Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентные модели деформирования составных электроупругих тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. С. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01

Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Gradient models of deformation of composite electroelastic bodies. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 5, pp. 5-16. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01
УДК 539.3

ГРАДИЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ

А.О. Ватульян[1,2], С.А. Нестеров[2]

[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Южный математический институт – филиал ВНЦ Российской академии наук, Владикавказ, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 02 августа 2023 г.
Одобрена: 08 октября 2023 г.
Принята к публикации: 31 октября 2023 г.

Ключевые слова:

стержень, слой, цилиндр, составные тела, градиентная теория электроупругости, напряжения Коши, полные напряжения, моментные напряжения, квадрупольный момент, масштабный эффект.

АННОТАЦИЯ

Исследовано напряженно-деформированного состояние слоистых электроупругих тел с учетом масштабных эффектов. Для учета масштабных эффектов использована градиентная модель электроупругости с одним механическим и одним электростатическим параметрами. В качестве примеров рассмотрена задача о деформировании составного электроупругого стержня, антиплоская задача о деформировании электроупругой полосы с покрытием, задача о деформировании сплошного пьезоцилиндра с покрытием. На основе вариационного принципа градиентной электроупругости получены уточненные уравнения равновесия и электростатики, а также расширенный список граничных условий и условий сопряжения для поставленных задач. Рассмотрено несколько упрощенных постановок задач градиентной электроупругости для составных тел, когда учитывается только один из градиентных эффектов – механический или электростатический. Проведено обезразмеривание и получены аналитические решения упрощенных задач. На конкретных примерах найдены перемещения и напряжения в составных электроупругих телах. Представлены решения задач в классической и градиентной постановках, проведен сравнительный анализ полученных решений. Выяснено, что в случае учета масштабных параметров в окрестности сопряжения слоев наблюдается: 1) более гладкое распределение перемещений и электрического потенциала по сравнению с классической теорией; 2) скачок компонентов тензора напряжений Коши и компонентов вектора электрической индукции; 3) непрерывность некоторых компонентов тензора моментных напряжений и квадрупольного момента; 4) непрерывность полных напряжений. Скачок компонентов тензора напряжений Коши и компонентов вектора электрической индукции объясняется непрерывностью перемещений, электрического потенциала и их первых производных. Исследована зависимость перемещений и электрического потенциала от величины механического и электростатического масштабных параметров. Выяснено, что с увеличением масштабных параметров перемещения и электрический потенциал уменьшаются.

© ПНИПУ

© **Ватульян Александр Ованесович** – д. ф.-м. н., проф., зав. кафедрой теории упругости, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru.

Нестеров Сергей Анатольевич – к. ф.-м. н., ст. науч. сотр. отдела дифференциальных уравнений ЮМИ, e-mail: 1079@list.ru.

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theory of Elasticity, Southern Federal University, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru.
Sergey A. Nesterov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Department of Differential Equations, e-mail: 1079@list.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

GRADIENT MODELS OF DEFORMATION OF COMPOSITE ELECTROELASTIC BODIES

A.O. Vatulyan[1,2], S.A. Nesterov[2]

[1]Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2]Southern Mathematical Institute, a branch of the VSC RAS, Vladikavkaz, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 02 August 2023
Approved: 08 October 2023
Accepted for publication:
31 October 2023

Keywords:

rod, layer, cylinder, composite bodies, gradient theory of electroelasticity, Cauchy stresses, total stresses, couple stresses, quadrupole moment, scale effect.

ABSTRACT

The stress-strain state of layered electroelastic bodies is studied taking into account large-scale effects. To account for the scale effects, a gradient model of electroelasticity with one mechanical and one electrostatic parameters is used. As examples, the problem of deformation of a composite electroelastic rod, the antiplane problem of deformation of an electroelastic strip with a coating, the problem of deformation of a solid piezocylinder with a coating are considered. On the basis of the variational principle of gradient electroelasticity, refined equations of equilibrium and electrostatics are obtained, as well as an expanded list of boundary conditions and interface conditions for the tasks set. Several simplified formulations of gradient electroelasticity problems for composite bodies are considered, when only one of the gradient effects, mechanical or electrostatic, is taken into account. The dimensionalization was carried out and analytical solutions of simplified problems were obtained. Calculations of displacements and stresses of composite electroelastic bodies are carried out on specific examples. Solutions of problems in classical and gradient formulations are graphically presented; a comparative analysis of the solutions obtained is carried out. It is found out that if the scale parameters are taken into account in the vicinity of the conjugation of layers, the following is observed: 1) a smoother distribution of displacements and electric potential compared to classical theory; 2) a jump of components of the Cauchy stress tensor and components of the electric induction vector; 3) a continuity of some components of the moment stress tensor and quadrupole moment; 4) a continuity of total stresses. The jump of the components of the Cauchy stress tensor and the components of the electric induction vector is explained by the continuity of the displacements, the electric potential and their first derivatives. The dependence of displacements and electric potential on the magnitude of mechanical and electrostatic scale parameters is investigated. It was found out that with an increase in the scale parameters both the displacement and electric potential decrease.

© PNRPU

Введение

Пьезоэлектрические элементы стержневой, плоской и цилиндрической формы широко используются в качестве сенсоров и актуаторов в микроэлектромеханических устройствах, которые применяются в устройствах медицинской диагностики, солнечных батареях и т.д. [1; 2]. Задачи деформирования пьезоэлектрических тел различной формы достаточно полно изучены в рамках классической теории электроупругости [3]. Однако модели классической теории упругости и электроупругости не учитывают масштабные эффекты, которые возникают, когда размеры образцов соизмеримы с характерным размером структуры материала [4–8]. Для описания масштабных эффектов используются различные обобщенные теории электроупругости, например, моментная теория [9], поверхностная теория [10] градиентная теория электроупругости [11–22], которые в определяющие уравнения включают градиентные параметры размерности длины.

Градиентная теория упругости была обоснована в середине XX в. в работах Тупина [23] и Миндлина [24] и в дальнейшем получила обобщение на механику связанных полей, в том числе на теорию электроупругости [11; 14]. Современные исследования в области градиентной электроупругости можно разделить на две группы: одна учитывает влияние градиента деформации, но не учитывает влияние градиента электрического поля [25], другая учитывает влияние электрического поля, но пренебрегает градиентом деформации [13]. По сравнению с классической теорией градиентные модели электроупругости дают возможность уточненной оценки электромеханических полей для тел, толщины которых соизмеримы с масштабным параметром материала, характеризующим его микроструктурное строение [22]. Однако при этом уравнения равновесия и электростатики в градиентной теории обладают повышенным порядком по сравнению с классической теорией, а формулировка краевых задач содержит расширенный набор граничных условий.

На основе градиентной теории исследованы масштабные эффекты, возникающие при деформировании составных упругих [26–28] и термоупругих тел [29–31], с также неоднородных тел [20–22]. Так, в работе [26] исследована градиентная модель изгиба составной балки Эйлера – Бернулли в предположении одноосного напряженного состояния, в [27] решена задача о равновесии слоя с покрытием, находящегося под действием локализованной нормальной нагрузки, в [29] исследована задача градиентной термоупругости для составного стержня, в [30] – термонапряженное состояние бесконечно длинного двухслойного цилиндра, в [31] – термонапряженное состояние слоистой полосы. В [20; 21] представлено численное решение задачи градиентной

электроупругости для полого функционально-градиентного цилиндра со степенными законами неоднородности.

Однако задачи градиентной электроупругости для составных тел, в том числе стержня, цилиндра и слоя, остаются неизученными.

В данной работе приведены постановки задач градиентной электроупругости для составного стержня, полосы и сплошного цилиндра с покрытием. Получены аналитические решения поставленных задач. Проведены вычисления перемещений, электрического потенциала и напряжений составных электроупругих тел, как в классической, так и в градиентной постановках. Сделан анализ полученных результатов.

1. Основные положения градиентной теории электроупругости

Рассмотрим пьезоэлектрическое тело, занимающее объем V с поверхностью $S = S_u \bigcup S_t = S_\phi \bigcup S_q$, где на границе S_u заданы перемещения, на S_t – компоненты вектора силы, на S_ϕ – электрический потенциал, на S_g – поверхностный заряд. В градиентной теории линейной электроупругости плотность полной электрической энтальпии зависит не только от деформации и напряженности электрического поля, но и от их градиентов [19]:

$$G(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, E_i, E_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - e_{kij}\varepsilon_{ij}E_k - \\ -\frac{1}{2}\text{э}_{ij}E_iE_j + \frac{1}{2}A_{ijklmn}\varepsilon_{ij,k}\varepsilon_{lm,n} - \frac{1}{2}\beta_{ijkl}E_{i,j}E_{k,l}. \quad (1)$$

Здесь $E_i = -\phi_{,i}$ – компоненты вектора напряженности электрического поля, ϕ – электрический потенциал, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ – компоненты тензора деформации, u_i – компоненты вектора перемещения, c_{ijkl} и A_{ijklmn} – компоненты тензоров модулей упругости 4-го и 6-го порядка, e_{kij} – компоненты тензора пьезомодулей 3-го порядка, э_{ij} и β_{ijkl} – компоненты тензоров коэффициентов диэлектрической проницаемости 2-го и 4-го порядка соответственно.

