Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Упругопластическое поведение и разрушение конструкций с концентраторами напряжений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. С. 23–33. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.03

Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Ju. Elastic-plastic behavior and fracture of structures with loss concentrators under cyclic loads. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 4, pp. 23-33. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.03

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.03
УДК 539.43:531.781.2

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ КОНСТРУКЦИЙ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев, Д.Ю. Фомин

Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 29 мая 2023 г.
Одобрена: 20 августа 2023 г.
Принята к публикации:
31 августа 2023 г.

Ключевые слова:

математическое моделирование, упругопластическое поведение, разрушение конструкций, концентратор напряжений, циклическое нагружение, теория пластичности, накопление повреждений.

АННОТАЦИЯ

Приведены результаты экспериментально-теоретических исследований конструкций с концентраторами напряжений при циклических нагружениях. Исследования осуществлены на цилиндрических образцах с кольцевой выточкой при мягком циклическом нагружении. Материал образцов – бронзовый сплав БрХ08-Ш. При проведении испытаний образцов методом корреляции цифровых изображений проводится замер деформации материала на поверхности выточки, что позволяет определить характер изменения ее размаха от цикла к циклу. Для математического моделирования упругопластического поведения и разрушения конструкций с концентраторами напряжений используется вариант теории пластичности, основанный на теории течения при комбинированном упрочнении. В выбранной модели пластичности введена поверхность памяти, разделяющая процессы монотонного и циклического нагружения. Такое разделение позволяет учитывать различные особенности изотропного и анизотропного упрочнения материала. Анизотропное упрочнение представляется в виде суммы микронапряжений трех различных типов, позволяющих описывать эффекты посадки и вышагивания петли упругопластического гистерезиса. Модель пластичности позволяет проводить оценку поврежденного состояния материала на основе кинетического уравнения накопления повреждений, базирующегося на энергетическом принципе (работа микронапряжений на поле пластических деформаций). Модель поведения материала внедрена в конечно-элементный программный комплекс. По результатам расчетов построены картограммы накопленной пластической деформации и интенсивности напряжений. Проведено сравнение результатов расчетов и экспериментов по размаху осевой деформации, средней осевой деформации на поверхности выточки и числу циклов до разрушения. Получено, что в конструкции с выточкой радиусом 0,25 мм в зоне концентрации реализуется жесткое нагружение, а с радиусом 1 мм в зоне концентрации реализуется мягкое несимметричное нагружение с односторонним накоплением деформации (вышагиванием). Наблюдается снижение долговечности с уменьшением концентрации напряжений за счет различного характера изменения напряженно-деформированного состояния.

© ПНИПУ

© **Бондарь Валентин Степанович** – д. ф.-м. н., проф., Заслуженный деятель науки РФ, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Абашев Дмитрий Рустамович – к. ф.-м. н., доцент, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Фомин Денис Юрьевич – аспирант, e-mail: tm@mospolytech.ru.

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored worker, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Dmitriy R. Abashev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: tm@mospolytech.ru.
Denis Ju. Fomin – postgraduate student, e-mail: tm@mospolytech.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR AND FRACTURE OF STRUCTURES WITH LOSS CONCENTRATORS UNDER CYCLIC LOADS

V.S. Bondar, D.R. Abashev, D.Ju. Fomin

Moscow Polytechnical University, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 29 May 2023
Approved: 20 August 2023
Accepted for publication:
31 August 2023

Keywords:

mathematical modeling, elastoplastic behavior, structural failure, stress concentrator, cyclic loading, plasticity theory, damage accumulation.

ABSTRACT

The results of experimental and theoretical studies of structures with stress concentrators under cyclic loading are presented. The studies were carried out on cylindrical specimens with an annular undercut under mild cyclic loading. The sample material is bronze alloy BrKh08-Sh. When testing samples using the digital image correlation method, the deformation of the material on the surface of the undercut is measured, which makes it possible to determine the nature of the change in its range from cycle to cycle. For mathematical modeling of elastoplastic behavior and failure of structures with stress concentrators, a variant of the theory of plasticity based on the theory of flow under combined hardening is used. In the chosen plasticity model, a memory surface is introduced that separates the processes of monotonic and cyclic loading. This division allows one to take into account various features of isotropic and anisotropic hardening of the material. Anisotropic hardening is represented as a sum of microstresses of three different types, which make it possible to describe the effects of fitting and stepping out of the elastoplastic hysteresis loop. The plasticity model makes it possible to assess the damaged state of the material based on the kinetic equation of damage accumulation based on the energy principle (the work of microstresses on the field of plastic deformations). The material behavior model is embedded in the finite element software package. Based on the calculation results, cartograms of the accumulated plastic deformation and stress intensity were constructed. Comparison of the results of calculations and experiments on the range of axial deformation, average axial deformation on the surface of the undercut and the cycle of cycles to failure is carried out. It was found that in a structure with a groove with a radius of 0.25 mm in the concentration zone, rigid loading is realized, and with a radius of 1 mm in the concentration zone, soft asymmetric loading with one-sided accumulation of deformation (stepping out) is realized. There is a decrease in durability with a decrease in stress concentration due to the different nature of the change in the stress-strain state.

© PNRPU

Введение

Процесс проектирования и оптимизации конструкций сопровождается созданием математических моделей изделий (цифровых двойников), позволяющих проводить подробный анализ напряженно-деформированного состояния в условиях эксплуатации. В основе этих моделей лежит теория, связывающая значения напряжений и деформаций в материале изделия. Для прогнозирования ресурса конструкции по результатам расчета напряженно-деформированного состояния требуется применение дополнительных критериев или математических моделей, позволяющих оценить поврежденное состояние материала. Вопросы оценки ресурса конструкций, работающих в условиях экстремальных нагрузок, приводящих к возникновению пластических деформаций в местах концентрации напряжений, связаны с использованием моделей пластичности материала.

