Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В. Дисперсия продольных волн, распространяющихся в материалах с точечными дефектами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. С. 26–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.03

Erofeev V.I., Leonteva A.V., Shekoyan A.V. Dispersion of longitudinal waves propagating in materials with point defects. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 5, pp. 26-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.03

пермский политех

**ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА**
**№ 5, 2023**
**PNRPU MECHANICS BULLETIN**
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.03
УДК 539.3

# ДИСПЕРСИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В МАТЕРИАЛАХ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

**В.И. Ерофеев[1], А.В. Леонтьева[1], А.В. Шекоян[2]**

[1]Институт проблем машиностроения Российской академии наук – филиал Федерального исследовательского центра Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова – Грехова Российской академии наук, Нижний Новгород, Российская Федерация
[2]Институт механики Национальной академии наук Армении, Ереван, Армения

О СТАТЬЕ

Получена: 02 июля 2023 г.
Одобрена: 20 октября 2023 г.
Принята к публикации: 31 октября 2023 г.

*Ключевые слова:*

точечные дефекты, вакансии, межузлия, продольная волна, дисперсия.

АННОТАЦИЯ

Исследуется распространение гармонических волн в материалах с точечными дефектами. Задача описывается системой дифференциальных уравнений, включающей в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетические уравнения плотности дефектов, учитывающей взаимное влияние дефектов и распространяющейся волны, а также взаимную рекомбинацию дефектов. Рассматриваются как предельные случаи – материалы с одним типом точечных дефектов (вакансии, межузлия), так и общий случай, если материал содержит оба типа точечных дефектов (вакансии и межузлия). Проанализировано влияние на амплитуду и скорость гармонической волны параметров точечных дефектов, характеризующих диффузию дефектов, скорость их рекомбинации на стоках и изменение объема материала при образовании в нем одного точечного дефекта. Показано, что в средах с вакансиями продольные волны низкой частоты имеют большую амплитуду и скорость, чем в средах с межузлиями. При этом в средах с вакансиями скорости низкочастотных возмущений достигают больших значений, а в средах с межузлиями – меньших значений по сравнению с высокочастотными возмущениями. Выявлен частотный диапазон, в котором дисперсия продольных волн существенна, в средах с вакансиями она имеет нормальный, а в средах с межузлиями – аномальный характер. Увеличение коэффициента диффузии или уменьшение величины дилатационного параметра способствует более слабому проявлению дисперсии. Отмечено, что коэффициенты диффузии дефектов не влияют на существование дополнительной низкочастотной волны. Для волн высокой частоты среды с вакансиями и межузлиями практически неразличимы, наличие любых точечных дефектов почти не влияет на скорость распространения высокочастотных возмущений и их амплитуду.

© ПНИПУ

© **Ерофеев Владимир Иванович** – д.ф.-м.н., проф., директор, e-mail: erof.vi@yandex.ru.
**Леонтьева Анна Викторовна** – к.т.н., с.н.с., e-mail: aleonav@mail.ru.
**Шекоян Ашот Вазгенович** – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: shekoyan.ashot@gmail.com.

**Vladimir I. Erofeev** – Doctor Physics and Mathematics Sciences, Professor, Director, e-mail: erof.vi@yandex.ru.
**Anna V. Leonteva** – PhD, Senior Researcher, e-mail: aleonav@mail.ru.
**Ashot V. Shekoyan** – PhD, Senior Researcher, e-mail: shekoyan.ashot@gmail.com.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# DISPERSION OF LONGITUDINAL WAVES PROPAGATING IN MATERIALS WITH POINT DEFECTS

**V.I. Erofeev[1], A.V. Leonteva[1], A.V. Shekoyan[2]**

[1]Mechanical Engineering Research Institute of the RAS – Branch of Federal Research Center "A.V. Gaponov – Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences", Nizhny Novgorod, Russian Federation
[2]Institute of Mechanics of the National of Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia

ARTICLE INFO

Received: 02 July 2023
Approved: 20 October 2023
Accepted for publication: 31 October 2023

*Keywords:*
point defects, vacancies, interstitials, longitudinal wave, dispersion.

