Калоеров С.А., Сероштанов А.В. Исследование электромагнитоупругого состояния конечной многосвязной тонкой плиты // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. С. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.04

Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V. Investigation of the Electro-Magneto-Elastic State of a Finite Multiply Connected Thin Plate. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 4, pp. 34-44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.04

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.04
УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ТОНКОЙ ПЛИТЫ

С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов

Донецкий национальный университет, Донецк, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 15 февраля 2023 г.
Одобрена: 27 апреля 2023 г.
Принята к публикации:
31 августа 2023 г.

Ключевые слова:

пьезоплита с отверстиями и трещинами, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты, коэффициенты интенсивности моментов.

АННОТАЦИЯ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит получено решение задачи об изгибе конечной плиты с произвольными отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворения граничным условиям на контурах плиты обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для круговой плиты с круговым отверстием, круговой плиты с внутренней или краевой трещиной, для плиты с двумя внутренними отверстиями или внешними выемами. Исследованы закономерности влияния физико-механических свойств материала плиты и геометрических характеристик отверстий, трещин и выемов на значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов трещин. Установлено, что влияние учета пьезосвойств материала на значения изгибающих моментов в плите велико и ими при исследовании напряженно-деформированного состояния пренебрегать нельзя, то есть нужно решать задачу электромагнитоупругости, а не задачу классической теории изгиба анизотропной плиты, к тому же при действии только электромагнитного поля в пьезоплите возникают достаточно большие изгибающие моменты (следовательно, напряжения и деформации), и их можно найти только решая задачу электромагнитоупругости. Определено, что трещину в плите можно рассматривать как эллиптическое отверстие, у которого отношение полуосей менее 10^{-3}, и в этих случаях можно вычислять коэффициенты интенсивности механических и электромагнитных моментов. Также установлено, при каких расстояниях между контурами влияние одного из них на напряженно-деформированное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь.

© ПНИПУ

© **Калоеров Стефан Алексеевич** – д. ф.-м. н., проф., e-mail: kaloerov@mail.ru, iD: 0000-0003-1339-6035
Сероштанов Александр Владимирович – аспирант, e-mail: aleks.serosht@gmail.com, iD: 0000-0003-3545-3635

Stefan A. Kaloerov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: kaloerov@mail.ru, iD: 0000-0003-1339-6035
Aleksandr V. Seroshtanov – Postgraduate student, e-mail: aleks.serosht@gmail.com, iD: 0000-0003-3545-3635

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

INVESTIGATION OF THE ELECTRO-MAGNETO-ELASTIC STATE OF A FINITE MULTIPLY CONNECTED THIN PLATE

S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov

Donetsk National University, Donetsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 15 February 2023
Approved: 27 April 2023
Accepted for publication:
31 August 2023

Keywords:

piezoplate with holes and cracks, complex potentials, generalized least squares method, bending moments, moments intensity factors.

ABSTRACT

The problem of bending a finite plate with arbitrary holes and cracks is solved with the use of complex potentials of the theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates. Moreover, with the help of conformal mappings, expansion of holomorphic functions into the Laurent series or Faber polynomials owing to satisfaction of boundary conditions on the contours of the plate by the generalized least squares method, the problem is reduced to solving an overdetermined system of linear algebraic equations by the method of singular value decompositions. Results of numerical investigations for a circular plate with a circular hole, for a circular plate with an internal or edge crack, for a plate with a two circular internal holes or external recesses are reported. We study how physical and mechanical properties of the plate material and geometric characteristics of holes, cracks and recesses influence the values of the bending moments and moments intensity factors for the crack ends. It is important to consider the piezoproperties of the material on the values of bending moments in the plate. They cannot be neglected in the study of the stress-strain state, that is, it is necessary to solve the problem of electro-magneto-elasticity, and not the problem of the classical theory of bending of an anisotropic plate. Moreover under the electromagnetic field in the piezoelectric plate there are sufficiently large bending moments (hence stresses and deformations), and they can be found only by solving the problem of electro-magneto-elasticity. It is determined that a crack in a plate can be considered as an elliptical hole, in which the ratio of the semiaxes is less than 10^{-3}, and in these cases it is possible to calculate the intensity factors of mechanical and electromagnetic moments. We also outline the distances between the contours, which have an insignificant influence of one of them on the stress-strain state around the other and can be neglected.

© PNRPU

Введение

Пьезоматериалы получили широкое распространение в современной науке и технике [1–9]. Под действием различных механических сил, тепловых и электромагнитных полей в элементах конструкций из таких материалов могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании конструкций. Следовательно, необходимо иметь высокоэффективные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) тел из пьезоматериалов, что к настоящему времени выполнено в ряде фундаментальных работ [10–13]. Наибольшее распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластинки, находящиеся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния или поперечного изгиба (тонкие пьезоплиты). В работах [14–20] предложены различные методы определения ЭМУС пьезоплит простой геометрической формы из материалов, имеющих простейшую микроструктуру. Однако в большинстве случаев элементы конструкций изготавливаются из материалов, обладающих общими электромагнитоупругими свойствами, более того, они могут иметь технологические отверстия, трещины и инородные включения, вблизи которых возникают высокие концентрации напряжений, приводящие к потере прочности конструкций. При исследованиях напряженно-деформированного состояния многосвязных сред результаты с достаточно высокой точностью позволяют получать методы, использующие комплексные потенциалы. Они широко применялись при решении плоской задачи теории упругости анизотропного тела [21], плоской задачи электромагнитоупругости [22]. В теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит комплексные потенциалы были введены в статьях [23; 24], причем в статье [23] при построении теории известные гипотезы изгиба тонких плит Кирхгоффа дополнены условиями наличия в каждой точке плиты плоскости материальной симметрии, параллельной срединной плоскости и условиями на индукции поля, а в работе [24] последняя гипотеза заменена условиями на потенциалы поля: скалярные потенциалы действующих на плиту электрического и магнитного полей зависят линейно от координаты по толщине, т.е.

$$\varphi(x,y) = z\varphi_0(x,y)\,,\ \psi(x,y) = z\psi_0(x,y)\,,$$

где $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$ – плотности по толщине плиты потенциалов электрического и магнитного полей; показана идентичность всех соотношений, получаемых при первом и втором подходов.

