Крылова Е.Ю., Саркисян С.О. Изучение электромеханического поведения графена на основе моментно-мембранной теории упругих пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. С. 54–67. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.06

Krylova E.Yu., Sargsyan S.H. Studying Graphene Electromechanical Behavior Based on the Elastic Plates Moment-Membrane Theory. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 4, pp. 54-67. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.06

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.06
УДК 539.3

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГРАФЕНА НА ОСНОВЕ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Е.Ю. Крылова[1], С.О. Саркисян[2]

[1]Саратовский национальный исследовательский университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Российская Федерация
[2]Ширакский государственный университет имени М. Налбандяна, Гюмри, Армения

О СТАТЬЕ

Получена: 07 апреля 2023 г.
Одобрена: 20 августа 2023 г.
Принята к публикации: 31 августа 2023 г.

Ключевые слова:

моделирование деформаций графена, моментно-мембранная теория упругих пластин, электрическое поле, задача механического поведения листа графена, статический прогиб, собственные частоты колебаний.

АННОТАЦИЯ

Создание графена как двумерного наноматериала открыло новую область исследований – применение его как функционального элемента в различных наноприборах современной техники. Чтобы открыть дорогу для такого применения, необходимо, прежде всего, изучить механические свойства и его поведение в различных условиях, под действием различных внешних факторов и научиться контролируемым образом манипулировать его поведением. Все это обусловливает необходимость и актуальность адекватного моделирования деформационных процессов графена, построение соответствующей континуальной теории, учитывающей не только эффекты масштаба, но и микроструктуру, и физические параметры кристаллической решетки графена.

Изучено поведение прямоугольного листа графена в электрическом поле. В работе для деформаций графена обосновывается применение модели поперечного изгиба моментно-мембранной линейной теории упругих пластин. Силы электрического происхождения моделируются посредством нормальной нагрузки, приложенной к лицевой поверхности пластины.

Проведено исследование влияния граничных условий, величины зазора между пластиной и затвором, разности потенциалов постоянного электрического поля, линейных размеров на статический поперечный изгиб графенового листа. Также решается задача о собственных колебаниях графенового листа. Показано, что частоты собственных линейных колебаний листа графена лежат в гигагерцевом диапазоне. В случае жесткой заделки частота собственных линейных колебаний значительно выше, чем в случае шарнирного закрепления торцов пластины. Установлено, что даже при малых прогибах изменение значения постоянного напряжения электрического поля оказывает существенное влияние на частоту собственных линейных колебаний графенового листа.

© ПНИПУ

© **Крылова Екатерина Юрьевна** – к. ф.-м. н., доцент, e-mail: kat.krylova@bk.ru.
Саркисян Самвел Оганесович – д. ф.-м. н., профессор, член-корр., e-mail: s_sargsyan@yahoo.com.

Ekaterina Yu. Krylova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, e-mail: kat.krylova@bk.ru.
Samvel H. Sargsyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: s_sargsyan@yahoo.com.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

STUDYING GRAPHENE ELECTROMECHANICAL BEHAVIOR BASED ON THE ELASTIC PLATES MOMENT-MEMBRANE THEORY

E.Yu. Krylova[1], S.H. Sargsyan[2]

[1]Saratov State University, Saratov, Russian Federation
[2]M. Nalbandyan State University of Shirak, Gyumri, Armenia

ARTICLE INFO

Received: 07 April 2023
Approved: 20 August 2023
Accepted for publication:
31 August 2023

Keywords:

graphene deformation modeling, moment-membrane theory of elastic plates, electric field, graphene sheet mechanical behavior problem, static deflection, natural oscillation frequencies..

ABSTRACT

Graphene being a two-dimensional nanomaterial created a new research area – its use as a functional element in various modern technology nanodevices. To open the way for such an application, it is necessary, first of all, to study the mechanical properties and its behavior under various conditions and learn how to manipulate them in a controlled way. All this necessitates an adequate graphene deformation simulations, the construction of an appropriate continuum theory that takes into account scale effects, microstructure and graphene crystal lattice physical parameters.

This work aims at studying a rectangular graphene sheet in an electric field. For graphene deformations, the application of the transverse bending model of the elastic plates of the moment-membrane linear theory is justified. Forces of the electrical origin are modeled by means of a normal load applied to the front plate surface.

A study was made of the influence of boundary conditions, the gap between the plate and the gate, the potential difference, and linear dimensions on the graphene sheet static transverse bending. The problem of graphene sheet natural vibrations is also solved. The graphene sheet vibration frequency lies in the GHz range. In the clamped boundary conditions case, the natural oscillations frequency is much higher than in the hinged supported case. Even at small deflections, a change in the constant voltage value has a significant effect on the graphene sheet natural frequency.

© PNRPU

Микроэлектромеханические системы (МЭМС): переключатели, приводы, датчики, резонаторы надежно вошли в современные реалии и решают ведущие проблемы во многих отраслях современной техники. Благодаря микроразмеру МЭМС способны анализировать информацию на атомном уровне [1; 2], но имеются ограничения по обнаружению объектов на субмикронном уровне. Наноэлектромеханические системы (НЭМС) благодаря уменьшению размеров чувствительных элементов и увеличению значений рабочих частот до гига- и даже террагерцевого диапазона обладают значительно большей чувствительностью.

Эксперименты [3], проведенные с графеном, показали его необычные свойства, благодаря которым в настоящее время графен находит самое широкое применение в современной технике. Графен – чрезвычайно прочный двумерный кристалл с электрическими свойствами, превосходящими свойства кремния с возможностью работать в диапазоне высоких частот, достигающем порядка террагерц. Обзор работ, посвященных исследованию механических свойств, устойчивости графена и углеродных нанотрубок, приведен в статье [4]. На основе графена были разработаны высокочувствительные датчики температуры, давления, газоанализаторы, биосенсоры, транзисторы нового поколения [5–12], используемые в различных областях, таких как биомедицина, мониторинг окружающей среды, сельское хозяйство, обрабатывающая промышленность, безопасность и т.д. [13–15].

МЭМС и НЭМС в основном представляют собой механический элемент – балку [16–21], пластину [22–27], возможно, с начальными неправильностями [28-30], или оболочку (УНТ) [31–33], колебания которого возмущаются посредством постоянного тока, переменного тока или их комбинацией.

Анализу амплитудно-частотных характеристик, статических и динамических откликов графеновых НЭМС, а также поведению графеновых структур под действием различных воздействий посвящено множество работ как российских, так и зарубежных авторов [34; 35], обзоры которых выходят регулярно [36–38]. Работы делятся на две группы.

В первой группе при исследовании процессов деформирования однослойной углеродной нанотрубки и листа графена непосредственно рассматривают атомарную или молекулярную природу строения этих наноструктур. В рамках данного подхода для численного моделирования процесса деформирования указанных наноструктур в настоящее время разработаны два метода: метод молекулярной динамики [39–42] и метод молекулярной механики [43–48]. Оба эти метода основаны на решении классических уравнений Ньютона движения атомов углерода в силовых полях межатомного взаимодействия. Метод молекулярной динамики в силу своей простоты (при интегрировании уравнений движения указанных наноструктур используется явная конечно-разностная схема) наиболее популярен, однако требует значительных вычислительных затрат. Метод мо-

лекулярной механики [43–47] можно разделить на стандартный метод, основанный на прямом использовании силовых полей атомных взаимодействий, и метод молекулярной структурной механики. По методу молекулярной структурной механики потенциальные энергии атомных взаимодействий аппроксимируются потенциальными энергиями балочных элементов. В основном рассматриваются балки Бернулли – Эйлера с круговым поперечным сечением. При этом выбираются соответствующие материальные и геометрические параметры балочных элементов, точно или приближённо моделирующих механические модули графена или углеродной однослойной нанотрубки. Таким путём в работах [43–47] получены наборы материальных и геометрических параметров силового поля и балочного элемента. Авторы изучали задачи деформирования, собственных колебаний и выпучивания однослойного листа графена или однослойной углеродной нанотрубки. Показано, что для достаточно больших размеров однослойных графеновых листов при изучении их колебаний и выпучивания можно использовать (понятно, с согласованными материальными и геометрическими параметрами) классические модели упругих тонких пластин.

Отметим, что структурный подход (называемый также «стержневым» или «дискретно-континуальным») для описания взаимодействия между атомами углерода впервые предложен в работе [49], и далее этот подход развит в работах [50–52]. Несомненным преимуществом стержневых моделей является, во-первых, хорошее развитие соответствующего математического аппарата, во-вторых, существование конечно-элементных компьютерных пакетов, которые дают возможность их использования при изучении наноструктур. Анализ деформационного поведения графена или углеродной нанотрубки, а также НЭМС на их основе проводится посредством моментной теории упругости со стеснённым вращением частиц [53; 54]. Для изучения масштабных эффектов, возникающих при деформации наноразмерных объектов, используются прикладные модели пластин или оболочек неклассической теории упругости: нелокальной, градиентной и др. [55–57]. При применении этих теорий весьма важен вопрос о правильном выборе механических и геометрических параметров соответствующих пластин и оболочек.