Исследованию процессов пластического деформирования посвящено множество экспериментальных и теоретических работ [1–32]. Наиболее развитым вариантом таких моделей, доступных пользователю в коммерческих программных комплексах, предназначенных для оценки кинетики напряженно-деформированного состояния конструкций, является модель Ж.-Л. Шабоша [16–18]. Эта модель позволяет с достаточной точностью моделировать процессы упругопластического деформирования, возникающие в материале при стационарном циклическом деформировании. Однако точность результатов расчета с помощью модели Ж.-Л. Шабоша заметно падает при моделировании более сложных, нестационарных процессов деформирования, при которых проявляются такие эффекты, как вышагивание петли упругопластического гистерезиса [7; 8]. В настоящей работе будет рассматриваться модель на основе теории неупругости В.С. Бондаря [6]. Помимо работоспособности этой модели в условиях сложного, несимметричного, нестационарного циклического нагружения [6–9; 31], она включает в себя хорошо зарекомендовавший на практике критерий малоцикловой усталости и позволяет оценивать поврежденное состояние материала. Эта модель внедрена в программный комплекс, основанный на методе конечных элементов, для использования при проведении моделирования напряженно-деформированного и поврежденного состояния конструкций.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментальных исследований образцов из бронзового сплава БрХ08-Ш при нормальной температуре. По ре-

зультатам базового эксперимента [6; 31; 33] определены [36] материальные параметры модели деформирования материала. Возможность применения рассматриваемой модели пластичности [6–9; 31] для оценки ресурса элементов конструкций, работающих в условиях высоких циклических нагрузок, приводящих к пластическим деформациям в местах концентрации напряжений и, как следствие, к малоцикловой усталости материала, проверяется путем моделирования результатов экспериментальных исследований по циклическому нагружению образцов с кольцевой V-образной выточкой. При рассматриваемых режимах пластические деформации возникают вблизи поверхности выточки, в то время как напряжения в центре образца не превышают предел текучести.

1. Основные положения и уравнения варианта теории пластичности

Для моделирования процессов упругопластического деформирования используется вариант теории пластичности [6–9; 31], базирующийся на теории неупругости [6]. Область применимости варианта теории пластичности ограничивается деформациями начально изотропных металлов при температурах, когда нет фазовых превращений и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь. Вариант теории относится к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном упрочнении и позволяет описывать различные особенности процесса деформирования [6–9; 31]. В настоящей работе рассматривается изотермический вариант теории.

Тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\varepsilon}^e_{ij}$ и пластической $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij}. \tag{1}$$

Упругие деформации описываются обобщенным законом Гука:

$$\dot{\varepsilon}^e_{ij} = \frac{1}{E}\left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu\left(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\right)\right], \tag{2}$$

где E, ν – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Для разделения областей упругого и пластического деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность нагружения. Поверхность может изотропно расширяться или сужаться и смещаться в процессе нагружения. Уравнение поверхности принимается в следующем виде:

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{3}{2}\left(s_{ij} - a_{ij}\right)\left(s_{ij} - a_{ij}\right) - C^2 = 0. \tag{3}$$

Здесь $s^*_{ij} = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных [3] напряжений; s_{ij} – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор микронапряжений [3], определяющий положение центра поверхности нагружения; C – размер (радиус) поверхности нагружения. Тензор микронапряжений a_{ij} и размер поверхности C являются функционалами процесса нагружения.

Размер поверхности нагружения в начальный момент времени является определяемым параметром материала, а его изменение в процессе нагружения описывается следующим эволюционным уравнением:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}^p_{u*}, \quad \dot{\varepsilon}^p_{u*} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}. \tag{4}$$

Здесь ε^p_{u*} – накопленная пластическая деформация (длина дуги траектории пластической деформации); $\dot{\varepsilon}^p_{u*}$ – скорость накопленной пластической деформации (интенсивность скоростей пластической деформации); q_ε – функция, определяющая изотропное упрочнение ($q_\varepsilon > 0$) или разупрочнение ($q_\varepsilon < 0$) материала.

Компоненты тензора микронапряжений в начальный момент времени равны нулю. Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова – Шабоша [3; 17–19], подразумевающей, что полное смещение есть сумма смещений. Здесь принимается [6–9; 31], что полное смещение есть сумма трех типов смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение,

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{M} a^{(m)}_{ij}. \tag{5}$$

В качестве общего эволюционного уравнения для микронапряжений всех типов принимается уравнение Армстронга – Фредерика – Кадашевича [3; 21]:

$$\dot{a}^{(m)}_{ij} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}^p_{ij} + g^{(m)}_a a^{(m)}_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{u*}, \tag{6}$$

где $g^{(m)}$, $g^{(m)}_a$ – определяющие функции микронапряжений I, II и III типа [6].

Пластические деформации являются функционалами процесса нагружения и определяются на основе ассоциированного с поверхностью нагружения (3) закона течения (градиентального закона течения) следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3}{2}\frac{s^*_{ij}}{\sigma^*_u}\dot{\varepsilon}^p_{u*}, \quad \sigma^*_u = \left(\frac{3}{2}s^*_{ij}s^*_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Здесь σ^*_u – интенсивность активных напряжений; λ – скалярная функция.

Скорость накопленной пластической деформации при мягком, когда известны компоненты тензора скоро-

стей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, и жестком, когда известны компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$, режимах нагружения выражается [6] следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}^p_{u*} = \frac{1}{E_*}\left[\frac{3}{2}\frac{s^*_{ij}\dot{\sigma}_{ij}}{\sigma^*_u}\right],\ \dot{\varepsilon}^p_{u*} = \frac{1}{E_* + 3G}\left[3G\,\frac{s^*_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma^*_u}\right],$$

$$E_* = q_\varepsilon + \sum_{m=1}^{M} g^{(m)} + \sum_{m=1}^{M} g_a^{(m)}\frac{3}{2}\frac{s^*_{ij}a^{(m)}_{ij}}{\sigma^*_u},\ G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

Для случаев смешанного нагружения, когда задан набор компонент скоростей деформаций и напряжений, выражения, определяющие скорость накопленной пластической деформации $\dot{\varepsilon}^p_{u\bullet}$, приведены в [6].