В данной работе с использованием комплексных потенциалов построено общее решение задачи об изгибе конечной пьезоплиты с произвольными отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений и разложений голоморфных функций в ряды

Лорана и по полиномам Фабера комплексные потенциалы представлены в виде рядов с неизвестными коэффициентами, определяемых из граничных условий на контурах плиты обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [25]. Для круговой плиты с отверстием или трещиной, с двумя отверстиями или внешними выемами проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических свойств материала плиты и геометрических характеристик отверстий, трещин и выемов.

1. Постановка и метод решения задачи

Рассмотрим тонкую электромагнитоупругую плиту с отверстиями и трещинами в прямоугольной декартовой системе координат Oxy. В случае криволинейных отверстий их контуры можно аппроксимировать дугами эллипсов или берегами прямолинейных трещин, которые рассматриваются как частный (предельный) случай эллиптических отверстий. Поэтому будем считать, что плита занимает многосвязную область S, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ с полуосями a_l, b_l (рис. 1), причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$, направленными вдоль полуосей a_l, их параметрические уравнения имеют вид

$$x_l = a_l \cos\theta,\ y_l = b_l \sin\theta, \tag{1}$$

а в основной системе координат Oxy – вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos\varphi_l - y_l \sin\varphi_l,$$
$$y = y_{0l} + x_l \sin\varphi_l + y_l \cos\varphi_l, \tag{2}$$

где φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy; θ – параметр, изменяющийся в интервале от 0 до 2π. Плита находится под действием приложенных к ее контурам L_l $\left(l=\overline{0,\mathcal{L}}\right)$ механических изгибающих моментов $m_l(s)$, поперечных сил $p_l(s)$, моментов электрической индукции $m_{dl}(s)$ и магнитной индукции $m_{bl}(s)$, причем для упрощения вида приводимых соотношений будем считать, что главные векторы поперечных усилий и главные моменты механических и электромагнитных воздействий равны нулю на каждом из контуров плиты.

Если для решения задачи об определении ЭМУС плиты использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости [23; 24], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $W_k'(z_k)$ $\left(\mathrm{k}=\overline{1,4}\right)$ обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{3}$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

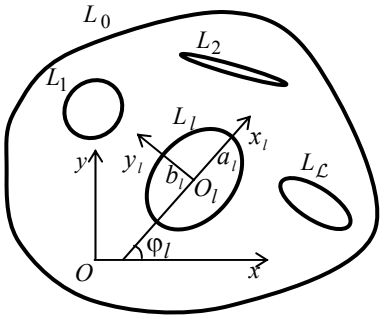


Рис. 1. Схема расчетной области

Fig. 1. Scheme of the computational domain

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0;$$

$\mathrm{l}_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\mathrm{l}_{4s}(\mu) = -\left(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}\right),$$

$$\mathrm{l}_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + \left(C_{g12}+2C_{g26}\right)\mu^2 + \left(C_{g21}+2C_{g16}\right)\mu + C_{g11},$$

$$l_{3p}(\mu) = C_{p22}\mu^3 + \left(C_{p12}+2C_{p26}\right)\mu^2 + \left(C_{p21}+2C_{p16}\right)\mu + C_{p11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta 22}\mu^2 + 2C_{\beta 12}\mu + C_{\beta 11},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = C_{\nu 22}\mu^2 + 2C_{\nu 12}\mu + C_{\nu 11},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = C_{\chi 22}\mu^2 + 2C_{\chi 12}\mu + C_{\chi 11};$$

D_{ij} и C_{gij}, C_{pij}, $C_{\beta ij}$, $C_{\chi ij}$, $C_{\nu ij}$ – упругие и электромагнитные жесткости плиты, которые выражаются через s_{ij} (коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля), g_{ij}, p_{ij} (пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях), β_{ij}, χ_{ij}, ν_{ij} (коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей соответственно, измеренные при постоянных напряжениях) [23; 24].

Функции $W_k'(z_k)$ определены в областях S_k, получаемых из области S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами L_{kl}, соответствующими контурам L_l при этих преобразованиях, и в рассматриваемом случае имеют вид

$$W_k'(z_k)=\sum_{l=0}^{\mathcal{L}}W_{kl}'(z_k), \qquad (4)$$

в котором $W_{k0}'(z_k)$ – функции, голоморфные внутри внешних контуров L_{k0}; $W_{kl}'(z_k)$ $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ – функции, голоморфные вне контуров отверстий L_{kl}. Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Учитывая параметрические уравнения (1) эллипсов L_l и известные равенства $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)$, $\sin\theta=-\frac{i}{2}\left(\sigma-\frac{1}{\sigma}\right)$, $\sigma=e^{i\theta}$, на основе формул (2) и (3) получим связи между граничными значениями σ и $t_k=x+\mu_k y$. Заменив эти граничные значения на их значения ζ_{kl} и z_k в областях, найдем конформные отображения внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}|\ge 1$ на внешности эллиптических контуров L_{kl} в виде [26]

$$z_k=z_{kl}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+\frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right), \qquad (5)$$