В работе [58] отмечается, что если в атомной модели однослойной нанотрубки (это можно сказать и для однослойного листа графена) учесть только силовое взаимодействие центрального характера между формирующими трубку атомами, то нанотубка (или лист графена) не имела бы изгибной жёсткости и была бы неустойчива. Тогда само существование однослойной нанотрубки (или листа графена) будет свидетельствовать о необходимости учёта моментного взаимодействия между её атомами. На основании этого вывода в работах [59–61] трёхмерная моментная теория упругости с независимыми полями перемещений и вращений устанавливается как континуальная модель деформационного поведения однослойной нанотрубки, а также листа графена.

Если между атомами в дискретной модели однослойной нанотрубки, как и для листа графена, предположить существование моментного взаимодействия, то понятно, что силовое взаимодействие между этими атомами будет нецентральным, и тогда наряду с усилием вдоль связи появляется поперечное усилие, что позволяет учесть направленность связей в ковалентных структурах [61].

Основная цель работы [62] заключается в построении континуальной модели деформационного поведения однослойного листа графена, принимая в основу структурный (стержневой) подход. Для реализации данной цели сначала строится соответствующая стержневая модель, основанная на деформации линейной атомной цепочки, когда между её атомами силовое взаимодействие имеет две компоненты (вдоль связи и поперечную составляющую), а также имеется моментное взаимодействие. Как силовому полю атомных взаимодействий в данном случае соответствует гармонический потенциал. На основе этой стержневой модели построена дискретно-континуальная модель однослойного листа графена и далее предельным переходом континуальная его модель. В итоге плотность потенциальной энергии деформации листа графена получается выраженной через физические параметры гармонического потенциала для углерода (которые в литературе известны). Сопоставление выражения плотности потенциальной энергии деформации графенового листа с плотностью потенциальной энергии деформации, так называемой моментно-мембранной теории упругих пластин [63; 64], показывает полное их совпадение. Сопоставление указанных выражений позволяет определить жёсткостные характеристики моментно-мембранной теории упругих пластин как для плоского напряжённого состояния, так и для поперечного изгиба, через физические параметры гармонического потенциала углерода.

Таким образом [63; 64], моменто-мембранная теория упругих пластин с определёнными жесткостными характеристиками установлена как континуальная модель для однослойного листа графена. Рассматривая весь процесс построения указанной континуальной теории, можем отметить, что она является адекватной (естественной) теорией, относящейся именно к однослойному листу графена. Как ранее было отмечено, классические или известные неклассические теории упругих пластин при их применении для описания деформационного поведения однослойного листа графена требуют выбора входящих в них механических и геометрических параметров для обеспечения близости к параметрам графена. Существенно отметить, что, так как при сравнении выражений плотностей потенциальных энергий деформаций прямо определяются жёсткостные характеристики, в построенной континуальной теории однослойного листа графена не используется понятие толщины.

Как континуальная теория моментно-мембранная теория упругих пластин открывает большие возможности для изучения различных прикладных задач статики, динамики и устойчивости однослойного листа графена.

В данной работе на основе модели поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин изучаются как статические задачи равновесия, так и задачи на собственные колебания прямоугольного листа графена, находящегося в поле одного неподвижного электрода.

1. Моментно-мембранная линейная теория упругих тонких пластин [63; 64]

Пластину будем рассматривать как трёхмерное тело. Посредством определённых гипотез трёхмерная задача моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [65] будет сведена к двумерной задаче о равновесии и деформации срединной плоскости пластины, нагружённой системой усилий и моментов, статически эквивалентной системе, приложенных к исходной пластине нагрузок.

Оси Ox и Oy расположим в срединной плоскости пластинки, ось z направим перпендикулярно вниз, если пластинка расположена горизонтально. Направление оси z в таком случае совпадает с направлением прогиба w.

Принятые в работах [63; 64] гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические:

1. Кинематическая гипотеза – это предположение о постоянстве всех компонент вектора перемещения $\overline{V}$ и вектора свободного поворота $\overline{\omega}$ по координате z (т.е. все они равномерно распределены по толщине пластинки):

$$\begin{gathered} V_i = u_i(x,y), \quad V_3 = w(x,y), \\ \omega_k = \Omega_k(x,y), \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,3. \end{gathered} \tag{1}$$

2. Статическая гипотеза: в соответствующих физических соотношениях можно пренебрегать напряжением σ_{33} относительно σ_{ii}; σ_{3i} – относительно σ_{i3}; моментным напряжением μ_{33} – относительно μ_{ii}; μ_{3i} – относительно μ_{i3}; $i = 1,2$.

3. Будем предполагать, что пластинка тонкая.

Отметим, что принятые гипотезы выражают асимптотические свойства решения трёхмерной граничной задачи моментной теории упругости в тонких областях [66].

На основании кинематической гипотезы (1) получим, что отличные от нуля компоненты тензоров деформации и изгибов кручений, а также компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений распределены по толщине пластинки равномерно (т.е. не зависят от координаты z).

Возникающие в нормальных к срединной плоскости сечениях напряжения и моментные напряжения создают усилия и моменты: T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}, L_{13}, L_{23} в случае плоского напряжённого состояния пластинки и N_{13}, N_{23}, L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21} в случае поперечного изгиба пластинки. Здесь N_{13}, N_{23} – перерезывающие усилия, T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} – тангенциальные усилия, L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, L_{13}, L_{23} – моменты от моментных напряжений.

Приведем основные системы уравнений моделей плоского напряженного состояния и поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин, которые получены в работах [63; 64].

Основная система уравнений для модели плоского напряжённого состояния моментно- мембранной теории упругих пластин (рис. 1).

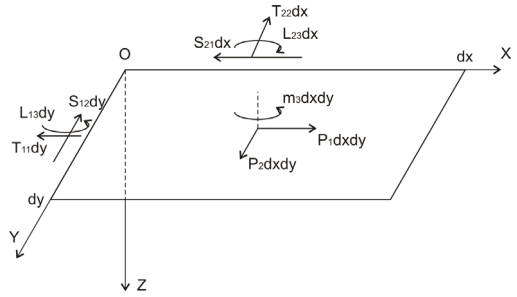


Рис. 1. Бесконечно малый элемент пластины в плоском напряженном состоянии

Fig. 1. An infinitesimal plate element in a plane stress state

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} = -p_1, \\ &\frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = -p_2, \\ &\frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + \left(S_{12} - S_{21}\right) = -m_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Физические соотношения упругости

$$T_{11} = \frac{E_*}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{11} + \nu\Gamma_{22}\right), \quad T_{22} = \frac{E_*}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{22} + \nu\Gamma_{11}\right),$$

$$S_{12} = C\left[\Gamma_{12} + \eta_1\Gamma_{21}\right], \; S_{21} = C\left[\Gamma_{21} + \eta_1\Gamma_{12}\right], \eta_1 = \frac{\mu_* - \alpha_*}{\mu_* + \alpha_*}, \tag{3}$$

$$L_{13} = B_* k_{13}, \quad L_{23} = B_* k_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \; \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \; \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \Omega_3, \\ &\Gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \; k_{23} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4}$$

Граничные условия

$$T_{11} = \overline{T}_{11}, \quad S_{12} = \overline{S}_{12}, \quad L_{13} = \overline{L}_{13}, \text{ при } x = \text{const},$$

или

$$u_1 = \overline{u}_1, \quad u_2 = \overline{u}_2, \quad \Omega_3 = \overline{\Omega}_3, \text{ при } x = \text{const}. \tag{5}$$

Могут иметь место также смешанные граничные условия. Здесь T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} – тангенциальные усилия, L_{13}, L_{23} – моменты от моментных напряжений, действующих в срединной плоскости, Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{12}, Γ_{21} – компоненты тензора тангенциальных деформаций, k_{13}, k_{23} – компоненты тензора кривизны-кручения, p_1, p_2 – тангенциальные внешние усилия, m_3 – внешний момент, E_*, $C=\mu_*+\alpha_*$, B_* – жесткостные характеристики, ν – коэффициент Пуассона, η_1 – безразмерный физический коэффициент. Отметим, что значения величин E_*, ν, C, η_1 и B_* для графена численно определены в работе [62] через физические параметры гармонического потенциала для углерода.

Отметим, что если принять $\alpha_*=0$, $B_*=0$, то система уравнений (2)–(4) переходит к системе уравнений классической теории плоского напряженного состояния упругих тонких пластин.

Основная система уравнений и граничные условия для модели поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин (рис. 2).

