Чепурненко А.С., Тюрина В.С. Применение метода конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя для определения напряженно-деформированного состояния многослойных балок // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. С. 130–139. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.13

Chepurnenko A.S., Turina V.S. Application of the Finite Element Method in Combination with the Contact Layer Method to Determine the Stress-Strain State of Multilayer Beams. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 4, pp. 130-139. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.13

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 4, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.13
УДК 539.612

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СОЧЕТАНИИ С МЕТОДОМ КОНТАКТНОГО СЛОЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК

А.С. Чепурненко, В.С. Тюрина

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 21 апреля 2023 г.
Одобрена: 17 августа 2023 г.
Принята к публикации:
31 августа 2023 г.

Ключевые слова:

многослойная балка, метод контактного слоя, метод конечных элементов, трансверсальная прочность, адгезия, деформации поперечного сдвига, напряженно-деформированное состояние.

АННОТАЦИЯ

Разработана методика расчета многослойных балок с применением метода конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя. Контактный слой представляет собой упругую анизотропную среду, состоящую из жестких коротких стержней, работающих только на растяжение – сжатие в вертикальном направлении и сдвиг. Контактные слои моделируют связи, посредством которых между собой взаимодействуют слои многослойных балок. Для определения напряженно-деформированного состояния балка представляется как совокупность балочных конечных элементов каждого слоя, соединенных конечными элементами контактных слоев. В качестве балочных элементов используются видоизмененные конечные элементы, у которых в качестве степеней свободы в узле выступают горизонтальные перемещения по верхней и нижней кромке, а также прогиб. Представлен пример расчета шарнирно опертой по концам трехслойной балки под действием равномерно распределенной нагрузки. Крайние слои балки выполнены из углепластика, а средний слой – из синтактика на основе стеклосфер. Расчет выполняется с учетом и без учета деформаций поперечного сдвига слоев. Разбиение балки по длине на конечные элементы принимается неравномерное со сгущением в приопорной зоне для возможности уловить краевые эффекты. Решение программно реализовано в среде MATLAB. В результате расчета установлено, что существует диапазон изменения, в котором жесткость контактных слоев не оказывает заметного влияния на прогибы конструкции. Для рассмотренного примера выявлено существенное различие в величинах максимальных перемещений, а также в характере эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в крайних слоях при расчете с учетом и без учета деформаций поперечного сдвига. В то же время деформации поперечного сдвига не оказывают заметного влияния на напряжения в контактных слоях.

© ПНИПУ

© **Чепурненко Антон Сергеевич** – д.т.н., проф., e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru.
Тюрина Василина Сергеевна – ст. преподаватель, e-mail: vasilina.93@mail.ru.

Anton S. Chepurnenko – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru.
Vasilina S. Turina – Senior Lecturer, e-mail: vasilina.93@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN COMBINATION WITH THE CONTACT LAYER METHOD TO DETERMINE THE STRESS-STRAIN STATE OF MULTILAYER BEAMS

A.S. Chepurnenko, V.S. Turina

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 21 April 2023
Approved: 17 August 2023
Accepted for publication:
31 August 2023

Keywords:

multilayer beam, contact layer method, finite element method, transversal strength, adhesion, transverse shear deformations, stress-strain state.

ABSTRACT

The purpose of this article is to develop a method for calculating multilayer beams using the finite element method in combination with the contact layer method. The contact layer is an elastic anisotropic medium, consisting of rigid short bars, working only in tension-compression in the vertical direction and shear. The contact layers model the connections through which the layers of multilayer beams interact. To determine the stress-strain state of the beam, it is represented as a set of beam finite elements (FE) of each layer connected by finite elements of contact layers. As beam elements, modified FEs are used, in which horizontal displacements along the upper and lower edges, as well as deflection, act as degrees of freedom in the node. An example of the calculation of a three-layer beam hinged at the ends under the action of a uniformly distributed load is presented. The outer layers of the beam are made of carbon fiber, and the middle layer is made of the syntactic one based on glass spheres. The calculation is performed with and without taking into account the deformations of the transverse shear of the layers. The meshing of the beam along the length into finite elements is assumed to be non-uniform with a thickening in the near-support zone in order to be able to catch the edge effects. The solution is implemented in the MATLAB environment. As a result of the calculation, it was found that there is a range of change in which the stiffness of the contact layers does not have a noticeable effect on the deflections of the structure. For the considered example, a significant difference was revealed in the values of maximum displacements, as well as in the character of the diagrams of bending moments and shear forces in the outer layers when calculating with and without taking into account transverse shear deformations. At the same time, transverse shear deformations do not have a noticeable effect on the stresses in the contact layers.

© PNRPU

Введение

При рассмотрении задач анализа напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций можно выделить два основных подхода. В первом подходе слоистая конструкция рассматривается как единая система с меняющимися по толщине свойствами, и исключается взаимодействие слоев между собой. Данный подход развивался в работах С.Г. Лехницкого [1], С.А. Амбарцумяна [2] и др.

Во втором подходе на каждый слой по отдельности накладываются определенные гипотезы, и далее исследуется их совместная работа. Наиболее широко этот подход встречается в работах по трехслойным конструкциям, когда рассматривается модель из двух несущих слоев и среднего слоя заполнителя. Для несущих слоев используется гипотеза прямых нормалей, а для среднего слоя – гипотеза о линейном законе распределения перемещений по толщине, а также гипотеза о прямоугольной эпюре касательных напряжений. К основоположникам этого подхода относятся А.Л. Рабинович [3], А.Р. Ржаницын [4] и др.