Математическая постановка задачи, полученная путем применения вариационного принципа градиентной электроупругости, состоящая из уравнений равновесия, электростатики, механических и электростатических граничных условий, имеет вид [19]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

$$P_{i,i} = 0, \quad (3)$$

$$m_{ijk,k}n_jn_k = r_i,$$

$$\tau_{ij}n_j - m_{ijk,k}n_j - (m_{ijk,k}n_k)_{,j} + (m_{ijk,k}n_jn_k)_{,s}n_s = t_i, \quad (4)$$

$$u_i = v_i,\ u_{i,l}n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n}, \quad (5)$$

$$q_{ij}n_in_j = 0,$$

$$\left(D_j - q_{jk,k}\right)n_j - (q_{jk}n_k)_{,j} + (q_{jk,k}n_kn_l)_{,l}n_j = g, \quad (6)$$

$$\phi = \phi_0,\ E_in_i = 0. \quad (7)$$

Здесь $\tau_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k$ – компоненты тензора напряжений Коши, $m_{ijk} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n}$ – компоненты тензора моментных напряжений, $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}$ – компоненты тензора полных напряжений, $D_i = -\frac{\partial G}{\partial E_i} = e_{ijk}\varepsilon_{jk} + \text{э}_{ij}E_j$ – компоненты вектора электрической индукции, $q_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial E_{i,j}} = \beta_{ijkl}E_{k,l}$ – компоненты тензора квадрупольного момента, $P_i = D_i - q_{ij,j}$ – компоненты вектора полной электрической индукции, t_i, r_i – векторы заданных сил на поверхности тела, g – плотность поверхностного заряда, n_i – компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

2. Градиентная модель деформирования составного электроупругого стержня

В качестве первого примера градиентной модели электроупругости рассмотрим равновесие составного продольно поляризованного пьезоупругого стержня длины L с местом стыка в точке $x_3 = L_0$. Один торец стержня $x_3 = 0$ жестко защемлен, закорочен, а на другом торце действует нагрузка одного из следующих видов: 1) механическая нагрузка $\sigma(L) = p_0$, $\varphi(L) = 0$; 2) электростатическая нагрузка $\sigma(L) = 0$, $\phi(L) = \phi_0$.

Используя обозначения Фойхта для ненулевых компонент тензоров $c_{3333} = c_{33}$, $e_{333} = e_{33}$, $\text{э}_{33} = \text{э}_3$ и принимая следующие упрощения $A_{333333} = l_\text{м}^2 c_{33}$, $\beta_{33333} = l_\text{э}^2\text{э}_3$, получим выражение для плотности полной энтальпии:

$$G = \frac{1}{2}c_{33}u_{,3}^2 + e_{33}u_{,3}\phi_{,3} - \frac{1}{2}\text{э}_3\phi_{,3}^2 + \frac{1}{2}l_\text{м}^2 c_{33}u_{,33}^2 - \frac{1}{2}l_\text{э}^2\text{э}_3\phi_{,33}^2, \quad (8)$$

где $l_\text{м}$ – механический градиентный параметр, $l_\text{э}$ – электростатический градиентный параметр.

Ненулевые компоненты тензоров напряжения Коши, моментного и полного напряжений, квадрупольного момента, компоненты вектора электрической индукции и полной электрической индукции, исходя из (8),

примут вид: $\tau_{33} = c_{33}u_{3,3} + e_{33}\phi_{,3}$, $m_{333} = l_{\text{м}}^2 c_{33}u_{3,33}$, $\sigma_{33} = \tau_{33} - m_{333,3}$, $D_3 = e_{33}u_{3,3} - \text{э}_3\phi_{,3}$, $q_{33} = -l_{\text{э}}^2\text{э}_3\phi_{,33}$, $P_3 = D_3 - q_{33,3}$.

В формулах ниже обозначим индексами «1» и «2» функции и параметры, соответствующие первому и второму стержню соответственно. Для упрощения расчетов примем градиентные параметры одинаковыми для обоих стержней. Применяя вариационный принцип градиентной электроупругости для составного стержня, получим расширенный список граничных условий и условий сопряжения, включающий кроме классических условий и неклассические условия, например, $u_{3,3}^{(1)}(0) = 0$, $\phi_{,3}^{(1)}(0) = 0$, $m_{333}^{(2)}(L) = 0$, $q_{33}^{(2)}(L) = 0$, $u_{3,3}^{(1)}(L_0) = u_{3,3}^{(2)}(L_0)$, $m_{333}^{(1)}(L_0) = m_{333}^{(2)}(L_0)$, $\phi_{,3}^{(1)}(L_0) = \phi_{,3}^{(2)}(L_0)$, $q_{33}^{(1)}(L_0) = q_{33}^{(2)}(L_0)$.

Постановка задачи градиентной электроупругости для составного стержня имеет вид:

$$\sigma_{3,3}^{(i)} = 0,\ i = 1,2, \tag{9}$$

$$P_{3,3}^{(i)} = 0,\ i = 1,2, \tag{10}$$

$$u_3^{(1)}(0) = 0,\ u_{3,3}^{(1)}(0) = 0,\ \phi^{(1)}(0) = 0,\ \phi_{,3}^{(1)}(0) = 0, \tag{11}$$

$$m_{333}^{(2)}(L) = 0,\ \sigma_{33}^{(2)}(L) = p_0,\ \phi^{(2)}(L) = \phi_0,\ q_{33}^{(2)}(L) = 0, \tag{12}$$

$$u_3^{(1)}(L_0) = u_3^{(2)}(L_0),\ u_{3,3}^{(1)}(L_0) = u_{3,3}^{(2)}(L_0),$$
$$m_{333}^{(1)}(L_0) = m_{333}^{(2)}(L_0),\ \sigma_{33}^{(1)}(L_0) = \sigma_{33}^{(2)}(L_0),$$
$$\phi^{(1)}(L_0) = \phi^{(2)}(L_0),\ \phi_{,3}^{(1)}(L_0) = \phi_{,3}^{(2)}(L_0),$$
$$q_{33}^{(1)}(L_0) = q_{33}^{(2)}(L_0),\ P_3^{(1)}(L_0) = P_3^{(2)}(L_0). \tag{13}$$

Обезразмерим задачу (9)–(13) по формулам: $z = \frac{x_3}{H}$, $z_0 = \frac{L_0}{H}$, $\alpha_1 = \frac{l_{\text{м}}}{H}$, $\alpha_2 = \frac{l_{\text{э}}}{H}$, $U_3^{(i)} = \frac{u_3^{(i)}}{H}$, $\Phi^{(i)} = \frac{\phi^{(i)}}{H}\sqrt{\frac{\text{э}_3^0}{c_{33}^0}}$, $V_0 = \frac{\phi_0}{H}\sqrt{\frac{\text{э}_3^0}{c_{33}^0}}$, $\delta^2 = \frac{\left(e_{33}^0\right)^2}{\text{э}_3^0 c_{33}^0}$, $M^{(i)} = \frac{m_{333}^{(i)}}{c_{33}^0 H}$, $S_{33}^{(i)} = \frac{\tau_{33}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $\Omega_{33}^{(i)} = \frac{\sigma_{33}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $P_0 = \frac{p_0}{c_{33}^0}$, $\overline{D}_3^{(i)} = \frac{D_3^{(i)}}{\sqrt{\text{э}_3^0 c_{33}^0}}$, $\overline{P}_3^{(i)} = \frac{P_3^{(i)}}{\sqrt{\text{э}_3^0 c_{33}^0}}$, $Q_{33}^{(i)} = \frac{q_{33}^{(i)}}{\sqrt{\text{э}_3^0 c_{33}^0}H}$, $\overline{c}_{33}^{(i)} = \frac{c_{33}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $\overline{e}_{33}^{(i)} = \frac{e_{33}^{(i)}}{e_{33}^0}$, $\overline{\text{э}}_3^{(i)} = \frac{\text{э}_3^{(i)}}{\text{э}_3^0}$, $i = 1,2$. Здесь H – характерный размерный параметр, c_{33}^0, e_{33}^0, э_3^0 – максимальные значения соответствующих электромеханических характеристик, δ^2 – коэффициент электромеханической связанности. Для стержня за характерный размер H примем длину стержня L.