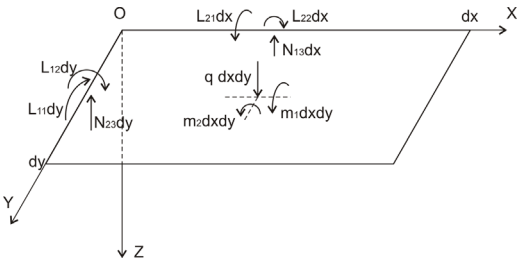


Рис. 2. Бесконечно малый элемент пластины в случае поперечного изгиба

Fig. 2. An infinitesimal plate element in the case of transverse bending

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{13}}{\partial x}+\frac{\partial N_{23}}{\partial y}=-q,\\&\frac{\partial L_{11}}{\partial x}+\frac{\partial L_{21}}{\partial y}+N_{23}=0,\\&\frac{\partial L_{12}}{\partial x}+\frac{\partial L_{22}}{\partial y}-N_{13}=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Физические соотношения упругости

$$\begin{aligned}&N_{13}=D_*\Gamma_{13},\quad N_{23}=D_*\Gamma_{23},\\&L_{11}=D'\left[k_{11}+\frac{1}{2}\nu_m\left(2k_{11}+k_{22}\right)\right],\\&L_{22}=D'\left[k_{22}+\frac{1}{2}\nu_m\left(2k_{22}+k_{11}\right)\right],\\&L_{12}=D'\left[k_{12}+\frac{1}{2}\nu_m k_{21}\right],\\&L_{21}=D'\left[k_{21}+\frac{1}{2}\nu_m k_{12}\right],\ \nu_m=\frac{\gamma_*-\varepsilon_*}{\gamma_*+\varepsilon_*}.\end{aligned}\tag{7}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}&\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x}+\Omega_2,\ \Gamma_{23}=\frac{\partial w}{\partial y}-\Omega_1,\ k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x},\\&k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial y},\ k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x},\ k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}.\end{aligned}\tag{8}$$

Граничные условия

$$N_{13}=\bar{N}_{13},\quad L_{11}=\bar{L}_{11},\quad L_{12}=\bar{L}_{12},\ \text{при}\ x=\text{const},$$

или

$$w=\bar{w},\quad \Omega_1=\bar{\Omega}_1,\quad \Omega_2=\bar{\Omega}_2,\ \text{при}\ x=\text{const}.\tag{9}$$

Могут иметь место и смешанные граничные условия. Здесь Γ_{13}, Γ_{23} – поперечные сдвиги, k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21} – кривизны и кручения срединной плоскости пластины, D_* – сдвиговая жёсткость, D' – изгибная жёсткость. Отметим, что значения D', D_*, ν_m для графена в работе [62] численно определены через физические параметры гармонического потенциала для углерода, q – интенсивность внешней распределенной нагрузки.

Так как компоненты вектора перемещений не зависят от координаты z, т.е. распределены по толщине пластины равномерно, следовательно, данная теория не имеет аналога в классической теории пластин.

2. Постановка задачи электромеханического изгиба листа графена

Рассмотрим прямоугольную графеновую пластину в поле одного неподвижного электрода. Пластина занимает область $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, на расстоянии g_0 находится электрод (рис. 3). На пластинку будет действовать внешняя распределённая нормальная к срединной плоскости нагрузка электростатического происхождения интенсивностью $q(x,y)$. Подробный вывод формулы для $q(x,y)$ осуществлён в работе [67], окончательно это формула выгладит так:

$$q(x,y)=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0V^2}{2\left(g_0-w\right)^2},\tag{10}$$

где ε_r – диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – электрическая постоянная, V – потенциал электрического поля.

Как видно из выражения (10), нагрузка $q(x,y)$ нелинейным образом зависит от прогиба $w(x,y)$. Так как далее будем рассматривать малые прогибы (линейную задачу), можем выражение (10) разложить в степенной ряд и удержать линейные члены относительно прогиба. Таким образом, выражение для нагрузки примет вид:

$$q=q_0+k_0w,\tag{11}$$

где

$$q_o = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2}{2g_0^2}, \quad k_0 = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2}{g_0^3}. \tag{12}$$

Если $V = \text{const}$, тогда $q_0 = \text{const}$, $k_0 = \text{const}$.

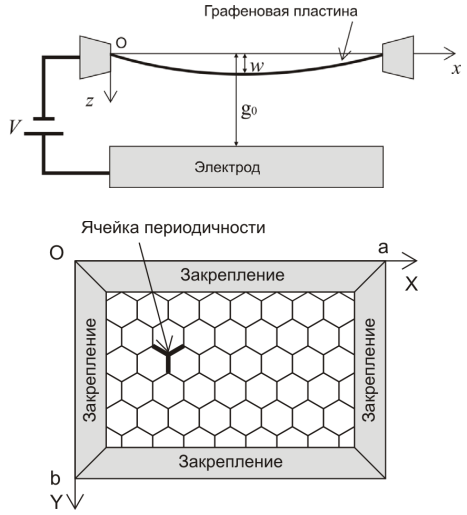


Рис. 3. Прямоугольная пластина в поле одного неподвижного электрода

Fig. 3. Rectangular plate in one fixed electrode field

Для изучения электромеханического изгиба листа графена в поле действия электростатического давления (11) в основу будем принимать модель поперечного изгиба моментно-мембранной линейной теории упругих пластин (6)–(9). Основную систему уравнений можно привести к следующей системе уравнений относительно функций $w = w(x,y)$, $\Omega_1 = \Omega_1(x,y)$, $\Omega_2 = \Omega_2(x,y)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta w + \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}\right) = -\frac{q}{D_*},\\
&\Delta\Omega_1 + \nu_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}\right) + \frac{D_*}{D'}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1\right) = 0,\\
&\Delta\Omega_2 + \nu_m \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}\right) - \frac{D_*}{D'}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2\right) = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\Delta(\cdot) = \dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$.

Следует отметить, что имеет место полная аналогия системы уравнений (13) с теорий изгиба упругой пластинки, построенной на основе гипотез С.П. Тимошенко [68].

3. Электромеханический изгиб графеновой нанопластины в случае шарнирного опирания ее контура

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания по контуру прямоугольной пластины:

$$\begin{aligned}
&w = 0,\ L_{12} = 0,\ \Omega_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a;\\
&w = 0,\ L_{21} = 0,\ \Omega_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b.
\end{aligned} \tag{14}$$

Введем функции φ и ψ следующим образом:

$$\Omega_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{15}$$

С учетом обозначений (15) система (13) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Delta w = \frac{q}{D'} - \frac{1}{D_*}\Delta q \quad - \text{бигармоническое уравнение},\\
&\Delta\psi - \tilde{k}^2\psi = 0 \quad - \text{уравнение Гельмгольца}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\tilde{k}^2 = \frac{D_*}{(1-\nu_m)D'}. \tag{17}$$

Функция φ определяется соответствующей формулой после определения функций w и ψ.

Можно показать, что если прямоугольная пластина по всему внешнему контуру шарнирно оперта (14), то только в этом случае функция $\psi \equiv 0$.

В таком случае основное уравнение поставленной задачи примет вид:

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D'} - \frac{1}{D_*}\Delta q. \tag{18}$$

Имея в виду формулу (11) для нагрузки q, когда $V = \text{const}$, уравнение (18) примет вид:

$$\Delta\Delta w + \frac{k_0}{D_*}\Delta w - \frac{k_0}{D'} w = \frac{q_0}{D'}. \tag{19}$$

Будем искать решение граничной задачи (19), (14) по методу Навье в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{nm} \operatorname{Sin}\frac{\pi n x}{a} \operatorname{Sin}\frac{\pi m y}{b}, \quad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b. \tag{20}$$

Граничные условия (14) в таком случае будут удовлетворяться тождественно, так что w_{nm} определяются из условия, что решение (20) удовлетворяет уравнению (19).

Разложим $q_0 = \text{const}$ в ряд:

$$q_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} \operatorname{Sin}\frac{\pi n x}{a} \operatorname{Sin}\frac{\pi m y}{b}, \tag{21}$$

где

$$q_{nm} = \frac{16 q_0}{nm\pi^2}, \quad n = 1,3,5,\ldots \quad m = 1,3,5,\ldots \tag{22}$$

Подставляя (20), (21) и (22) в уравнение (19), в итоге получим выражение для w_{nm}:

$$w_{nm} = \frac{16 q_{nm}}{nm\pi^2\left[D'\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)^2 - \frac{K_o D'}{D_*}\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right) - K_0\right]}, \tag{23}$$

$n = 1,3,5,\ldots \quad m = 1,3,5,\ldots$

Также решение поставленной задачи можно найти методом Бубнова – Галеркина, для этого выберем следующие разложения для входящих в задачу (19), (14) функций:

$$w=\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{M_1} w_{nm}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi nx}{a}\mathrm{Sin}\frac{\pi my}{b},$$
$$\Omega_1=\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{M_1} B_{nm}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi nx}{a}\mathrm{Cos}\frac{\pi my}{b},$$

$$\Omega_2=\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{M_1} C_{nm}\,\mathrm{Cos}\frac{\pi nx}{a}\mathrm{Sin}\frac{\pi my}{b},\quad 0\le x\le a,\ 0\le y\le b. \quad (24)$$

Легко убедиться, что функции (24) тождественно удовлетворяют граничным условиям шарнирного опирания (14).