Условие пластического деформирования определяется нахождением точки, отображающей процесс деформирования, на поверхности нагружения и положительной скоростью накопленной пластической деформации, определяемой по формулам (8):

$$\sigma^*_u < C \bigcup \dot{\varepsilon}^p_{u*} \le 0 - \text{упругость},$$

$$\sigma^*_u = C \bigcap \dot{\varepsilon}^p_{u*} > 0 \ - \ \text{упругопластичность}. \quad (9)$$

Для разделения процессов монотонного и циклического нагружения в пространстве тензора пластической деформаций ε^p_{ij} вводится поверхность памяти [9], ограничивающая область циклического деформирования. Поверхность определяется положением ее центра ξ_{ij} и ее размером C_ε. Уравнение поверхности памяти принимается в следующем виде:

$$F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) = \frac{2}{3}\left(\varepsilon^p_{ij} - \xi_{ij}\right)\left(\varepsilon^p_{ij} - \xi_{ij}\right) - C^2_\varepsilon = 0. \quad (10)$$

Для вычисления положения центра и размера поверхности памяти вводится два тензора пластической деформации $\varepsilon^{p(1)}_{ij}$ и $\varepsilon^{p(2)}_{ij}$, определяющие границы поверхности. В начале деформирования эти переменные равны нулю. Определение смещения и размера поверхности памяти происходит в момент смены направления пластического деформирования. В качестве критерия смены направления принимается следующее условие:

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij(t-0)}\dot{\varepsilon}^p_{ij(t)} < 0, \quad (11)$$

где $\dot{\varepsilon}^p_{ij(t)}$ – тензор скоростей пластической деформации в текущий момент времени t; $\dot{\varepsilon}^p_{ij(t-0)}$ – тензор скоростей пластической деформации в предшествующий $(t-0)$ момент времени t. В момент времени t координаты центра и размер поверхности памяти вычисляются на основе следующих соотношений:

$$\varepsilon^{p(2)}_{ij} = \varepsilon^{p(1)}_{ij},\ \varepsilon^{p(1)}_{ij} = \varepsilon^p_{ij},\ \xi_{ij} = \frac{\varepsilon^{p(1)}_{ij} + \varepsilon^{p(2)}_{ij}}{2},$$

$$C_\varepsilon = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon^{p(1)}_{ij} - \varepsilon^{p(2)}_{ij}}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon^{p(1)}_{ij} - \varepsilon^{p(2)}_{ij}}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Тогда условием циклического деформирования является деформирование в пределах поверхности памяти $F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) \le 0$, а условием монотонного деформирования – $F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) > 0$.

Определяющие функции с учетом особенностей процессов монотонного и циклического нагружения выражаются через материальные параметры и функции следующим образом [9]. Предполагается, что при стационарном циклическом деформировании размер поверхности нагружения определяется значением накопленной пластической деформации $C_p\left(\varepsilon^p_{u\bullet}\right)$. При монотонном деформировании размер поверхности увеличивается пропорционально накопленной пластической деформации. При циклическом деформировании после монотонного размер поверхности восстанавливается до значения C_p соответствующего стационарному нагружению [9]. Тогда функция q_ε, определяющая изотропное упрочнение, принимает следующий вид:

$$q_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{dC_p}{d\varepsilon^p_{u*}} - K_c\left(\dfrac{C - C_p}{C_p}\right)^{n_c} \text{ при } F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) \le 0, \\ \dfrac{dC_p}{d\varepsilon^p_{u*}} + M_c \text{ при } F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь C_p – функция стационарного циклического изотропного упрочнения, K_c – модуль изотропного разупрочнения при циклическом нагружении, n_C – интенсивность изотропного разупрочнения при циклическом нагружении, M_c – модуль изотропного упрочнения при монотонном нагружении.

При монотонном нагружении микронапряжения I типа описывают линейное анизотропное упрочнение, т.е. компоненты тензора скоростей микронапряжений I типа пропорциональны компонентам тензора скоростей пластических деформаций. Описание эффекта посадки петли упругопластического гистерезиса при жестком несимметричном циклическом нагружении происходит за счет уменьшения модуля анизотропного упрочнения E_a [6; 9]. Тогда определяющие функции $g^{(1)}, g^{(1)}_a$ уравнения (6) связаны с модулем анизотропного упрочнения I типа E_a следующим образом:

$$\dot{E}_a = \begin{cases} -K_E\left(\dfrac{E_a}{E_{a0}}\right)^{n_E}\dot{\varepsilon}^p_{u*} \text{ при } F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) \le 0, \\ M_E\left(\dfrac{E_{a0} - E_a}{E_{a0}}\right)\dot{\varepsilon}^p_{u*} \text{ при } F\left(\varepsilon^p_{ij}\right) > 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$g^{(1)} = E_a,\ g_a^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{E_a}\dfrac{d\,E_a}{d\,\varepsilon_{u*}^p} & \text{при } F\left(\varepsilon_{ij}^p\right) \le 0, \\ 0 & \text{при } F\left(\varepsilon_{ij}^p\right) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь E_{a0} – начальное значение модуля анизотропного упрочнения I типа, K_E, n_E, M_E – модули анизотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении.

Определяющие функции микронапряжений II типа $g^{(2)}, g_a^{(2)}$ выражаются через материальные функции следующим образом [6]:

$$g^{(2)} = \beta^{(2)}\,\sigma_a^{(2)},\ g_a^{(2)} = -\beta^{(2)}. \quad (16)$$

Здесь параметры $\sigma_a^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$ определяют предельное значение микронапряжений II типа и интенсивность их образования соответственно.

Для микронапряжений III типа определяющие функции, соответствующие простейшему аналогу [6–9; 31] уравнений Оно – Ванга [22–25], записываются в виде:

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)}\sigma_a^{(m)}, \text{ если } a_u^{(m)} < \sigma_a^{(m)} \bigcup a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* \le 0, \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \ge \sigma_a^{(m)} \bigcap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)}\right)^{\frac{1}{2}},\ g_a^{(m)} = 0.$$

Здесь $\beta^{(m)}$, $\sigma_a^{(m)}$ – модули анизотропного упрочнения III типа; m – число микронапряжений III типа ($m \in [3, M]$).

Для описания процесса накопления повреждений используется энергетический подход [6]. Кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на работе микронапряжений II типа $a_{ij}^{(2)}$ на поле пластических деформаций [9; 31], имеет следующий вид:

$$\dot{\omega} = \alpha\,\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\,\frac{a_{ij}^{(2)}\dot{\varepsilon}_{ij}^p}{W_a}. \quad (18)$$

Здесь ω – мера повреждения (критерием разрушения является достижение повреждением предельного значения, обычно принимаемого равным единице); W_a – энергия разрушения при пропорциональном нагружении; α – определяющая функция.