где

$$z_{kl}=x_{0l}+\mu_k\, y_{0l},$$

$$R_{kl}=\frac{a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)+ib_l\left(\sin\varphi_l-\mu_k\cos\varphi_l\right)}{2},$$

$$m_{kl}=\frac{a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)-ib_l\left(\sin\varphi_l-\mu_k\cos\varphi_l\right)}{2R_{kl}}.$$

Тогда функции $W_{kl}'(z_k)$ $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$, голоморфные вне контуров L_{kl}, включая бесконечно удаленную точку, после конформных отображений (5) будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}|\ge 1$, включая бесконечно удаленную точку, и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl}, т.е.

$$W_{kl}'(z_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \qquad (6)$$

Функции $W_{k0}'(z_k)$ голоморфны в односвязных областях, ограниченных контурами L_{k0}, и их можно разложить в ряды по полиномам Фабера для этих областей

$$W_{k0}'(z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{k0n}P_{k0n}(z_k).$$

При этом $P_{k0n}(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место выражения [27]

$$P_{k00}=1,$$

$$P_{k0n}(z_k)=\beta_{k0n}(z_k-z_{k0})^n+\ldots+\beta_{k01}(z_k-z_{k0})+\beta_{k00}$$

$$(n=1,\,2,\,\ldots).$$

Тогда для $W_{k0}'(z_k)$ будем иметь

$$W_{k0}'(z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\alpha_{k0n}\beta_{k0p}(z_k-z_{k0})^p=$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}(z_k-z_{k0})^p\sum_{n=p}^{\infty}\alpha_{k0n}\beta_{k0p}= \qquad (7)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{k0n}(z_k-z_{k0})^n.$$

Здесь $a_{k0n}=\sum_{p=n}^{\infty}\alpha_{k0p}\beta_{k0n}$, а при перестановке порядка суммирования учтено, что мы имеем дело с абсолютно сходящимися рядами. Но так как в численных реализациях описываемых решений приходится иметь дело с конечными рядами, то выполнение последнего условия можно не требовать.

Заметим, что если контур L_0 является эллипсом с полуосями a_0, b_0, то для полиномов Фабера имеют место выражения [27]

$$P_{k00}=1,\ P_{k0n}(z_k)=\zeta_{k0}^n+\frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n}.$$

Учитывая это, из конформных отображений (5) для них получим следующие рекуррентные соотношения

$$P_{k00}=1,\ P_{k01}(z_k)=\frac{z_k-z_{k0}}{R_{k0}}\ P_{k00}=\frac{z_k-z_{k0}}{R_{k0}},$$

$$P_{k0j+1}(z_k)=\frac{z_k-z_{k0}}{R_{k0}}\,P_{k0j}-m_{k0}P_{k0j-1}-\delta_j^1 m_{k0}\ \ (j\ge 1);$$

δ_j^1 – символ Кронекера.

Исходя из выражений (4), (6), (7), окончательно комплексные потенциалы (4) запишем в виде

$$W_k'(z_k)=a_{k00}+\sum_{l=0}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}\varphi_{kln}(z_k),$$

где

$$\varphi_{k0n}(z_k)=(z_k-z_{k0})^n,\ \varphi_{kln}(z_k)=\frac{1}{\zeta_{kl}^n}\ \ \left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right);$$

a_{kln} – неизвестные постоянные. Эти постоянные будем определять из граничных условий на контурах плиты. Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, по-

лученные из известных граничных условий дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikl}\delta_{k,s}W_k''(t_k)=\frac{df_{il}(s)}{ds}\quad (i=\overline{1,4}), \tag{8}$$

в котором для указанного выше нагружения контуров $L_l\left(l=\overline{0,\mathcal{L}}\right)$ механическими изгибающими моментами $m_l(s)$, поперечными усилиями $p_l(s)$, моментами индукций электрической $m_{dl}(s)$ и магнитной $m_{bl}(s)$ [23; 24]

$$g_{1kl}=\frac{p_k}{\mu_k},\ g_{2kl}=q_k,\ g_{3kl}=d_{yk},\ g_{4kl}=b_{yk};$$

$$\frac{df_{1l}}{ds}=\mp\left(m_l\frac{dy}{ds}+f_l\frac{dx}{ds}\right)-c_l\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{df_{2l}}{ds}=\mp\left(m_l\frac{dx}{ds}-f_l\frac{dy}{ds}\right)+c_l\frac{dy}{ds},$$

$$f_{3l}=\pm m_{dl},\ f_{4l}=\pm m_{bl};\ f_l(s)=\int_0^s p_l(s)ds;$$

p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} – известные постоянные [23]; c_l – вещественные постоянные, для внешнего контура принимается, что $c_0=0$; верхние знаки в этих формулах относятся к внешнему контуру L_0 области S, нижние – к контурам отверстий;

$$W_k''(z_k)=\sum_{l=0}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}\varphi_{kln}'(z_k); \tag{9}$$

$$\delta_{k,s}=\frac{dz_k}{ds};\ \varphi_{k0n}'(z_k)=n\left(z_k-z_{k0}\right)^{n-1};$$

$$\varphi_{kln}'(z_k)=-\frac{n}{R_{kl}\zeta_{kl}^{n-1}\left(\zeta_{kl}^2-m_{kl}\right)}\quad \left(l=\overline{1,L}\right).$$