Обезразмеренная задача (9)–(13) примет вид:

$$\Omega_{33,3}^{(i)} = 0,\ i = 1,2, \tag{14}$$

$$\overline{P}_{3,3}^{(i)} = 0,\ i = 1,2, \tag{15}$$

$$U_3^{(1)}(0) = 0,\ U_{3,3}^{(1)}(0) = 0,\ \Phi^{(1)}(0) = 0,\ \Phi_{,3}^{(1)}(0) = 0, \tag{16}$$

$$M^{(2)}(1) = 0,\ \Omega_{33}^{(2)}(1) = P_0,\ \Phi^{(2)}(1) = V_0,\ Q_{33}^{(2)}(1) = 0, \tag{17}$$

$$U_3^{(1)}(z_0) = U_3^{(2)}(z_0),\ U_{3,3}^{(1)}(z_0) = U_{3,3}^{(2)}(z_0),$$
$$M^{(1)}(z_0) = M^{(2)}(z_0),\ \Omega_{33}^{(1)}(z_0) = \Omega_{33}^{(2)}(z_0),$$
$$\Phi^{(1)}(z_0) = \Phi^{(2)}(z_0),\ \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) = \Phi_{,3}^{(2)}(z_0),$$
$$Q_{33}^{(1)}(z_0) = Q_{33}^{(2)}(z_0),\ \overline{P}_3^{(1)}(z_0) = \overline{P}_3^{(2)}(z_0). \tag{18}$$

Выражая компоненты полных напряжений, моментных напряжений, полной электрической индукции и квадрупольного момента через смещение и потенциал, получим развернутую постановку задачи (14)–(18):

$$\overline{c}_{33}^{(i)}U_{3,33}^{(i)} + \delta\overline{e}_{33}^{(i)}\Phi_{,33}^{(i)} - \alpha_1^2\overline{c}_{33}^{(i)}U_{3,3333}^{(i)} = 0,\ i = 1,2, \tag{19}$$

$$\delta\overline{e}_{33}^{(i)}U_{3,33}^{(i)} - \overline{\text{э}}_3^{(i)}\Phi_{,33}^{(i)} + \alpha_2^2\overline{\text{э}}_3^{(i)}\Phi_{,3333}^{(i)} = 0,\ i = 1,2, \tag{20}$$

$$U_3^{(1)}(0) = 0,\ U_{3,3}^{(1)}(0) = 0,\ \Phi^{(1)}(0) = 0,\ \Phi_{,3}^{(1)}(0) = 0, \tag{21}$$

$$U_{3,33}^{(2)}(1) = 0,$$
$$\overline{c}_{33}^{(2)}U_{3,3}^{(2)}(1) + \delta\overline{e}_{33}^{(2)}\Phi_{,3}^{(2)}(1) - \alpha_1^2\overline{c}_{33}^{(2)}U_{3,333}^{(2)}(1) = P_0,$$
$$\Phi^{(2)}(1) = V_0,\ \Phi_{,33}^{(2)}(1) = 0, \tag{22}$$

$$U_3^{(1)}(z_0) = U_3^{(2)}(z_0),\ U_{3,3}^{(1)}(z_0) = U_{3,3}^{(2)}(z_0),$$
$$\overline{c}_{33}^{(1)}U_{3,33}^{(1)}(z_0) = \overline{c}_{33}^{(2)}U_{3,33}^{(2)}(z_0),$$
$$\overline{c}_{33}^{(1)}U_{3,3}^{(1)}(z_0) + \delta\overline{e}_{33}^{(1)}\Phi_{,3}^{(1)}(z_0) - \alpha_1^2\overline{c}_{33}^{(1)}U_{3,333}^{(1)}(z_0) =$$
$$= \overline{c}_{33}^{(2)}U_{3,3}^{(2)}(z_0) + \delta\overline{e}_{33}^{(2)}\Phi_{,3}^{(2)}(z_0) - \alpha_1^2\overline{c}_{33}^{(2)}U_{3,333}^{(2)}(z_0),$$
$$\Phi^{(1)}(z_0) = \Phi^{(2)}(z_0),\ \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) = \Phi_{,3}^{(2)}(z_0),$$
$$\overline{\text{э}}_3^{(1)}\Phi_{,33}^{(1)}(z_0) = \overline{\text{э}}_3^{(2)}\Phi_{,33}^{(2)}(z_0),$$
$$\delta\overline{e}_{33}^{(1)}U_{3,3}^{(1)}(z_0) - \overline{\text{э}}_3^{(1)}\Phi_{,3}^{(1)}(z_0) + \alpha_2^2\overline{\text{э}}_3^{(1)}\Phi_{,333}^{(1)}(z_0) =$$
$$= \delta\overline{e}_{33}^{(2)}U_{3,3}^{(2)}(z_0) - \overline{\text{э}}_3^{(2)}\Phi_{,3}^{(2)}(z_0) + \alpha_2^2\overline{\text{э}}_3^{(2)}\Phi_{,333}^{(2)}(z_0). \tag{23}$$

Рассмотрим несколько упрощенных постановок задачи градиентной электроупругости для составного стержня, когда учитывается только один из градиентных эффектов.

В первом случае рассматривается только механическое нагружение $\Omega_{33}^{(2)}(1) = P_0$, $\Phi^{(2)}(1) = 0$ и учитывается влияние градиента деформации, но не учитывается влияние градиента электрического поля. В этом случае, полагая $\alpha_2 = 0$, после исключения потенциала из уравнения электростатики (20), сведем задачу электроупру-

гости к задаче градиентной теории упругости с ужесточенным модулем упругости $\overline{c}_{33}^{*} = \overline{c}_{33} + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{33}^2}{\overline{\ni}_3}$:

$$\overline{c}_{33}^{*(i)} U_{3,33}^{(i)} - \alpha_1^2 \overline{c}_{33}^{(i)} U_{3,3333}^{(i)} = 0\,,\ i = 1,2 \tag{24}$$

$$U_3^{(1)}(0) = 0\,,\ U_{3,3}^{(1)}(0) = 0\,, \tag{25}$$

$$U_{3,33}^{(2)}(1) = 0\,,\ \overline{c}_{33}^{*(2)} U_{3,3}^{(2)}(1) - \alpha_1^2 \overline{c}_{33}^{(2)} U_{3,333}^{(2)}(1) = P_0\,, \tag{26}$$

$$U_3^{(1)}(z_0) = U_3^{(2)}(z_0)\,,\ U_{3,3}^{(1)}(z_0) = U_{3,3}^{(2)}(z_0)\,,$$

$$\overline{c}_{33}^{(1)} U_{3,33}^{(1)}(z_0) = \overline{c}_{33}^{(2)} U_{3,33}^{(2)}(z_0)\,,$$

$$\overline{c}_{33}^{*(1)} U_{3,3}^{(1)}(z_0) - \alpha_1^2 \overline{c}_{33}^{(1)} U_{3,333}^{(1)}(z_0) =$$

$$= \overline{c}_{33}^{*(2)} U_{3,3}^{(2)}(z_0) - \alpha_1^2 \overline{c}_{33}^{(2)} U_{3,333}^{(2)}(z_0). \tag{27}$$

Дифференциальные уравнения равновесия (24) можно представить в виде:

$$\left(1 + \delta^2 \frac{\overline{e}_{33}^{(i)}}{\overline{\ni}_3^{(i)} \overline{c}_{33}^{(i)}} - \alpha_1^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} U_3^{(i)} = 0\,,\ i = 1,2. \tag{28}$$

Исходя из (28), выражения для нахождения смещения составного стержня имеют вид:

$$U_3^{(1)} = A_1 + A_2 z + A_3 e^{\frac{\beta_1}{\alpha_1} z} + A_4 e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_1} z}\,,$$

$$U_3^{(2)} = A_5 + A_6 z + A_7 e^{\frac{\beta_2}{\alpha_1} z} + A_8 e^{-\frac{\beta_2}{\alpha_1} z}\,, \tag{29}$$

где $\beta_1 = \sqrt{1 + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{33}^{(1)}}{\overline{\ni}_3^{(1)} \overline{c}_{33}^{(1)}}}$, $\beta_2 = \sqrt{1 + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{33}^{(2)}}{\overline{\ni}_3^{(2)} \overline{c}_{33}^{(2)}}}$.

В выражении (29) константы интегрирования $A_1, ..., A_8$ определяются путем удовлетворения граничных условий (25), (26) и условий сопряжения (27).