Функция α, описывающая нелинейность процесса накопления повреждений, принимается в виде отношения предельного значения $\sigma_a^{(2)}$ и интенсивности $a_u^{(2)}$ микронапряжений II типа [9; 31]:

$$\alpha = \left(\sigma_a^{(2)} / a_u^{(2)}\right),\quad a_u^{(2)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(2)}\ a_{ij}^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

При циклическом деформировании с малым размахом деформаций (напряжений) функция α <1, что позволяет описать нелинейность процесса накопления повреждений. При увеличении размаха процесс накопления повреждений приближается к линейному ($\alpha \approx 1$), что подтверждается результатами экспериментальных исследований [10].

Таким образом, вариант теории пластичности замыкают следующие материальные параметры и функции, подлежащие экспериментальному определению:

$E;\ \nu$ – упругие параметры;

E_{ao} – модуль анизотропного упрочнения I типа;

$\sigma_a^{(m)};\ \beta^{(m)}$ $\left(m = 2,...,M\right)$ – параметры анизотропного упрочнения II и III типов;

$K_E;\ n_E; M_E$ – модули анизотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении;

$C_p\left(\varepsilon_{u*}^p\right)$ – функция циклического изотропного упрочнения;

$K_C;\ n_C; M_C$ – модули изотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении;

W_a – энергия разрушения при пропорциональном нагружении.

Метод определения материальных параметров и функций основан на обработке экспериментальных кривых без введения допуска на определяемые экспериментальные величины и приводится в работах [9; 31; 34].

2. Интеграция варианта теории пластичности в конечно-элементный комплекс

Для проведения математического моделирования процессов упругопластического деформирования элементов конструкций вариант теории пластичности интегрирован в конечно-элементный комплекс с помощью разработанной пользовательской подпрограммы. Для проведения конечно-элементных расчётов в подпрограмме вычисляются компоненты матрицы Якоби, определяющей изменение каждой из компонент напряжения, вызванное бесконечно малым изменением каждой компоненты тензора приращения деформации. Для разработки подпрограммы проведена линеаризация уравнений модели и вычислены частные производные компонент тензора приращения напряжения по каждой из компонент тензора приращения деформации.

Уравнение, определяющее приращение накопленной пластической деформации $\Delta\dot{\varepsilon}_{u*}^p$, принимается в следующем виде:

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{u*}^p = \frac{1}{E_* + 3G}\left[\frac{3G}{\sigma_u^*}\left(s_{ij}^*\Delta\varepsilon_{ij}\right) + \sigma_u^* - C\right]. \quad (20)$$

Такой подход позволяет обеспечить нахождение точки, отображающей процесс деформирования на поверхности нагружения, в том числе в шаге, когда происходит переход материала из упругого состояния в упругопластическое.

Коррекция решения в (20) ранее была применена [37] при решении нелинейных задач упругопластического деформирования оболочек вращения в физически и геометрически нелинейной постановке шаговым методом приращений с коррекцией решения на каждом шаге (самокорректирующийся метод приращений [38; 39]). Самокорректирующийся метод приращений для решения физически нелинейных задач применялся также в работах [40–42].

3. Упругопластическое поведение и разрушение конструкций с концентраторами напряжений при циклических нагружениях

Проведены испытания четырех цилиндрических образцов с кольцевой V-образной выточкой из сплава БрХ08-Ш при двух режимах циклического изменения осевой нагрузки от 0 до 8 и от 0 до 10,8 кН с частотой 0,1 Гц. При таких режимах нагружения основная часть образца находится в упругом состоянии, в то время как в области выточки происходит упругопластическое деформирование. Диаметр рабочей части образца – 10 мм, глубина выточки – 2,5 мм, радиусы выточки – 0,25 мм у образцов, нагружаемых до 8 кН и 1 мм у образцов, нагружаемых до 10,8 кН. Чертеж образца приведен на рис. 1.

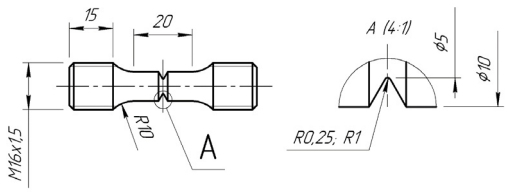
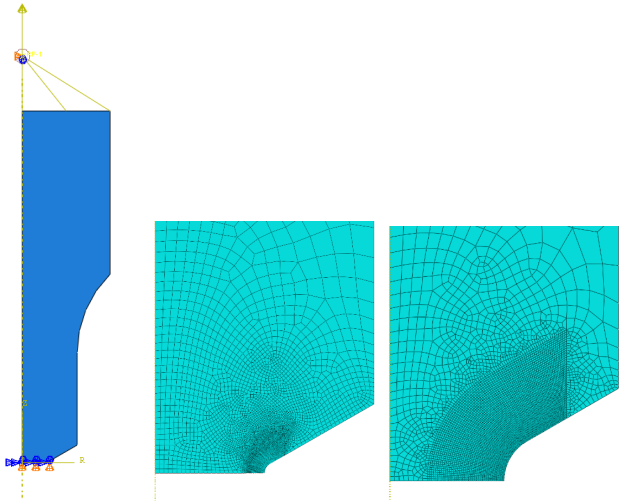


Рис. 1. Образец с V-образной кольцевой выточкой

Fig. 1. V-notchedspecimen

Перед испытанием на поверхность выточки была нанесена спекл-структура, необходимая для оценки деформации методом корреляции цифровых изображений [35]. В процессе испытаний с помощью системы Vic-3Dmicro, оснащенной стереомикроскопом OlympusSDFPlapo 1.6XPF, проводилось фотографирование поверхности образца с частотой съемки 20 Гц. Полученные изображения разбивались на элементы, по перемещению которых была проведена оценка деформации поверхности выточки.