Метод контактного слоя – это один из относительно новых методов анализа напряженно-деформированного состояния адгезионных соединений и трансверсальной прочности слоистых композитов. Главное отличие этого метода в том, что между несущими слоями и слоем заполнителя вводятся контактные слои, посредством которых взаимодействуют реальные слои композита. Большое количество решений на основе этого метода принадлежит профессору Р.А. Турусову и его научной школе [5–28]. Более подробно понятие контактного слоя описывается в работах [22; 26–28]. Контактный слой в работах профессора Р.А. Турусова представляется в виде щетки коротких вертикальных упругих связей, работающих только на растяжение – сжатие и сдвиг. Такой подход предоставляет возможность получить решение на основе имеющегося аппарата теории упругости. Метод контактного слоя позволяет решать задачи определения концентрации касательных напряжений, возникающих на границах между слоями и в угловых точках, где решение на основе классической теории упругости приводит к бесконечным напряжениям.

Во всех перечисленных выше публикациях научной школы Р.А. Турусова решение осуществляется путем непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений либо аналитически с использованием рядов, либо численно. При этом для получения разрешающих уравнений вводятся дополнительные упрощения, в частности, при расчете многослойных балок для каждого слоя применяется гипотеза плоских сечений и не учитываются деформации поперечного сдвига. В настоящей статье будет показана возможность применения к расчету многослойных балок метода контактного слоя в сочетании с методом конечных элементов (МКЭ), что позволяет избежать указанного упрощения и получить

более точное решение. Ранее данный подход был применен к расчету адгезионного соединения двух дисков в работе [29].

Близким по сути к предлагаемому подходу является метод AEM (Applied element method), в котором тело представляется как совокупность абсолютно жестких элементов, соединенных нормальными и сдвиговыми пружинами, отвечающими соответственно за передачу нормальных и касательных напряжений между элементами [30; 31]. Параметры материала в AEM задаются путем назначения соответствующей жесткости пружинам. Отличие нашего подхода в том, что и элементы, и пружины имеют конечную жесткость. Метод AEM получил распространение в основном в задачах анализа напряженно-деформированного состояния каменных конструкций [32–35], а также в расчетах на прогрессирующее обрушение [36–38]. В механике полимеров и композиционных материалов этот метод не использовался за исключением работы [31].

Существуют и другие подходы к анализу прочности адгезионных соединений и слоистых композитов. Так, в работе [39] предлагается в конечно-элементном анализе игнорировать краевые эффекты в угловых точках и выполнять расчет в физически нелинейной постановке, задавая общие узлы на границе слоев композита. При этом может наблюдаться несходимость, и возникает вопрос выбора размера сетки конечных элементов, при котором результаты будут адекватными.

1. Материалы и методы

Методику расчета рассмотрим на примере трехслойной балки пролетом l, шарнирно опертой по концам, под действием равномерно распределенной нагрузки q. Каждый из слоев моделируется балочными конечными элементами. Между слоями из балочных КЭ располагаются стержневые конечные элементы контактного слоя (рис. 1).

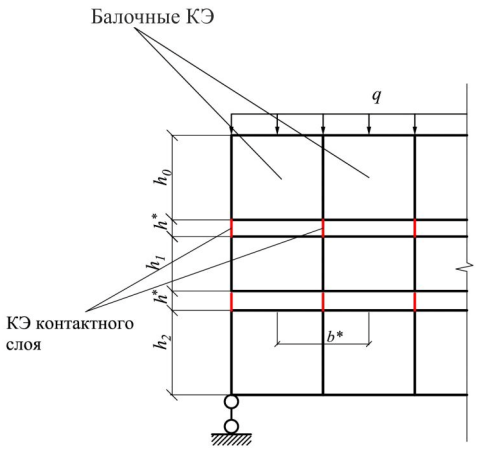


Рис. 1. Представление балки как совокупности балочных элементов и элементов контактного слоя

Fig. 1. Beam representation as a combination of beam elements and elements of the contact layer

Стандартный стержневой конечный элемент, работающий на растяжение – сжатие и изгиб, в случае плоской задачи имеет три степени свободы в узле: линейные перемещения u и v по координатным осям x и y, а также угол поворота φ. Мы будем использовать видоизмененные конечные элементы, у которых в качестве степеней свободы выступают перемещения по x верхней кромки $u^в$, перемещения по x нижней кромки $u^н$, а также прогиб $v = v^в = v^н$. Таким образом, конечный элемент принимается несжимаемым в вертикальном направлении. Схема используемого балочного КЭ приведена на рис. 2.

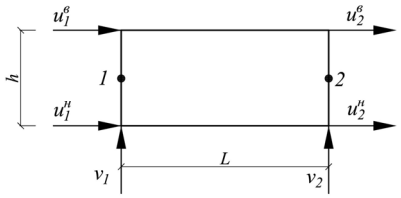


Рис. 2. Модифицированный балочный конечный элемент

Fig. 2. Modified Beam Finite Element

Связь между степенями свободы стандартного и используемого нами КЭ имеет вид:

$$u = \frac{u^в + u^н}{2};\ \varphi = \frac{u^в - u^н}{h}. \qquad (1)$$

Пусть $\{U\} = \{u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad v_2 \quad \varphi_2\}^T$ – вектор узловых перемещений стандартного стержневого КЭ. Тогда его матрица жесткости может быть записана в виде:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_c] & \\ & [K_u] \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где блок $[K_c]$ соответствует работе элемента на центральное растяжение – сжатие, а блок $[K_u]$ – работе на изгиб.

Обозначим за $\{\tilde{U}\} = \{u_1^в \quad u_1^н \quad v_1 \quad u_2^в \quad u_2^н \quad v_2\}^T$ вектор узловых перемещений используемого нами КЭ. Тогда с учетом (1) связь между векторами $\{U\}$ и $\{\tilde{U}\}$ можно записать в виде:

$$\{U\} = [\Psi]\{\tilde{U}\}, \qquad (3)$$

где $[\Psi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix}$.

На основе (3) матрица жесткости используемого нами КЭ $[\tilde{K}]$ может быть вычислена по формуле

$$[\tilde{K}] = [\Psi]^T [K][\Psi]. \quad (4)$$

Блок $[K_c]$ матрицы $[K]$, отвечающий за работу элемента на растяжение – сжатие определяется по известной формуле

$$[K_c] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где E – модуль упругости материала, A – площадь поперечного сечения, L – длина конечного элемента.