Задавая значения n и m: $n=1,\ m=1$ и т. д., подставляя (24) в систему уравнений (13), применяя метод Бубнова – Галеркина, каждый раз будем получать систему алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов w_{nm}, B_{nm}, C_{nm}.

4. Электромеханический изгиб графеновой пластины в случае жесткой заделки по контуру

Рассмотрим граничные условия жесткой заделки по контуру прямоугольной пластины:

$$\begin{aligned} &w=0,\ \Omega_1=0,\ \Omega_2=0 \quad \text{при} \quad x=0,a;\\ &w=0,\ \Omega_1=0,\ \Omega_2=0 \quad \text{при} \quad y=0,b. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом случае будем рассматривать систему уравнений (13).

Следуя процедуре метода Бубнова – Галеркина, будем искать решение граничной задачи (13), (25) в виде:

$$w=A\left(1-\mathrm{Cos}\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\mathrm{Cos}\frac{2\pi y}{b}\right),$$
$$\Omega_1=B\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$\Omega_2=C\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b. \quad (26)$$

Разложения (26) удовлетворяют граничным условиям жесткой заделки (25). Подставляя (26) в (13) и применяя метод Бубнова – Галеркина, получим систему алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C.

5. Численные результаты

Приведем численные результаты для электромеханического статического изгиба шарнироно опертой и жестко защемленной графеновой пластины, а также решение задач на собственные колебания.

Численные значения жесткостей D_*, D' и безразмерного параметра ν_m получены в работе [62] и выражаются следующим образом: $D_*=86\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $D'=4{,}15\cdot10^{-10}$ Ннм, $\nu_m=-0{,}41$, электростатические постоянные имеют значения: $\varepsilon_r=1$, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{c^4A^2}{\text{м}^3\text{кг}}$, линейные размеры пластины: $a=b=20$ нм.

5.1. Электромеханический статический поперечный изгиб графенового листа

Изучена сходимость применяемых в работе методов. В табл. 1 приведены результаты расчета прогибов в центральной точке шарнирно опертой пластины в зависимости от значений n и m в разложениях (20) и (24). Пусть $g_0=8$ нм, $V=0.537$ В. Результаты показывают, что для исследования задачи в линейной постановке достаточно $n=m=3$.

Таблица 1

Сходимость полученных приближений

Table 1

Convergence of the obtained approximations

$n=m$	1	3	5	7	9	11
Метод Навье						
w, нм	0,032127	0,0314183	0,031473	0,0314625	0,0314654	0,0314644
Метод Бубнова – Галеркина						
w, нм	0,0321313	0,0314251	0,031480	0,0314694	0,0314682	0,0314691

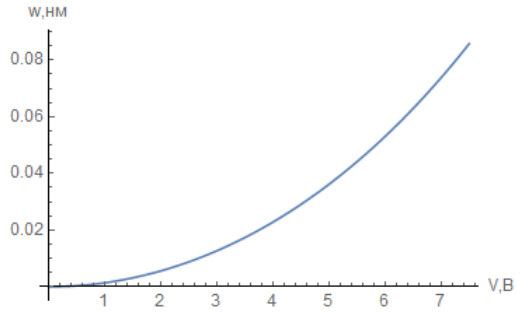
Графики зависимости прогиба в центральной точке пластины от напряжения эклектического поля приведены на рис. 4: *a* – жесткая заделка, *b* – шарнирное опирание.

На рис. 5–7 приведены эпюры прогибов w и поверхности распределения значений углов поворота Ω_1, Ω_2 и моментов от моментных напряжений L_{12}, L_{21}. В зависимости от условий закрепления торцов пластины при $g_0=1$ нм. Данные рис. 5–7 подтверждают выполнение граничных условий, а следовательно, верность выбора представления искомых функций в методе Бубнова – Галеркина.

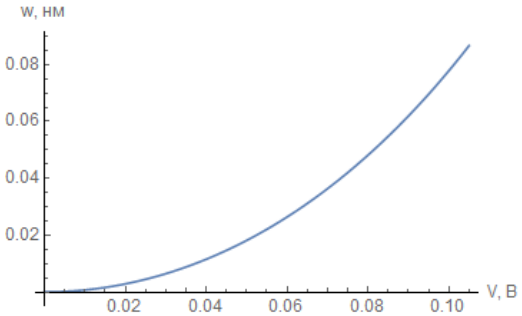
5.2. Собственные частоты

Для расчета собственной частоты линейных изгибных колебаний рассматриваемой пластины добавим в уравнение относительно функции прогиба системы (13) инерционный член:

$$\Delta w+\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}\right)=-\frac{q}{D_*}+\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$
$$\Delta\Omega_1+\nu_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}\right)+\frac{D_*}{D'}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\Omega_1\right)=0, \quad (27)$$
$$\Delta\Omega_2+\nu_m\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}\right)-\frac{D_*}{D'}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\Omega_2\right)=0,$$



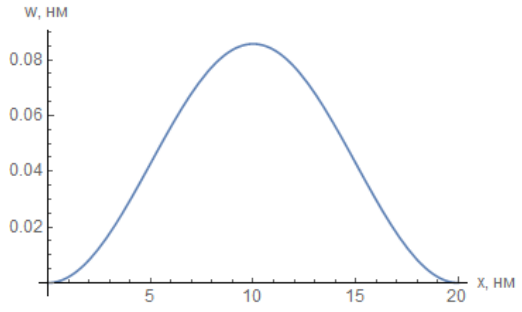
a



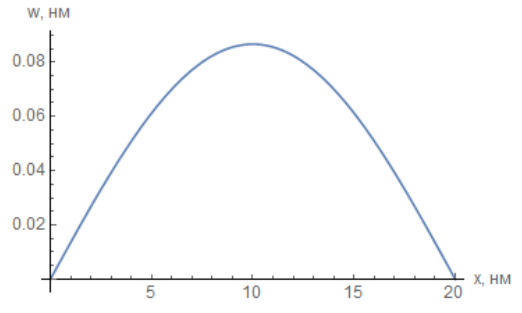
b

Рис. 4. Графики зависимости прогиба в центральной точке пластины от напряжения эклектического поля: *a* – жесткая заделка; *b* – шарнирное опирание

Fig. 4. Deflection dependence graphs at the plate central point on the stress: *a* – clamped boundary conditions; *b* – hinged supported boundary conditions



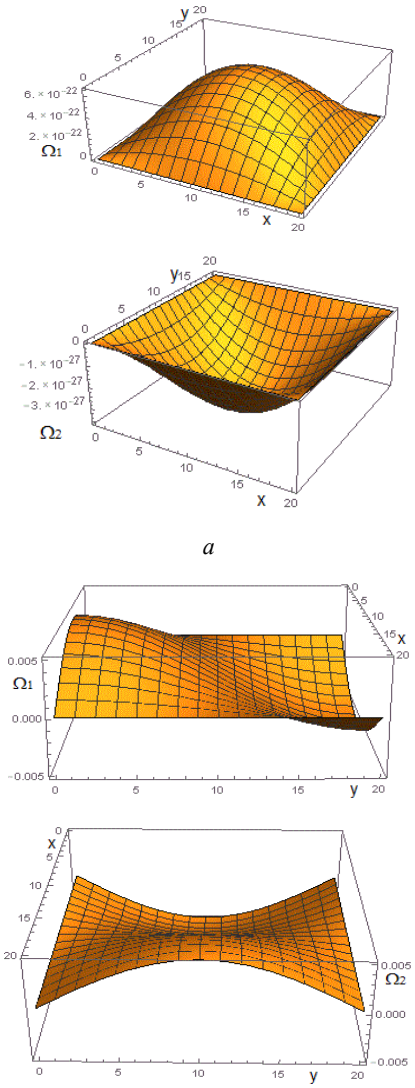
a



b

Рис. 5. Эпюра прогиба: *a* – жесткая заделка; *b* – шарнирное опирание

Fig. 5. Deflection plot: *a* – clamped boundary conditions; *b* – hinged supported boundary conditions



a

b

Рис. 6. Поверхности распределения значений углов поворота Ω_1, Ω_2 : *a* – жесткая заделка; *b* – шарнирное опирание