Выполнение граничных условий (8) осуществим с использованием обобщенного метода наименьших квадратов [25; 28; 29]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p систему точек $M_{pm}\left(x_{pm},\,y_{pm}\right)$ $\left(p=\overline{0,\mathcal{L}};\ m=\overline{1,M_p}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (9) в граничные условия (8) в точках $M_{pm}\left(x_{pm},\,y_{pm}\right)$, для определения неизвестных постоянных a_{kln} получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=0}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ikp}\delta_{k,s}\varphi_{kln}'\left(t_{kpm}\right)a_{kln}=\frac{df_{ip}\left(t_{pm}\right)}{ds}$$

$$\left(i=\overline{1,4};\ p=\overline{0,\mathcal{L}};\ m=\overline{1,M_p}\right). \tag{10}$$

Кроме уравнений (10), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} ia_{kp1}=0\quad \left(p=\overline{1,\mathcal{L}}\right), \tag{11}$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий.

Систему (10), дополненную уравнениями (11), будем решать методом сингулярных разложений [30; 31]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $W_k'(z_k)$ будут известными, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы). В частности, механические моменты находятся по формулам

$$\left(M_x,\,M_y,\,H_{xy}\right)=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,\ q_k,\ r_k\right)W_k''(z_k),$$

p_k, q_k, r_k – известные постоянные.

Если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе формул [32]

$$k_{1M}^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}q_kM_k,\ k_{2M}^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}r_kM_k,$$

в которых

$$M_k=\mp\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}}\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n n\,a_{kln},$$

верхний знак относится к правому концу разреза в локальной системе координат $O_lx_ly_l$, нижний знак – к левому его концу.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований решения всех этих задач можно получить по программе решения задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g_{ij}'=\lambda_g g_{ij}\ ,\ p_{ij}'=\lambda_p p_{ij},\ \nu_{ij}'=\lambda_{gp}\nu_{ij},$$

где λ_g, λ_p, λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g=\lambda_p=\lambda_{gp}=1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g=1$, $\lambda_p=\lambda_{gp}\le10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p=1$, $\lambda_g=\lambda_{gp}\le10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p=\lambda_g=\lambda_{gp}\le10^{-3}$ для задач ТУ.

Также заметим, что по общей программе можно получать результаты по решению задачи электромагнитостатики для «абсолютно жесткой пластинки». В этом случае следует рассмотреть модельный упругий материал с постоянными $s'_{ij} = \lambda_s s_{ij}$ и для задачи элетромагнитостатики брать $\lambda_s \le 10^{-3}$.

2. Результаты численных исследований

Были проведены численные исследования для плит из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [33; 34]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (материал М2) [35]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT-4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (материал М3) [35].

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (9) и количество точек M_p на каждом из контуров L_p $\left(p = \overline{0, \mathcal{L}}\right)$, в которых удовлетворялись краевые условия при получении уравнений системы (10), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не начинали выполняться с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). Для получения таких результатов в описываемых ниже случаях достаточно было оставлять от 10 до 100 членов в каждом из рядов (9) и на каждом из контуров брать от 50 до 1000 равномерно удаленных по параметру θ параметрического задания (1) точек. Исследования проводились для задач ЭМУ, ЭУ, МУ, ТУ. Результаты расчетов представлены только для задач ЭМУ и ТУ. Как показали расчеты, учет электрических свойств материала незначительно влияет на значения основных характеристик ЭМУС (значения величин для задач ЭУ и ТУ близки), тогда как учет магнитных свойств существенно влияет на них (значения величин для задач ЭМУ и МУ близки друг другу). Исследования проводились для плит с отверстиями различных конфигураций и для различных нагружений контуров. Ниже описаны полученные результаты только для круговой плиты с отверстиями и трещинами, когда плита по внешнему контуру L_0 изгибается равномерно распределенными механическими моментами интенсивности $M_n = m_0$. Значения всех величин приводятся с точностью до m_0 как множителя.

В табл. 1 для кругового кольца с внешним контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и центральным круговым отверстием с контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) с точностью до m_0 для задач ЭМУ и ТУ в зависимости от отношения a_1 / a_0 и центрального угла контуров кольца θ, отсчитываемого от направления оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов (M_s) в точках контуров на площадках, перпендикулярных контурам.

Таблица 1

Значения изгибающих моментов M_s / m_0 в точках контуров кольца на площадках, перпендикулярных контурам, в зависимости от a_1 / a_0

Table 1

The values of the bending moments M_s / m_0 at the points of the contours of the ring on the platforms perpendicular to the contours, depending on a_1 / a_0

Материал	θ, рад	Задача	a_1 / a_0							
			0,1	0,5	0,9	0,99	0,1	0,5	0,9	0,99
			На контуре L_1				На контуре L_0			
М1	0	ЭМУ	2,097	2,752	10,60	100,58	1,018	1,629	9,456	99,43
		ТУ	2,082	2,735	10,59	100,56	1,019	1,636	9,469	99,44
	π/6	ЭМУ	2,006	2,651	10,51	100,49	1,021	1,676	9,541	99,52
	π/3	ЭМУ	1,982	2,625	10,49	100,65	1,021	1,685	9,560	99,54
	π/2	ЭМУ	2,049	2,700	10,56	100,53	1,019	1,646	9,495	99,47
		ТУ	2,049	2,700	10,56	100,53	1,019	1,646	9,495	99,47
М2	0	ЭМУ	2,820	3,572	11,32	101,20	1,004	1,342	8,916	98,82
		ТУ	2,117	2,767	10,61	100,58	1,019	1,644	9,459	99,43
	π/6	ЭМУ	2,037	2,699	10,52	100,51	1,019	1,644	9,508	99,49
		ТУ	2,094	2,746	10,60	100,57	1,019	1,638	9,464	99,44
	π/3	ЭМУ	1,581	2,140	10,02	100,01	1,021	1,831	9,982	99,98
		ТУ	1,969	2,615	10,48	100,46	1,020	1,674	9,559	99,54
	π/2	ЭМУ	2,057	2,590	10,41	100,39	1,045	1,828	9,647	99,62
		ТУ	1,879	2,520	10,40	100,38	1,023	1,721	9,635	99,62