ABSTRACT

The paper investigates the propagation of harmonic waves in materials with point defects. The problem is described by a system of differential equations, which includes a dynamic equation of the theory of elasticity and kinetic equations of defect densities taking into account the mutual influence of defects and a propagating wave, as well as mutual recombination of defects. We consider both limit cases, materials with one type of point defects (vacancies, interstitials), and the general case if the material contains both types of point defects (vacancies and interstitials). We analyzed the effect on the amplitude and velocity of the harmonic wave of the parameters of point defects characterizing the diffusion of defects, the rate of their recombination on drains and the change in the volume of the material when one point defect is formed in it. It has been shown that in media with vacancies, longitudinal waves of low frequency have a higher amplitude and velocity than in media with interstitials. At the same time, in media with vacancies, the velocities of low-frequency perturbations reach large values, and in media with interstitials they reach smaller values, compared to high-frequency perturbations. A frequency range has been identified in which the dispersion of longitudinal waves is significant, in media with vacancies it is normal, and in media with interstitials it is abnormal. The increasing diffusion coefficient or the decreasing dilation parameter contributes to a weaker dispersion. It is noted that the diffusion coefficients of defects do not affect the existence of an additional low-frequency wave. For high frequency waves, media with vacancies and interstitials are practically indistinguishable; the presence of any point defects almost does not affect the propagation rate of high-frequency perturbations and their amplitude.

© PNRPU

## Введение

С 80-х гг. прошлого века интенсивно изучается влияние лазерного излучения на материалы. Теоретически и экспериментально было показано, что под воздействием лазерного луча в материалах образуются многочисленные точечные дефекты (вакансии, межузельные атомы), создающие в поверхностном слое напряженно-деформированное состояние [1–9].

Генерация точечных дефектов в материалах наблюдается и при ионной имплантации [10–24].

Прохождение продольной акустической волны способствует изменению в областях растяжения и сжатия энергии активации образования точечных дефектов, приводя к их пространственному перераспределению. Дефекты, мигрирующие по материалу, рекомбинируют на различного рода центрах. Роль таких центров могут играть дислокации, примеси внедрения и др.

Волновые эффекты в ансамблях дислокаций изучались в работах [25–29].

В [6] показано, что задачу о распространении акустической волны в материале с точечными дефектами следует рассматривать как самосогласованную, включающую в себя, наряду с динамическим уравнением теории упругости, кинетическое уравнение для плотности дефектов.

В [30] исследовано взаимодействие нелинейной волны деформации с полем концентрации точечных дефектов (вакансий, межузлий), приводящее как к рассеянию волны, так и к изменению энергии активации образования дефектов и их пространственному перераспределению. При этом предполагалось, что основными процессами, определяющими поведение дефектов, являются процессы генерации, рекомбинации и диффузии. Объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывалась.

В [31; 32] совместно с полем концентрации одного типа точечных дефектов проанализировано влияние внешнего нестационарного неоднородного температурного поля на нелинейные волны деформации.

В настоящей работе в линейной постановке задачи изучается дисперсия продольных волн, распространяющихся в материалах с точечными дефектами при учете объемной взаимной рекомбинации разноименных дефектов.

## 1. Постановка задачи

Распространение гармонической волны описывается линейной системой [6]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Omega_V}{\rho}\frac{\partial n_V}{\partial x} - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Omega_i}{\rho}\frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_V}{\partial t} = q_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + D_V \frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} - \beta_V n_V - \beta_{iV} n_i , \qquad (2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = q_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + D_i \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} - \beta_i n_i - \beta_{Vi} n_V . \qquad (3)$$

Здесь $U(x,t)$ – продольное перемещение частиц материала (волна считается плоской); $n_j(x,t)$ – объемная концентрация точечных дефектов ($j = V$ – для вакансий, $j = i$ – для межузлий); $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость, с которой распространялась бы продольная волна в материале, если бы в нем отсутствовали дефекты; $\lambda$, $\mu$ – константы Ламе; $\rho$ – плотность материала; $\Omega_j$ – дилатационный параметр, характеризующий изменение объема материала при образовании в нем одного точечного дефекта. Для вакансий $\Omega_j < 0$, для межузлий $\Omega_j > 0$. Через $q_0$ обозначен темп генерации точечных дефектов в отсутствие деформации; второе слагаемое в правой части (2) представляет собой деформационную поправку в генерацию дефектов; $D_j$ – коэффициент диффузии дефекта типа $j$; $\beta_j$ – скорость рекомбинации на стоках. Через $\beta_{iV}$ и $\beta_{Vi}$ обозначены скорости взаимной рекомбинации дефектов типа «межузлие–вакансия» и типа «вакансия–межузлие» соответственно.

