Калинина Т.И., Наседкин А.В. Плоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 1. С. 46–55. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.05

Kalinina T.I., Nasedkin A.V. Plane problems about the action of oscillating load on the boundary of an elastic isotropic layer in the presence of surface stresses. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 1, pp. 46-55. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 1, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.1.05
УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НАГРУЗКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Т.И. Калинина[1], А.В. Наседкин[2]

[1]Южно-Российский государственный политехнический университет имени М.И. Платова, Новочеркасск, Россия
[2]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 03 марта 2022 г.
Одобрена: 09 февраля 2023 г.
Принята к публикации:
05 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

установившиеся колебания, дисперсионное уравнение, упругая полоса, плоская задача, нанотолщина, поверхностное напряжение, модель Гуртина – Мурдоха.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются симметричная и антисимметричная плоские задачи о действии осциллирующей нагрузки на границе упругой изотропной нанотонкой полосы. Наноразмерность полосы учитывается введением поверхностных напряжений по теории Гуртина – Мурдоха. Согласно данной теории, принимается, что на торцах полосы помимо внешних нагрузок действуют также поверхностные напряжения, которые описываются «поверхностным» законом Гука. В такой модели интегральные свойства упругого материала полосы с наноразмерной толщиной становятся отличными от свойств материала тела обычной размерности, что характерно для задач наномеханики.

Для решения поставленных задач использовалась стандартная техника, включающая применение принципа предельного поглощения, преобразования Фурье по бесконечно протяженной координате и теории вычетов для нахождения обратного преобразования Фурье. Показано, как можно получить решения в виде рядов по собственным волнам, в которых волновые числа определяются как корни соответствующих дисперсионных уравнений.

Для конкретного примера были изучены дисперсионные соотношения и построены графики первых дисперсионных кривых. Проанализировано поведение частот запирания, изменение волновых чисел и зон существования обратных волн при различных наноразмерных толщинах полосы. Результаты проведенного анализа показали, что для ультратонкой полосы поверхностные эффекты оказывают существенное влияние на дисперсионные соотношения, причем тенденции изменения дисперсионных кривых могут существенно отличаться для различных мод и толщинах полосы.

© ПНИПУ

© Калинина Тамара Ипполитовна – ассист., e-mail: kalinina-toma@yandex.ru.
Наседкин Андрей Викторович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru.

Tamara I. Kalinina – Assistant, e-mail: kalinina-toma@yandex.ru.
Andrey V. Nasedkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

PLANE PROBLEMS ABOUT THE ACTION OF OSCILLATING LOAD ON THE BOUNDARY OF AN ELASTIC ISOTROPIC LAYER IN THE PRESENCE OF SURFACE STRESSES

T.I. Kalinina[1], A.V. Nasedkin[2]

[1]South-Russian State Polytechnic University (NPI) named after M.I. Platov, Novocherkassk, Russian Federation
[2]Southern Federal University, Rostov on Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 March 2022
Approved: 09 February 2023
Accepted for publication:
05 April 2023

Keywords:

steady-state oscillations, dispersion equation, elastic layer, plane problem, nanothickness, surface stress, Gurtin-Murdoch model.

ABSTRACT

In this paper, symmetric and antisymmetric plane problems about the action of oscillating load on the boundary of an elastic isotropic nanothin layer are considered. The nanoscale layer thickness is considered by introducing surface stresses in accordance with the Gurtin-Murdoch theory. According to this theory, it is assumed that, in addition to external loads, surface stresses act on the layer boundaries, which are described by Hooke's "surface" law. As a result, the properties of the elastic material of the layer with nanoscale thickness become different from the properties of the material of a regular-sized body, which is typical for nanomechanics problems.

A standard technique was used for the solution of formulated problems, including the application of limiting absorption principle, the Fourier transform over infinitely extended coordinate and the theory of residues for finding the inverse Fourier transform. It is shown how it is possible to obtain solutions in the form of series in natural waves, in which the wave numbers are defined as the roots of the corresponding dispersion equations.

For a specific example, dispersion relations were studied and graphs of the first dispersion curves were plotted. The behavior of barrier frequencies, changes in wave numbers and zones of existence of backward waves at different nanoscale layer thicknesses are analyzed. The results of the analysis showed that for an ultrathin layer, surface effects have a significant impact on the dispersion relations, and the trends in the dispersion curves can differ significantly for different modes and layer thicknesses.

© PNRPU

Введение

Как известно, наноразмерные тела проявляют свойства, отличные от соответствующих свойств тел обычных размеров. Для объяснения этого эффекта и для предсказания поведения наноразмерных тел разработано несколько моделей, которые активно используются в настоящее время. Как отмечалось в обзорных работах [1–4], основными классами моделей наномеханики являются: модели, основанные на методах молекулярной динамики; нелокальные модели; градиентные модели теории упругости; различные модели поверхностной упругости; эмпирические инженерные зависимости между модулями и характерными размерами. В данной работе используется одна из наиболее простых и популярных модель поверхностной упругости Гуртина – Мурдоха [5–7]. Как и другие, эта модель отражает размерный фактор, который здесь связан с возрастанием отношения площади поверхности тела к объему при переходе на наноуровень.

Модель поверхностной упругости Гуртина – Мурдоха точнее называть моделью поверхностных напряжений и инерционных нагрузок. Применительно к динамическим задачам для полуограниченных тел эти эффекты могут проявляться на свободных поверхностях или на интерфейсных границах раздела сред с различными свойствами.

Задачи о распространении упругих волн в упругих полуограниченных средах при наличии поверхностных напряжений в рамках модели Гуртина – Мурдоха исследовались в [6; 8–23] и в других работах. Преломление и отражение волн различных типов через границу с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками было изучено основоположниками теории в [6; 18].

Среди задач об установившихся колебаниях для конкретных полуограниченных сред в силу своей простоты наиболее исследованы антиплоские задачи. Так, в [10; 12; 17] были рассмотрены антиплоские задачи для полупространства, в [11] – для двух полупространств, в [15; 18; 19] – для слоистого полупространства, в [16; 22; 23] – для слоя, в [13] – для составного слоя. Для этих задач в [10; 12] было проведено сравнение модели Гуртина – Мурдоха с другими моделями поверхностной упругости и с дискретными моделями, а в [11; 17; 21] предполагался также неидеальный контакт и шероховатость на границах. Более сложные двумерные задачи изучались в [8; 9; 14; 18; 19] для полупространства и слоя, причем в [9] рассматривался анизотропный материал. В [20] была исследована задача для цилиндрического волновода.

Модели поверхностной упругости были распространены на тела со связанностью механических и электрических полей. Соответствующие динамические задачи об установившихся колебаниях пьезоэлектрических полуограниченных сред с дополнительной поверхностной связанностью электромеханических полей рассматривались в [24–31], а аналогичные задачи

для магнитоэлектрических сред – в [32–34]. Как отмечалось в [35; 36], такие модели могут быть как электромеханически связанными, так и несвязанными.