Окончание табл. 1

Материал	θ , рад	Задача	a_1 / a_0							
			0,1	0,5	0,9	0,99	0,1	0,5	0,9	0,99
			На контуре L_1				На контуре L_0			
М3	0	ЭМУ	1,862	2,472	10,32	100,29	1,025	1,765	9,729	99,71
		ТУ	1,456	2,123	10,08	100,09	1,035	1,890	9,906	99,91
	π/6	ЭМУ	2,462	3,124	10,92	100,90	1,018	1,576	9,126	99,11
		ТУ	2,379	3,192	11,15	101,12	1,006	1,389	8,914	98,88
	π/3	ЭМУ	1,891	2,521	10,41	100,40	1,008	1,563	9,603	99,60
		ТУ	2,250	3,061	11,02	101,00	1,003	1,362	9,039	99,01
	π/2	ЭМУ	1,477	2,163	10,08	100,06	1,058	2,014	9,958	99,94
		ТУ	1,393	2,086	10,06	100,06	1,040	1,923	9,937	99,94

Из данных табл. 1 и других полученных результатов следует, что с увеличением радиуса отверстия a_1 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов около контуров возрастают, приближаясь друг к другу; для отверстия небольшого радиуса ($a_1 / a_0 \le 0,1$) влияние одного контура на значения моментов около другого незначительно и им можно пренебречь. Наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из «наиболее» анизотропного по упругим свойствам материала М2 («степень анизотропии» характеризуется степенью отличия отношения s_{11} / s_{22} от 1, физико-механические постоянные материалов приведены в [22]). Учет пьезосвойств материала оказывает значительное влияние на значения изгибающих моментов, особенно в зонах их наибольшей концентрации. Следовательно, при исследованиях концентрации напряжений в элементах конструкций, изготовленных из пьезоматериалов, нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

Как показывают расчеты, при уменьшении отношения b_1 / a_1 длин полуосей эллиптического отверстия L_1 значения изгибающих моментов вблизи концов большой оси отверстия бесконечно увеличиваются, на достаточно большом расстоянии от концов малой оси они уменьшаются и незначительно изменяются от точки к точке. Это видно и из данных рис. 2, где для круговой плиты с центральным эллиптическим отверстием изображены графики распределения моментов M_s / m_0 около контура отверстия для некоторых значений отношения b_1 / a_1 при $a_1 / a_0 = 0,5$. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые к задаче ТУ. Как показывают расчеты, при $b_1 / a_1 \le 10^{-3}$ эллипс можно считать трещиной и вычислять для ее концов КИМ.

В табл. 2 для изготовленной из материала М2 круговой плиты радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) с внутренней трещиной длины a_0 (рис. 3, *a*) в зависимости от отношения c / a_0, где c – длина перемычки между концом трещины и контуром плиты, приведены значения моментов в точках контура диска и КИМ для концов трещины. Результаты для c / a_0, равные 0,5 и 0, соответствуют плите с центральной и краевой трещиной. В табл. 3 для той же круговой плиты с краевой трещиной длины l вдоль диаметра (рис. 3, *b*) в зависимости от отношения l / a_0 приведены значения моментов M_s / m_0 в точках контура плиты и КИМ для конца трещины.

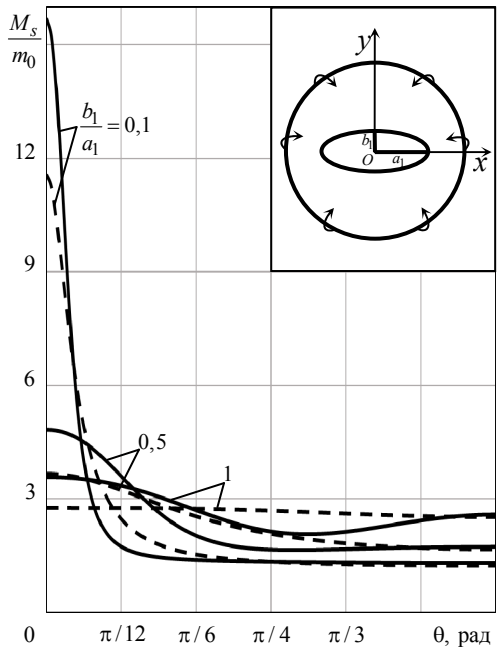


Рис. 2. Графики распределения моментов M_s / m_0 вблизи контура центрального эллиптического отверстия в круговом диске из материала М2 для некоторых значений b_1 / a_1

Fig. 2. Graphs of the distribution of moments M_s / m_0 near the contour of the central elliptical hole in a circular disk made of material M2 for some values of b_1 / a_1

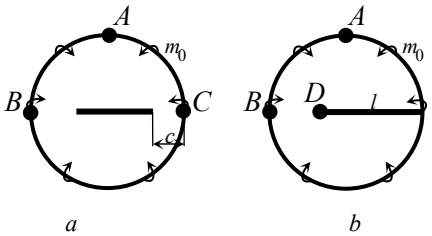


Рис. 3 Схема круговой плиты с (*a*) внутренней или (*b*) краевой трещиной

Fig. 3. Schematic diagram of the circular plate with a (*a*) internal of (*b*) edge crack