Блок $[K_u]$ матрицы $[K]$, отвечающий за изгиб элемента, может быть выведен на основе теории изгиба балок Эйлера – Бернулли без учета деформаций поперечного сдвига, а также на основе теории Тимошенко с учетом деформаций сдвига. В первом случае матрица $[K_u]$ записывается в виде:

$$[K_u] = EI\begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матрица жесткости балки Тимошенко имеет вид [40]:

$$[K_u] = \frac{\omega}{\psi L}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2+\chi & -6L & 2L^2-\chi \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2-\chi & -6L & 4L^2+\chi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\omega = EI \cdot G \cdot k \cdot A$, $\psi = G \cdot k \cdot A \cdot L^2 + 12EI$, $\chi = \frac{12EI}{G \cdot k \cdot A}$, G – модуль сдвига материала, k – коэффициент эффективной («сдвиговой») площади, для прямоугольного сечения принимаемый равным 5/6.

Для контактного слоя используются двухузловые стержневые КЭ с двумя степенями свободы в узле: перемещениями u и v (рис. 3). Данные элементы работают только на растяжение – сжатие и сдвиг.

Матрица жесткости КЭ контактного слоя записывается в виде:

$$[K^*] = [B]^T [D][B] \cdot b^* \cdot b, \quad (8)$$

где $[B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[D] = \frac{1}{h^*}\begin{bmatrix} E^* & 0 \\ 0 & G^* \end{bmatrix}$, E^* и G^* – соответственно модуль упругости и модуль сдвига контактного слоя, b – ширина сечения балки, b^* – ширина области, которую представляет стержень контактного слоя.

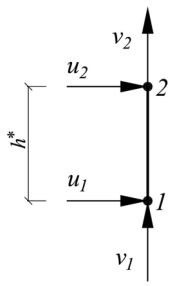


Рис. 3. Конечный элемент контактного слоя

Fig. 3. Finite element of the contact layer

В силу симметрии рассматривается половина балки. Сечение $x = l/2$ закрепляется от перемещений $u^{\text{в}}$ и $u^{\text{н}}$. Используется неравномерное разбиение по длине со сгущением у опоры для возможности уловить краевые эффекты. Для расчета авторами разработана программа в среде MATLAB.

2. Результаты и их обсуждение

Для апробации предлагаемого подхода нами был выполнен расчет трехслойной балки, рассмотренной в работе [13]. Наружные слои – одинаковые, выполнены из углепластика толщиной $h_0 = h_2 = 2$ мм с модулем упругости $E_0 = E_2 = 3{,}5 \cdot 10^5$ МПа. Модуль сдвига наружных слоев принят равным $G_0 = G_2 = 1{,}35 \cdot 10^5$ МПа. Средний слой выполнен из синтактика на основе стеклосфер с $E_1 = 2{,}6 \cdot 10^3$ МПа, $G_1 = 10^3$ МПа, $h_1 = 30$ мм. Пролет балки l = 0,5 м, распределенная нагрузка q = 1 кН/м. Ширина балки b = 10 мм. Приведенные характеристики контактных слоев $e^* = \frac{E^*}{h^*} = 10^4$ МПа/мм $= e_1^* = e_2^*$, $g^* = \frac{G^*}{h^*} = 10^4$ МПа/мм $= g_1^* = g_2^*$.

Первым этапом решение выполнялось без учета деформаций поперечного сдвига. На рис. 4 представлена эпюра прогибов в левой половине балки. Круглыми маркерами на данном графике отмечены узловые точки. Максимальный прогиб составляет $2{,}24 \cdot 10^{-4}$ м. Данное значение сравнивалось с известным решением из курса сопротивления материалов

$$w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}. \quad (9)$$

Изгибная жесткость трехслойной балки при этом вычислялась как

$$EI = E_0 I_0 + E_1 I_1 + E_2 I_2 = 2E_0 I_0 + E_1 I_1 = \\ = 2E_0\left(\frac{bh_0^3}{12} + bh_0\left(\frac{h_1+h_0}{2}\right)^2\right) + E_1\frac{bh_1^3}{12}. \quad (10)$$

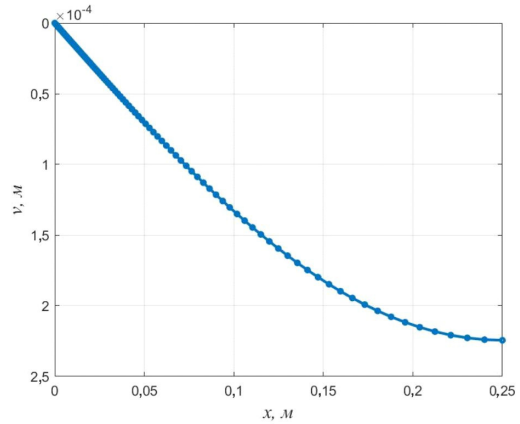


Рис. 4. Эпюра прогибов в балке без учета деформаций поперечного сдвига

Fig. 4. Diagram of deflections in a beam without taking into account transverse shear deformations

Вычисленное по формуле (9) значение составляет $2{,}23 \cdot 10^{-4}$ м. Таким образом, жесткость контактных слоев в рассмотренном примере несущественно влияет на прогибы балки.

На рис. 5 представлены графики изменения поперечной силы в зависимости от x в приопорной зоне. Характер эпюр зависит от положения точки закрепления, что не учитывается в работе [13]. Линии *1* соответствует закрепление нижнего слоя по y при $x = 0$, линии *2* – закрепление среднего слоя, линии *3* – закрепление всех слоев. Во всех случаях в приопорной зоне наблюдается краевой эффект. С решением, приведенным в [13], совпадает характер кривой *3*. Отдельно на рис. 6 показан график поперечной силы для случая, когда по y закреплен только верхний слой. В этом случае краевой эффект в нем наиболее выраженный.