Проведенные исследования показали, что поверхностные эффекты могут существенно изменять дисперсионные зависимости и волновые поля по сравнению с классическими задачами. Так, появляются дополнительные поверхностные волны, усиливается дисперсия и зависимости волновых чисел от толщины покрытий. Однако, несмотря на проведенные исследования, многие вопросы, связанные с кинематикой и энергетикой волн в полуограниченных средах при наличии поверхностных эффектов, остаются малоизученными.

В настоящей работе рассматриваются плоские задачи об установившихся колебаниях упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений и инерционных эффектов по модели Гуртина – Мурдоха. Подобные задачи исследовались в [8], но при нулевых внешних воздействиях. Кроме того, здесь, в отличие от [8], основное внимание уделено анализу дисперсионных соотношений в форме зависимостей частоты от волновых чисел для симметричных и антисимметричных задач.

1. Постановка задачи

Предположим, что упругая изотропная среда с плотностью ρ и с модулями Ламе λ, μ занимает слой $V = \{|x_1| \le \infty,\ -h/2 < x_2 < h/2,\ |x_3| \le \infty\}$. Будем считать, что в плоскости Ox_1x_2 существует возможность постановки двумерной задачи о плоской деформации. Тогда в слое (полосе) генерируется поле перемещений, зависящее от пространственных переменных x_1, x_2 и времени t, причем у вектора механических перемещений имеется только две ненулевых компоненты:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0\},\ u_1 = u_1(x_1, x_2, t),\ u_2 = u_2(x_1, x_2, t).$$

Уравнения движения для плоской задачи теории упругости имеют вид:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = \rho \ddot{u}_1,\ \sigma_{22,2} + \sigma_{12,1} = \rho \ddot{u}_2, \qquad (1)$$

где компоненты напряжений σ_{11}, σ_{12} и σ_{22} связаны с перемещениями u_1 и u_2 по обычным формулам: $\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2}$, $\sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1})$, $\sigma_{22} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2}$.

Предположим, что полоса V является ультратонкой, и на ее гранях $x_2 = \pm h/2$ на отрезке $|x_1| \le a$ действуют нормальные поверхностные нагрузки $f_2^{\pm}$, причем $f_2^{\pm} = 0$ при $|x_1| > a$. Тогда в соответствие с теорией поверхностных напряжений Гуртина – Мурдоха [5–7] можно принять следующие граничные условия:

$$\pm\sigma_{22} = f_2^{\pm},\ \pm\sigma_{12} = \sigma_{11,1}^s - \rho^s \ddot{u}_1,\ x_2 = \pm h/2. \qquad (2)$$

В (2) предполагается наличие на границе полосы поверхностных напряжений σ_{11}^s и поверхностных инерционных нагрузок для среды с поверхностной плотностью ρ^s. Поверхностные напряжения σ_{11}^s связаны с компонентой перемещения u_1 поверхностным законом Гука $\sigma_{11}^s = (\lambda^s + 2\mu^s)u_{1,1}$, где λ^s, μ^s – поверхностные модули Ламе.

Будем рассматривать два вида внешних нагрузок $f_2^{\pm}$. Для симметричной задачи примем, что $f_2^+ = f_2^- = f_2$, а для антисимметричной задачи будем считать, что $f_2^{\pm} = \pm f_2$.

Предположим, что источник колебаний f_2 осциллирует с круговой частотой ω:

$$f_2(x_1, t) = f(x_1)e^{i\omega t}. \qquad (3)$$

Тогда при действии источника (3) для перемещений u_j существует режим установившихся колебаний:

$$u_j = v_j(x_1, x_2)e^{i\omega t},\ j = 1, 2. \qquad (4)$$

Далее будем записывать задачу относительно комплексных амплитуд v_1 и v_2, опуская множитель $e^{i\omega t}$ и сам термин «комплексная амплитуда». Для определенности рассмотрим антисимметричную задачу, для которой уравнения движения (1), определяющие соотношения и граничные условия (2) можно представить в виде:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = -\rho\omega^2 v_1,\ \sigma_{22,2} + \sigma_{12,1} = -\rho\omega^2 v_2, \qquad (5)$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)v_{1,1} + \lambda v_{2,2},\ \sigma_{12} = \mu(v_{1,2} + v_{2,1}),$$
$$\sigma_{22} = \lambda v_{1,1} + (\lambda + 2\mu)v_{2,2}, \qquad (6)$$

$$\sigma_{22} = f,\ \pm\sigma_{12} = \sigma_{11,1}^s + \rho^s\omega^2 v_1,\ x_2 = \pm h/2, \qquad (7)$$

$$\sigma_{11}^s = (\lambda^s + 2\mu^s)v_{1,1}. \qquad (8)$$

Для симметричной задачи соотношения (5)–(8) сохраняются, за исключением первого равенства (7), которое при $x_2 = \pm h/2$ надо заменить на следующее: $\pm\sigma_{22} = f$.

Отметим, что при $\lambda^s = \mu^s = 0$, $\rho^s = 0$ задача (5)–(8) является обычной задачей о плоских колебаниях полосы без поверхностных эффектов, решение которой известно [37; 38]. Анализ показывает, что поверхностные модули λ^s, μ^s и ρ^s отличаются по размерности от соответствующих объемных модулей λ, μ и ρ. Так,

в системе Си λ и μ измеряются в Н/м^2, ρ – в кг/м^3, тогда как λ^s и μ^s измеряются в Н/м, а ρ^s – в кг/м^2. Данные многочисленных экспериментов показывают, что значения соответствующих объемных и поверхностных величин оказываются сопоставимыми ($\lambda \sim \lambda^s / d$, $\mu \sim \mu^s / d$, $\rho \sim \rho^s / d$) при характерных размерах d порядка 10^{-9} (м) и меньше. В рассматриваемой задаче таким пространственным параметром d является толщина полосы h, и поэтому можно ожидать, что поверхностные эффекты будут оказывать влияние только при наноразмерных значениях h.

Для выделения единственного решения используем принцип предельного поглощения [37], согласно которому перейдем к ε-задаче, заменив в (5), (7) вещественную частоту ω на комплексную частоту $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, $0 < \varepsilon << 1$, а v_1 и v_2 в (5)–(8) на $v_{1\varepsilon}$ и $v_{2\varepsilon}$ соответственно. Тогда по принципу предельного поглощения решением исходной задачи будет являться предел решения ε-задачи: $v_1 = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} v_{1\varepsilon}$, $v_2 = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} v_{2\varepsilon}$.

2. Аналитические решение

Применив к ε-задаче интегральное преобразование Фурье по координате x_1

$$V_{j\varepsilon}(\alpha, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_{j\varepsilon}(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \ j = 1, \ 2,$$

из (5)–(8) получим

$$\begin{cases} -\alpha^2 (\lambda + 2\mu) V_1 - (\lambda + \mu) i\alpha \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} + \mu \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = -\rho\omega^2 V_1, \\ (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - (\lambda + \mu) i\alpha \dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} - \mu\alpha^2 V_2 = -\rho\omega^2 V_2, \end{cases} \quad (9)$$

$$-i\alpha\lambda V_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = F(\alpha), \ x_2 = \pm h/2, \quad (10)$$

$$\pm\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - i\alpha V_2 \right) = -\left(\lambda^s + 2\mu^s \right) \alpha^2 V_1 + \rho^s \omega^2 V_1,$$

$$x_2 = \pm h/2, \quad (11)$$

где $F(\alpha) = \int\limits_{-a}^{a} f(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1$.