Путем исключения $n_i$

$$n_i = \frac{1}{\beta_{iV}}\left( -\frac{\partial n_V}{\partial t} + q_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + D_V \frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} - \beta_V n_V \right),$$

система (1)–(3) сводится к системе двух уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left( c_l^2 - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{q_\varepsilon \Omega_i}{\rho \beta_{iV}} \right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \\
+ \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{1}{\rho}\left( \Omega_V - \frac{\beta_V \Omega_i}{\beta_{iV}} \right)\frac{\partial n_V}{\partial x} - \\
- \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Omega_i}{\rho \beta_{iV}}\frac{\partial^2 n_V}{\partial x \partial t} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Omega_i D_V}{\rho \beta_{iV}}\frac{\partial^3 n_V}{\partial x^3} = 0,
\end{gathered} \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 n_V}{\partial t^2} - (\beta_V D_i + \beta_i D_V)\frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} + (\beta_i + \beta_V)\frac{\partial n_V}{\partial t} - \\
- (D_V + D_i)\frac{\partial^3 n_V}{\partial x^2 \partial t} + D_i D_V \frac{\partial^4 n_V}{\partial x^4} + \\
+ q_\varepsilon (\beta_{iV} - \beta_i)\frac{\partial U}{\partial x} - q_\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \\
+ q_\varepsilon D_i \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + (\beta_i \beta_V - \beta_{iV}\beta_{Vi}) n_V = 0.
\end{gathered} \qquad (5)$$

В систему дифференциальных уравнений (4), (5) подставляем решение в виде монохроматических волн с произвольными амплитудами $U^0$, $n_V^0$:

$$\begin{cases} U = U^0 \exp(i\omega t - ikx), \\ n_V = n_V^0 \exp(i\omega t - ikx), \end{cases}$$

где $\omega$ и $k$ – частота и волновое число волны. Составляем определитель системы и приравниваем его нулю.

Дисперсионное уравнение в безразмерных переменных

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\beta_i + \beta_V}, \ \bar{k} = \frac{k}{(\beta_i + \beta_V)/c_l}$$

($\bar{\omega}$, $\bar{k}$ – безразмерные величины частоты и волнового числа, соответственно) получаем в следующем виде (черта опущена):

$$\begin{gathered}
\omega^4 + i\left[ -a_7(1+a_2)(1+a_3)k^2\omega^3 - \omega^3 \right] - \\
- a_3 a_7^2 (1+a_2)^2 k^4 \omega^2 - \left(1 + a_7(a_2 + a_3)\right)k^2\omega^2 - \\
- \frac{(a_2 - a_4 a_5)}{(1+a_2)^2}\omega^2 + \\
+ i\left[ a_7(1+a_2)(1+a_3)k^4\omega - \left( \frac{a_1(1+a_6)}{1+a_2} - 1 \right)k^2\omega \right] + \\
+ a_3 a_7^2 (1+a_2)^2 k^6 + a_7\left(a_2 + a_3 - a_1(a_3 + a_6)\right)k^4 + \\
+ \frac{\left(a_2 - a_4 a_5 - a_1(a_2 + a_6 - a_4 - a_5 a_6)\right)}{(1+a_2)^2}k^2 = 0,
\end{gathered} \qquad (6)$$

где безразмерные параметры имеют вид

$$a_1 = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{q_\varepsilon}{\rho c_l^2}\frac{\Omega_V}{\beta_V}, \ a_2 = \frac{\beta_i}{\beta_V}, \ a_3 = \frac{D_i}{D_V},$$

$$a_4 = \frac{\beta_{iV}}{\beta_V}, \ a_5 = \frac{\beta_{Vi}}{\beta_V}, \ a_6 = \frac{\Omega_i}{\Omega_V}, \ a_7 = \frac{\beta_V D_V}{c_l^2}.$$

Все параметры положительны, кроме двух $a_1 < 0$, $a_6 < 0$.

В комплексном дисперсионном уравнении (6) волновое число должно быть комплексным $k = k_1 + ik_2$ [33], где $k_1$ и $k_2$ – действительная и мнимая части волнового числа. С учетом этого обстоятельства продольное перемещение запишется в виде

$$U = U^0 \exp(k_2 x)\exp(i\omega t - ik_1 x),$$

здесь $k_1$ и $k_2$ характеризуют распространение и затухание волны соответственно при фиксированном значении частоты.

## 2. Среда с одним типом точечных дефектов

Рассмотрим сначала два более простых частных случая, если в материале имеет место только один тип точечных дефектов: либо вакансии, либо межузлия. Система (1)–(3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\Omega_j}{\rho}\frac{\partial n_j}{\partial x},$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + D_j \frac{\partial^2 n_j}{\partial x^2} - \beta_j n_j$$

($j = V$ и $j = i$ в системах с вакансиями и межузлиями соответственно).