Fig. 6. Distribution surfaces of values rotation angles Ω_1, Ω_2 : *a* – clamped boundary conditions; *b* – hinged supported boundary conditions

где ρ_0 – поверхностная плотность листа графена, значение которой приведено в работах [62; 69], уточненное значение этой величины получено в работе [45]:

$$\rho_0 = 0,76 \cdot 10^{-24} \ \frac{\text{кг}}{\text{нм}^2}.$$

Следуя методике, предложенной в работе [70], будем искать значение частоты собственных линейных колебаний пластины методом Бубнова – Галеркина, для этого представим функции, входящие в уравнения, в следующем виде:

– жесткая заделка:

$$w = A\left(1 - \text{Cos}\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 - \text{Cos}\frac{2\pi y}{b}\right)\text{Sin}\,\omega t,$$

$$\Omega_1 = B\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\mathrm{Sin}\,\omega t,$$

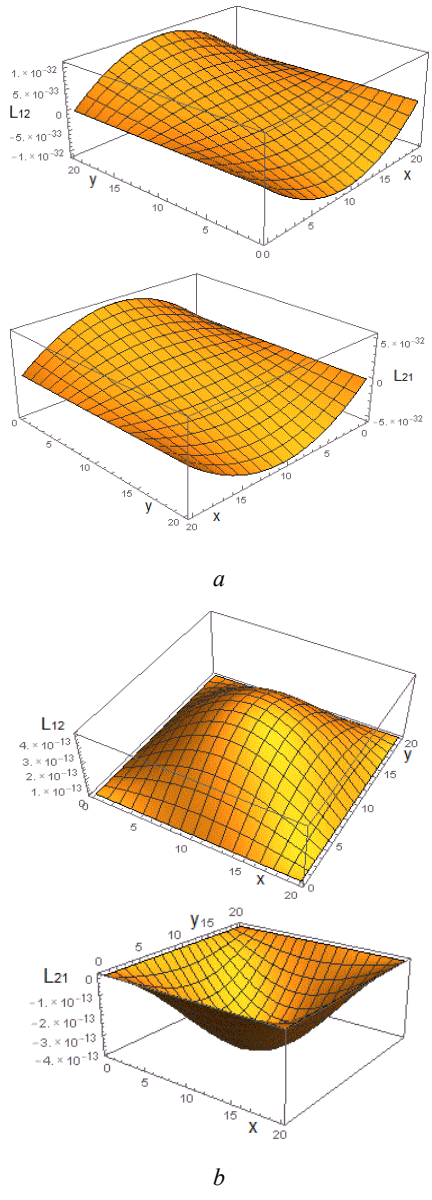
$$\Omega_2 = C\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\mathrm{Sin}\,\omega t. \qquad (28)$$

– шарнирное опирание:

$$w = A\,\mathrm{Sin}\frac{\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{\pi y}{b}\mathrm{Sin}\,\omega t\,,$$

$$\Omega_1 = B\,\mathrm{Sin}\frac{\pi x}{a}\mathrm{Cos}\frac{\pi y}{b}\mathrm{Sin}\,\omega t\,, \qquad (29)$$

$$\Omega_2 = C\,\mathrm{Cos}\frac{\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{\pi y}{b}\mathrm{Sin}\,\omega t.$$



a

b

Рис. 7. Поверхности распределения значений моментов от моментных напряжений L_{12}, L_{21}: *a* – жесткая заделка; *b* – шарнирное опирание

Fig. 7. Distribution surfaces of moment values from moment stresses L_{12}, L_{21}: *a* – clamped boundary conditions; *b* – hinged supported boundary conditions

Здесь A, B, C – постоянные. Подставляя выражения (28) или (29) в систему уравнений (27) и применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к частотному уравнению, которое получается из равенства нулю определителей соответствующих однородных алгебраических уравнений.

В табл. 2 приведены значения собственной частоты основного тона линейных колебаний для квадратной графеновой пластины в зависимости от длины ее стороны и граничных условий без влияния электростатического поля. Показано, что значение частоты лежит в гигагерцевом диапазоне, в случае жесткой заделки частота собственных колебаний существенно выше, чем при шарнирном опирании.

В табл. 3 приведены значения собственной частоты основного тона линейных колебаний пластины размером 20×20 нм в зависимости от значения постоянного напряжения электрического поля. Зазор в этом случае: $g_0 = 1$ нм.

Таблица 2

Собственная частота без учета влияния электростатического поля (ГГц)

Table 2

Natural frequency without taking into account the electrostatic field influence (GHz)

5×5 нм	10×10 нм	20×20 нм	25×25 нм
Шарнирное опирание			
61,97	15,52	3,88	2,48
Жесткая заделка			
1161,76	580,88	290,44	235,35

Таблица 3

Собственная частота с учетом влияния напряжения электростатического поля (ГГц)

Table 3

Natural frequency taking into account the electrostatic field influence (GHz)

Жесткая заделка			Шарнирное опирание	
V, В	ω_0, ГГц		V, В	ω_0, ГГц
0	290,44		0	3,88
2,5	289,02		0,035	3,86
5	284,71		0,07	3,79
7,5	277,37		0,105	3,68

Из данных табл. 3 видно, что рост постоянного напряжения электрического поля уменьшает значение собственной частоты.

Заключение

На основании принципиально новой моментно-мембранной теории упругих пластин, позволяющей учесть микроструктуру и физические параметры кристаллической решетки графена, изучены статическая

задача о поведении прямоугольного листа графена с электрическим приводом и задача о его собственных колебаниях. Получены значения основного тона частоты линейных колебаний графеновой пластины в зависимости от ее размеров, граничных условий и значения постоянного напряжения электрического поля. Показано, что собственные частоты находятся в гигагерцевом диапазоне. Приведенные результаты будут полезны при проектировании и анализе режимов работы НЭМС, основанных на графеновых пластинах.

Библиографический список

1. Ghayesh M.H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – Vol. 109. – P. 220–234. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.11.043

2. Farokhi H., Ghayesh M.H. On the dynamics of imperfect shear deformable microplates // International Journal of Engineering Science. – 2018. – Vol. 133. – P. 264–283. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.04.011

3. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphen // Nature Materials. – 2007. – № 6. – P. 183–191. DOI: 10.1038/nmat1849

4. Аннин Б.Д., Баимова Ю.А., Мулюков Р.Р. Механические свойства, устойчивость, коробление графеновых листов и углеродных нанотрубок (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 5(363). – С. 175–189. DOI: 10.15372/PMTF20200519

5. Carbon nanotubes: Sensor properties. A review / I.V. Zaporotskova, N.P. Boroznina, Y.N. Parkhomenko, L.V. Kozhitov // Mod. Electron. Mater. - 2016. – Vol. 2. – P. 95–105. DOI: 10.1016/j.moem.2017.02.002

6. Meyyappan M. Carbon Nanotube-Based Chemical Sensor // Small J. – 2016. – Vol. 12. – P. 2118–2129. DOI: 10.1002/smll.201502555

7. SWCNT-Pt-P2O5-Based Sensor for Humidity Measurements / E.I. Ionete, S.-I. Spiridon, B.F. Monea, D. Ebrasu-Ion, A. Vaseashta // IEEE Sens. J. – 2016. - Vol. 16. – P. 7593–7599. DOI: 10.1109/JSEN.2016.2603478

8. A Room Temperature Gas Sensor Based on Sulfonated SWCNTs for the Detection of NO and NO2 / E.I. Ionete, S.-I. Spiridon, B.F. Monea, E. Stratulat // Sensors. – 2019. – Vol. 19. – P. 1116. DOI: 10.3390/s19051116

9. Nazaria A., Faezb R., Shamlooa H. Modeling comparison of graphene nanoribbon field effect transistors with single vacancy defect // Superlattices and Microstructures. – 2016. – Vol. 97. – P. 28–45. DOI: 10.1016/j.spmi.2016.06.008

10. Performance metrics of current transport in pristine graphene nanoribbon field-effect transistors using recursive non-equilibrium Green's function approach / K.L. Wong, M.W. Chuan, A. Afiq Hamzah, S. Rusli [et. al.] // Superlattices and Microstructures. – 2020. – Vol. 145. – P. 106624. DOI: 10.1016/j.spmi.2020.106624

11. Impact of phonon scattering mechanisms on the performance of silicene nanoribbon field-effect transistors / M.W. Chuan, M.A. Riyadi, A. Hamzah [et. al.] // Results in Physics. – 2021. – Vol. 29. – P. 104714. DOI: 10.1016/j.rinp.2021.104714

12. Кулакова И.И., Лисичкин Г.В. Биосенсоры на основе графеновых наноматериалов // Вестник Московского университета. Серия 2: Химия. – 2022. – Т. 63, № 6. – С. 375–394.