Таблица 2

Значения некоторых величин для различных значений отношения c / a_0 для круговой плиты с внутренней трещиной длины a_0

Table 2

Values of some quantities for different values of the ratio c / a_0 for a circular plate with an internal crack of length a_0

Величина	c / a_0					
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
M_s / m_0 в т. A	1,022	1,021	1,016	1,005	0,853	0,931
M_s / m_0 в т. B	1,285	1,218	1,172	1,139	1,191	1,174
M_s / m_0 в т. C	1,285	1,388	1,562	1,912	2,908	–
КИМ k_1^-	0,822	0,817	0,822	0,835	0,844	1,242
КИМ k_1^+	0,822	0,835	0,865	0,920	0,927	–

Таблица 3

Значения некоторых величин для различных значений отношения l / a_0 длины краевой трещины к радиусу диска

Table 3

Values of some quantities for different values of the ratio l / a_0 of the length of the edge crack to the radius of the disk

Величина	l / a_0					
	0,1	0,5	1,0	1,5	1,8	1,9
M_s / m_0 в т. A	1,001	1,001	0,931	1,018	1,011	2,125
M_s / m_0 в т. B	1,000	1,017	1,174	2,046	5,299	13,692
КИМ k_1^-	0,323	0,775	1,242	1,918	3,007	3,497

Как видно из данных табл. 2 и 3, при приближении внутренней трещины к контуру плиты значения изгибающих моментов M_s / m_0 около контура плиты и КИМ растут лишь при весьма малых длинах перемычки. В отличие от этого, велико влияние длины краевой трещины на значения этих изгибающих моментов и КИМ: с увеличением длины краевой трещины значения моментов около контура плиты в зоне вблизи перемычки и КИМ резко растут, достигая весьма больших значений при малых перемычках.

Большая концентрация моментов возникает и в диске с внутренними отверстиями при увеличении их размеров. Это видно из рис. 4, где для изготовленной из материала М2 круговой плиты радиуса a_0 с двумя симметрично расположенными круговыми отверстиями радиусов a_1 с центрами в точках $(-a_0/2;\ 0)$ и $(a_0/2;\ 0)$ изображены графики распределения моментов M_s / m_0 около контура левого отверстия.

Для круговой плиты радиуса a_0 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса a_1 (рис. 5) в табл. 4 приведены значения моментов M_s / m_0 в точках контура L_1 левого выема для некоторых значений отношения a_1 / a_0 в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от направления горизонтального диаметра против часовой стрелки.

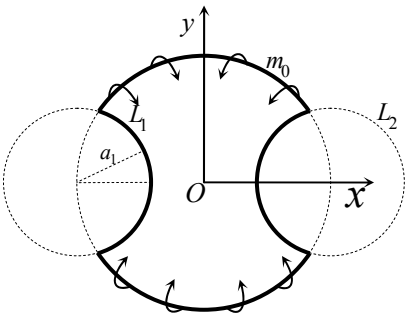


Рис. 4. Графики распределения моментов M_s / m_0 вблизи контура L_1 в круговом диске из М2 для некоторых значений отношения a_1 / a_0

Fig. 4. Graphs of the distribution of moments M_s / m_0 near contour L_1 in a circular disk made of material M2 for some values of a_1 / a_0

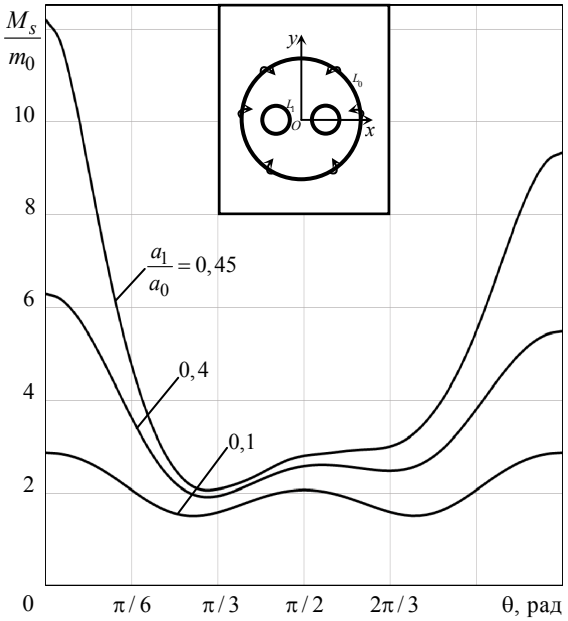


Рис. 5. Схема круговой плиты с двумя симметричными внешними выемами

Fig. 5. Schematic diagram of a circular plate with two symmetrical external recesses

Как видим, с ростом радиуса выема (с уменьшением длины перемычки между выемами) значения моментов около контуров выемов в зоне перемычки (при $\theta < \pi/6$) резко растут, незначительно изменяясь вдали от перемычки.

Для круговой плиты радиуса a_0 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса a_1 и централь-

ным отверстием радиуса a_3 (рис. 6) в табл. 5 приведены значения моментов M_s / m_0 в некоторых точках плиты в зависимости от отношения a_3 / a_0.

