взяв для этого мероморфную функцию $F(u)=K(u)+$ $+\varepsilon u^{-4}$, $\varepsilon>0$, встречающуюся в контактных задачах.

$$K(u)=\frac{4(1-\nu)sh^2u}{u(sh2u+2u)},\quad u=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}.$$

На представленных рис. 1, 2 приводятся примеры вычисления параметра $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$ с учетом зависимости от α_2 для разных комплексных нулей функции $F(u)$. Аналогичный вид имеет зависимость $\alpha_2=\alpha_2(\alpha_1)$. Наличие этих соотношений дает возможность для проведения вычислений по формулам (8)–(10).

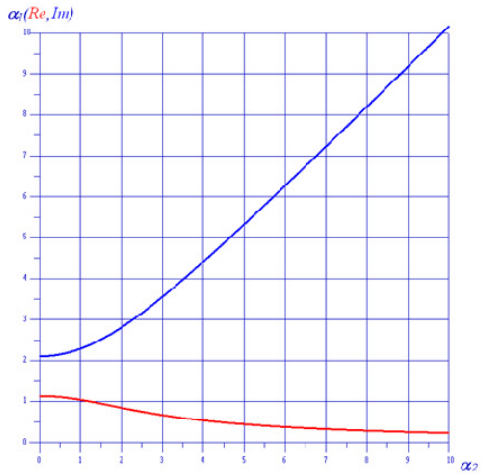


Рис. 1. Верхняя кривая описывает поведение мнимой составляющей функции $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$, а нижняя – вещественной составляющей для параметров $\nu=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}1;$ $u_1=1{,}28153+2{,}027i$

Fig. 1. The upper curve describes the behavior of the imaginary component of the function $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$, and the lower one is real component for parameters $\nu=0{,}1;\ \varepsilon=0{,}1;\ u_1=1{,}28153+2{,}027i$

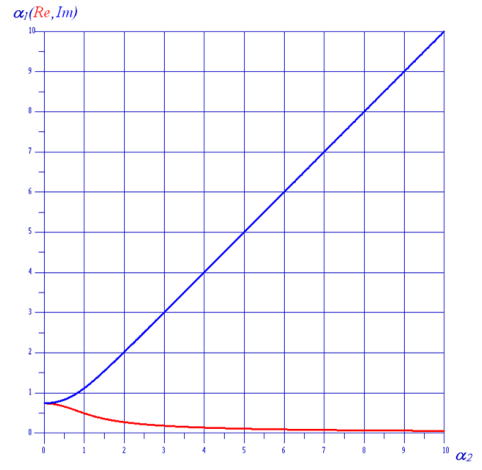


Рис. 2. Верхняя кривая описывает поведение мнимой составляющей функции $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$, а нижний – вещественной составляющей для параметров $\nu=0{,}2;\ \varepsilon=1;$ $\mathrm{u}_2=0.7417+0.74377\mathrm{i}$

Fig. 2. The upper curve describes the behavior of the imaginary component of the function $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$, а нижняя – вещественной составляющей для параметров $\nu=0{,}2;\ \varepsilon=1;$ $\mathrm{u}_2=0.7417+0.74377\mathrm{i}$

Заключение

Таким образом, впервые получено точное решение двумерного интегрального уравнения Винера – Хопфа, возникающего в контактной задаче для клиновидного

штампа в произвольной анизотропной многослойной среде. Оно позволило изучить акустические свойства анизотропных материалов в дальней зоне вне области контакта. Полученный результат может быть применен к решению значительного числа смешанных задач, играющих важную роль в самых разных областях практики. Они возникают в проблемах акустике, прочности и разрушения неразрушающих методах контроля , теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники и в других областях.

Библиографический список

1. Ашкенази Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов. – Л.: Машиностроение, 1969. – 362 с.

2. Ноздрев В.Ф., Федорищенко Н.В. Молекулярная акустика. – М.: Высшая школа, 1974. – 288 с.

3. Акустические кристаллы / А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, Н.В. Переломова [и др.]. – М.: Наука, 1982. – 632 с.

4. Магницкий В.А. Внутреннее строение и физика Земли. – М.: Наука, 2006. – 390 с.

5. Davis A.M.J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. – 1987. – Vol. 39. – P. 25–55.

6. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С. Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой // ПММ. – 2021. – Т. 85, № 2. – С. 193–209.

7. Aleksandrov V.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Sliding contact of a smooth indenter and a viscoelastic half-space (3D problem) // Doklady Physics. – 2010. – Vol. 55, № 2. – P. 77–80.

8. Фок В.А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики // Матеем. сборн. – 1944. – № 14, вып. 1, 2, 3.