13. Epitaxial graphene gas sensors on SiC substrate with high sensitivity / C. Yu [et al.] // Journal of Semiconductors. – 2020. – Vol. 41 (3). – P. 032101. DOI: 10.1088/1674-4926/41/3/032101

14. Recent progress of toxic gas sensors based on 3d graphene frameworks / Q. Dong [et al.] // Sensors. – 2021. – Vol. 21(10). – P. 3386. DOI: 10.3390/s21103386

15. The recent progress of MEMS/NEMS resonators / L. Wei [et al.] // Micromachines. – 2021. – Vol. 12 (6). – P. 724. DOI: 10.3390/mi12060724

16. Mozhgova N., Lukin A., Popov I. Model of a Micromechanical Modal-Localized Accelerometer with an Initially Curvedmicrobeam as a Sensitive Element // Microactuators, Microsensors and Micromechanisms: MAMM 2022. – Cham: Springer International Publishing, – 2022. – P. 94–118. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4_7

17. Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements / N.F. Morozov [et al.] // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2022. – Vol. 138. – P. 103852. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103852

18. Ilyas S., Younis M.I. Theoretical and experimental investigation of mode localization in electrostatically and mechanically coupled microbeam resonators // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2020. – Vol. 125. – P. 103516. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103516

19. Differential Resonant MEMS Accelerometer: Synchronization Characteristics of Weakly Coupled Microbeam Sensing Elements / D.A. Indeitsev [et al.]. – 2022. DOI: 10.13140/РГ.2.2.36579.84004

20. Автоколебательный режим нанорезонатора / Д.А. Индейцев, О.С. Лобода, Н.Ф. Морозов, Л.В. Штукин // Физическая мезомеханика. 2016. – Т. 19, № 5. – С. 23–28.

21. Дифференциальный графеновый резонатор как детектор массы / И.Е. Берлинский, Д.А. Индейцев, Н.Ф. Морозов, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин // Известия РАН. МТТ. – 2015. – № 2. – С. 20–29.

22. Karimipour I., Beni Y.T., Akbarzadeh A.H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2019. – Vol. 78. – P. 104856. DOI: 10.1016/j.cnsns.2019.104856

23. Karimipour I., Tadi Beni Y., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2020. – Vol. 42. – P. 1–22. DOI: 10.1007/c40430-020-02490-4

24. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate / Karami M., Kazemi A., Vatankhah R., Khosravifard A. // JVC/Journal of Vibration and Control. – 2021. – Vol. 27(11-12). – P. 1353–1369. DOI: 10.1177/1077546320940916

25. Ghayesh M.H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – Vol. 109. – P. 220–234. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.11.043

26. Saghir S., Younis M.I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // Acta Mechanica. – 2018. – Vol. 229(7). – P. 2909–2922. DOI: 10.1007/s00707-018-2141-3

27. Детектор модулированного терагерцового излучения на основе графеновых нанолент / Ю.В. Стебунов, В.Г. Лей-

ман, А.В. Арсенин [и др.] // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – № 7. – С. 5.

28. Saghir S., Younis M.I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // Acta Mechanica. – 2018. – Vol. 229. – P. 2909–2922. DOI: 10.1007/s00707-018-2141-3

29. Ghayesh M.H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – Vol. 109. – P. 220–234. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.11.043

30. Nonlinear forced vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plate with global and localized geometrical imperfections / X. Chen [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 93. – P. 443–466. DOI: 10.1016/j.apm.2020.12.033

31. Вынужденные колебания углеродной нанотрубки с током эмиссии в электромагнитном поле (01) / С.В. Булярский, А.А. Дудин, А.П. Орлов [и др.] // Журнал технической физики. – 2017. – Т. 87, № 11. – С. 1624–1627.

32. Резонанс углеродной нанотрубки с током в электромагнитном поле / С.В. Булярский, А.А. Дудин, А.П. Орлов [и др.] // Нано- и микросистемная техника. – 2017. – Т. 19, № 7. – С. 395–398. DOI: 10.17587/nmst.19.395-398

33. Собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок / С.В. Дмитриев, И.Р. Сунагатова, М.А. Ильгамов, И.С. Павлов // Журнал технической физики. – 2021. – Т. 91, № 11. – С. 1732–1737. DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21

34. Optical-Thermally Excited Graphene Resonant Mass Detection: A Molecular Dynamics Analysis / X. Xiao [et al.] // Nanomaterials. – 2021. – Vol. 11, № 8. – P. 1924. DOI: 10.3390/nano11081924

35. Новые графеновые нанотехнологии манипулирования молекулярными объектами / О.Е. Глухова, Г.В. Савостьянов, М.М. Слепченков, В.В. Шунаев // Письма в Журнал технической физики. – 2016. – Т. 42, № 11. – С. 56–63.

36. Effect of mass on the dynamic characteristics of single- and double-layered graphene-based nano resonators / M. Makwana [et al.] // Materials. – 2022. – Vol. 15, № 16. – P. 5551. DOI: 10.3390/ma15165551

37. A review on graphene-based nano-electromechanical resonators: Fabrication, performance, and applications / Y. Xiao [et al.] // Micromachines. – 2022. – Vol. 13, № 2. – P. 215. DOI: 10.3390/mi13020215

38. Research Progress of Graphene Nano-Electromechanical Resonant Sensors – A Review / S.C. Fan [et al.] // Micromachines. – 2022. – Vol. 13, № 2. – P. 241. DOI: 10.3390/mi13020241

39. Allen M.P., Tildesley D.I. Computer simulation of liquids. – Oxford Science Publications, 2000. – 385 p.

40. Попов А.М. Вычислительные нанотехнологии. – М.: КНОРУС, 2017. – 312 с.

41. Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator / J.W. Kang [et al.] // Current Applied Physics. – 2013. – Vol. 13(4). – P. 789–794. DOI: 10.1016/j.cap.2012.12.007

42. Wang J., Li T.T. Molecular dynamics simulation of the resonant frequency of graphene nanoribbons // Ferroelectrics. – 2019. – Vol. 549, № 1. – P. 87–95. DOI: 10.1080/00150193.2019.1592547

43. Коробейников С.Н., Алехин В.В, Бабичев А.В. Молекулярная механика однослойных графеновых листов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – № 2(44). – С. 89–94. DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.009

44. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Simulation of mechanical parameters of graphene using the DREIDING force field // ActaMechanica. – 2018. – Vol. 229, № 6. – P. 2343–2378. DOI: 10.1007/s00707-018-2115-5

45. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // International Journal of Engineering Science. – 2018. – Vol. 133. – P. 109–131. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.09.001

46. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Advanced nonlinear buckling analysis of a compressed single layer graphene sheet using the molecular mechanics method // International Journal of Mechanical Sciences. – 2021. – Vol. 209. – P. 106703 (30 pages). DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106703

47. Korobeynikov S.N. Discussion on “Nonlinear buckling analysis of double-layered graphene nanoribbons based on molecular mechanics” by Namnabat et al. // Carbon Letters. – 2021. – Vol. 31, № 6. – P. 1365–1366. DOI: 10.1007/s42823-021-00233-6

48. Квашнин А.Г., Сорокин П.Б., Квашнин Д.Г. Теоретическое исследование механических свойств графеновых мембран методом молекулярной механики // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 426–431.

49. Equivalent Continuum Modeling of Nano-structured Mstierials / G.M. Odegard, T.S. Gates, L.M. Nicholson, K.E. Wise // NASA Langley Reserch Center. Technical Memorandum NASA / TM. – 2001. – 210863–2001.

50. Li C.A., Chou T.W. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes // Int. J. Solids Struct. – 2003. – Vol. 40. – P. 2487–2499.

51. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки // Известия РАН. МТТ. – 2005. – № 4. – С. 57–74.

52. Wan H, Delale F. A structural mechanics approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes // Mechanica. – 2010. – Vol. 45. – P. 43–51.

53. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей / Е.Ю. Крылова, И.В. Папкова, О.А. Салтыкова, В.А. Крысько // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Vol. 21 (1). – P. 48–59. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59

54. Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига / Е.Ю. Крылова, И.В. Папкова, Т.В. Яковлева, В.А. Крысько // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2019. – Vol. 19 (3). – P. 305–316. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316

55. Nuhu A.A., Safaei B. A comprehensive review on the vibration analyses of small-scaled plate-based structures by utilizing the nonclassical continuum elasticity theories // Thin-Walled Structures. – 2022. – Vol. 179. – P. 109622. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109622

56. Ansari R., Sahmani S., Arash B. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets // Physics Letters A. – 2010. – Vol. 375. – P. 53–62.

57. A review of size-dependent continuum mechanics models for micro- and nano-structures / Mir Abbas Roudbari, Tahereh Doroudgar Jorshari, Chaofeng Lu, Reza Ansari, Abbas Z. Kouzani, Marco Amabili // Thin-Walled Structures. – 2022. – Vol. 170. – P. 108562. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108562

58. Об определении упругих модулей наноструктур, теоретический расчет и методика экспериментов / Е.А. Иванова, Н.Ф. Морозов, Б.Н. Семенов, А.Д. Фирсова // Известия РАН. МТТ. – 2005. – № 4. – С. 75–84.