Моделирование эксперимента проводится в осесимметричной постановке. Конечно-элементная модель образца представляет собой четверть продольного сечения образца, с заданными граничными условиями осевой и продольной симметрии. Размер элемента в области кольцевой выточки 0,01 мм. Нагрузка приложена к опорной точке, перемещение вдоль оси образца которой связано с перемещением торца образца. Расчетная схема и конечно-элементная сетка в области выточки образцов приведены на рис. 2. Для проведения расчетов использовались материальные параметры и функции бронзового сплава БрХ08-Ш, приведенные в работе [36].

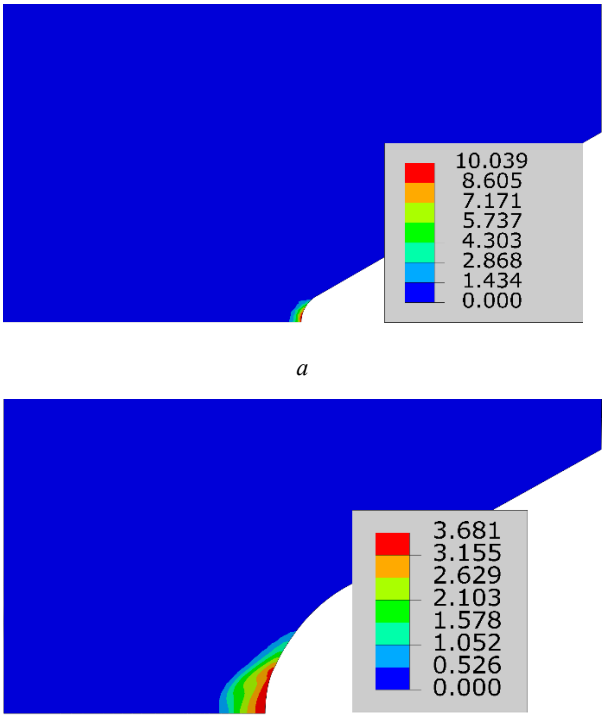


a *b* *c*

Рис. 2. Расчетная схема (*a*) и конечно-элементная сетка образца с выточкой радиусом 0,25 мм (*b*) и 1 мм (*c*)

Fig. 2. Calculation scheme (*a*) and finite element mesh of the V-notched speciemen with radius 0.25 mm (*b*) and 1 mm (*c*)

На рис. 3 приведены картограммы накопленной пластической деформации в момент расчетного разрушения каждого из образцов, а на рис. 4 картограммы интенсивности напряжений в области выточки в момент приложения максимальной нагрузки и в момент полной разгрузки образца в 200-м цикле нагружения образца.

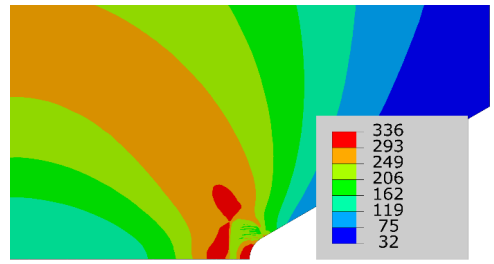


a

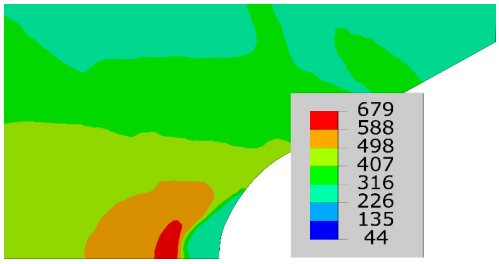
b

Рис. 3. Картограммы накопленной пластической деформации образца с выточкой радиусом 0,25 мм (*a*) и 1 мм (*b*)

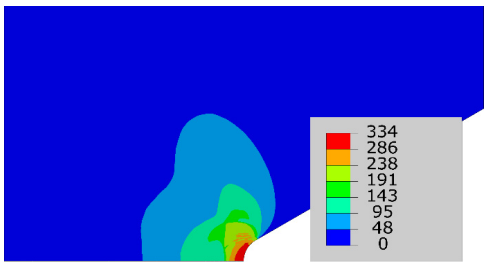
Fig. 3. Cumulative plastic deformation cartograms of the V-notched specimen with radius 0.25 mm (*a*) and 1 mm (*b*)



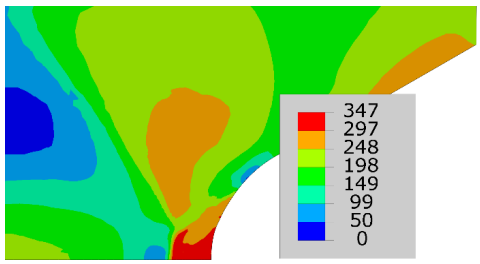
a



b



c



d

Рис. 4. Картограммы интенсивности напряжений (МПа) в момент приложения максимальной нагрузки образца с выточкой радиусом 0,25 мм (*a*) и 1 мм (*b*) и в момент разгрузки образца с выточкой радиусом 0,25 мм (*c*) и 1 мм (*d*)

Fig. 4. Stress intensity cartograms (MPa) at the moment of application of the maximum load of the V-notched specimen with radius 0.25 mm (*a*) and 1 mm (*b*) and at the moment of unloading of the V-notched specimen with radius 0.25 mm (*c*) and 1 mm (*d*)

На рис. 5 приведена зависимость расчетного и экспериментального размаха осевой деформации на поверхности выточки от номера цикла для образцов с выточкой 0,25 мм. На рис. 6 и 7 показаны размах и среднее значение осевой деформации для образцов с выточкой радиусом 1 мм. Вертикальной пунктирной линией на рис. 5–7 обозначен расчетный момент разрушения.