Для ε-задач вместо частоты ω надо использовать комплексную частоту $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$, а также можно снабдить величины V_j, α и зависящие от них дальнейшие обозначения нижним индексом ε. Однако для компактности формул здесь и далее эти обозначения не вводятся.

Решение системы дифференциальных уравнений (9) будем искать в форме

$$V_j = A_{1j} \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B_{1j} \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + A_{2j} \operatorname{ch} \gamma_2 x_2 + B_{2j} \operatorname{sh} \gamma_2 x_2,$$
$$j = 1, \ 2, \quad (12)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \dfrac{\omega^2}{c_1^2}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\alpha^2 - \dfrac{\omega^2}{c_2^2}}$, $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$.

Используя граничные условия (10), (11), для симметричной задачи находим коэффициенты A_{ij} и B_{ij} из (12) в виде

$$A_{11} = \frac{-iF\alpha \left(\mu\theta \operatorname{sh} \dfrac{h\gamma_2}{2} + d_1 \gamma_2 \operatorname{ch} \dfrac{h\gamma_2}{2} \right)}{D(\alpha, \omega)},$$

$$A_{21} = \frac{iF\alpha\gamma_2 \left(2\mu\gamma_1 \operatorname{sh} \dfrac{h\gamma_1}{2} + d_1 \operatorname{ch} \dfrac{h\gamma_1}{2} \right)}{D(\alpha, \omega)},$$

$$A_{12} = A_{22} = 0, \ B_{11} = B_{21} = 0,$$

$$B_{12} = \frac{i\gamma_1}{\alpha} A_{11}, \ B_{22} = \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_{21}, \quad (13)$$

где

$$D(\alpha, \omega) = \mu^2 d_2 - \rho\omega^2 d_1 \gamma_2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2}, \quad (14)$$

$$d_1 = \left(\lambda^s + 2\mu^s \right) \alpha^2 - \rho^s \omega^2,$$

$$d_2 = \theta^2 \operatorname{ch} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{sh} \frac{h\gamma_2}{2} - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \frac{h\gamma_1}{2} \operatorname{ch} \frac{h\gamma_2}{2}, \quad (15)$$

$$\theta = 2\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}. \quad (16)$$

С учетом (13) решение (12) можно записать следующим образом:

$$V_1 = A_{11} \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + A_{21} \operatorname{ch} \gamma_2 x_2,$$
$$V_2 = \frac{i\gamma_1}{\alpha} A_{11} \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_{21} \operatorname{sh} \gamma_2 x_2.$$

Тогда применение обратного преобразования Фурье дает решение ε-задачи в виде:

$$v_{1\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(A_{11} \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + A_{21} \operatorname{ch} \gamma_2 x_2 \right) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (17)$$

$$v_{2\varepsilon}(x_1, x_2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i\gamma_1}{\alpha} A_{11} \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \frac{i\alpha}{\gamma_2} A_{21} \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 \right) e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \quad (18)$$

Аналогично для антисимметричной задачи получим:

$$A_{11} = A_{21} = 0,$$

$$A_{12} = \frac{-F\left(\mu\theta \operatorname{ch}\frac{h\gamma_2}{2} + d_1\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh}\frac{h\gamma_2}{2}\right)}{D(\alpha,\omega)},$$

$$A_{22} = \frac{F\alpha^2\left(2\mu\gamma_1 \operatorname{ch}\frac{h\gamma_1}{2} + d_1 \operatorname{sh}\frac{h\gamma_1}{2}\right)}{D(\alpha,\omega)},$$

$$D(\alpha,\omega) = -\mu^2 d_3 + \rho\omega^2 d_1\gamma_2 \operatorname{sh}\frac{h\gamma_1}{2}\operatorname{sh}\frac{h\gamma_2}{2}, \qquad (19)$$

$$d_3 = \theta^2 \operatorname{sh}\frac{h\gamma_1}{2}\operatorname{ch}\frac{h\gamma_2}{2} - 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{ch}\frac{h\gamma_1}{2}\operatorname{sh}\frac{h\gamma_2}{2}. \qquad (20)$$

В результате решение ε-задачи для антисимметричного случая будет иметь вид:

$$v_{1\varepsilon}(x_1,x_2) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{i\alpha}{\gamma_1}A_{12}\operatorname{sh}\gamma_1 x_2 - \frac{i\gamma_2}{\alpha}A_{22}\operatorname{sh}\gamma_2 x_2\right)e^{-i\alpha x_1}d\alpha, \qquad (21)$$

$$v_{2\varepsilon}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A_{12}\operatorname{ch}\gamma_1 x_2 + A_{22}\operatorname{ch}\gamma_2 x_2\right)e^{-i\alpha x_1}d\alpha. \qquad (22)$$

Наконец, решения исходных задач находятся из (17), (18) и (21), (22) с учетом (13)–(16) и (19), (20) путем применения методов контурного интегрирования по лемме Жордана, теории вычетов и выполнения предельных переходов при $\varepsilon \to +0$. Поскольку подынтегральные выражения в (17), (18) и в (21), (22) являются мероморфными функциями, то решения будут представлены в виде рядов по вычетам в полюсах. Последние являются нулями дисперсионных уравнений

$$D(\alpha,\omega) = 0, \qquad (23)$$

где функция $D(\alpha,\omega)$ определена по (14)–(16) для симметричного случая или по (19), (20) для антисимметричного случая.

Для исследования дисперсионных уравнений удобно перейти к безразмерным величинам

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{h},\ \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{h},\ \tilde{x}_1 = \frac{x_1}{h},\ \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{h},\ \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu},\ \tilde{\mu} = 1,$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega h}{c_2},\ \tilde{\lambda}^s = \frac{\lambda^s}{\mu h},\ \tilde{\mu}^s = \frac{\mu^s}{\mu h},$$

$$\tilde{\rho} = 1,\ \tilde{\rho}^s = \frac{\rho^s c_2^2}{\mu h},\ \tilde{\alpha} = \alpha h,\ \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 h = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\left(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\right)}},$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 h = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2},\ \tilde{\theta} = \theta h^2 = \left(2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2\right).$$

В этих безразмерных величинах дисперсионное уравнение симметричной задачи (23), (14)–(16) принимает вид

$$\left(2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2\right)^2 \operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} - 4\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} - \\ - \tilde{\omega}^2\tilde{d}_1\tilde{\gamma}_2 \operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} = 0, \qquad (24)$$

где $\tilde{d}_1 = \left(\tilde{\lambda}^s + 2\tilde{\mu}^s\right)\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\rho}^s\tilde{\omega}^2$.