Во втором случае рассматривается только электростатическое нагружение $\Phi^{(2)}(1) = V_0$, $\Omega_{33}^{(2)}(1) = 0$ и учитывается влияние градиента электрического поля, но не учитывается влияние градиента деформации. В этом случае, полагая $\alpha_1 = 0$, после исключения смещения из уравнения равновесия (19), сведем задачу электроупругости к задаче градиентной электростатики с модифицированным коэффициентом диэлектрической проницаемости $\overline{\ni}_3^{*} = \overline{\ni}_3 + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{33}^2}{\overline{c}_{33}}$:

$$-\overline{\ni}_3^{*(i)} \Phi_{,33}^{(i)} + \alpha_2^2 \overline{\ni}_3^{(i)} \Phi_{,3333}^{(i)} = 0\,,\ i = 1,2 \tag{30}$$

$$\Phi^{(1)}(0) = 0\,,\ \Phi_{,3}^{(1)}(0) = 0\,, \tag{31}$$

$$\Phi^{(2)}(1) = V_0\,,\ \Phi_{,33}^{(2)}(1) = 0\,, \tag{32}$$

$$\Phi^{(1)}(z_0) = \Phi^{(2)}(z_0)\,,\ \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) = \Phi_{,3}^{(2)}(z_0)\,,$$

$$\overline{\ni}_3^{(1)} \Phi_{,33}^{(1)}(z_0) = \overline{\ni}_3^{(2)} \Phi_{,33}^{(2)}(z_0)\,,$$

$$-\overline{\ni}_3^{*(1)} \Phi_{,3}^{(1)}(z_0) + \alpha_2^2 \overline{\ni}_3^{(1)} \Phi_{,333}^{(1)}(z_0) =$$

$$= -\overline{\ni}_3^{*(2)} \Phi_{,3}^{(2)}(z_0) + \alpha_2^2 \overline{\ni}_3^{(2)} \Phi_{,333}^{(2)}(z_0). \tag{33}$$

Дифференциальные уравнения электростатики (30) можно представить в виде:

$$\left(1 + \delta^2 \frac{\overline{e}_{33}^{(i)}}{\overline{\ni}_3^{(i)} \overline{c}_{33}^{(i)}} - \alpha_2^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} \Phi^{(i)} = 0\,,\ i = 1,2. \tag{34}$$

Исходя из (34), выражения для нахождения потенциала составного стержня имеют вид:

$$\Phi^{(1)} = A_9 + A_{10} z + A_{11} e^{\frac{\beta_1}{\alpha_2} z} + A_{12} e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_2} z}\,,$$

$$\Phi^{(2)} = A_{13} + A_{14} z + A_{15} e^{\frac{\beta_2}{\alpha_2} z} + A_{16} e^{-\frac{\beta_2}{\alpha_2} z}\,. \tag{35}$$

В выражении (35) константы интегрирования $A_9, ..., A_{16}$ определяются путем удовлетворения граничным условиям (31), (32) и условиям сопряжения (33).

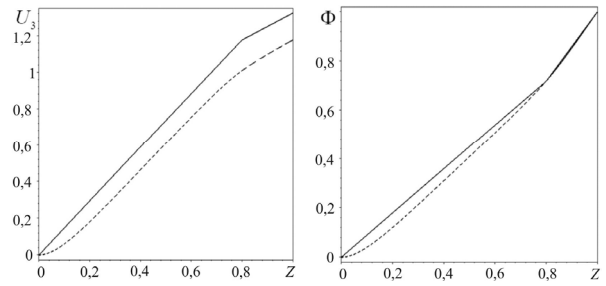
Рассмотрим результаты вычисления распределения по координате z безразмерных компонентов электромеханического поля составного стержня. В расчетах принято: $\delta = 0,6$, $z_0 = 0,8$, $\overline{e}_{33}^{(1)} = \overline{e}_{33}^{(2)} = 1$.

На рис. 1, *a*, показано распределение вдоль стержня смещения U_3 в случае механического нагружения при $\overline{c}_{33}^{(1)} = 0,5$, $\overline{c}_{33}^{(2)} = 1$, $\overline{\ni}_3^{(1)} = \overline{\ni}_3^{(2)} = 1$, $P_0 = 1$. На рис. 1, *b*, изображено распределение электрического потенциала Φ в случае электростатического нагружения стержня при $\overline{c}_{33}^{(1)} = \overline{c}_{33}^{(2)} = 1$, $\overline{\ni}_3^{(1)} = 1$, $\overline{\ni}_3^{(2)} = 0,5$, $V_0 = 1$. При этом сплошной линией изображены смещение и потенциал, если задачи решались в классической постановке при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, пунктиром – в градиентной постановке при $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,1$.

Из рис. 1 следует, что: 1) с увеличением механического масштабного параметра значения перемещений уменьшаются; 2) с увеличением электростатического масштабного параметра значения потенциала уменьшаются; 3) по сравнению с классической теорией в месте стыка стержней наблюдается более плавное изменение перемещений и потенциала.

На рис. 2, *a*, изображено распределение по z моментного напряжения M в случае механического нагружения, а на рис. 2, *b*, – квадрупольного момента Q_{33} в случае электростатического нагружения.

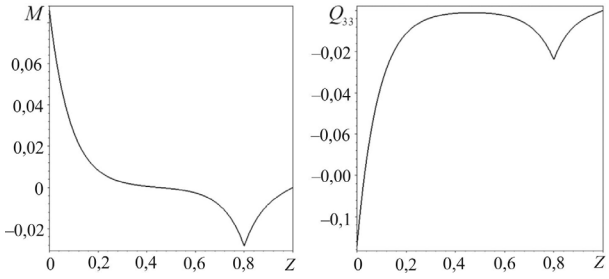
На рис. 3, *a*, представлено распределение напряжения Коши S_{33} в случае механического нагружения, а на рис. 3, *b* – электрической индукции $\overline{D}_3$ в случае электростатического нагружения.



a *b*

Рис. 1. Распределение по координате z смещений U_3 (*a*) и потенциала Φ (*b*)

Fig. 1. Distribution along the coordinate z displacement U_3 (*a*) and potential Φ (*b*)

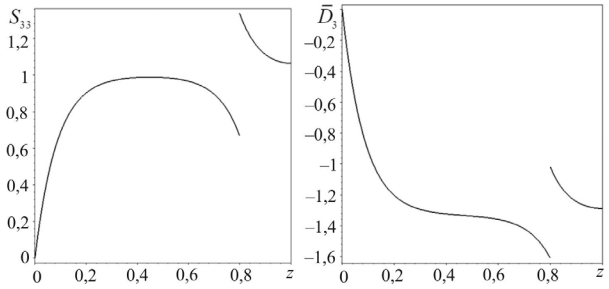


a *b*

Рис. 2. Распределение по координате z моментного напряжения M (*a*) и квадрупольного момента Q_{33} (*b*)

Fig. 2. Distribution along the coordinate z couple stresses M (*a*) and quadrupole moment Q_{33} (*b*)

Из рис. 2 следует, что моментные напряжения M и квадрупольный момент Q_{33} непрерывны и принимают пиковое значение на поверхности сопряжения $z = z_0$.



a *b*

Рис. 3. Распределение по координате z напряжения Коши S_{33} (*a*) и электрической индукции $\bar{D}_3$ (*b*)

Fig. 3. Distribution along the coordinate z Cauchy stresses S_{33} (*a*) and electrical induction Q_{33} (*b*)

Из рис. 3 следует, что функции напряжений Коши и электрической индукции: 1) вблизи торца $z = 0$ экспоненциально затухают до нуля; 2) в точке сопряжения стержней имеют разрыв, что связано с разностью с непрерывностью перемещений, потенциала и их первых производных.

3. Градиентная модель антиплоской деформации электроупругой полосы с покрытием

В качестве второго примера рассмотрим антиплоскую задачу о деформировании трансверсально изотропной слоистой электроупругой полосы ($x_1 \in (-\infty, \infty)$, $x_2 \in (-\infty, \infty)$, $x_3 \in [0, h]$), имеющей поверхность сопряжения $x_3 = h_1$. Нижняя граница полосы $x_3 = 0$ жестко защемлена и заземлена. На неэлектродированной верхней поверхности $x_3 = h$ на отрезке $x_1 \in [a, b]$ действует сдвиговая нагрузка $\sigma_{23}(x_1, h) = p_0$, а остальная часть верхней границы свободна от напряжений.

Рассмотрим упрощенную постановку задачи градиентной электроупругости для полосы, когда учитывается влияние только градиента деформации, но не учитывается влияние градиента электрического поля. В этом случае ненулевые компоненты механических и электростатических полей имеют вид: $u_2 = w(x_1, x_3)$, $\phi = \phi(x_1, x_3)$, $D_1 = e_{15} w_{,1} - э_1 \phi_{,1}$, $D_3 = e_{15} w_{,3} - э_1 \phi_{,3}$, $\tau_{23} = c_{44} w_{,3} + e_{15} \phi_{,3}$, $\tau_{21} = c_{44} w_{,1} + e_{15} \phi_{,1}$, $m_{231} = l_м^2 c_{44} w_{,31}$, $m_{233} = l_м^2 c_{44} w_{,33}$, $m_{211} = l_м^2 c_{44} w_{,11}$, $m_{213} = l_м^2 c_{44} w_{,13}$, $\sigma_{21} = \tau_{21} - m_{211,1} - m_{213,3} = c_{44} w_{,1} + e_{15} \phi_{,1} - l_м^2 c_{44} (w_{,111} + w_{,133})$, $\sigma_{23} = \tau_{23} - m_{231,1} - m_{233,3} = c_{44} w_{,3} + e_{15} \phi_{,3} - l_м^2 c_{44} (w_{,311} + w_{,333})$.