59. Иванова Е.А, Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 4. – С. 595–615.

60. Применение моментного взаимодействия к построению устойчивой модели кристаллической решетки графита / И.Е. Беринский, Е.А. Иванова, А.М. Кривцов, Н.Ф. Морозов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2007. – № 5. – С. 6–16.

61. Современные проблемы механики. Механические свойства ковалентных кристаллов: учеб. пособие / И.Е. Беринский [и др.]; под общ. ред. А.М. Кривцова, О.С. Лобода. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 160 с.

62. Саркисян С.О. Стержневая и континуально-моментная модели деформаций двумерных наноматериалов // Физическая мезомеханика. – 2022. – Т. 25, № 2. – С. 109–121. DOI: 10.55652/1683-805X_2022_25_2_109

63. Саркисян С.О. Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» // Физическая мезомеханика. – 2020. – Т. 23, № 4. – С. 13–19. DOI: 10.24411/1683-805X-2020-14002

64. Саркисян С.О. Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2022. – № 1. – С. 38–47.

65. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford: Perganon, 1986. – 383 p.

66. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика (ПММ). – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 129–147.

67. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Исследование устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники // Нелинейная динамика машин – School-NDM 2017: сборник IV Международной Школы-конференции молодых ученых, Москва, 18–21 апреля 2017 года. – М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, 2017. – С. 313–322.

68. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – Киев: Наукова думка, 1977. – 183 с.

69. Баимова Ю.А., Мулюков Р.Р. Графен, нанотрубки и другие углеродные наноструктуры. – М.: РАН, 2018. – 212 с.

70. Вольмир А.С Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. – 432 с.

References

1. Ghayesh M. H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, Vol. 109, pp. 220-234. doi: 10.1016/j.ymssp.2017.11.043

2. Farokhi H., Ghayesh M. H. On the dynamics of imperfect shear deformable microplates. *International Journal of Engineering Science*, 2018, Vol. 133, pp. 264-283. doi: 10.1016/j.ijengsci.2018.04.011

3. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphen. *Nature Materials*, 2007, №6, pp. 183–191. doi: 10.1038/nmat1849

4. Annin B.D., Baimova Y.A., Mulyukov R.R. Mechanical properties, stability, and buckling of graphene sheets and carbon nanotubes (review) // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, Vol. 61, № 5(363), pp. 175-189. doi: 10.15372/PMTF20200519

5. Zaporotskova I.V.; Boroznina N.P.; Parkhomenko Y.N.; Kozhitov L.V. Carbon nanotubes: Sensor properties. A review. *Mod. Electron. Mater*, 2016, Vol. 2, pp. 95–105. doi:10.1016/j.moem.2017.02.002

6. Meyyappan M. Carbon Nanotube-Based Chemical Sensor. *Small J,* 2016, Vol. 12, pp. 2118–2129. doi: 10.1002/smll.201502555

7. Ionete E.I.; Spiridon S.-I.; Monea B.F.; Ebrasu-Ion D.; Vaseashta A. SWCNT-Pt-P2O5-Based Sensor for Humidity Measurements. *IEEE Sens. J*, 2016, Vol. 16, pp. 7593–7599. doi:10.1109/JSEN.2016.2603478

8. Ionete E.I.; Spiridon S.-I.; Monea B.F.; Stratulat E.A Room Temperature Gas Sensor Based on Sulfonated SWCNTs for the Detection of NO and NO2. *Sensors*, 2019, Vol. 19, pp. 1116. doi:10.3390/s19051116

9. Nazaria A., Faezb R., Shamlooa H. Modeling comparison of graphene nanoribbon field effect transistors with single vacancy defect. *Superlattices and Microstructures,* 2016, Vol. 97, pp. 28-45. doi: 10.1016/j.spmi.2016.06.008

10. Wong K.L., Chuan M.W., Afiq Hamzah A., Rusli S., et. al. Performance metrics of current transport in pristine graphene nanoribbon field-effect transistors using recursive non-equilibrium Green's function approach. *Superlattices and Microstructures*, 2020, Vol. 145, pp. 106624. doi: 10.1016/j.spmi.2020.106624

11. Chuan M.W., Riyadi M.A., Hamzah A., et. al. Impact of phonon scattering mechanisms on the performance of silicene nanoribbon field-effect transistors. *Results in Physics,* 2021, Vol. 29, pp. 104714. doi: 10.1016/j.rinp.2021.104714

12. Kulakova I. I., Lisichkin G. V. Biosensors based on graphene nanomaterials. *Moscow University Chemistry Bulletin*, 2022, Vol. 63, № 6, pp. 375-394.

13. Yu C. et al. Epitaxial graphene gas sensors on SiC substrate with high sensitivity. *Journal of Semiconductors*, 2020, Vol. 41 (3), pp. 032101. doi:10.1088/1674-4926/41/3/032101

14. Dong Q. et al. Recent progress of toxic gas sensors based on 3d graphene frameworks. *Sensors,* 2021, Vol. 21(10), pp. 3386. doi:10.3390/s21103386

15. Wei L. et al. The recent progress of MEMS/NEMS resonators. *Micromachines,* 2021, Vol. 12 (6), pp. 724. doi: 10.3390/mi12060724

16. Mozhgova N., Lukin A., Popov I. Model of a Micromechanical Modal-Localized Accelerometer with an Initially Curvedmicrobeam as a Sensitive Element. *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms: MAMM 2022. Cham : Springer International Publishing*, 2022, pp. 94-118. doi: 10.1007/978-3-031-20353-4_7

17. Morozov N. F. et al. Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, Vol. 138, pp. 103852. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103852

18. Ilyas S., Younis M. I. Theoretical and experimental investigation of mode localization in electrostatically and mechanically coupled microbeam resonators. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 2020, Vol. 125, pp. 103516. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103516

19. Indeitsev D. A. et al. Differential Resonant MEMS Accelerometer: Synchronization Characteristics of Weakly Coupled

Microbeam Sensing Elements, 2022. doi: 10.13140/РГ.2.2.36579.84004

20. Indeitsev D. A. et al. Self-Oscillating Mode Of A Nano-resonator. *Physical Mesomechanics*, 2016, Vol. 19, № 5, pp. 23-28.

21. Berinskii I.E., Indeitsev D.I., Morozov N.F., Skubov D.Y., Shtukin L.V Differential Graphene Resonator As A Mass Detector. *Mechanics of Solids*. 2015, T. 50. № 2, pp. 127-134.

22. Karimipour I., Beni Y. T., Akbarzadeh A. H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, Vol. 78, pp. 104856. doi:10.1016/j.cnsns.2019.104856

23. Karimipour I., Tadi Beni Y., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, Vol. 42, pp. 1-22. doi:10.1007/c40430-020-02490-4

24. Karami M., Kazemi A., Vatankhah R., Khosravifard A. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate. *JVC/Journal of Vibration and Control*, 2021, Vol. 27(11-12), pp. 1353-1369. doi:10.1177/1077546320940916

25. Ghayesh M.H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, Vol.109, pp. 220-234. doi:10.1016/j.ymssp.2017.11.043

26. Saghir S., Younis M.I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation. *Acta Mechanica*, 2018, Vol. 229(7), pp. 2909-2922. doi:10.1007/s00707-018-2141-3

27. Stebunov Yu. V., Lejman V. G., Arsenin A. V. Detektor modulirovannogo teragercovogo izlucheniya na osnove grafenovyh nanolent. *Zhurnal radioelektroniki, 2012,* № 7, pp. 5

28. Saghir S., Younis M. I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // Acta Mechanica. – 2018. – V. 229. – pp. 2909-2922. doi: 10.1007/s00707-018-2141-3.

29. Ghayesh M. H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *Mechanical Systems and Signal Processing,* 2018, Vol. 109, – pp. 220-234. doi:10.1016/j.ymssp.2017.11.043

30. Chen X. et al. Nonlinear forced vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plate with global and localized geometrical imperfections. *Applied Mathematical Modelling,* 2021, Vol. 93, pp 443-466. doi:10.1016/j.apm.2020.12.033

31. Bulyarskiy S.V., Dudin A.A., Orlov A.P., Pavlov A.A., Leont'ev V.L. Forced vibration of a carbon nanotube with emission currents in an electromagnetic field. *Technical Physics*, 2017, Vol. 87, № 11, pp. 1624-1627.

32. Bulyarskiy S.V., Dudin A.A., Orlov A.P., Pavlov A.A., Shamanayev A.A, Leontiev V.L. Resonance of a carbon nanotube with a current in the electromagnetic field. *Nano- and microsystem technology*, 2017, Vol. 19, № 7, pp. 395-398. doi: 10.17587/nmst.19.395-398.