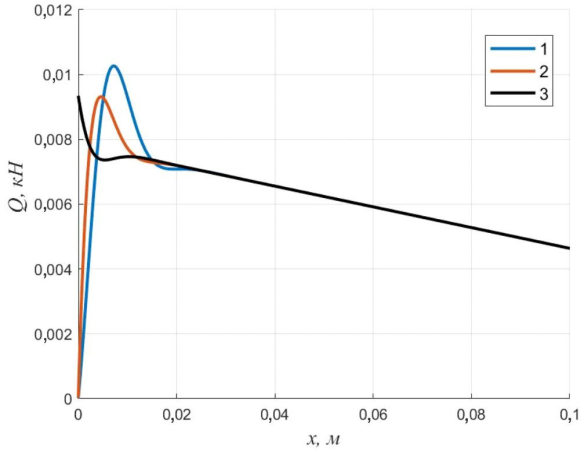


Рис. 5. Изменение поперечной силы в зависимости от x для верхнего слоя в приопорной зоне: *1* – при закреплении нижнего слоя по y в точке $x = 0$; *2* – при закреплении среднего слоя по y в точке $x = 0$; *3* – при закреплении всех слоев по y в точке $x = 0$

Fig. 5. Change in the shear force depending on x for the upper layer in the support zone: *1* – when the lower layer is fixed along y at the point $x = 0$; *2* – when the middle layer is fixed along y at the point $x = 0$; *3* – when all layers are fixed in y at the point $x = 0$

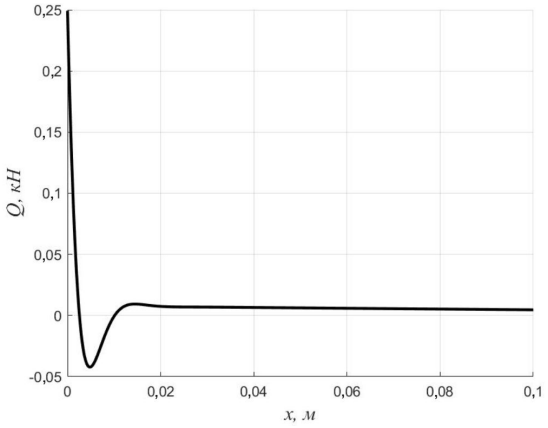


Рис. 6. Изменение поперечной силы в зависимости от x для верхнего слоя в приопорной зоне при закреплении верхнего слоя по y в точке $x = 0$

Fig. 6. Change of the shear force depending on x for the upper layer in the support zone when the upper layer is fixed along y at the point $x = 0$

На рис. 7, 8 представлены графики изменения изгибающего момента в приопорной зоне для верхнего слоя. Обозначения такие же, как на рис. 5, 6. Как и для поперечной силы, наиболее выраженный краевой эффект в верхнем слое наблюдается, если по y в опорном сечении закреплен только он. С решением, приведенным в [13], на рис. 7 совпадает характер кривой *3*.

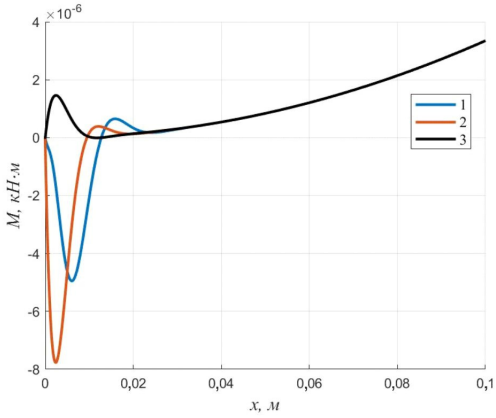


Рис. 7. Изменение изгибающего момента в зависимости от x для верхнего слоя в приопорной зоне: *1* – при закреплении нижнего слоя по y в точке $x = 0$; *2* – при закреплении среднего слоя по y в точке $x = 0$; *3* – при закреплении всех слоев по y в точке $x = 0$

Fig. 7. Change in the bending moment depending on x for the upper layer in the support zone: *1* – when the lower layer is fixed along y at the point $x = 0$; *2* – when the middle layer is fixed along y at the point $x = 0$; *3* – when all layers are fixed in y at the point $x = 0$

Характер эпюр продольных сил в наружных слоях практически совпадает с характером эпюры изгибающего момента в однослойной балке, поскольку суммарный изгибающий момент главным образом вызывает растяжение нижнего слоя и сжатие верхнего.

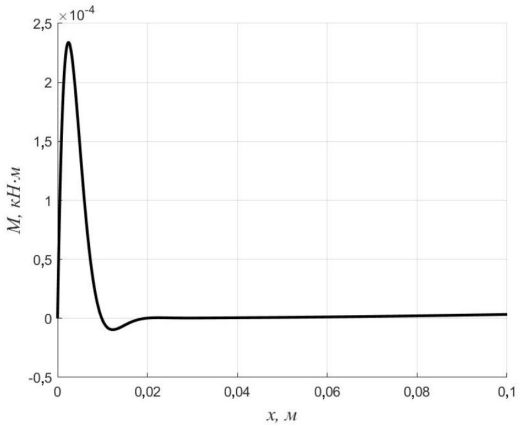


Рис. 8. Изменение изгибающего момента в зависимости от x для верхнего слоя в приопорной зоне при закреплении верхнего слоя по y в точке $x = 0$

Fig. 8. Change of the bending moment depending on x for the upper layer in the support zone when the upper layer is fixed along y at the point $x = 0$

На рис. 9, *a*, представлен график изменения продольной силы в верхнем слое в зависимости от x на половине длины балки. На рис. 9, *b*, тот же график показан в приопорной зоне с целью демонстрации краевых эффектов. Штриховой линии соответствуют значения продольной силы, вычисленные в предположении, что крайние слои полностью воспринимают изгибающий момент и работают только на растяжение-сжатие, по формуле:

$$N(x) = -\frac{1}{H}\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right), \qquad (11)$$

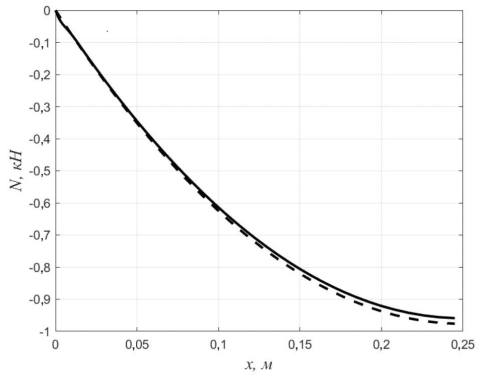
где $H = h_1 + \dfrac{h_0 + h_2}{2}$.