Постановка задачи градиентной электроупругости для слоистой полосы имеет вид:

$$\sigma_{21,1}^{(i)} + \sigma_{23,3}^{(i)} = 0, \; i = 1, 2, \tag{36}$$

$$D_{1,1}^{(i)} + D_{3,3}^{(i)} = 0, \; i = 1, 2, \tag{37}$$

$$w^{(1)}(x_1, 0) = 0, \; w_{,3}^{(1)}(x_1, 0) = 0, \; \phi^{(1)}(x_1, 0) = 0, \tag{38}$$

$$m_{233}^{(2)}(x_1, h) = 0, \; \sigma_{23}^{(2)}(x_1, h) = p_0, \; D_3^{(2)}(x_1, h) = 0, \tag{39}$$

$$w^{(1)}(x_1, h_0) = w^{(2)}(x_1, h_0), \; w_{3,3}^{(1)}(x_1, h_0) = w_{3,3}^{(2)}(x_1, h_0),$$

$$m_{233}^{(1)}(x_1, h_0) = m_{233}^{(2)}(x_1, h_0), \; \sigma_{23}^{(1)}(x_1, h_0) = \sigma_{23}^{(2)}(x_1, h_0),$$

$$\phi^{(1)}(x_1, h_0) = \phi^{(2)}(x_1, h_0), \; D_3^{(1)}(x_1, h_0) = D_3^{(2)}(x_1, h_0). \tag{40}$$

Обезразмерим задачу (36)–(40) аналогично таковой для электроупругого стержня, принимая за характерный размер H толщину полосы h и введя дополнительно $y_1 = \frac{x_1}{h}$, $y_3 = \frac{x_3}{h}$, $H_0 = \frac{h_0}{h}$, $W^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{h}$, $\Omega_{23}^{(i)} = \frac{\sigma_{23}^{(i)}}{c_{44}^0}$, $P_0 = \frac{p_0}{c_{44}^0}$, $\bar{c}_{44}^{(i)} = \frac{c_{44}^{(i)}}{c_{44}^0}$, $\bar{e}_{15}^{(i)} = \frac{e_{15}^{(i)}}{e_{15}^0}$, $\bar{э}_1^{(i)} = \frac{э_1^{(i)}}{э_1^0}$, $i = 1, 2$. Здесь c_{44}^0, e_{15}^0, $э_1^0$ – максимальные значения соответствующих электромеханических характеристик.

После обезразмеривания и исключения потенциала из уравнения электростатики, задача электроупругости для полосы сводится к задаче градиентной теории упругости с ужесточенным модулем упругости $\overline{c}_{44}^{*} = \overline{c}_{44} + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{15}^2}{\overline{\ni}_1}$.

Постановка задачи (36)–(40), выраженная в безразмерных перемещениях $W^{(i)}$, имеет вид:

$$\overline{c}_{44}^{*(i)}\left(W_{,11}^{(i)} + W_{,33}^{(i)}\right) - \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(i)}\left(W_{,1111}^{(i)} + W_{,3333}^{(i)} + 2W_{,1133}^{(i)}\right) = 0,$$

$$i = 1,2, \tag{41}$$

$$W^{(1)}\left(y_1, 0\right) = 0,\ W_{,3}^{(1)}\left(y_1, 0\right) = 0, \tag{42}$$

$$W_{,33}^{(2)}\left(y_1, 1\right) = 0,$$

$$\overline{c}_{44}^{*(2)} W_{,3}^{(2)}\left(y_1, 1\right) - \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(2)}\left(W_{,311}^{(2)}\left(y_1, 1\right) + W_{,333}^{(2)}\left(y_1, 1\right)\right) = P_0, \tag{43}$$

$$W^{(1)}\left(y_1, H_0\right) = W^{(2)}\left(y_1, H_0\right),\ W_{3,3}^{(1)}\left(y_1, H_0\right) = W_{3,3}^{(2)}\left(y_1, H_0\right),$$

$$\overline{c}_{44}^{(1)} W_{,33}^{(1)}\left(y_1, H_0\right) = \overline{c}_{44}^{(2)} W_{,33}^{(2)}\left(y_1, H_0\right),$$

$$\overline{c}_{44}^{*(1)} W_{,3}^{(1)}\left(y_1, H_0\right) - \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(1)}\left(W_{,311}^{(1)}\left(y_1, H_0\right) + W_{,333}^{(1)}\left(y_1, H_0\right)\right) =$$

$$= \overline{c}_{44}^{*(2)} W_{,3}^{(2)}\left(y_1, H_0\right) -$$

$$- \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(2)}\left(W_{,311}^{(2)}\left(y_1, H_0\right) + W_{,333}^{(2)}\left(y_1, H_0\right)\right). \tag{44}$$

Применим к задаче (41)–(44) интегральное преобразование Фурье по y_1:

$$\widehat{F}\left(\omega, y_3\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(y_1, y_3\right) e^{i\omega y_1} dy_1, \tag{45}$$

где ω – параметр преобразования Фурье.

Постановка задачи для слоистой полосы в трансформантах Фурье примет вид:

$$\overline{c}_{44}^{*(i)}\left(-\omega^2 \widehat{W}^{(i)} + \widehat{W}_{,33}^{(i)}\right) - \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(i)}\left(\omega^4 \widehat{W}^{(i)} + \widehat{W}_{,3333}^{(i)} - 2\omega^2 \widehat{W}_{,33}^{(i)}\right) = 0,$$

$$i = 1,2, \tag{46}$$

$$\widehat{W}^{(1)}\left(\omega, 0\right) = 0,\ \widehat{W}_{,3}^{(1)}\left(\omega, 0\right) = 0, \tag{47}$$

$$\widehat{W}_{,33}^{(2)}\left(\omega, 1\right) = 0,$$

$$\overline{c}_{44}^{*(2)} \widehat{W}_{,3}^{(2)}\left(\omega, 1\right) -$$

$$- \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(2)}\left(-\omega^2 \widehat{W}_{,3}^{(2)}\left(\omega, 1\right) + \widehat{W}_{,333}^{(2)}\left(\omega, 1\right)\right) = \widehat{P}_0, \tag{48}$$

$$\widehat{W}^{(1)}\left(\omega, H_0\right) = \widehat{W}^{(2)}\left(\omega, H_0\right),\ \widehat{W}_{3,3}^{(1)}\left(\omega, H_0\right) = \widehat{W}_{3,3}^{(2)}\left(\omega, H_0\right),$$

$$\overline{c}_{44}^{(1)} \widehat{W}_{,33}^{(1)}\left(\omega, H_0\right) = \overline{c}_{44}^{(2)} \widehat{W}_{,33}^{(2)}\left(\omega, H_0\right),$$

$$\overline{c}_{44}^{*(1)} \widehat{W}_{,3}^{(1)}\left(\omega, H_0\right) - \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(1)}\left(-\omega^2 \widehat{W}_{,3}^{(1)}\left(\omega, H_0\right) + \widehat{W}_{,333}^{(1)}\left(\omega, H_0\right)\right) =$$

$$= \overline{c}_{44}^{*(2)} \widehat{W}_{,3}^{(2)}\left(\omega, H_0\right) -$$

$$- \alpha_1^2 \overline{c}_{44}^{(2)}\left(-\omega^2 \widehat{W}_{,3}^{(2)}\left(\omega, H_0\right) + \widehat{W}_{,333}^{(2)}\left(\omega, H_0\right)\right). \tag{49}$$

Дифференциальные уравнения равновесия (46) можно представить в виде:

$$\left(1 + \delta^2 \frac{\overline{e}_{15}^{(i)}}{\overline{\ni}_1^{(i)} \overline{c}_{44}^{(i)}} - \alpha_1^2\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \omega^2\right)\right)\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \omega^2\right)\widehat{W}^{(i)} = 0,$$

$$i = 1,2, \tag{50}$$

Исходя из (50), выражения для нахождения трансформант смещений слоистой полосы имеют вид:

$$\widehat{W}^{(1)}\left(\omega, y_3\right) = B_1 e^{|\omega| y_3} + B_2 e^{-|\omega| y_3} + B_3 e^{\beta_3 \frac{y_3}{\alpha_1}} + B_4 e^{-\beta_3 \frac{y_3}{\alpha_1}},$$

$$\widehat{W}^{(2)}\left(\omega, y_3\right) = B_5 e^{|\omega| y_3} + B_6 e^{-|\omega| y_3} + B_7 e^{\beta_4 \frac{y_3}{\alpha_1}} + B_8 e^{-\beta_4 \frac{y_3}{\alpha_1}}, \tag{51}$$

где

$$\beta_3 = \sqrt{1 + \alpha_1^2 \omega^2 + \delta^2 \frac{\overline{e}_{15}^{(1)}}{\overline{\ni}_1^{(1)} \overline{c}_{44}^{(1)}}},\ \beta_4 = \sqrt{1 + \alpha_1^2 \omega^2 + \delta^2 \frac{\overline{e}_{15}^{(2)}}{\overline{\ni}_1^{(2)} \overline{c}_{44}^{(2)}}}.$$

В выражении (51) константы интегрирования $B_1, ..., B_8$ определяются путем удовлетворения граничным условиям (47), (48) и условиям сопряжения (49).