33. Dmitriev S.V., Sunagatova I.R., Ilgamov M.A., Pavlov I. S. Natural frequencies of bending vibrations of carbon nanotubes. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2021, Vol. 91, № 11, pp. 1732-1737. doi: 10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21.

34. Xiao X. et al. Optical-Thermally Excited Graphene Resonant Mass Detection: A Molecular Dynamics Analysis // Nanomaterials. – 2021. – V. 11. – №. 8. – pp. 1924. doi:10.3390/nano11081924

35. Gluhova, O.E., Savost'yanov, G.V., Slepchenkov, M.M., SHunaev, V.V. Novye grafenovye nanotekhnologii manipulirovaniya molekulyarnymi ob'ektami. *Technical Physics Letters*, 2016, Vol. 42, № 11. pp. 56-63.

36. Makwana M. et al. Effect of mass on the dynamic characteristics of single-and double-layered graphene-based nano resonators. *Materials,* 2022, Vol. 15, №. 16, pp. 5551. doi: 10.3390/ma15165551

37. Xiao Y. et al. A review on graphene-based nano-electromechanical resonators: Fabrication, performance, and applications. *Micromachines,* 2022, Vol. 13, №. 2, pp. 215. doi: 10.3390/mi13020215

38. Fan S. C. et al. Research Progress of Graphene Nano-Electromechanical Resonant Sensors—A Review. *Micromachines*, 2022, Vol. 13, №. 2, pp. 241. doi: 10.3390/mi13020241

39. Allen M.P., Tildesley D.I. Computer simulation of liquids. Oxford Science Publications. 2000. 385 p.

40. Popov A. M. Vychislitel'nye nanotekhnologii. M.: «KNORUS». 2017. 312 p.

41. Kang J. W. et al. Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator. *Current Applied Physics,* 2013, Vol. 13(4), pp. 789-794. doi:10.1016/j.cap.2012.12.007

42. Wang J., Li T. T. Molecular dynamics simulation of the resonant frequency of graphene nanoribbons. *Ferroelectrics,* 2019, Vol. 549, №. 1, pp. 87-95. doi: 10.1080/00150193.2019.1592547

43. Korobeynikov S. N., Alyokhin v. V., Babichev A. V. Molecular mechanics of single layer graphene sheets. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2020, № 2(44), pp. 89-94.

44. Korobeynikov, S.N., Alyokhin, V.V., Babichev, A.V. Simulation of mechanical parameters of graphene using the DREIDING force field. *ActaMechanica*. 2018, V. 229, No 6, pp. 2343-2378. DOI 10.1007/s00707-018-2115-5.

45. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. On the molecular mechanics of single layer graphene sheets. *International Journal of Engineering Science.* 2018, V. 133, pp. 109-131. doi: 10.1016/j.ijengsci.2018.09.001.

46. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Advanced nonlinear buckling analysis of a compressed single layer graphene sheet using the molecular mechanics method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021, V. 209, 106703 (30 pages). doi: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106703

47. Korobeynikov S.N. Discussion on "Nonlinear buckling analysis of double-layered graphene nanoribbons based on molecular mechanics" by Namnabat et al. Carbon Letters, https://doi.org/10.1007/s42823-020-00194-2. *Carbon Letters.* 2021, V. 31, N. 6, pp. 1365-1366. doi: 10.1007/s42823-021-00233-6

48. Kvashnin A. G., Sorokin P. B., Kvashnin D. G. Theoretic investigation of mechanical properties of graphene membranes by means of molecular mechanics. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Matematika i fizika*, 2009, Vol. 2, № 4, pp. 426-431.

49. Odegard, G.M., Gates, T.S., Nicholson, L.M., Wise, K.E. Equivalent Continuum Modeling of Nano-structured Mstierials. *NASA Langley Reserch Center. Technical Memorandum NASA / TM–2001.* 2001, 210863

50. Li C.A., Chou, T.W. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *Int. J. Solids Struct*. 2003, V. 40, pp. 2487-2499.

51. Goldshtein R.V., Chentsov A.V. Discrete-Continuum Model Of A Nanotube. *Mechanics of Solids.* 2005, №4, pp. 2487-2499.

52. Wan, H, Delale, F. A structural mechanics approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes. *Mechanica.* 2010, V. 45, Pp. 43-51.

53. Krylova E. Y. et al. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, Vol. 21 (1), pp. 48-59.

54. Krylova E.Y. et al. Theory of vibrations of carbon nanotubes like flexible micropolar mesh cylindrical shells taking into account shift. Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2019, Vol. 19(3), pp. 305-316.

55. Nuhu A. A., Safaei B. A comprehensive review on the vibration analyses of small-scaled plate-based structures by utilizing the nonclassical continuum elasticity theories. *Thin-Walled Structures,* 2022, Vol. 179, pp. 109622.

56. Ansari, R., Sahmani, S., Arash, B. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets. *Physics Letters A*. 2010, V. 375, pp. 53–62.

57. Mir Abbas Roudbari, Tahereh Doroudgar Jorshari, Chaofeng Lu, Reza Ansari, Abbas Z. Kouzani, Marco AmabiliA review of size-dependent continuum mechanics models for micro- and nano-structures. *Thin-Walled Structures*. 2022, V. 170, 108562. doi: 10.1016/j.tws.2021.108562

58. Ivanova E.A., Krivtsov A.M., Morozov N.F. Derivation Of Macroscopic Relations Of The Elasticity Of Complex Crystal Lattices Taking Into Account The Moment Interactions At The Microlevel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, Vol. 71, № 4, pp. 595-615.

59. Ivanova E. A., Krivcov A. M., Morozov N. F. Derivation Of Macroscopic Relations Of The Elasticity Of Complex Crystal Lattices Taking Into Account The Moment Interactions At The Microlevel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2007, V. 71. № 4, pp. 543-561.

60. Berinskij I.E., Ivanova E.A., Krivcov A.M., Morozov N.F. Primenenie momentnogo vzaimodejstviya k postroeniyu ustojchivoj modeli kristallicheskoj reshetki grafita.[Application of moment interaction to the construction of a graphite crystal latticestable model] *Mechanics of Solids*, 2007, № 5, pp. 6-16.

61. Berinskij I.E. et al. Sovremennye problemy mekhaniki. Mekhanicheskie svojstva kovalentnyh kristallov: ucheb. posobie pod obshch. red. A. M.Krivcova, O.S.Loboda. [Modern problems of mechanics. Mechanical properties of covalent crystals: textbook. allowance] SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta,2014. 160 p.

62. Sargsyan S.H. Beam and continuous-moment models of deformation of two-dimensional nanomaterials. *Physical Mesomechanics*, 2022, Vol. 25, № 2, pp. 109-121.

63. Sargsyan S.H. A thin shell model within the moment theory of elasticity with the concept of deformation by shear plus rotation. *Physical Mesomechanics*, 2020, Vol. 23, № 4,pp. 13-19.

64. Sargsyan S.H. Variational principles of the shell momentum-membrane theory. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2022, № 1, pp. 38-47.

65. Nowacki, W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Perganon. 1986. 383 p.

66. Sargsyan S.H. Kraevye zadachi tonkih plastin v nesimmetrichnoj teorii uprugosti. [Boundary-value problems of non-symmetric elasticity for thin plates]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008, V. 72., № 1, pp. 129-147.

67. Lukin, A. V. Popov I. A., Skubov D. YU. Issledovanie ustojchivosti i vetvleniya form ravnovesiya uprugih elementov mikrosistemnoj tekhniki. [Study of the Stability and Branching of Equilibrium Forms of Elastic Elements of Microsystem Technology] *Nelinejnaya dinamika mashin – School-NDM 2017: sbornik IV Mezhdunarodnoj SHkoly-konferencii molodyh uchenyh, Moskva, 18–21 aprelya 2017 goda. – Moskva: Federal'noe gosudarstvennoe byudzhetnoe uchrezhdenie nauki Institut mashinovedeniya im. A.A. Blagonravova Rossijskoj akademii nauk*, 2017, pp. 313-322.

68. Pelekh B. L. Koncentraciya napryazhenij okolo otverstij pri izgibe transversal'no-izotropnyh plastin.[Stress concentration near holes during bending of transversally isotropic plates] Kiev: Naukova dumka, 1977. 183 p.

69. Baimova YU. A., Mulyukov R. R. Grafen, nanotrubki i drugie uglerodnye nanostruktury. [Graphene, nanotubes and other carbon nanostructures] M.: RAN, 2018. 212 p.

70. Vol'mir A. S Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek. [Nonlinear dynamics of plates and shells] M: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury izd-va Nauka, 1972. 432 p.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 22-21-00331).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant No. 22-21-00331).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.