На рис. 10 представлены графики изменения касательных напряжений в контактном слое между верхним и средним слоем. Линии *1* соответствует результат при закреплении нижнего слоя по y в точке $x = 0$, линии *2* – при закреплении верхнего слоя, линии *3* – при закреплении среднего слоя либо всех слоев. Из представленных кривых с решением, приведенным в [13], согласуется характер кривой *2*.

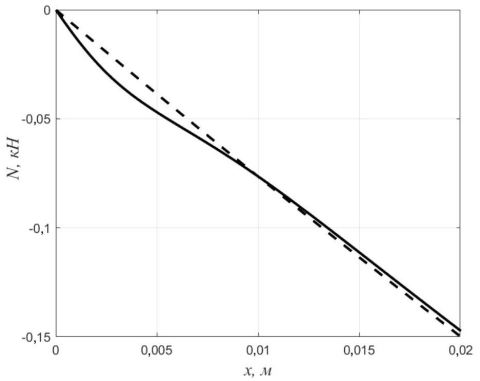
Перейдем далее к результатам расчета с учетом деформаций поперечного сдвига. Максимальный прогиб балки при этом составил $3{,}36 \cdot 10^{-4}$ м, что заметно отличается от результата, получаемого по формуле (9). Максимальное значение прогиба, вычисленное с учетом сдвиговых деформаций, сравнивалось с решением на основе технической теории трехслойных конструкций [41]:

$$w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{ql^2}{8GA}, \qquad (12)$$

где EI – изгибная жесткость наружных слоев, A – площадь поперечного сечения среднего слоя, G – модуль сдвига среднего слоя.



a



b

Рис. 9. Изменение продольной силы в верхнем слое: *a* – для половины балки; *b* – в приопорной зоне

Fig. 9. Change in the axial force in the upper layer: *a* – for half of the beam; *b* – in the support zone

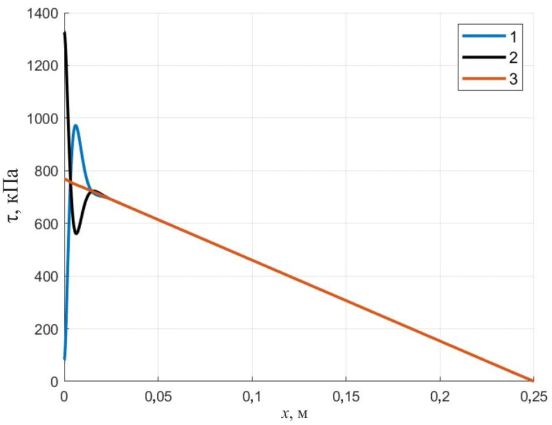


Рис. 10. Изменение касательных напряжений в контактном слое: *1* – при закреплении нижнего слоя по y в точке $x = 0$; *2* – при закреплении верхнего слоя; *3* – при закреплении среднего слоя или всех слоев

Fig. 10. Change in shear stresses in the contact layer: *1* – when fixing the lower layer along y at the point $x = 0$; *2* – when fixing the upper layer; *3* – when fixing the middle layer or all layers

Подстановка в формулу (12) исходных данных дает значение прогиба $w_{\max} = 3{,}27 \cdot 10^{-4}$ м, что отличается от нашего решения всего на 2,7 %.

Также при учете деформаций сдвига несколько меняется характер эпюр внутренних усилий в приопорной зоне. На рис. 11 представлены эпюры поперечных сил для случаев закрепления в сечении $x = 0$ нижнего слоя, среднего слоя, а также всех слоев. Обозначения такие же, как на рис. 5. При закреплении верхнего слоя эпюра Q несущественно отличается от рис. 6. На рис. 12 приведены эпюры изгибающих моментов для всех рассмотренных вариантов закрепления.

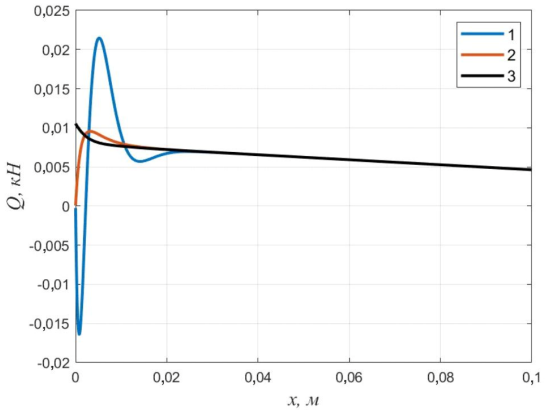


Рис. 11. Изменение поперечной силы в зависимости от x для верхнего слоя в приопорной зоне при учете деформаций поперечного сдвига

Fig. 11. Change in the shear force depending on x for the upper layer in the support zone when taking into account transverse shear deformations

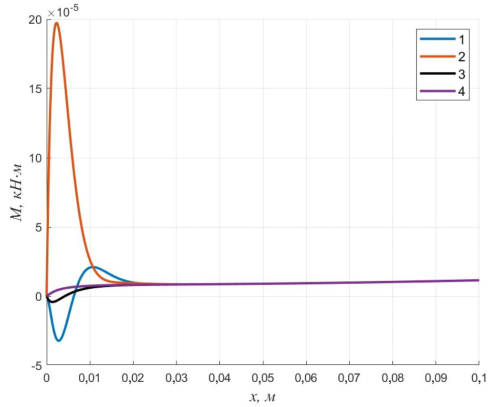


Рис. 12. Эпюры изгибающих моментов в приопорной зоне при учете деформаций поперечного сдвига: *1* – при закреплении нижнего слоя по y в точке $x = 0$; *2* – при закреплении верхнего слоя; *3* – при закреплении среднего слоя; *4* – при закреплении всех слоев