Таблица 4

Значения моментов M_s в точках контура L_1 выема для задачи ЭМУ

Table 4

Values of the moments M_s at the points of the recess L_1 for the problem of EME

θ, рад	a_1/a_0					
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9
0	2,809	2,681	2,666	3,023	3,721	6,144
π/12	2,614	2,492	2,462	2,715	3,174	4,483
π/6	2,054	1,954	1,899	1,958	2,077	2,324
π/4	1,507	1,426	1,354	1,301	1,280	1,261
π/3	1,348	1,258	1,171	1,094	1,062	1,030

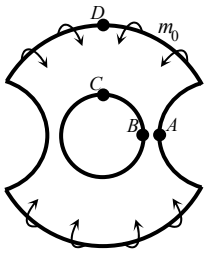


Рис. 6. Схема круговой плиты с двумя симметричными внешними выемами и центральным круговым отверстием

Fig. 6. Schematic diagram of a circular plate with two symmetrical external recesses and central circular hole

Таблица 5

Значения некоторых величин для различных значений отношения a_3 / a_0 радиуса внутреннего отверстия к радиусу диска

Table 5

Values of some quantities for different values of the ratio a_3 / a_0 of the radius internal hole to the radius of the disk

Величина	a_3 / a_0				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45
M_s в т. A	2,776	3,216	4,487	8,878	17,695
M_s в т. B	3,493	3,929	5,093	9,185	17,829
M_s в т. C	0,970	1,024	1,110	1,227	1,301
M_s в т. D	0,731	0,783	0,848	0,924	0,971

На рис. 7 для круговой плиты с внешним круговым контуром радиуса a_0 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса $a_1 = a_0 / 2$ с центрами на внешнем контуре и центральным круговым отверстием радиуса a_3 при изгибе под действием моментов m_0 по внешнему контуру с точностью до множителя m_0 приведены значения изгибающих моментов M_s / m_0 в точках контура центрального кругового отверстия для некоторых значений отношения a_3 / a_0 в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

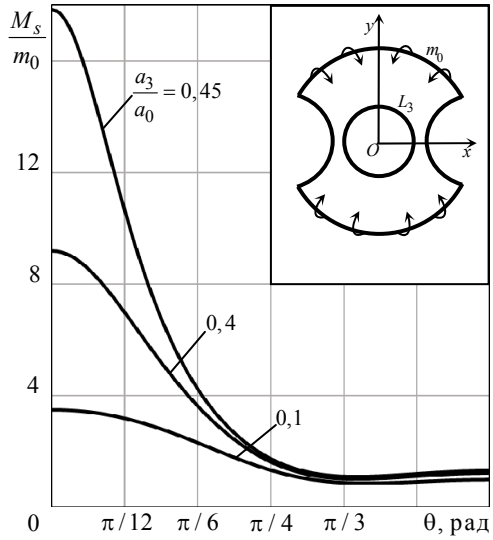


Рис. 7. Графики распределения моментов M_s / m_0 вблизи центрального контура L_3 в круговом диске с двумя симметричными круговыми выемами для некоторых значений отношения a_3 / a_0

Fig. 7. Graphs of the distribution of moments M_s / m_0 near the central contour L_1 in a circular disk with two symmetric circular recesses for some values of the ratio a_1 / a_0

Как видим, с ростом радиуса центрального отверстия значения моментов около контура отверстия в зоне перемычек (при $\theta < \pi / 6$) резко растут, незначительно изменяясь вдали от перемычек.

Заключение

Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [23; 24] решена задача об изгибе плиты с отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера за счет выполнения краевых условий ОМНК [25; 28; 29] задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений [30; 31]. Для круговой кольцевой плиты, для круговой плиты с внутренней или краевой трещиной, с двумя круговыми отверстиями или выемами, для кругового кольца с двумя выемами проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических постоянных материала плиты и геометрических характеристик отверстий, трещин и выемов.

Библиографический список

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: Иностр. лит., 1949. – 717 с.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин [и др.] – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – Vol. 9. – P. 1017–1029.
6. Srinivas S., Jiang Y.L. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.014
7. Vel S.S., Batra R.C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 240–251. DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/309
8. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–48. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.04
9. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. – С. 181–190. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 621 с.
11. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
12. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
13. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
14. Eringen A.C., Maugin, G.A. Electrodynamics of Continua I. – Springer, New York, 1990. – 436 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1
15. Eringen A.C. Theory of electromagnetic elastic plates // International journal of engineering science. – 1989. – Vol. 27, no. 4. – P. 363–375. DOI: 10.1016/0020-7225(89)90128-6
16. Galeş C., Baroiu N. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. 94, no. 1–2. – P. 55–71. DOI: 10.1002/zamm.201200219
17. Ieşan D., On the bending of piezoelectric plates with microstructure // Acta Mech. – 2008. – Vol. 198, no. 3. – P. 191–208. DOI: 10.1007/s00707-007-0527-8
18. Librescu L., Hasanyan D., Ambur D.R. Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // International journal of non-linear mechanics. – 2004. – Vol. 39, no. 5. – P. 723–739.
19. Xu S.-P., Wang W. Bending of piezoelectric plates with a circular hole // Acta Mech. – 2009. – Vol. 203. – P. 127–135. DOI: 10.1007/s00707-008-0025-7
20. Yang J. The Mechanics of Piezoelectric Structures. – Singapore: World Scientific, 2006. – 313 p. DOI: 10.1142/6057
21. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
22. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток. – 2011. – 232 с.
23. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
24. Калоеров С.А., Сероштанов А.В. Исследование изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 2. – С. 151–165.
25. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
26. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
27. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Мироненко А.Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013.– 440 с.
28. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
29. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
30. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, no. 4. – P. 1322–1342.
31. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, no. 4. – P. 1343–1362.
32. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
33. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002
34. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
35. Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338. DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

References

1. Berlincourt D., Curran D.R., and Jaffe H., Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers, Ed. by W. P. Mason, New York, Academic Press, *Physical Acoustics*, 1964, pp. 169-270.