Если положить $\mu^s = 0$, $\lambda^s = 0$ и $\rho^s = 0$, то $\tilde{d}_1 = 0$, и из (24) получаем дисперсионное уравнение классической симметричной задачи для полосы [37; 38]: $\left(2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2\right)^2 \operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} - 4\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} = 0$.

Аналогично для антисимметричной задачи в безразмерных координатах из (19), (20), (23) получим следующее дисперсионное уравнение

$$\left(2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2\right)^2 \operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} - 4\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} - \\ - \tilde{\omega}^2\tilde{d}_1\tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} = 0, \qquad (25)$$

которое в отсутствии поверхностных эффектов ($\tilde{d}_1 = 0$) принимает форму [37; 38]: $\left(2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\omega}^2\right)^2 \operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} - 4\tilde{\alpha}^2\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \operatorname{ch}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2}\operatorname{sh}\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} = 0$.

3. Численные результаты

Примем, что материал полосы характеризуется упругими константами [7; 8]: $\lambda = \mu = 22.5\cdot10^9$ (Н/м^2), $\rho = 3000$ (кг/м^3), $\lambda^s = 7\cdot10^{-3}$ (Н/м), $\mu^s = 8\cdot10^{-3}$ (Н/м) и $\rho^s = 7\cdot10^{-4}$ (кг/м^2). В качестве внешнего источника (3) будем рассматривать сосредоточенную силу с безразмерной амплитудой, равной единице: $\tilde{f}(x_1) = \delta(x_1)$.

На рис. 1 для симметричной (*а*) и антисимметричной (*б*) задач показаны дисперсионные кривые, отражающие зависимости безразмерных вещественных волновых чисел $\tilde{\alpha}$ от безразмерной частоты $\tilde{\omega}$ и наоборот. Сплошными линиями изображены дисперсионные кривые для классической задачи без поверхностных напряжений и поверхностных инерционных нагрузок (кривые с индексом «с»), а штриховыми линиями – дисперсионные кривые для толщины полосы $h = 10$ (нм) с поверхностными эффектами (кривые с индексом «s»). Цифрой обозначен номер дисперсионной кривой.

Анализ влияния поверхностных напряжений и поверхностных инерционных нагрузок на дисперсионные кривые проведем вначале для частот запирания (частот отсечки), т.е. для частот дисперсионных кривых $\tilde{\omega}$ при

$\tilde{\alpha} = 0$. Эти частоты для задач с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками обозначим через $\tilde{\omega}_l^s$, а для классических задач без поверхностных эффектов – через $\tilde{\omega}_l$.

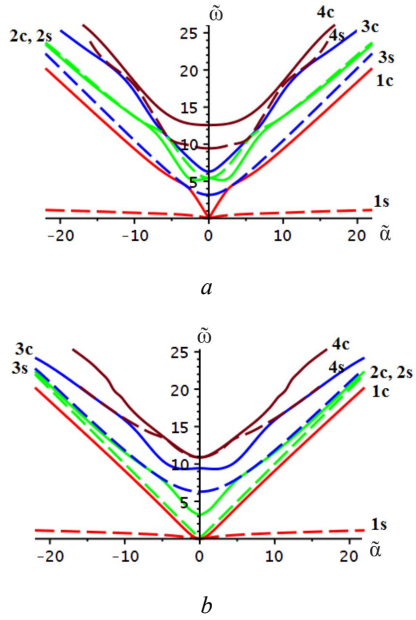


Рис. 1. Дисперсионные кривые при толщине полосы $h = 10$ (нм): *a* – симметричная задача; *b* – антисимметричная задача

Fig. 1. Dispersion curves for layer thickness $h = 10$ (nm): symmetric problem (*a*), antisymmetric problem (*b*)

Для симметричной задачи множество частот $\tilde{\omega}_l \geq 0$ задачи без поверхностных напряжений и инерционных нагрузок состоит из двух подмножеств: $\tilde{\omega}_k = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $\tilde{\omega}_m = \pi(2m-1)\sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$, $m = 1, 2, \ldots$, причем модули Ламе $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ здесь представлены в безразмерной форме. Будем считать, что частоты запирания $\tilde{\omega}_l \geq 0$ задачи без поверхностных напряжений и инерционных нагрузок занумерованы в порядке возрастания. Тогда среди них частоты $\tilde{\omega}_k = 2\pi k$ и $\tilde{\omega}_m = \pi(2m-1)\sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$ могут размещаться различным образом в зависимости от значений модулей Ламе. Например, для рассматриваемого случая безразмерные модули Ламе равны единице ($\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} = 1$), и дисперсионные кривые задачи без поверхностных напряжений и инерционных нагрузок, занумерованные на рис. 1, *a*, имеют следующие значения частот запирания: $\tilde{\omega}_1 = 0$, $\tilde{\omega}_2 = \sqrt{3}\pi$, $\tilde{\omega}_3 = 2\pi$, $\tilde{\omega}_4 = 4\pi$. Таким образом, здесь множеству $\tilde{\omega}_k = 2\pi k$ принадлежат частоты $\tilde{\omega}_1 = 0$, $\tilde{\omega}_3 = 2\pi$, $\tilde{\omega}_4 = 4\pi$, а множеству $\tilde{\omega}_m = \pi(2m-1)\sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$ – частота $\tilde{\omega}_2 = \sqrt{3}\pi$.

Как можно строго показать, для симметричной задачи частоты отсечки $\tilde{\omega}_k^s = \tilde{\omega}_k + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для $\tilde{\rho}^s > 0$ сдвигаются вниз относительно соответствующих частот $\tilde{\omega}_k = 2\pi k$ классической симметричной плоской задачи. В этом случае величины ε_k можно найти численно из уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon_k}{2} = -\tilde{\rho}^s\left(\tilde{\omega}_k + \varepsilon_k\right)$. Однако частота $\tilde{\omega}_0^s = \tilde{\omega}_0 = 0$ и безразмерные частоты $\tilde{\omega}_m^s = \tilde{\omega}_m = \pi(2m-1)\sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$ не зависят от поверхностных модулей и соответственно от толщины полосы. Действительно, как видно из рис. 1, *a*, в рассматриваемом случае частоты $\tilde{\omega}_1 = 0$, $\tilde{\omega}_2 = \sqrt{3}\pi$ не меняются при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок, а частоты $\tilde{\omega}_3 = 2\pi$, $\tilde{\omega}_4 = 4\pi$ для задачи с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками сдвигаются вниз.