Fig. 12. Bending moments diagrams in the near-support zone, taking into account transverse shear deformations: *1* – when fixing the lower layer along y at the point $x = 0$; *2* – when fixing the top layer; *3* – when fixing the middle layer; *4* – when fixing all layers

Эпюры касательных напряжений в контактных слоях при учете деформаций поперечного сдвига несущественно отличаются от представленных на рис. 10. Таким образом, деформации поперечного сдвига незначительно влияют на прочность адгезионного соединения слоев. На эпюры продольных сил в наружных слоях сдвиговые деформации также не оказывают заметного влияния.

Для анализа влияния жесткости контактных слоев на величину максимального прогиба балки также проводился расчет при $e^* = g^*$ в диапазоне от 10^2 МПа/мм до 10^6 МПа/мм. Результирующие значения максиальных прогибов с учетом деформаций поперечного сдвига приведены в таблице.

Максимальные прогибы балки
при различной жесткости контактных слоев

Maximum beam deflections for different
stiffness of the contact layers

$e^* = g^*$, МПа/мм	10^2	$5 \cdot 10^2$	10^3	10^4	10^5	10^6
$w_{max} \cdot 10^{-4}$, м	3,93	3,45	3,4	3,36	3,34	3,34

Из данных таблицы видно, что имеется диапазон изменения жесткостей контактного слоя, в котором они не оказывают заметного влияния на вертикальные перемещения балки.

Заключение

Разработана методика определения напряженно-деформированного состояния многослойных балок с учетом деформаций поперечного сдвига на основе метода конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя. Преимуществом предлагаемого подхода по сравнению с решением дифференциальных уравнений изгиба многослойных конструкций методом конечных разностей является возможность сгущения сетки в зоне с краевым эффектом. Также предлагаемый подход, в отличие от работ [2; 9], позволяет учесть закрепление конкретных слоев в опорном сечении. При этом выявлено различие эпюр внутренних усилий в приопорной зоне для различных вариантов закрепления. Для рассмотренного примера установлено существенное влияние деформаций поперечного сдвига на величину максимального прогиба, а также характер эпюр изгибающего момента и поперечной силы в крайних слоях. В то же время деформации поперечного сдвига никак не влияют на касательные напряжения в контактных слоях и, соответственно, на прочность адгезионного сцепления слоев. Выполненный анализ показал также, что существует диапазон изменения, в котором жесткость контактных слоев не оказывает заметного влияния на прогиб балки.

Дальнейшие исследования авторов будут направлены на развитие предлагаемой методики для численного анализа более сложных трехмерных конструкций. При этом для КЭ контактного слоя добавляется всего одна дополнительная степень свободы в узле.

Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.

2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1967. – 268 с.

3. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. – М.: Наука, 1970. – 483 с.

4. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.

5. Tsybin N.Y., Turusov R.A., Andreev V.I. Comparison of creep in free polymer rod and creep in polymer layer of the layered composite // Procedia engineering. – 2016. – Vol. 153. – P. 51–58.

6. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением метода контактного слоя // Вестник МГСУ. – 2016. – № 4. – С. 17–26.

7. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Application of the Contact Layer in the Solution of the Problem of Bending the Multilayer Beam // Procedia engineering. – 2016. – Vol. 153. – P. 59–65.

8. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Напряженное состояние слоистого композита при нормальном отрыве. Часть 1 // Научное обозрение. – 2015. – № 24. – С. 98–101.

9. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Напряженное состояние слоистого композита при нормальном отрыве. Часть 2 // Научное обозрение. – 2015. – № 24. – С. 102–106.

10. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Long strength of layered composite under normal fracture // 5th International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering. – Atlantis Press, 2015. – P. 1703–1708.

11. Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухслойной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – Т. 14, № 3. – С. 180–186.

12. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure I. Experiment and theory // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 50, № 6. – P. 801–808.

13. Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 4. – С. 34–42.

14. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure. Part II. Calculation results and their analysis // Mechanics of Composite materials. – 2015. – Vol. 51, № 1. – P. 127–134.

15. Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю. Композит слоистой структуры. Трансверсальная прочность и модуль Юнга // Клеи. Герметики. Технологии. – 2021. – № 8. – С. 2–11.

16. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Application of the Contact Layer in the Solution of the Problem of Bending the Multilayer Beam // Procedia engineering. – 2016. – Vol. 153. – P. 59–65.

17. Цыбин Н. Ю., Андреев В.И., Турусов Р.А. Исследование ползучести полимеров в различных условиях деформирования // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – № 3. – С. 30–35.

18. Andreev V., Turusov R., Tsybin N. The edge effects in layered beams // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 21, Construction – The Formation of Living Environment. – 2018. – Article 042049.

19. Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю. Расчет двухслойной цилиндрической оболочки с применением метода контактного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. – 2017. – С. 193–196.

20. Andreev V.I., Turusov R.A. Thermal strength of adhesion bond // Applied Mechanics and Materials. – Trans Tech Publications Ltd, 2014. – Vol. 670. – P. 153–157.

21. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact-layer method in adhesive mechanics: Adhesive strength during normal detachment // Polymer Science. Series D. – 2010. – Vol. 3, № 3. – P. 159–169.

22. Фрейдин А.С., Турусов Р.А. Свойства и расчет адгезионных соединений. – М.: Химия, 1990. – 256 с.

23. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact layer method: Determining parameters of rigidity and true strength of an adhesion bond for a contact layer // Polymer Science Series D. – 2011. – Vol. 4, № 1. – P. 1–4.