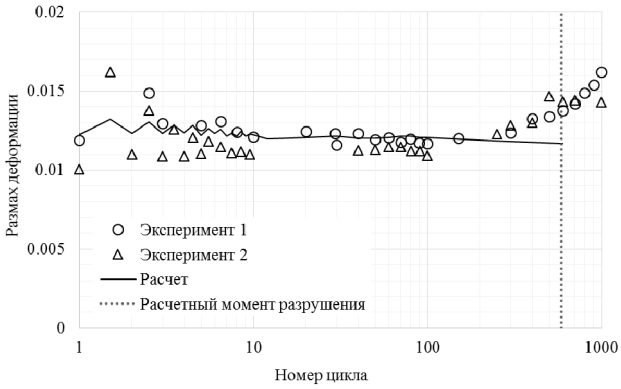


Рис. 5. Размах осевой деформации материала образцов с выточкой радиусом 0,25 мм на поверхности выточки

Fig. 5. The range of axial deformation of the material of the V-notched specimen with radius 0.25 mm on the surface of the notch

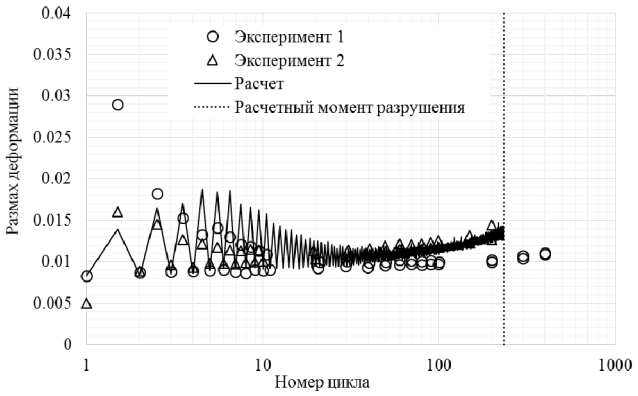


Рис. 6. Размах осевой деформации материала образцов с выточкой радиусом 1 мм на поверхности выточки

Fig. 6. The range of axial deformation of the materialof the V-notched specimen with radius 1 mm on the surface of the notch

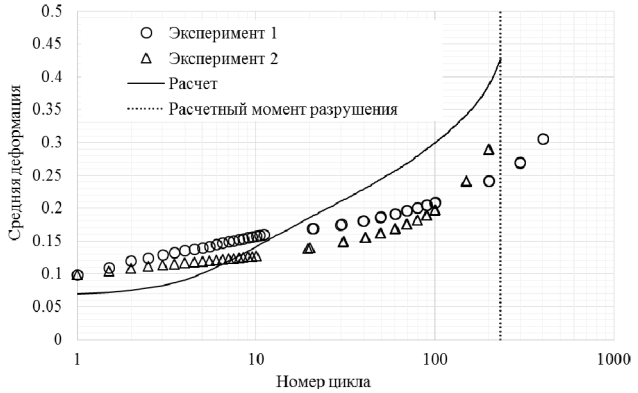


Рис. 7. Значение средней осевой деформации материала образцов с выточкой радиусом 1 мм на поверхности выточки

Fig. 7. Mean axial deformation value of the material of the V-notched specimen with radius 1 mm on the surface of the notch

На рис. 5 и 6 пилообразная форма расчетных и экспериментальных кривых обусловлена процессом вышагивания (ratcheting) на полуциклах растяжения.

Из результатов, приведенных на рис. 7, видно, что при циклическом нагружении образца с выточкой радиусом 1 мм, в материале наблюдается значительное накопление односторонней деформации. Таким образом, механизм разрушения образцов различен. Материал образцов с острым концентратором разрушается вследствие малоцикловой усталости, в то время как разрушение образцов с радиусом выточки 1 мм связано в основном с односторонним увеличением осевой деформации.

Проведенные исследования подтверждают адекватность используемой при оценке ресурса модели накопления повреждений, основанной на энергетическом критерии работы микронапряжений [6; 9; 31]. Для сравнения в таблице приводятся значения числа циклов до разрушения образцов, определенных с помощью применяемой модели и деформационно-кинетического критерия прочности [32; 33] с использованием кривой малоцикловой усталости, коэффициента поперечного сужения и результатов расчета кинетики напряженно-деформированного состояния, полученных с помощью модели пластичности. Экспериментальное значение долговечности образцов определялось по наличию видимой трещины на поверхности выточки.

Расчетные и экспериментальные значения количества циклов до разрушения образцов с кольцевой выточкой

Calculated and experimental values of the number of cycles to failure of the V-notched specimen

Радиус выточки, мм	Энергетический критерий	Деформационно-кинетический критерий	Эксперимент
0,25	530	790	490, 580
1	240	390	250, 360

Из результатов, приведенных в таблице, следует, что энергетический критерий достаточно точно прогнозирует число циклов до разрушения (даже с некоторым запасом), а деформационно-кинетический критерий дает завышенное число циклов до разрушения. Применение же в расчетах моделей пластичности, не способных описывать процесс вышагивания (ratcheting), может привести к значительному завышению прогнозируемого числа циклов до разрушения. Следует также отметить, что в конструкции с выточкой радиусом 0,25 мм в зоне концентрации напряжений происходит стеснение деформаций и реализуется жесткое нагружение. В конструкции с выточкой радиусом 1 мм в зоне концентрации напряжений реализуется мягкое несимметричное нагружение с односторонним накоплением деформаций (ratcheting). И хотя концентрация напряжений в конструкции с выточкой радиусом 1 мм меньше, чем с радиусом 0,25 мм, долговечность этой конструкции практически в два раза ниже, чем с радиусом 0,25 мм за счет различного характера изменения напряженно-деформированного состояния. Таким образом, увеличение концентрации напряжений не всегда приводит к снижению долговечности конструкции.

Заключение

На основе приведенных в работе результатов экспериментальных и расчетных исследований можно сделать вывод, что предложенный вариант теории пластичности при расчетах кинетики напряженно-деформированного состояния конструкций, имеющих концентраторы напряжений, при циклическом нагружении позволяет получить удовлетворительные результаты расчетов, в том числе моделировать процесс накопления односторонней деформации. Применение энергетического критерия, основанного на работе микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций, позволяет с достаточной точностью прогнозировать долговечность материала в области концентрации напряжений.

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.

4. Термопрочность деталей машин: справочник / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.

5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

6. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

7. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 35–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04

8. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Сравнительный анализ вариантов теорий пластичности при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 23–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02

9. Abashev D., Bondar V., Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2020. – Vol. 15, no. 2. – P. 225–239. DOI: dx.doi.org/10.2140/jomms.2020.15.225

10. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

11. Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков, И.А. Волков, Л.А. Игумнов, А.В. Каплиенко, Ю.Г. Коротких, В.А. Панов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 282 с.

12. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. Прикладная теория вязкопластичности: монография. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. университета, 2015. – 317 с.

13. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 299 с.

14. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. – 347 с.

15. Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении // Математическое моделирование и численные методы. – 2017. – № 3. – С. 22–41. DOI: 10.18698/2309-3684-2017-3-2035

16. Темис Ю.М. Моделирование пластичности и ползучести конструкционных материалов ГТД // Материалы 49-й Международной научно-технической конференции ААИ «Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных научных кадров». Школа-семинар «Современные модели термовязкопластичности». – М.: МАМИ, 2005. – Ч. 2. – С. 25–76.

17. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон [и др.]. – СПб.: Изд-во СПб. политехн. ун-та, 2010. – 397 с.

18. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692. DOI: 10/1016/j.ijplas.2008.03.009

19. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // Int. J. Plast. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.

20. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting // Int. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.10.004

21. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauscinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.

22. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

23. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region // J. Appl. Mech. – 1982. – Vol. 49. – P. 721–727.

24. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity // Appl. Mech. rev. – 1990. – Vol. 43. – P. 283.

25. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rulle to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // Int. Journal of Plasticity. – 1991. – Vol. 7. – P. 879–891.

26. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of nonproportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863–1889. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.04.008

27. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control // Int. J. Plasticity. – 2013. – Vol.43. – P. 1–19. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.10.009

28. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C // Int. J. Plasticity. – 2014. – Vol. 61. – P. 32–48. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.05.006

29. Соси Д. Модели разрушения при многоосной усталости // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – Т. 3. – С. 9–21.

30. Kang G., Gao Q., Yang X. Experimental study on the cyclic deformation and plastic flow of U71Mn rail steel // Int. J. Mech. Sci. – 2002. – Vol. 44. – P. 1647–1663.

31. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state / V.S. Bondar, V.V. Dansin, D.Vu. Long, Nguyen Dinh Dut // Mechanics of advanced materials and structures. – 2018. – Vol. 25, no. 12. – P. 1009–1017. DOI: 10.1080/15376494.2017.1342882

32. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

33. Гусенков А.П., Котов П.И. Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

34. Абашев Д.Р. Метод определения материальных функций модели пластичности // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – № 117. – С. 66–79.

35. Измерение деформации тонкого паянного шва с помощью средств обработки изображений пакета LabView и бесконтактной измерительной системы Vic-2D / Д.Р. Абашев, В.Э. Апетьян, В.М. Астрединов, С.А. Владимиров, С.И. Трефилов // Космонавтика и ракетостроение. – 2013. – № 72. – С. 101–106.

36. Абашев Д.Р. Малоцикловая усталость образцов бронзового сплава с кольцевой выточкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022 – № 3. – С. 32–41. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.04

37. Бондарь В.С. Решение нелинейной задачи пластического деформирования оболочек вращения: дис. … канд. физ.-мат. наук – М.: Изд-во МФТИ, 1975. – 86 с.

38. Хейслер, Стриклин, Стэббинс. Разработка и оценка методов решения геометрически нелинейных задач строительной механики // Ракетная техника и космонавтика. – 1972. – Т. 10. – № 3.

39. Стриклин, Хейслер, Риземанн. Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и (или) геометрией // Ракетная техника и космонавтика. – 1973. – Т. 11, № 3.

40. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. Повторное неизотермическое упругопластическое деформирование при изгибе и растяжении пологих оболочек вращения // Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1. – Тбилиси, Мецниереба, 1975.

41. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. Кинетика напряженно-деформированного состояния дисков при циклическом неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 5.

42. Темис Ю.М. Самокорректирующийся шаговый метод решения нелинейных задач упругости и пластичности // Труды ЦИАМ. – 1980. – № 918. – 24 с.

References

1. Il'jushin A.A. Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii [Plastic. Foundations of general mathematical theory]. Moscow Izd. AN SSSR, 1963, 271 p.

2. Il'jushin A.A. Mehanika sploshnoj sredy [Continuum mechanics]. Moscow, Publishing house of Moscow State University, 1990, 310 p.

3. Novozhilov V.V., Kadashevich Ju.I. Mikronaprjazhenija v konstrukcionnyh materialah [Microstresses in structural materials]. Leningrad, Mashinostroenie, 1990, 224 p.

4. Birgera I.A., Shorra B.F. Termoprochnost' detalej mashin: Spravochnik [Thermal strength of machine parts: Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 455 p.

5. Malinin N.N. Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 p.

6. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.

7. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Y. Teorii plastichnosti pri slozhnom nagruzhenii po ploskim traektoriyamdeformacii [Theories of Plasticity under Complex Loading along Flat Trajectories of Deformations] // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. № 3. C. 35-46. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04

8. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. Sravnitelnii analiz variantov teorii plastichnosti pri ciklicheskih nagruzhenijah [Comparative analysis of variants of plasticity theories under cyclic loading]. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017, no.2, pp. 23-44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02

9. Abashev D., Bondar V., Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes. – Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2020, v. 15, No. 2, pp. 225-239. DOI: dx.doi.org/10.2140/jomms.2020.15.225.

10. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Equations of state for viscoelastic-plastic media with damage [Uravnenija sostojanija vjazkouprugoplasticheskih sred s povrezhdenijami]. Moscow, FIZMATLIT, 2008, 424 p.

11. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienko A.V., Korotkih Ju.G., Panov V.A. Prikladnaja teorija plasticnosti [Applied theory of plasticity]. Mosocw, FIZMATLIT, 2015, 282 p.

12. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkih Ju.G. Prikladnaja teorija vjazkoplastichnosti. Monografija [Applied theory of viscoplasticity. Monograph]. Nizhnij Novgorod, Izd-vo Nizhegorodskogo gos.universiteta, 2015, 317 p.

13. Volkov I.A., Igumnov L.A. Vvedenie v kontinual'nuju mehaniku povrezhdennoj sredy [Introduction to Continuous Mechanics of Damaged Medium], Moscow, FIZMATLIT, 2017, 299 p.

14. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorokhov V.A. Modelirovanie nelineynogo deformirovaniya i razrusheniya konstruktsiy v usloviyakh mnogofaktornykh vozdeystviy na osnove MKE [Modeling of nonlinear deformation and destruction of structures under conditions of multifactorial impacts based on FEM]. – N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2015. 347 p.