Комплексное дисперсионное соотношение (6) упростится ($a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_6 = 0$):

$$\omega^3 - i\left(1 + a_7 k^2\right)\omega^2 - k^2\omega + i\left(a_7 k^4 + \left(1 - a_1\right)k^2\right) = 0, \quad (7)$$

где $a_1 = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{q_\varepsilon}{\rho c_l^2}\frac{\Omega_j}{\beta_j}$, $a_7 = \frac{\beta_j D_j}{c_l^2}$ ($j = V, i$).

Раскладывая волновое число и разделяя действительную и мнимую части дисперсионного уравнения (7), получим систему

$$\begin{cases} \omega^3 + 2a_7 k_1 k_2 \omega^2 - \left(k_1^2 - k_2^2\right)\omega - \\ - 4a_7 k_1^3 k_2 + 4a_7 k_1 k_2^3 - 2\left(1 - a_1\right)k_1 k_2 = 0, \\ \left(1 + a_7\left(k_1^2 - k_2^2\right)\right)\omega^2 + 2k_1 k_2 \omega - \\ - a_7\left(k_1^4 + k_2^4\right) + 6a_7 k_1^2 k_2^2 - \left(1 - a_1\right)\left(k_1^2 - k_2^2\right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

При решении системы (8) ограничимся рассмотрением волновых чисел с положительной действительной частью. Дисперсионные кривые $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$ изображены на рис. 1. Одна пара ветвей $(k_1, k_2)$ (рис. 1, *1*) имеет асимптоты в виде наклонной $k_1 = \omega$, исходящей из начала координат, и горизонтальной $k_2 = 0$ прямых. Другая пара ветвей (рис. 1, *2*) ограничена частями квадратичной параболы $k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2a_7}}$ (рис. 1, короткий штриховой пунктир).

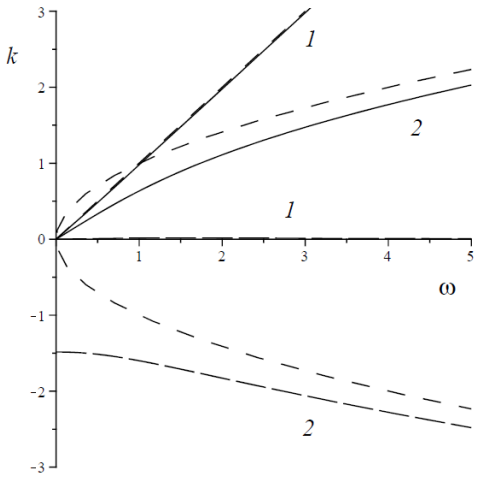



Рис. 1. Зависимости $k_1(\omega)$ (сплошная линия), $k_2(\omega)$ (длинный штриховой пунктир)

Fig. 1. Dependences $k_1(\omega)$ (solid line), $k_2(\omega)$ (long dash line)

Распространяющейся волне соответствует коэффициент затухания $\gamma = \frac{k_2}{k_1}$, принадлежащий интервалу $-1 < \gamma < 1$. Только у одной пары ветвей $(k_1, k_2)$ этот коэффициент лежит в указанных пределах ($\gamma_1 \to 0$, $|\gamma_2| > 1$). Для вакансий коэффициент затухания положителен ($\gamma_1 > 0$), для межузлий – отрицателен ($\gamma_1 < 0$) (рис. 2).

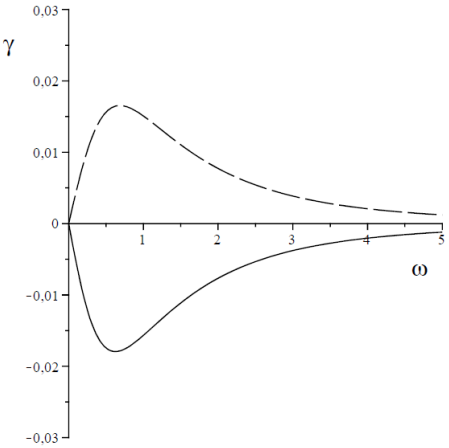



Рис. 2. Зависимость $\gamma(\omega)$ при различных значениях параметра $a_1$: $a_1 < 0$ (штриховой пунктир), $a_1 > 0$ (сплошная линия)

Fig. 2. Dependence $\gamma(\omega)$ at various values of parameter $a_1$: $a_1 < 0$ (dash line), $a_1 > 0$ (solid line)

Отследить динамику одной ветви (соответствующей распространяющейся волне) дисперсионной кривой $k_1(\omega)$ при изменении параметров $a_1$, $a_7$ позволяет разность этой ветви кривой со своей асимптотой. Рассмотрим функцию $\tilde{k}_1(\omega) = k_1(\omega) - \omega$. Влияние параметра $a_1$ на поведение кривой $\tilde{k}_1(\omega)$ показано на рис. 3. На рис. 4 изображены зависимости $\tilde{k}_1(a_7)$, характерные для низких и высоких частот.