9. Sautbekov S., Nilsson B. Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener-Hopf method // AIP Conf. Proc. – 2009. – № 1106. – P. 110–117.

10. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

11. Freund L.B. Dynamic Fracture Mechanics. – Cambridge, UK. Cambridge University Press, 1998. – 558 p,

12. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 405, № 2. – С. 196–198.

13. Achenbach J.D. Wave propagation in Elastic Solids // North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 425 p.

14. Abrahams I.D. An application of Padé approximates to Wiener-Hopf factorization // IMA J. Appl. Math. – 2000. – Vol. 65. – P. 257–281.

15. Матвеенко В.П., Федоров А.Ю., Шардаков И.Н. Анализ сингулярности напряжений в особых точках упругих тел из функционально градиентных материалов // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 466, № 1. – С. 38–42.

16. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа ИЛ, 1962. – 280 с.

17. Бабешко В.А., Сыромятников П.В. К проблеме исследования локализации и резонансов в электроупругом анизотропном слое // Доклады РАН. – 1999. – Т. 367, № 2. – С. 186–190.

18. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды // ПММ. – 2022. – Т. 86, № 5. – С. 628–637.

19. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Метод блочного элемента для интегральных уравнений контактных задач в клиновидной области // Журнал прикладной механики и технической физики. – 2017. – Т 58, № 2. – С. 133–140. DOI 10.1134/S0021894417020146

20. Федорюк М.В. Метод перевала. – М:. Наука, 1977. – 368 с.

References

1. Ashkenazi E.K. Anizotropia mashinostroitelnih materialov [Anisotropy of machine-building materials]. L:. Mechanical engineering. 1969. 362 p.

2. Nozdrev.F., Fedorishchenko N.V.Molekularnaya akustika [Molecular acoustics].1974. M. Higher School. 288 p .

3. Blistanov A.A., Bondarenko V.S., Perelomova N.V., et al. Akusticheskiya kristalli [Acoustic crystals]. M:. Nauka. 1982. 632 p

4. Magnitsky V.A. Vnutrennea stroenie I fizika Zemli [Internal structure and physics of the Earth]. M:.Nauka. 2006. 390 p.

5.Davis A. M. J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 39* 1987. pp. 25-55.

6. Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Tsarev I.S. Dinamcheskoe povedenie balki legashei na obobshennom uprugom osnovaniis dvijusheisa nagruzkoi [Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic base with a moving load]. *PMM*. Vol. 85., No. 2 2021. pp. 193-209.

7. Aleksandrov V.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V Sliding contact of a smooth indenter and a viscoelastic half-space (3D problem) *Doklady Physics.* Vol. 55. No. 2. 2010. pp. 77-80.

8. Fok V.A. O nekonorih integralnih uravneniah matematicheskoi phisiki [On some integral equations of mathematical physics]. *Mathem. collection* 14, issue 1,2,3. 1944.

9. Sautbekov S. & Nilsson B. Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener-Hopf method. *AIP Conf. Proc.,* 1106, 2009. pp. 110-117.

10. Babeshko V.A. Obobshennii metod faktorizasii v prostranstvennih dinamicheskih smeshannih zadachah teorii uprugosti [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. M: Nauka 1984. 256 p.

11. Freund L. B. Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 1998. p. 558.

12. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. On the propagation of elastic surface waves in the Kosser medium *Doklady Physics*. T. 50. № 11. 2005. pp. 601-604.

13. Achenbach, J.D. Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam: North-Holland. 1973. 425 p.

14. Abrahams, I.D. Ap application of Padé approximates to Wiener-Hopf factorization. *IMA J. Appl. Math.*, 65, 2000. pp. 257-281.

15. Matveenko V.P., Fedorov A.Yu., Shardakov I.N. Analysis of stress singularity at singular points of elastic bodies from functionally gradient materials. *Doklady Physics.* T. 61. № 1. 2016. pp. 24-28.

16.Noble B. Metod Vinera – Hopfa [Wiener – Hopf method] IL 1962. 280 p.

17. Babeshko V.A., Syromyatnikov P.V. On the problem of localization and resonances research in an electroelastic anisotropic layer. *Doklady Physics.* T. 44. № 7. 1999. pp. 460-465.

18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The exact solution of the universal method of modeling the contact problem in the quarter plane of a multilayer medium. *Mechanics of Solids,* Vol. 57, No. 8, 2022. pp. 2058–2065. DOI: 10.3103/S0025654422080039

19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block element method for solving integrated equations of contact problems in wedge-shaped domains *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 58(2), 2017. pp. 301-307. DOI 10.1134/S0021894417020146

20 Fedoryuk M.V.Metod perevala. [The method of the M pass:]. Science 1977. 368 p.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 22-21-00128.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation, project 22-21-00128.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.