15. Temis Ju.M., Hudyakova A.D. Model' neizotermicheskogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya konstrukcionnyh materialov pri slozhnom nagruzhenii [Model of Non-Isothermal Elastic-Plastic Deformation of Structural Materials under Complex Loading] // Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody, 2017. № 3. № 3. pp. 22-41, DOI: https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-3-2035.

16. Temis Ju.M. Modelirovanie plastichnosti i polzuchesti konstrukcionnyh materialov GTD [Simulation of plasticity and creep of GTE structural materials]. Moscow, MAMI, Materialy 49-oj Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoj konferencii AAI «Prioritety razvitija otechestvennogo avtotraktorostroenija i podgotovki inzhenernyh nauchnyh kadrov». Shkola-seminar «Sovremennye modeli termovjazkoplastichnosti». Chast' 2, 2005, pp. 25-76.

17. Nelinejnaya mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials] / Besson Zh. [i dr.]. – Sankt-Peterburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2010. – 397 s.

18. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity., 2008. – Vol. 24., P. 1642–1692. DOI: https://doi.org/10/1016/j.ijplas.2008.03.009.

19. J.-L. Chaboche, P. Kanouté, and F. Azzouz Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions, Int. J. Plast. 35 (2012), 44–66.

20. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting // Int. J. of Plasticity., 2009. − Vol. 25., P. 1560–1587. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.10.004.

21. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauscinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731., 1966.

22. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity., 1993. − Vol. 9. − P. 375–390.

23. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region, J. Appl. Mech., 49, – 1982, – P. 721-727.

24. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity, Appl. Mech. rev., 43, 1990, – P. 283.

25. Ohno N. and Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rulle to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions. Int. Journal of Plasticity 7, – 1991. – P. 879-891.

26. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // Int. J. Plasticity. –2008. − Vol. 24 − pp.1863-1889. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.04.008.

27. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control // Int. J. Plasticity. – 2013. − Vol.43. − pp.1-19, DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.10.009.

28. . Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C // Int. J. Plasticity. –2014. − Vol.61. − pp.32-48, DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.05.006.

29. Sosi D. Modli razrusheniy aprimnogoosnoi ustalosti // Teoreticheskie osnovi injenernih raschetov. 1988. T. 3. – pp. 9–21.

30. Kang G., Gao Q., Yang X. Experimental study on the cyclic deformation and plastic flow of U71Mn rail steel // Int. J. Mech. Sci. 2002. T. 44. – pp. 1647–1663.

31. Bondar V.S., Dansin V.V., Long D.Vu., Nguyen Dinh Dut Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state // Mechanics of advanced materials and structures, 2018, vol. 25, no. 12, pp. 1009-1017.DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1342882

32. Gusenkov A.P. Prochnost' pri izotermicheskom i neizotermicheskom malotsiklovom nagruzhenii [Strength under isothermal and nonisothermal low-cycle loading]. – M.: Nauka, 1979. – 296 p.

33. GusenkovA.P., KotovP.I. Malociklovaya ustalost' prineizotermicheskomnagruzhenii [Low-cycle fatigue under nonisothermal loading]. M.: Mashinostroenie, 1983. – 240 p.

34. Abashev D.R. Metod opredeleniya material'nykh funktsiy modeli plastichnosti [Method for identification the material functions of the plasticity model] // Kosmonavtika i raketostroenie. 2020. – № 117. – P. 66–79.

35. Abashev D.R., Apet'yan V.E., Astredinov V.M., Vladimirov S.A., Trefilov S.I. Izmerenie deformatsii tonkogo payannogo shva s pomoshch'yu sredstv obrabotki izobrazheniy paketa LabView i beskontaktnoy izmeritel'noy sistemy Vic-2D [Deformation measurement of a thin brazed seam using the LabView image processing tools and the Vic-2D non-contact

measuring system] // Kosmonavtika i raketostroenie. 2013. – № 72. – P. 101–106.

36. Abashev D.R. Malociklovaj ustalost obrazcov bronzovogo splava s kolcevoi vitochkoi [Low-cycle fatigue of V-notched cylindrical samples of bronze alloy] // PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no. 3, pp. 32-41. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.04

37. Bondar V.S. Reshenie nelineinoi zadachi plasticheskogo deformirovaniya obolochek vrascheniya: dis. kandidata fiz.-mat. Nauk [The Solution of the Nonlinear Problem of Plastic Deformation of Shells of Rotation: Ph.D. in Physics and Mathematics]. – M.: Izd-vo MFTI, 1975. – 86 p.

38. Heisler, Striklin, Stebbins. Razrabotka I ocenka metodov resheniya geometricheski nelineinih zadach stroitel'noi mehaniki [Development and evaluation of methods for solving geometrically nonlinear problems in structural mechanics] // Raketnaya tehnika I kosmonavtika. 1972. – T. 10. – № 3.

39. Striklin, Heisler, Rizemann. Ocenka metod ovresheniya zadach stroitel'noi mehaniki, nelineinost; kotorih svyazana so svoistvami materiala I (ili) geometriei [Evaluation of methods for solving structural mechanics problems whose nonlinearity is related to material properties and/or geometry] // Raketnaya tehnika I kosmonavtika. – 1973. – T. 11. – № 3.

40. Dem'yanushko I.V., Temis Ju.M. Povtornoe neizotermicheskoe uprugoplasticheskoe deformirovanie pri izgibe I rastyajhenii pologih obolochek vrascheniya. [Repeated nonisothermal elastic-plastic deformation in bending and tension of hollow shells of revolution] Trudi X Vsesouznoi konferencii po teorii obolochek I plastin. T. 1. Tbilisi, Mecniereba, 1975.

41. Dem'yanushko I.V., Temis Ju.M. Kinetika napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya diskov pri ciklicheskom neizotermicheskom nagruzhenii. [Kinetics of the stress-strain state of discs under cyclic nonisothermal loading] – Izv. AN SSSR, MTT, 1975, №5.

42. Temis Ju.M. Samokorrektirujuschiisya shagovii metod resheniya nelineinih zadach uprugosti I plastichnosti. [Self-correcting step method for solving nonlinear elasticity and plasticity problems]– Trudi CIAM 1975, №5, 24 p.

Финансирование. Работа не имела финансовой поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work had no financial support.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.