2. Cady W.G. Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechancial Phenomena in Crystals. New York, *McGraw-Hill Book Company*, 1946, 806 p.

3. Bichurin M.I., Petrov V.M., Filippov D.A., et al., Magnetoelectric Composites, Moscow, *Akad. Estestv*., 2006.

4. Pyatakov A.P. Magnetoelectric Materials and Their Application in Practice, *Bul. Ros. Magnit. Obshchestva*, 2006, vol. 5, no. 2, pp.1-3.

5. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 1998, vol. 9., pp. 1017-1029.

6. Srinivas S., Jiang Y.L. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites, *Acta Mater.*, 2005, Vol. 53, pp. 4135-4142.

7. Vel, S.S., Batra, R.C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators, 2001, *Smart Mater. Struct.*, vol. 10., pp. 240-251. doi: 10.1088/0964-1726/10/2/309

8. Bochkarev, S.A., Lekomtsev, S.V. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells made of piezoelectric material, 2019, *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 2, pp. 35-48. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.0

9. Shlyakhin, D.A., Kalmova, M.A. The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder, 2021, *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 2, pp. 181-190. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.1

10. Landau L.D., Lifshits E.M. Elektrodinamika sploshnykh sred [Electrodynamics of continuous media]. Moskow, Nauka, 1982, 621 p.

11. Maugin G.A Continuum mechanics of electromagnetic solids, *Elsevier Science Pub.*, 1988, 598 p.

12. Novatskii V. Elektromagnitnye effekty v tverdykh telakh [Electromagnetic effects in solids]. Moscow, Mir, 1986, 160 p.

13. Parton V.Z., Kudriavtsev B.A. Elektromagnitouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electro-magneto-elasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies]. Moscow, Nauka, 1988, 472 p.

14. Eringen, A.C., Maugin, G.A. Electrodynamics of Continua I. New York, *Springer*, 1990, 436 p. doi: 10.1007/978-1-4612-3226-1

15. Eringen A.C. Theory of electromagnetic elastic plates, *International journal of engineering science*, 1989, vol. 27, no. 4, pp. 363-375.

16. Galeş, C., Baroiu, N. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity, 2014, *ZAMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* vol. 94, no. 1-2, pp. 55-71. doi: 10.1002/zamm.201200219

17. Ieşan, D., On the bending of piezoelectric plates with microstructure, 2008, *Acta Mech.*, vol. 198, no. 3, pp. 191-208. doi: 10.1007/s00707-007-0527-8

18. Librescu L.; Hasanyan D.; Ambur DR Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications, *International journal of non-linear mechanics*, 2004, vol. 39, no. 5, pp. 723-739.

19. Xu, S.-P., Wang, W. Bending of piezoelectric plates with a circular hole, 2009, *Acta Mech*., vol. 203., pp. 127–135. doi: 10.1007/s00707-008-0025-7

20. Yang, J. The Mechanics of Piezoelectric Structures. Singapore, *World Scientific*, 2006, 313 p. doi: 10.1142/6057

21. Lekhnitskii S.G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, *Holden-Day*, 1963, 404 p.

22. Kaloerov S.A., Petrenko A.V. Dvumernye zadachi elektromagnitouprugosti dlia mnogosviaznykh tel [Two-dimensional problems of electromagnetoelasticity for multiply connected bodies], Donetsk, Iugo-Vostok, 2011, 232 p.

23. Kaloerov S.A. Osnovnye sootnosheniia prikladnoi teorii izgiba tonkikh elektromagnitouprugikh plit [The main relations of the applied theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates], *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2022, no. 1, pp. 20–38.

24. Kaloerov, S.A., Seroshtanov, A.V., Bending of Thin Electromagnetoelastic Plates, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 308-320.

25. Kaloerov, S.A., Parshikova, O.A., Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates, *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 319-331.

26. Kaloerov, S.A., Goryanskaya, E.S., The two-dimensional stressed state of a multiconnected anisotropic body with cavities and cracks, *Journal of Mathematical Sciences*, 1997, vol. 84 no. 6, pp. 1497-1504.

27. Kaloerov S.A., Avdiushina E.V., Mironenko A. B. Kontsentratsiia napriazhenii v mnogosviaznykh izotropnykh plastinkakh [Stress concentration in multiply connected isotropic plates]. Donetsk, *DonNU publishing house*, 2013, 440 p.

28. Voevodin V.V. Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebry [Computational Basis of Linear Algebra], Moskov, Nauka, 304 p.

29. Forsythe J. E., Malcolm M. A., and Moler C. B., Computer Methods for Mathematical Computations, *Prentice-Hall*, 1977.

30. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008, vol. 29, no. 4, pp. 1322-1342.

31. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008, vol. 29, no. 4, pp. 1343-1362.

32. Kaloerov, S.A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media, *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 631-637.

33. Yamamoto, Y., Miya, K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures, Amsterdam, *Elsevier Science-North Holland*, 1987, 450 p.

34. Tian, W.-Y., Gabbert, U. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids, *Europ. J. Mech. Part A*, 2004, vol. 23, pp. 599-614.

35. Hou, P.F., Teng, G.-H., Chen, H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material, *Mech. Mater*, 2009, vol. 41., pp. 329-338.

Финансирование. Работа не имела финансовой поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work had no financial support.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.