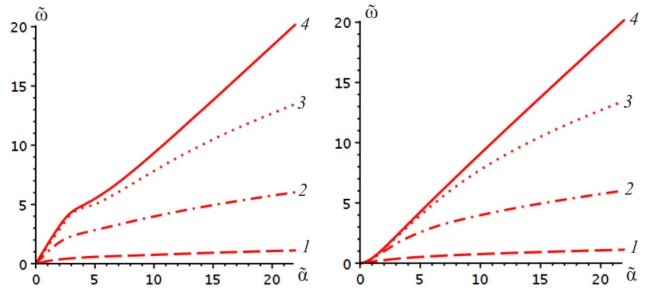
Аналогично для антисимметричной задачи без поверхностных эффектов множество частот $\tilde{\omega}_l \geq 0$ состоит из двух подмножеств: $\tilde{\omega}_k = \pi(2k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\tilde{\omega}_m = 2\pi m\sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь после учета поверхностных эффектов неизменными остаются частоты запирания $\tilde{\omega}_m^s = \tilde{\omega}_m = 2\pi m\sqrt{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$, тогда как частоты $\tilde{\omega}_k^s = \tilde{\omega}_k + \varepsilon_k$, соответствующие значениям $\tilde{\omega}_k = \pi(2k-1)$, уменьшаются на величину $|\varepsilon_k|$. Для рассматриваемого случая, показанного на рис. 1, *б*, безразмерные частоты $\tilde{\omega}_1 = 0$, $\tilde{\omega}_4 = 2\sqrt{3}\pi$ не меняются при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок, а частоты $\tilde{\omega}_2 = \pi$, $\tilde{\omega}_3 = 3\pi$ для задачи с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками сдвигаются вниз.

Из рис. 1 можно также заметить, что дисперсионные кривые при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок меняются различным образом. Так, значения частот первых дисперсионных кривых на рис. 1, *а* и *б*, для фиксированных волновых чисел $\tilde{\alpha} \neq 0$ при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок уменьшаются наиболее сильно по сравнению с другими дисперсионными кривыми. Для симметричной задачи (рис. 1, *а*) дисперсионные кривые *1*, *3* и *4* классической задачи лежат выше соответствующих кривых задачи с поверхностными эффектами, а для кривых *2* наблюдается противоположная тенденция. Между тем для антисимметричной задачи все кривые *1–4* классической задачи расположены выше соответствующих кривых задачи с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками.

Отметим также, что учет поверхностных эффектов изменяет асимптоты первых дисперсионных кривых.

Так, в отсутствие поверхностных эффектов как для симметричной, так и для антисимметричной задач в секторе $\tilde{\omega} < \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} > 0$ имеем асимптоту $\tilde{\omega} = \tilde{c}_R \tilde{\alpha}$, где $\tilde{c}_R < 1$ – безразмерная скорость волны Релея, которая является корнем уравнения $\left(2 - \tilde{c}_R^2\right)^2 - 4\sqrt{1 - \tilde{c}_R^2 / (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}\sqrt{1 - \tilde{c}_R^2} = 0$. Между тем учет поверхностных напряжений и инерционных нагрузок при $(\lambda^s + 2\mu^s)/\rho^s < \mu/\rho$ дает другую асимптоту $\tilde{\omega} = \tilde{c}_L^s \tilde{\alpha}$, где $\tilde{c}_L^s = \sqrt{(\tilde{\lambda}^s + 2\tilde{\mu}^s)/\tilde{\rho}^s}$ – безразмерная скорость поверхностной продольной волны. Неравенство $(\lambda^s + 2\mu^s)/\rho^s < \mu/\rho$ в общем случае может не выполняться, но здесь при принятых входных данных оно выполнено, причем $\tilde{c}_L^s \approx 0{,}002$.

Аналогично антиплоским задачам [22; 23], для плоских задач с поверхностными напряжениями и инерционными нагрузками представляет также интерес исследование свойств дисперсионных соотношений при различных толщинах полосы. Так, на рис. 2 для симметричной (*a*) и антисимметричной задач (*б*) приведены первые дисперсионные кривые при различных толщинах h: штриховая кривая *1* построена для случая, когда $h = 10$ (нм), штрихпунктирная кривая *2* – для $h = 300$ (нм), пунктирная кривая *3* – для $h = 1800$ (нм), а сплошная кривая *4* описывает классический случай без поверхностных напряжений и инерционных нагрузок.



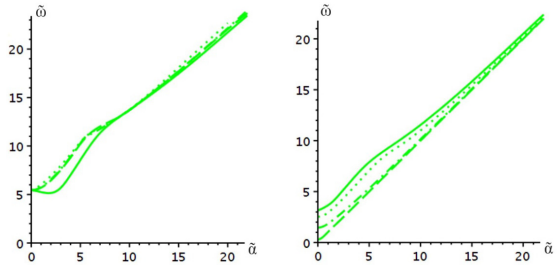
a *b*

Рис. 2. Первые дисперсионные кривые при различных толщинах полосы: *a* – симметричная задача; *b* – антисимметричная задача

Fig. 2. The first dispersion curves for different layer thicknesses: symmetric problem (*a*), antisymmetric problem (*b*)

Из рис. 2 видно, что при увеличении толщины слоя дисперсионные кривые задач с поверхностными эффектами приближаются к соответствующим кривым классической задачи, что и следовало ожидать. Однако из рис. 2 также видно, что первые дисперсионные кривые очень сильно меняются при наноразмерных толщинах полос.

Аналогично, на рис. 3, 4 приведены соответственно вторые и третьи дисперсионные кривые для симметричной (*a*) и антисимметричной задач (*б*) при тех же различных толщинах h, что и для рис. 2 и с теми же типами пунктиров для дисперсионных кривых.



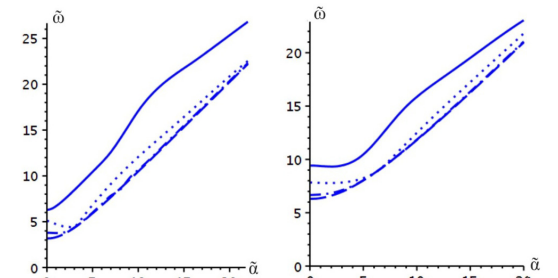
a *b*

Рис. 3. Вторые дисперсионные кривые при различных толщинах полосы: *a* – симметричная задача; *b* – антисимметричная задача

Fig. 3. The second dispersion curves for different layer thicknesses: symmetric problem (*a*), antisymmetric problem (*b*)

Известно, что для классической задачи для определенных частот в окрестности частот запирания кривизна дисперсионных ветвей становится отрицательной, что приводит к появлению обратных волн в полосе. В этих ситуациях дисперсионные ветви опускаются вблизи таких частот запирания, что, например, наблюдается для второй дисперсионной кривой в симметричной задаче. Однако при наличии поверхностных напряжений и инерционных нагрузок для всех рассмотренных значений толщин кривизна второй дисперсионной ветви является положительной. В антисимметричной задаче для второй дисперсионной кривой (рис. 3, *б*) обратные волны не наблюдаются как в классическом случае, так и при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок.