24. Турусов Р.А., Маневич Л.И. Метод контактного слоя в адгезионной механике. Одномерные задачи. Сдвиг соединения внахлестку // Клеи. Герметики. Технологии. – 2009. – № 8. – С. 2–12.

25. Turusov R.A., Gorenberg A.Y., Yazyev B.M. Long-term normal tearing strength of adhesive bonds // Polymer Science Series D. – 2012. – Vol. 5, № 1. – P. 7–14.

26. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact layer method in adhesive mechanics // Polymer Science. Series D. – 2010. – Vol. 3, № 1. – P. 1–9.

27. Turusov R.A., Manevich L.I. Introduction to adhesion mechanics // Polymer Science. Series D. – 2009. – Vol. 2, № 4. – P. 209–213.

28. Turusov R.A., Kuperman A.M. Elastic properties of thin adhesive interlayers // Polymer Science Series D. – 2014. – Vol. 7, № 1. – P. 1–8.

29. Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Yazyev S.B. Combined use of contact layer and finite-element methods to predict the long-term strength of adhesive joints in normal separation // Mechanics of Composite Materials. – 2021. – Vol. 57. – P. 349–360.

30. Meguro K., Tagel-Din H. Applied element method for structural analysis: Theory and application for linear materials // Structural engineering/earthquake engineering. Japan: Japan Society of Civil Engineers(JSCE). – 2000. – Vol. 17. – P. 21–35.

31. Chepurnenko A.S., Savchenko A.A., Chepurnenko V.S. Applied element method in the solution of plane problems in the theory of creep // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – Vol. 42. – P. 455–460.

32. Modelling the in-plane cyclic behaviour of typical Portuguese Rubble Stone Masonry using the applied element method / S. Sharma [et al.] // Structures. – Elsevier, 2022. – Vol. 46. – P. 1224–1242.

33. Eraky A., A Mustafa S.A., Badawy M. Structural analysis using Applied Element Method: a review // The Egyptian International Journal of Engineering Sciences and Technology. – 2021. – Vol. 34, № 1. – P. 16–27.

34. Domaneschi M., Cimellaro G.P., Scutiero G. A simplified method to assess generation of seismic debris for masonry structures // Engineering Structures. – 2019. – Vol. 186. – P. 306–320.

35. Reliability of collapse simulation–Comparing finite and applied element method at different levels / C. Grunwald [et al.] // Engineering Structures. – 2018. – Vol. 176. – P. 265–278.

36. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century / J.M. Adam, F. Parisi, J. Sagaseta, X. Lu // Engineering Structures. – 2018. – Vol. 173. – P. 122–149.

37. Malomo D., Pinho R., Penna A. Using the applied element method to simulate the dynamic response of full-scale URM houses

tested to collapse or near-collapse conditions // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 2018. – Vol. 47. – P. 1610–1630.

38. Collapse analysis of the Polcevera viaduct by the applied element method / M. Domaneschi [et al.] //Engineering Structures. – 2020. – Vol. 214. – Article 110659.

39. Approbation of the mathematical model of adhesive strength with viscoelasticity / S. Litvinov [et al.] // Key Engineering Materials – 2019. – Vol. 816. – P. 96–101.

40. Дудаев М.А. Матрица жесткости балки Тимошенко в конечноэлементном анализе динамического поведения роторных турбомашин // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2014. – № 6 (89). – С. 59–65.

41. Chepurnenko V., Yazyev B., Song X. Creep calculation for a three-layer beam with a lightweight filler // MATEC Web of Conferences. – EDP Sciences, 2017. – Vol. 129. – Article 05009.

References

1. Lekhnitsky S.G. Anizotropnyye plastinki [Anisotropic plates]. *Gostekhizdat,* 1990, 464 p.

2. Ambartsumyan S.A. Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya [Theory of anisotropic plates. Strength, stability and vibrations]. *Nauka,* 1967, 268 p.

3. Rabinovich A.L. Vvedeniye v mekhaniku armirovannykh polimerov [Introduction to the mechanics of reinforced polymers]. *Nauka*, 1970. 483 p.

4. Rzhanitsyn A.R. Sostavnyye sterzhni i plastinki [Composite rods and plates]. *Stroyizdat*, 1986, 316 p.

5. Tsybin N.Y., Turusov R.A., Andreev V.I. Comparison of creep in free polymer rod and creep in polymer layer of the layered composite. *Procedia engineering*, 2016, Vol. 153, pp. 51-58.

6. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Opredeleniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhsloynoy balki s primeneniyem metoda kontaktnogo sloya [Determination of the stress-strain state of a three-layer beam using the contact layer method]. *Vestnik MGSU*, 2016, №. 4, pp. 17-26.

7. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Application of the Contact Layer in the Solution of the Problem of Bending the Multilayer Beam. *Procedia engineering,* 2016, Vol. 153, pp. 59-65.

8. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Napryazhennoye sostoyaniye sloistogo kompozita pri normal'nom otryve. Chast' 1 [Stressed state of a layered composite at normal separation. Part 1]. *Nauchnoe obozrenie*, 2015, №. 24, pp. 98-101.

9. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Napryazhennoye sostoyaniye sloistogo kompozita pri normal'nom otryve. Chast' 2 [Stressed state of a layered composite at normal separation. Part 2]. *Nauchnoe obozrenie*, 2015, №. 24, pp. 102-106.

10. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Long strength of layered composite under normal fracture. *5th International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering*. Atlantis Press, 2015, pp. 1703-1708.

11. Andreev V.I., Tsybin N.Y., Turusov R.A. Analiz krayevogo effekta kasatel'nykh napryazheniy pri sdvige dvukhsloynoy balki [Analysis of the edge effect of shear stresses in the shear of a two-layer beam]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings,* 2018, Vol. 14, №. 3, pp. 180-186.

12. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure I. Experiment and theory. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, Vol. 50, № 6, pp. 801-808.

13. Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Y. Obshcheye resheniye zadachi ob izgibe mnogosloynoy balki v ryadakh Fur'ye [General solution of the problem of bending of a multilayer beam in Fourier series]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings,* 2017, №. 4, pp. 34-42.

14. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure. Part II. Calculation results and their analysis. *Mechanics of Composite materials*, 2015, Vol. 51, № 1, pp. 127-134.

15. Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Y. Kompozit sloistoy struktury. Transversal'naya prochnost' i modul' Yunga [Composite of layered structure. Transversal strength and Young's modulus]. *Klei. Germetiki. Tekhnologii*, 2021, №. 8, pp. 2-11.

16. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Y. Application of the Contact Layer in the Solution of the Problem of Bending the Multilayer Beam. *Procedia engineering,* 2016, Vol. 153, pp. 59-65.

17. Tsybin N.Y., Andreev V.I., Turusov R.A. Issledovaniye polzuchesti polimerov v razlichnykh usloviyakh deformirovaniya [Investigation of the creep of polymers under various deformation conditions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 2018, № 3, pp. 30-35.

18. Andreev V., Turusov R., Tsybin N. The edge effects in layered beams. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, Vol.365, Article 042049.

19. Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Y. Raschet dvukhsloynoy tsilindricheskoy obolochki s primeneniyem metoda kontaktnogo sloya [Calculation of a two-layer cylindrical shell using the contact layer method]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy, slozhnykh i geterogennykh sred*, 2017, pp. 193-196.

20. Andreev V.I., Turusov R.A. Thermal strength of adhesion bond. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, Vol. 670, pp. 153–157.

21. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact-layer method in adhesive mechanics: Adhesive strength during normal detachment. *Polymer Science. Series D*, 2010, Vol. 3, № 3, pp. 159-169.

22. Freidin A.S., Turusov R.A. Svoystva i raschet adgezionnykh soyedineniy [Properties and calculation of adhesive joints]. *Khimiya*, 1990, 256 p.

23. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact layer method: Determining parameters of rigidity and true strength of an adhesion bond for a contact layer. *Polymer Science Series D,* 2011, Vol. 4, № 1, Pp. 1–4.

24. Turusov R.A., Manevich L.I. Metod kontaktnogo sloya v adgezionnoy mekhanike. Odnomepnyye zadachi. Sdvig soyedineniya vnakhlestku [Contact layer method in adhesive mechanics. One-dimensional problems. Shift Lap Joint]. *Klei. Germetiki. Tekhnologii*, 2009, № 8, pp. 2-12.

25. Turusov R.A., Gorenberg A.Y., Yazyev B.M. Long-term normal tearing strength of adhesive bonds, *Polymer Science Series D*, 2012, Vol. 5, № 1, pp. 7-14.

26. Turusov R.A., Manevich L.I. Contact layer method in adhesive mechanics. *Polymer Science. Series D,* 2010, Vol. 3, № 1, pp. 1-9.

27. Turusov R.A., Manevich L.I. Introduction to adhesion mechanics. *Polymer Science. Series D,* 2009, Vol. 2, № 4, pp. 209–213.

28. Turusov R.A., Kuperman A.M. Elastic properties of thin adhesive interlayers. *Polymer Science Series D,* 2014, Vol. 7, № 1, pp. 1-8.

29. Chepurnenko A.S., Litvinov S.V., Yazyev S.B. Combined use of contact layer and finite-element methods to predict the long-term strength of adhesive joints in normal separation. *Mechanics of Composite Materials,* 2021, Vol. 57, pp. 349-360.

30. Meguro K., Tagel-Din H. Applied element method for structural analysis: Theory and application for linear materials. *Structural engineering/earthquake engineering. Japan: Japan Society of Civil Engineers(JSCE)*, 2000, Vol. 17, pp. 21–35.

31. Chepurnenko A.S., Savchenko A.A., Chepurnenko V.S. *Applied element method in the solution of plane problems in the theory of creep,*/ Materials Physics and Mechanics, 2019, Vol. 42, pp. 455-460.

32. Sharma S. et al. Modelling the in-plane cyclic behaviour of typical Portuguese Rubble Stone Masonry using the applied element method. *Structures*, 2022, Vol. 46, pp. 1224-1242.

33. Eraky A., A Mustafa S. A., Badawy M. Structural analysis using Applied Element Method: a review. *The Egyptian International Journal of Engineering Sciences and Technology*, 2021, Vol. 34, №. 1, pp. 16-27.

34. Domaneschi M., Cimellaro G. P., Scutiero G. A simplified method to assess generation of seismic debris for masonry structures. *Engineering Structures,* 2019, Vol. 186, pp. 306-320.

35. Grunwald C. et al. Reliability of collapse simulation–Comparing finite and applied element method at different levels. *Engineering Structures*, 2018, Vol. 176, pp. 265-278.

36. Adam J.M., Parisi F., Sagaseta J., Lu X. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century. *Engineering Structures*, 2018, Vol. 173, pp. 122-149.

37. Malomo D., Pinho R., Penna A. Using the applied element method to simulate the dynamic response of full-scale URM houses tested to collapse or near-collapse conditions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2018, Vol. 47, pp. 1610–1630.

38. Domaneschi M. et al. Collapse analysis of the Polcevera viaduct by the applied element method. *Engineering Structures,* 2020, Vol. 214, Article 110659.

39. Litvinov S. V. et al. Approbation of the mathematical model of adhesive strength with viscoelasticity. Key Engineering Materials, 2019, Vol. 816, pp. 96-101.

40. Dudaev M.A. Matritsa zhestkosti balki Timoshenko v konechnoelementnom analize dinamicheskogo povedeniya rotornykh turbomashin [Timoshenko Beam Stiffness Matrix in Finite Element Analysis of Dynamic Behavior of Rotary Turbomachines]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2014, № 6 (89), pp. 59-65.

41. Chepurnenko V., Yazyev B., Song X. Creep calculation for a three-layer beam with a lightweight filler. *MATEC Web of Conferences*, 2017, Vol. 129, Article 05009.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was not sponsored.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.