Обращение трансформант Фурье осуществляется по формуле:

$$F\left(y_1, y_3\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}\left(\omega, y_3\right) e^{i\omega y_1} d\omega. \tag{52}$$

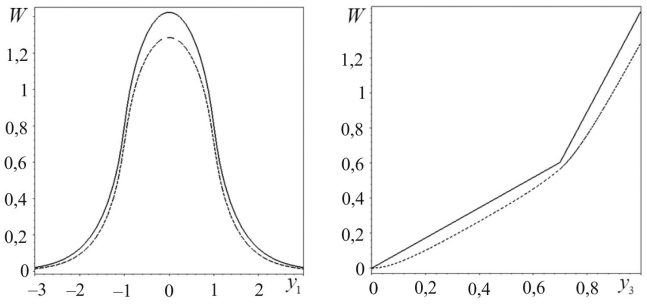
Вычисления показали, что трансформанты перемещения быстро убывают при $|\omega| \to \infty$, поэтому интеграл (52) можно вычислить в конечных пределах $[-a, a]$:

$$F\left(y_1, y_3\right) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \widehat{F}\left(\omega, y_3\right) e^{i\omega y_1} d\omega. \tag{53}$$

Для вычисления интеграла в выражении (53) отрезок интегрирования $[-a, a]$ разбивается на n подотрезков, к каждому из которых применяется формула Филона согласно [32].

Рассмотрим результаты вычисления распределения по координатам y_1 и y_3 смещений, напряжений Коши и моментных напряжений слоистой полосы. В вычислениях принято: $H_0 = 0,7$, $\alpha_1 = 0,1$, $\delta = 0,4$, $\overline{e}_{15}^{(1)} = \overline{e}_{15}^{(2)} = 1$, $\overline{\ni}_1^{(1)} = \overline{\ni}_1^{(2)} = 1$, $\overline{c}_{44}^{(1)} = 1$, $\overline{c}_{44}^{(2)} = 0,3$, $[-a, a] = [-40, 40]$, $n = 120$, $P_0\left(y_1\right) = 1$ при $y_1 \in [-1,1]$, $P_0\left(y_1\right) = 0$ при $y_1 \notin [-1,1]$.

На рис. 4 представлено распределение смещений W по горизонтальной координате y_1 при $y_3 = 1$ и вертикальной координате y_3 при $y_1 = 0$. При этом сплошной линией изображены решения при $\alpha_1 = 0$, пунктиром – при $\alpha_1 = 0,1$.



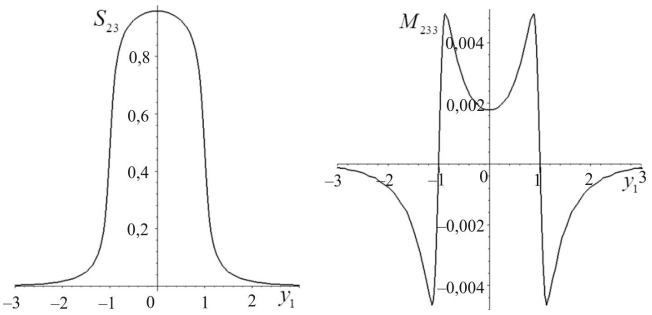
a *b*

Рис. 4. Распределение смещения W по горизонтальной координате y_1 (*a*) и вертикальной координате y_3 (*b*)

Fig. 4. Displacement distribution W along the horizontal coordinate y_1 (*a*) and vertical coordinate y_3 (*b*)

Из рис. 4 следует, что: 1) перемещения быстро затухают по мере удаления от источника сдвиговой нагрузки; 2) учет механического масштабного параметра приводит к уменьшению перемещений и более плавному переходу перемещений в окрестности стыка.

На рис. 5 представлены распределения безразмерных напряжений Коши S_{23} (рис. 5, *a*) и моментных напряжений M_{233} (рис. 5, *b*) по горизонтальной координате y_1 при $y_3 = 0,9$.



a *b*

Рис. 5. Распределение по координате y_1 напряжений Коши S_{23} (*a*) и моментных напряжений M_{233} (*b*)

Fig. 5. Distribution along the coordinate y_1 Cauchy stresses S_{23} (*a*) and couple stresses M_{233} (*b*)

Из рис. 5 следует, напряжения Коши и моментные напряжения обладают определенной симметрией при распределении по координате y_1 и затухают по мере удаления от места действия нагрузки.

4. Градиентная модель деформирования сплошного электроупругого цилиндра с покрытием

В качестве третьего примера в рамках градиентной модели электроупругости рассмотрим задачу о деформировании сплошного двухслойного неэлектродированного радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра радиуса R, имеющего поверхность сопряжения $r = R_0$. К внешней боковой поверхности $r = R$ цилиндра приложена нормальная механическая нагрузка p_0.

Рассмотрим упрощенную постановку задачи градиентной электроупругости для слоистого цилиндра, когда учитывается только механический градиентный эффект. В этом случае ненулевые компоненты механических и электростатических полей имеют вид:

$$\tau_{rr} = c_{33}\frac{du_r}{dr} + c_{13}\frac{u_r}{r} + e_{33}\frac{d\phi}{dr},$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = c_{13}\frac{du_r}{dr} + c_{11}\frac{u_r}{r} + e_{31}\frac{d\phi}{dr},$$

$$m_{rrr} = l_м^2\frac{d}{dr}\left(c_{33}\frac{du_r}{dr} + c_{13}\frac{u_r}{r}\right),$$

$$m_{\varphi\varphi r} = l_м^2\frac{d}{dr}\left(c_{13}\frac{du_r}{dr} + c_{11}\frac{u_r}{r}\right),$$

$$m_{r\varphi\varphi} = m_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{2}\frac{l_м^2}{r}\left(\left(c_{33}-c_{13}\right)\frac{du_r}{dr} + \left(c_{13}-c_{11}\right)\frac{u_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{rr} = \tau_{rr} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rm_{rrr}\right) + \frac{1}{r}\left(m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rm_{\varphi\varphi r}\right) + \frac{1}{r}\left(m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}\right),$$

$$D_r = -э_3\frac{d\phi}{dr} + e_{31}\frac{u_r}{r} + e_{33}\frac{du_r}{dr}.$$

Постановка задачи градиентной электроупругости для двухслойного цилиндра имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} = 0,\ i = 1,2, \tag{54}$$

$$\frac{dD_r^{(i)}}{dr} + \frac{D_r^{(i)}}{r} = 0,\ i = 1,2, \tag{55}$$

$$m_{rrr}^{(2)}(R) = 0,\ \sigma_{rr}^{(2)}(R) = p_0,\ D_r^{(2)}\left(R\right) = 0, \tag{56}$$

$$u_r^{(1)}(R_0) = u_r^{(2)}(R_0),\ \frac{du_r^{(1)}}{dr}(R_0) = \frac{du_r^{(2)}}{dr}(R_0),$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_0) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_0),\ m_{rrr}^{(1)}(R_0) = m_{rrr}^{(2)}(R_0). \tag{57}$$

Обезразмерим задачу (54)–(57) аналогично таковой для стержня, принимая за характерный размер H радиус цилиндра R и вводя дополнительно $\xi = \frac{r}{R}$, $\xi_0 = \frac{R_0}{R}$, $U_r^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{R}$, $S_{rr}^{(i)} = \frac{\tau_{rr}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $S_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\tau_{\varphi\varphi}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $\Omega_{rr}^{(i)} = \frac{\sigma_{rr}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $\Omega_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{c_{33}^0}$, $M_{rrr}^{(i)} = \frac{m_{rrr}^{(i)}}{c_{33}^0 R}$.

После обезразмеривания и исключения потенциала из уравнения электростатики (55), задача электроупругости для сплошного цилиндра сводится к задаче градиентной теории упругости с модифицированными модулями упругости: $\overline{c}_{11}^{*} = \overline{c}_{11} + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{31}^2}{\overline{\ni}_3}$, $\overline{c}_{13}^{*} = \overline{c}_{13} + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{31}\overline{e}_{33}}{\overline{\ni}_3}$, $\overline{c}_{33}^{*} = \overline{c}_{33} + \delta^2 \dfrac{\overline{e}_{33}^2}{\overline{\ni}_3}$. В этом случае выражения для безразмерных компонент тензора напряжений Коши примут вид: $S_{rr} = \overline{c}_{33}^{*} \dfrac{dU_r}{d\xi} + \overline{c}_{13}^{*} \dfrac{U_r}{\xi}$, $S_{\varphi\varphi} = \overline{c}_{13}^{*} \dfrac{dU_r}{d\xi} + \overline{c}_{11}^{*} \dfrac{U_r}{\xi}$.