Как уже отмечалось и как видно из рис. 3, *a*, для симметричной задачи значения частот запирания при различных наноразмерных значениях толщины и в классическом случае для второй дисперсионной кривой совпадают. Кроме того, для симметричной задачи для фиксированных волновых чисел $\tilde{\alpha} > 0$ при учете поверхностных напряжений частоты $\tilde{\omega}$ увеличиваются по сравнению с классическим случаем. Для антисимметричной задачи (см. рис. 3, *б*) наблюдается обратный эффект, причем зависимость частот от толщины больше для антисимметричной задачи по сравнению с симметричной задачей.



a *b*

Рис. 4. Третьи дисперсионные кривые при различных толщинах полосы: *a* – симметричная задача; *b* – антисимметричная задача

Fig. 4. The third dispersion curves for different layer thicknesses: symmetric problem (*a*), antisymmetric problem (*b*)

Из графиков третьих дисперсионных кривых (рис. 4) видно, что отсутствие или наличие зон существования обратных волн может существенно зависеть от поверхностных эффектов и наноразмерных толщин полосы. Так, для симметричной задачи (рис. 4, *а*) в классическом случае, т.е. при больших толщинах, у третьей дисперсионной кривой нет участков с отрицательной кривизной. Затем при уменьшении толщины до $h = 1800$ (нм) и $h = 300$ (нм) участки с отрицательной кривизной появляются. Однако при дальнейшем уменьшении толщины полосы до $h = 10$ (нм) участки с отрицательной кривизной снова исчезают. Для антисимметричной задачи (рис. 4, *б*) явление отсутствия или наличия зон существования обратных волн в зависимости от поверхностных эффектов и наноразмерных толщин полосы проявляется более монотонно. В классическом случае и при $h = 1800$ (нм) имеются участки с отрицательной кривизной, а при меньших толщинах $h = 300$ (нм) и $h = 10$ (нм) – их нет.

Из рис. 4 также видно, что для третьих дисперсионных кривых для фиксированных волновых чисел $\tilde{\alpha} > 0$ при учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок частоты $\tilde{\omega}$ уменьшаются по сравнению с классическим случаем как для симметричной задачи, так и для антисимметричной.

Таким образом, поверхностные напряжения, инерционные нагрузки и значения наноразмерных толщин полосы могут оказывать противоположные эффекты для различных дисперсионных кривых симметричной и антисимметричной задач. Как уже отмечалось, эти эффекты возникают только для ультратонких полос при их очень малых толщинах. Так, для принятых входных данных расчеты показывают, что при толщине полосы $h = 8000$ (нм) дисперсионные кривые при наличии поверхностных эффектов практически полностью совпадают с кривыми классической задачи.

Заключение

Итак, в настоящей работе рассмотрены симметричная и антисимметричная плоские задачи об установившихся колебаниях упругой изотропной нанополосы. Учет наноразмерности проводился по теории Гуртина – Мурдоха, согласно которой на торцах полосы учитывались поверхностные напряжения и инерционные нагрузки. Стандартная техника, включающая принцип предельного поглощения, преобразование Фурье по бесконечной координате, и методы контурного интегрирования, как и в классических задачах без поверхностных эффектов, позволяет получить решения в виде рядов по собственным волнам.

Исследованы свойства первых дисперсионных кривых, определяющих волновые числа распространяющихся мод. При учете поверхностных напряжений и инерционных нагрузок обнаружен ряд особенностей в полученных решениях. Так, появляется асимптота у первой дисперсионной кривой, соответствующая поверхностной продольной волне. Существенно изменяются зоны наличия или отсутствия обратных волн у различных дисперсионных кривых. Поверхностные эффекты при фиксированных волновых числах обычно приводят к уменьшению собственных частот, но наблюдаются также случаи увеличения собственных частот. В соответствие со многими работами [8; 9; 16; 22; 23] можно также отметить, что поверхностные напряжения и инерционные нагрузки оказывают заметное влияние только при очень малых наноразмерных значениях толщины полосы.

Библиографический список

1. Chandel V.S., Wang G., Talha M. Advances in modelling and analysis of nano structures: a review // Nanotechnol. Rev. – 2020. – Vol. 9. – P. 230–258. DOI: 10.1515/ntrev-2020-0020

2. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects // Acta Mech. – 2016. – Vol. 227. – P. 29–42. DOI: 10.1007/s00707-015-1427-y

3. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials / J. Wang, Z. Huang, H. Duan, S. Yu, X. Feng, G. Wang, W. Zhang, T. Wang // Acta Mech. Solida Sin. – 2011. – Vol. 24, iss. 1. – P. 52–82. DOI: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8

4. Wang K.F., Wang B.L., Kitamura T. A review on the application of modified continuum models in modeling and simulation of nanostructures // Acta Mech. Sin. – 2016. – Vol. 32, iss. 1. – P. 83–100. DOI: 10.1007/s10409-015-0508-4

5. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1975. – Vol. 57, iss. 4. – P. 291–323. DOI: 10.1007/BF00261375

6. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Effect of surface stress on wave propagation in solids // J. Appl. Phys. – 1976. – Vol. 47. – P. 4414–4421. DOI: 10.1063/1.322403

7. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids // Int. J. Solids Struct. – 1978. – Vol. 14, iss. 6. – P. 431–440. DOI: 10.1016/0020-7683(78)90008-2

8. Chakraborty A. The effect of surface stress on the propagation of Lamb waves // Ultrasonics. – 2010. – Vol. 50, iss. 7. – P. 645–649. DOI: 10.1016/j.ultras.2010.02.004

9. Enzevaee C., Shodja H.M. Crystallography and surface effects on the propagation of Love and Rayleigh surface waves in fcc semi-infinite solids // Int. J. Solids Struct. – 2018. – Vol. 138. – P. 109–117. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.01.003

10. Eremeyev V.A., Rosi G., Naili S. Comparison of anti-plane surface waves in strain-gradient materials and materials with surface stresses // Math. Mech. Solids. – 2019. – Vol. 24, iss. 8. – P. 2526–2535. DOI: 10.1177/1081286518769960

11. Eremeyev V.A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy // Mech. Res. Commun. – 2016. – Vol. 74. – P. 8–13. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.02.018

12. Eremeyev V.A., Sharma B.L. Anti-plane surface waves in media with surface structure: discrete vs. continuum model // Int. J. Eng. Sci. – 2019. – Vol. 143. – P. 33–38. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.06.007

13. Shear horizontal wave dispersion in nanolayers with surface effects and determination of surface elastic constants / F. Jia, Z. Zhang, H. Zhang, X.-Q. Feng, B. Gu // Thin Solid Films. – 2018. – Vol. 645. – P. 134–138. DOI: 10.1016/j.tsf.2017.10.025

14. Dispersive behavior of high frequency Rayleigh waves propagating on an elastic half space / N. Jia, Z. Peng, J. Li, S. Chen // Acta Mech. Sin. – 2021. – Vol. 37. – P. 562–569. DOI: 10.1007/s10409-020-01009-3

15. Li Y.D., Lee K.Y. Size-dependent behavior of Love wave propagation in a nanocoating // Mod. Phys. Lett. B. – 2010. – Vol. 24. – P. 3015–3023. DOI: 10.1142/S0217984910025346

16. Liu H., Liu H., Yang J.L. Surface effects on the propagation of shear horizontal waves in thin films with nanoscale thickness // Physica E. – 2013. – Vol. 49. – P. 13–17. DOI: 10.1016/j.physe.2013.01.013

17. Mikhasev G.I., Botogova M.G., Eremeyev V.A. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating // Int. J. Eng. Sci. – 2021. – Vol. 158. – P. 103428. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103428

18. Murdoch A.I. The propagation of surface waves in bodies with material boundaries // J. Mech. Phys. Solids. – 1976. – Vol. 24. – P. 137–146. DOI: 10.1016/0022-5096(76)90023-5

19. Pal P.K., Acharya D., Sengupta P.R. Effect of surface stresses on surface waves in elastic solids // Sadhana. – 1997. – Vol. 22. – P. 659–670. DOI: 10.1007/BF02802553

20. Peng X.L., Huang G.Y. Elastic vibrations of a cylindrical nanotube with the effect of surface stress and surface inertia // Physica E. – 2013. – Vol. 54. – P. 98–102 DOI: 10.1016/j.physe.2013.06.009

21. Sharma B.L., Eremeyev V.A. Wave transmission across surface interfaces in lattice structures // Int. J. Eng. Sci. – 2019. – Vol. 145. – P. 103173. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103173

22. Калинина Т.И. Антиплоские задачи об установившихся колебаниях при наличии поверхностных напряжений // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XIX Междунар. конф. (15–18 октября 2018 г., Ростов-на-Дону). – Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2018. – Т. 2. – С. 123–127.

23. Калинина Т.И., Наседкин А.В. Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2022. – № 1. – С. 12–22. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-12-22.

24. Enzevaee C., Shodja H.M. Surface/interface effect on the propagation of high-frequency SH surface waves in an ultra-thin FGP over-layer bonded to a substrate // Acta Mech. – 2021. – Vol. 232. – P. 4677–4689. DOI: 10.1007/s00707-021-03077-3

25. Enzevaee C., Shodja H.M. Torsional surface wave propagation in a transversely isotropic FG substrate with piezoelectric over-layer within surface/interface theory // Acta Mech. – 2020. – Vol. 231. – P. 2203–2216. DOI: 10.1007/s00707-020-02638-2

26. Xu L.M., Wang X., Fan H. Anti-plane waves near an interface between two piezoelectric half-spaces // Mech. Res. Commun. – 2015. – Vol. 67. – P. 8–12. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2015.04.006

27. Zhang C., Chen W., Zhang C. On propagation of anti-plane shear waves in piezoelectric plates with surface effect // Phys. Lett. A. – 2012. – Vol. 376. – P. 3281–3286. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.09.027

28. Propagation of Rayleigh-type surface waves in a layered piezoelectric nanostructure with surface effects / L. Zhang, J. Zhao, G. Nie, J. Liu // Appl. Math. Mech. – Engl. Ed. – 2022. – Vol. 43, iss. 3. – P. 327–340. DOI: 10.1007/s10483-022-2824-7

29. Effects of surface piezoelectricity and nonlocal scale on wave propagation in piezoelectric nanoplates / L.L. Zhang, J.X. Liu, X.Q. Fang, G.Q. Nie // Eur. J. Mech. A Solids. – 2014. – Vol. 46. – P. 22–29. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.01.005

30. Size-dependent dispersion characteristics in piezoelectric nanoplates with surface effects / L.L. Zhang, J.X. Liu, X.Q. Fang, G.Q. Nie // Physica E. – 2014. – Vol. 57. – P. 169–174. DOI: 10.1016/j.physe.2013.11.007

31. Propagation of Love waves with surface effects in an electrically-shorted piezoelectric nanofilm on a half-space elastic substrate / S. Zhang, B. Gu, H. Zhang, X.-Q. Feng, R. Pan, Alamusi, N. Hu // Ultrasonics. – 2016. – Vol. 66. – P. 65–71. DOI: 10.1016/j.ultras.2015.11.009

32. Interface energy effect on the dispersion relation of nano-sized cylindrical piezoelectric/piezomagnetic composites / X.-Q. Fang, Y. Liu, X.-L. Liu, J.-X. Liu // Ultrasonics. – 2015. – Vol. 56. – P. 444–448. DOI: 10.1016/j.ultras.2014.09.011

33. Surface effects on anti-plane shear waves propagating in magneto-electro-elastic nanoplates / B. Wu, C. Zhang, W. Chen, C. Zhang // Smart Mater. Struct. – 2015. – Vol. 24. – P. 095017. DOI: 10.1088/0964-1726/24/9/095017

34. Zhou Y.Y., Lu C.F., Chen W.Q. Bulk wave propagation in layered piezomagnetic/piezoelectric plates with initial stresses or interface imperfections // Compos. Struct. – 2012. – Vol. 94, iss. 9. – P. 2736–2745. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.04.006

35. Eremeyev V.A., Nasedkin A.V. Mathematical models and finite element approaches for nanosized piezoelectric bodies with uncoulped and coupled surface effects // Wave Dynamics and Composite Mechanics for Microstructured Materials and Metamaterials. Advanced Structured Materials. – Ed. M.A. Sumbatyan. – Singapore: Springer, 2017. – Vol. 59, ch. 1. – P. 1–18. DOI: 10.1007/978-981-10-3797-9_1

36. Наседкин А.В., Еремеев В.А. О моделях наноразмерных пьезоэлектрических материалов со связанными поверхностными эффектами // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 4. – С. 375–384. DOI: 10.32326/1814-9146-2017-79-4-375-384

37. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

38. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.

References

1. Chandel V.S., Wang G., Talha M. Advances in modelling and analysis of nano structures: a review. *Nanotechnol. Rev*., 2020, vol. 9, pp. 230–258. DOI: 10.1515/ntrev-2020-0020

2. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mech*., 2016, vol. 227, pp. 29–42. DOI: 10.1007/s00707-015-1427-y

3. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mech. Solida Sin*., 2011, vol. 24, iss. 1, pp. 52–82. DOI: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8

4. Wang K.F., Wang B.L., Kitamura T. A review on the application of modified continuum models in modeling and simulation of nanostructures. *Acta Mech. Sin*., 2016, vol. 32, iss. 1, pp. 83–100. DOI: 10.1007/s10409-015-0508-4

5. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal*., 1975, vol. 57, iss. 4, pp. 291-323. DOI: 10.1007/BF00261375

6. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Effect of surface stress on wave propagation in solids. *J. Appl. Phys*., 1976, vol. 47, pp. 4414-4421. DOI: 10.1063/1.322403

7. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids. *Int. J. Solids Struct*., 1978, vol. 14, iss. 6, pp. 431–440. DOI: 10.1016/0020-7683(78)90008-2

8. Chakraborty A. The effect of surface stress on the propagation of Lamb waves. *Ultrasonics*, 2010, vol. 50, iss. 7, pp. 645–649. DOI: 10.1016/j.ultras.2010.02.004

9. Enzevaee C., Shodja H.M. Crystallography and surface effects on the propagation of Love and Rayleigh surface waves in fcc semi-infinite solids. *Int. J. Solids Struct*., 2018, vol. 138, pp. 109–117. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.01.003

10. Eremeyev V.A., Rosi G., Naili S. Comparison of anti-plane surface waves in strain-gradient materials and materials with surface stresses. *Math. Mech. Solids*, 2019, vol. 24, iss. 8, pp. 2526–2535. DOI: 10.1177/1081286518769960