Постановка обезразмеренной задачи градиентной теории упругости с модифицированными модулями упругости для слоистого цилиндра имеет вид:

$$\frac{d\Omega_{rr}^{(i)}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr}^{(i)} - \Omega_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\xi} = 0\,,\ i = 1,2\,, \tag{58}$$

$$M_{rrr}^{(2)}(1) = 0\,,\ \Omega_{rr}^{(2)}(1) = P_0\,, \tag{59}$$

$$U_r^{(1)}(\xi_0) = U_r^{(2)}(\xi_0)\,,\ \frac{dU_r^{(1)}}{d\xi}(\xi_0) = \frac{dU_r^{(2)}}{d\xi}(\xi_0)\,,$$

$$\Omega_{rr}^{(1)}\left(\xi_0\right) = \Omega_{rr}^{(2)}\left(\xi_0\right),\ M_{rrr}^{(1)}(\xi_0) = M_{rrr}^{(2)}(\xi_0)\,. \tag{60}$$

Решение задачи (58)–(60) строится аналогично таковой для упругой трубы [30] и выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка с учетом ограниченности решения при $\xi = 0$:

$$U_r^{(1)} = C_1\xi^{s_1} + C_2 I_1\left(\frac{s_1\xi}{\alpha_1}\right),$$

$$U_r^{(2)} = C_3\xi^{s_2} + C_4\xi^{-s_2} + C_5 I_1\left(\frac{s_2\xi}{\alpha_1}\right) + C_6 K_1\left(\frac{s_2\xi}{\alpha_1}\right), \tag{61}$$

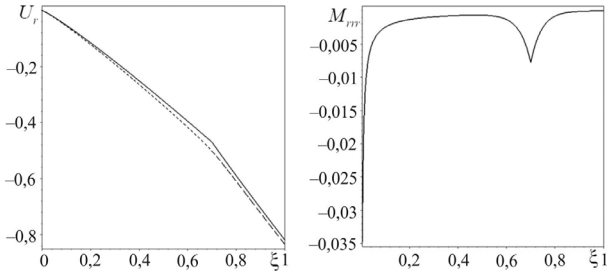
где $s_1 = \sqrt{\dfrac{\overline{c}_{11}^{*(1)}}{\overline{c}_{33}^{*(1)}}}$, $s_2 = \sqrt{\dfrac{\overline{c}_{11}^{*(2)}}{\overline{c}_{33}^{*(2)}}}$.

В выражениях (61) константы интегрирования $C_1,...,C_6$ определяются путем удовлетворения граничным условиям (59) и условиям сопряжения (60), выраженных через радиальные смещения.

Рассмотрим результаты вычисления распределения смещений и напряжений по координате ξ. В вычислениях принято: $P_0 = -1$, $\xi_0 = 0.7$, $\alpha_1 = 0.05$, $\delta = 0.6$, $\overline{c}_{11}^{(1)} = 1$, $\overline{c}_{13}^{(1)} = 0.5$, $\overline{c}_{33}^{(1)} = 0.8$, $\overline{c}_{11}^{(2)} = 0.4$, $\overline{c}_{13}^{(1)} = 0.25$, $\overline{c}_{33}^{(2)} = 0.3$.

На рис. 6 показано радиальное распределение смещений U_r (рис. 6, *a*) и моментных напряжений M_{rrr} (рис. 6, *b*) двухслойного цилиндра.

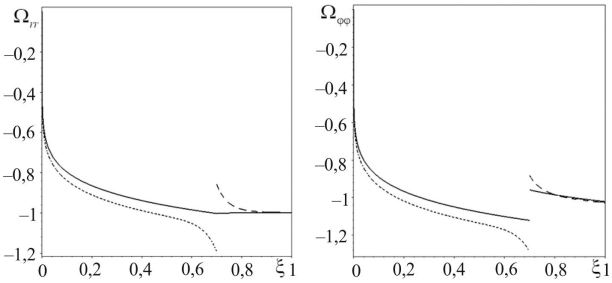
На рис. 7 показано распределение по координате ξ радиальных напряжений (рис. 7, *a*) и окружных напряжений (рис. 7, *b*). При этом сплошной линией изображены полные напряжения Ω_{rr} и $\Omega_{\varphi\varphi}$, а пунктиром – напряжения Коши S_{rr} и $S_{\varphi\varphi}$.



a *b*

Рис. 6. Распределение по координате ξ смещений U_r (*a*) и моментных напряжений M_{rrr} (*b*)

Fig. 6. Distribution along the coordinate ξ displacement U_r (*a*) and couple stresses M_{rrr} (*b*)



a *b*

Рис. 7. Распределение по координате ξ радиальных напряжений (*a*) и окружных напряжений (*b*)

Fig. 7. Distribution along the coordinate ξ radial stresses (*a*) and circumferential stresses (*b*)

Из рис. 7 следует, что: 1) полные радиальные напряжения непрерывны на поверхности сопряжения слоев цилиндра, в отличие от напряжений Коши: 2) полные окружные напряжения, как и напряжения Коши, на поверхности сопряжения терпят разрыв.

Заключение

На основе вариационного принципа градиентной электроупругости получены уравнения равновесия, граничные условия и условия сопряжения для составного стержня, слоистой полосы и цилиндра с учетом масштабных эффектов. На конкретных примерах проведено вычисление НДС составных тел при учете различных градиентных эффектов. Проведен сравнительный анализ полученных результатов градиентного решения с результатами классического решения. Выяснено, что, по сравнению с классической теорией, в окрестности сопряжения слоев наблюдается: 1) более гладкое распределение перемещений и электрического потенциала;

2) скачок компонентов тензора напряжений Коши и компонентов вектора электрической индукции; 3) непрерывность некоторых компонент тензора моментных напряжений и квадрупольного момента. Также выяснено, что с увеличением масштабных параметров перемещения и электрический потенциал уменьшаются. Уточнение НДС слоистых электроупругих тел с учетом масштабных эффектов позволяет более точно проводить расчеты на прочность пьезостержня, полосы и цилиндра с покрытием.

Библиографический список

1. Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques / X. Li, B. Bhushan, K. Takashima, C.W. Baek, Y.K. Kim // Ultramicroscopy. – 2003. – Vol. 97, no. 1. – P. 481–494. DOI: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9

2. Yan Z., Jiang L. Modified continuum mechanics modeling on size-dependent properties of piezoelectric nanomaterials: a review // Nanomaterials. – 2017. – Vol. 7(2). DOI: 10.3390/nano7020027

3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

4. Mindlin R.D. Polarization gradient in elastic dielectrics // Int. J. Solids Struct. – 1968. – Vol. 4(6). – P. 637–642.

5. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // J. Mech. Behav. Mater. – 1994. – Vol. 5(3). – P. 335–353. DOI: 10.1515/jmbm.1994.5.3.355

6. Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes / P. Poncharal, Z. Wang, D. Ugarte, W.A. De Heer // Science. – 1999. – Vol. 283(5407). – P. 1513–1516. DOI: 10.1126/science.283.5407.1513

7. Experiments and theory in strain gradient elasticity / D.C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – Vol. 51(8). – P. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X

8. Arvanitakis A. Gradient effects in a new class of electroelastic bodies // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2018. – Vol. 69(3). DOI: 10.1007/s00033-018-0959-0

9. Malikan M. Electro-mechanical shear buckling of piezoelectric nanoplate using modified couple stress theory based on simplified first order shear deformation theory // Appl. Math. Model. – 2017. – Vol. 48. – P. 196–207. DOI: 10.1016/j.apm.2017.03.065

10. Nasedkin A.V., Eremeyev V.A. Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects // ZAMMJ. Appl. Math. – 2014. – Vol. 94(10). – P. 878–892. DOI: 10.1002/zamm.201300085

11. Kalpakides V.K., Agiasofitou E.K. On material equations in second gradient electroelasticity // J. Elast. – 2002. – Vol. 67(3). – P. 205–227. DOI: 10.1023/A:1024926609083

12. Liang X., Shen S. Size-dependent piezoelectricity and elasticity due to the electric field-strain gradient coupling and strain gradient elasticity // Int. J. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 5(2). – P. 1350–1365. DOI: 10.1142/S1758825113500154

13. Yang X.M., Hu Y.T., Yang J.S. Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics // Int. J. Solids Struct. – 2004. – Vol. 41, no. 24–25. – P. 6801–6811. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.05.018

14. Hadjesfandiari A.R. Size-dependent piezoelectricity // Int. J. Solids Struct. – 2013. – Vol. 50(18). – P. 2781–2791. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.04.020. arXiv:1206.6718

15. Yue Y., Xu K., Aifantis E. Microscale size effects on the electromechanical coupling in piezoelectric material for anti-plane problem // Smart Materials and Structures. – 2014. – Vol. 23(12). DOI: 10.1088/0964-1726/23/12/125043

16. Yue Y., Xu K., Aifantis E.C. Strain gradient and electric field gradient effects in piezoelectric cantilever beams // J. Mech. Behav. Mater. – 2015. – Vol. 24(3–4). – P. 121–127. DOI: 10.1515/jmbm-2015-0014