11. Eremeyev V.A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy. *Mech. Res. Commun*., 2016, vol. 74, pp. 8–13. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.02.018

12. Eremeyev V.A., Sharma B.L. Anti-plane surface waves in media with surface structure: discrete vs. continuum model. *Int. J. Eng. Sci*., 2019, vol. 143, pp. 33–38. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.06.007

13. Jia F., Zhang Z., Zhang H., Feng X.-Q., Gu B. Shear horizontal wave dispersion in nanolayers with surface effects and determination of surface elastic constants. *Thin Solid Films*, 2018, vol. 645, pp. 134–138. DOI: 10.1016/j.tsf.2017.10.025

14. Jia N., Peng Z., Li J., Chen S. Dispersive behavior of high frequency Rayleigh waves propagating on an elastic half space. *Acta Mech. Sin*., 2021, vol. 37, pp. 562–569. DOI: 10.1007/s10409-020-01009-3

15. Li Y.D., Lee K.Y. Size-dependent behavior of Love wave propagation in a nanocoating. *Mod. Phys. Lett. B*, 2010, vol. 24, pp. 3015–3023. DOI: 10.1142/S0217984910025346

16. Liu H., Liu H., Yang J.L. Surface effects on the propagation of shear horizontal waves in thin films with nanoscale thickness. *Physica E*, 2013, vol. 49, pp. 13–17. DOI: 10.1016/j.physe.2013.01.013

17. Mikhasev G.I., Botogova M.G., Eremeyev V.A. On the influence of a surface roughness on propagation of anti-plane short-length localized waves in a medium with surface coating. *Int. J. Eng. Sci*., 2021, vol. 158, pp. 103428. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103428

18. Murdoch A.I. The propagation of surface waves in bodies with material boundaries. *J. Mech. Phys. Solids*, 1976, vol. 24, pp. 137-146. DOI: 10.1016/0022-5096(76)90023-5

19. Pal P.K., Acharya D., Sengupta P.R. Effect of surface stresses on surface waves in elastic solids. *Sadhana*, 1997, vol. 22, pp. 659–670. DOI: 10.1007/BF02802553

20. Peng X.L., Huang G.Y. Elastic vibrations of a cylindrical nanotube with the effect of surface stress and surface inertia. *Physica E*, 2013, vol. 54, pp. 98–102 DOI: 10.1016/j.physe.2013.06.009

21. Sharma B.L., Eremeyev V.A. Wave transmission across surface interfaces in lattice structures. *Int. J. Eng. Sci*., 2019, vol. 145, pp. 103173. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103173

22. Kalinina T.I. Antiplane problems of steady-state oscillations of elastic isotropic layer with the surface stress. In: *Modern problems of continuum mechanics. Proceedings of the XIX International Conference* (October 15-18, 2018, Rostov-on-Don). Rostov-on-Don, Taganrog: SFedU Press, 2018, vol. 2, pp. 123–127.

23. Kalinina T.I., Nasedkin A.V. Antiplane problems about oscillating load motion along the boundary of an elastic isotropic layer in the presence of surface stresses. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2022, No. 1, pp. 12–22. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-12-22.

24. Enzevaee C., Shodja H.M. Surface/interface effect on the propagation of high-frequency SH surface waves in an ultra-thin FGP over-layer bonded to a substrate. *Acta Mech*., 2021, vol. 232, pp. 4677–4689. DOI: 10.1007/s00707-021-03077-3

25. Enzevaee C., Shodja H.M. Torsional surface wave propagation in a transversely isotropic FG substrate with piezoelectric over-layer within surface/interface theory. *Acta Mech*., 2020, vol. 231, pp. 2203–2216. DOI: 10.1007/s00707-020-02638-2

26. Xu L.M., Wang X., Fan H. Anti-plane waves near an interface between two piezoelectric half-spaces. *Mech. Res. Commun*., 2015, vol. 67, pp. 8–12. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2015.04.006

27. Zhang C., Chen W., Zhang C. On propagation of anti-plane shear waves in piezoelectric plates with surface effect. *Phys. Lett. A*, 2012, vol. 376, pp. 3281–3286. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.09.027

28. Zhang L., Zhao J., Nie G., Liu J. Propagation of Rayleigh-type surface waves in a layered piezoelectric nanostructure with surface effects. *Appl. Math. Mech., Engl. Ed*., 2022, vol. 43, iss. 3, pp. 327-340. DOI: 10.1007/s10483-022-2824-7

29. Zhang L.L., Liu J.X., Fang X.Q., Nie G.Q. Effects of surface piezoelectricity and nonlocal scale on wave propagation in piezoelectric nanoplates. *Eur. J. Mech. A Solids*, 2014, vol. 46, pp. 22-29. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.01.005

30. Zhang L.L., Liu J.X., Fang X.Q., Nie G.Q. Size-dependent dispersion characteristics in piezoelectric nanoplates with surface effects. *Physica E*, 2014, vol. 57, pp. 169–174. DOI: 10.1016/j.physe.2013.11.007

31. Zhang S., Gu B., Zhang H., Feng X.-Q., Pan R., Alamusi, Hu N. Propagation of Love waves with surface effects in an electrically-shorted piezoelectric nanofilm on a half-space elastic substrate. *Ultrasonics*, 2016, vol. 66, pp. 65–71. DOI: 10.1016/j.ultras.2015.11.009

32. Fang X.-Q., Liu Y., Liu X.-L., Liu J.-X. Interface energy effect on the dispersion relation of nano-sized cylindrical piezoelectric/piezomagnetic composites. *Ultrasonics*, 2015, vol. 56, pp. 444-448. DOI: 10.1016/j.ultras.2014.09.011

33. Wu B., Zhang C., Chen W., Zhang C. Surface effects on anti-plane shear waves propagating in magneto-electro-elastic nanoplates. *Smart Mater. Struct*., 2015, vol. 24, pp. 095017. DOI: 10.1088/0964-1726/24/9/095017

34. Zhou Y.Y., Lu C.F., Chen W.Q. Bulk wave propagation in layered piezomagnetic/piezoelectric plates with initial stresses or interface imperfections. *Compos. Struct*., 2012,.vol. 94, iss. 9, pp. 2736–2745. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.04.006

35. Eremeyev V.A., Nasedkin A.V. Mathematical models and finite element approaches for nanosized piezoelectric bodies with uncoulped and coupled surface effects. In: *Wave Dynamics and Composite Mechanics for Microstructured Materials and Metamaterials. Advanced Structured Materials*, vol. 59, M.A. Sumbatyan (Ed.) Springer, Singapore, 2017, ch. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1007/978-981-10-3797-9_1

36. Nasedkin A.V., Eremeyev V.A. About models of nanosized piezoelectric materials with coupled surface effects. *Problems of Strength and Plasticity*, 2017, vol. 79, iss. 4, pp. 375–384. DOI: 10.32326/1814-9146-2017-79-4-375-384

37. Vorovich I.I., Babeshko V.A. Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskih oblastej [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. *Moscow, Nauka*, 1979, 320 p.

38. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. *Kyiv, Naukova Dumka*, 1981, 284 p.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was not sponsored.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.