17. Effects of electric field and strain gradients on cracks in piezoelectric solids / J. Sladek, V. Sladek, M. Wünsche, C. Zhang // Eur. J. Mech: A Solids. – 2017. – Vol. 71. – P. 187–198. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2018.03.018

18. Lurie S., Solyaev Y. On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories // Continuum Mech. Thermodyn. – 2019. – Vol. 31. – P. 1601–1613. DOI: 10.1007/s00161-019-00781-3

19. Solyaev Y., Lurie S. Pure bending of the piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory // Acta Mech. – 2019. – Vol. 230. – P. 4197–4211. DOI: 10.1007/s00707-019-02484-x

20. Size dependent analysis of a functionally graded piezoelectric micro cylinder based on the strain gradient theory with the consideration of flexoelectric effect: plane strain problem / A. Dini, M. Shariati, F. Zarghami, M. Amin Nematollahi // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2020. – Vol. 42. – P. 410–432. DOI: 10.1007/s40430-020-02497-x

21. Modeling and simulation of functionally graded flexoelectric micro-cylinders based on the mixed finite element method / Y. Zheng, L. Chu, G. Dui, X. Zhu // Applied Physics A. – 2021. – Vol. 127, no. 9–10. – P. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00339-021-04316-z

22. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентная модель изгиба неоднородной пьезоэлектрической балки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2022. – № 4-1. – С. 10–20. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-10-20

23. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. –Vol. 11. – P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945

24. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1964. – Vol. 16. – P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490

25. Shodja H.M., Ghazisaeidi M. Effects of couple stress on anti-plane problems of piezoelectric media with inhomogeneities // Eur. J. Mech. – A/Solids. – 2007. – Vol. 26. – P. 647–658. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2006.09.001

26. Li A., Zhou S., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // Compos. Struct. – 2014. – Vol. 108. – P. 259–266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020

27. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя / С.А. Лурье, Ю.О. Соляев, Л.Н. Рабинский, Ю.Н. Кондратова, М.И. Волов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – Т. 1. – С. 161–181.

28. Fu G., Zhou S., Qi L. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam // Int. J. Mech. Sci. – 2019. – Vol. 152. – P. 411–419. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037

29. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // Materials Physics Mechanics. – 2020. – Vol. 46. – P. 27–41. DOI: 10.18149/MPM.4612020_3

30. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости. Вестник ПНИПУ. Механика. – 2021. – № 4. – С. 60–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07

31. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Modeling of thermoelastic deformation of a thin layer “coating-substrate” system. // J. Phys.: Conf. Ser. – 2022. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012012

32. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. R. Soc. Edinburgh. – 1930. – Vol. 49. – P. 38–47.

References

1. Li X., Bhushan B., Takashima K., Baek C.W., Kim Y.K. Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques. *Ultramicroscopy*, 2003, vol. 97, no. 1, pp. 481-494. DOI: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9.

2. Yan Z., Jiang L. Modified continuum mechanics modeling on size-dependent properties of piezoelectric nanomaterials: a review. *Nanomaterials*, 2017. DOI: 10.3390/nano7020027.

3. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Elektromagnitouprugost' p'yezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagneto-elasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies]. Moscow, Nauka, 1988, 472 p.

4. Mindlin R.D. Polarization gradient in elastic dielectrics. *Int. J. Solids Struct.,* 1968, vol. 4(6), pp. 637–642. DOI:

5. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. *J. Mech. Behav. Mater.*, 1994, vol. 5, no. 3, pp. 335-353. DOI: 10.1515/jmbm.1994.5.3.355.

6. Poncharal P., Wang Z., Ugarte D., De Heer W.A. Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes. *Science*, 1999, vol. 283(5407), pp. 1513–1516. DOI:

7. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2003, vol. 51, no. 8, pp. 1477-1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X

8. Arvanitakis A. Gradient effects in a new class of electroelastic bodies. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2018, vol. 69(3). DOI: 10.1007/s00033-018-0959-0.

9. Malikan M. Electro-mechanical shear buckling of piezoelectric nanoplate using modified couple stress theory based on simplified first order shear deformation theory. *Appl. Math. Model.,* 2017, vol. 48, pp. 196–207. DOI: 10.1016/j.apm.2017.03.065.

10. Nasedkin A.V., Eremeyev V.A. Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects. *ZAMMJ. Appl. Math.*, 2014, vol. 94(10), pp. 878–892. DOI:

11. Kalpakides V.K., Agiasofitou E.K. On material equations in second gradient electroelasticity. *J. Elast.*, 2002, vol. 67(3), pp. 205–227. DOI: 10.1023/A:1024926609083.

12. Liang X., Shen S. Size-dependent piezoelectricity and elasticity due to the electric field-strain gradient coupling and strain gradient elasticity. *Int. J. Appl. Mech.,* 2003, vol. 5(2), pp. 1350–1365. DOI: 10.1142/S1758825113500154.

13. Yang X.M., Hu Y.T., Yang J.S. Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics. *Int. J. Solids Struct.,* 2004, vol. 41, no. 24–25, pp. 6801–6811. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.05.018.

14. Hadjesfandiari A.R. Size-dependent piezoelectricity. *Int. J. Solids Struct.,* 2013, vol. 50(18), pp. 2781–2791. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.04.020. arXiv:1206.6718.

15. Yue Y, Xu K, Aifantis E. Microscale size effects on the electromechanical coupling in piezoelectric material for anti-plane problem. *Smart Materials and Structures,* 2014, vol. 23(12) DOI: 10.1088/0964-1726/23/12/125043.

16. Yue Y., Xu K., Aifantis E.C. Strain gradient and electric field gradient effects in piezoelectric cantilever beams. *J. Mech. Behav. Mater.,* 2015, vol. 24(3–4), pp. 121–127. DOI:

17. Sladek J., Sladek V., Wünsche M., Zhang C. Effects of electric field and strain gradients on cracks in piezoelectric solids. *Eur. J. Mech: A Solids,* 2017, vol. 71, pp. 187–198. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2018.03.018.

18. Lurie S., Solyaev Y. On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories. *Continuum Mech. Thermodyn.,* 2019, vol. 31, pp. 1601–1613. DOI: 10.1007/s00161-019-00781-3.

19. Solyaev Y., Lurie S. Pure bending of the piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory. *Acta Mech.,* 2019, vol. 230, pp. 4197–4211. DOI: 10.1007/s00707-019-02484-x.

20. Dini A., Shariati M., Zarghami F., Amin Nematollahi M. Size dependent analysis of a functionally graded piezoelectric micro cylinder based on the strain gradient theory with the consideration of flexoelectric effect: plane strain problem. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering,* 2020, vol. 42, pp. 410–432. DOI: 10.1007/s40430-020-02497-x.

21. Zheng Y., Chu L., Dui G., Zhu X. Modeling and simulation of functionally graded flexoelectric micro-cylinders based on the mixed finite element method. *Applied Physics A.,* 2021, vol. 127, no. 9–10, pp. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00339-021-04316-z.

22. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Gradiyentnaya model' izgiba neodnorodnoy p'yezo-elektricheskoy balki [Gradient Bending Model of Inhomogeneous Piezoelectric Beam]. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science,* 2022, no. (4-1), pp. 10-20. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-10-20.

23. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.,* 1962, vol. 11, pp. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945.

24. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.,* 1964, vol. 16, pp. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.

25. Shodja H.M., Ghazisaeidi M. Effects of couple stress on anti-plane problems of piezoelectric media with inhomogeneities. *Eur. J. Mech. – A/Solids,* 2007, vol. 26, pp. 647–658. DOI:

26. Li A., Zhou S., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory. *Compos. Struct.,* 2014, vol. 108, pp. 259–266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.

27. Lurie S.A., Solyaev Y.O., Rabinsky L.N., Kondratova U.N., Volov M.I. Simulation of the stress-strain state of thin composite coating based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for layer. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, vol. 1, pp. 161-181.

28. Fu G., Zhou S., Qi L. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam. *Int. J. Mech. Sci.,* 2019, vol. 152, pp. 411–419. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037.

29. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity. *Materials Physics Mechanics,* 2020, vol. 46, pp. 27–41. DOI: 10.18149/MPM.4612020_3.

30. Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O. Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pologo tsilindra s pokrytiyem na osnove gradiyentnoy modeli termouprugosti [Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder with a coating based on the gradient model of thermoelasticity]. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2021, no. 4, pp. 60–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07.

31. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Modeling of thermoelastic deformation of a thin layer “coating-substrate” system. *J. Phys.: Conf. Ser.,* 2022. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012012.

32. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals. *Proc. R. Soc. Edinburgh,* 1930, vol. 49, pp. 38–47.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Южного математического института – филиала ВНЦ РАН, Владикавказ.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the support of the Southern Mathematical Institute – a branch of the All-Russian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.