В области низких частот видно наличие ярко выраженной дисперсии (см. рис. 3). При любых значениях частоты: $\tilde{k}_1 < 0$ при $a_1 < 0$ и $\tilde{k}_1 > 0$ при $a_1 > 0$.

Зависимость $\tilde{k}_1(\omega)$ от параметра $a_1$ монотонная: при увеличении абсолютного значения параметра кривая сдвигается в сторону увеличения абсолютных значений $\tilde{k}_1$. Зависимость $\tilde{k}_1(\omega)$ от параметра $a_7$ монотонная (убывающая при $a_1 > 0$ и возрастающая при $a_1 < 0$) в области низких частот и немонотонная в области высоких частот (см. рис. 4). При увеличении значения параметра $a_7$ кривая $\tilde{k}_1(\omega)$ сдвигается сначала в сторону увеличения, затем в сторону уменьшения абсолютных значений $\tilde{k}_1$ ($\omega >> 1$).

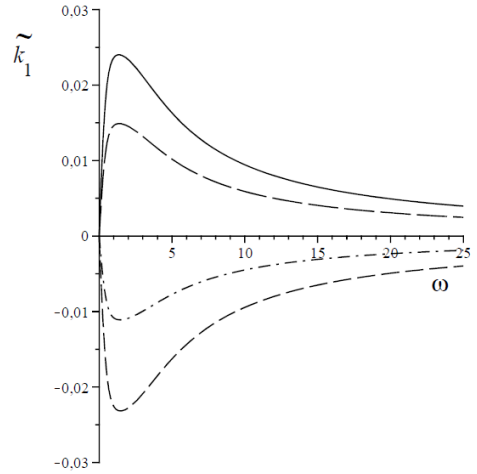



Рис. 3. Зависимость $\tilde{k}_1(\omega)$ при различных значениях параметра $a_1$: $a_1^{(1)}$ (короткий штриховой пунктир), $a_1^{(2)}$ (штрихпунктир), $a_1^{(3)}$ (длинный штриховой пунктир), $a_1^{(4)}$ (сплошная линия); $a_1^{(1)} < a_1^{(2)} < 0 < a_1^{(3)} < a_1^{(4)}$, $a_1^{(4)} = \left|a_1^{(1)}\right|$, $a_1^{(3)} > \left|a_1^{(2)}\right|$

Fig. 3. Dependence $\tilde{k}_1(\omega)$ at various values of parameter $a_1$: $a_1^{(1)}$ (dash line), $a_1^{(2)}$ (dash-dot line), $a_1^{(3)}$ (long dash line), $a_1^{(4)}$ (solid line); $a_1^{(1)} < a_1^{(2)} < 0 < a_1^{(3)} < a_1^{(4)}$, $a_1^{(4)} = \left|a_1^{(1)}\right|$, $a_1^{(3)} > \left|a_1^{(2)}\right|$

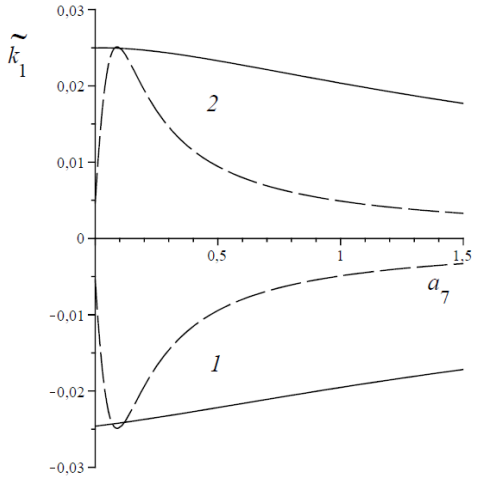
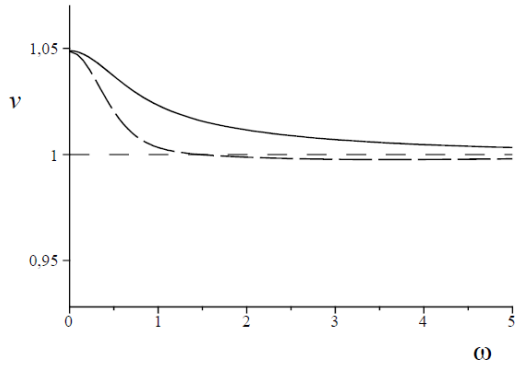


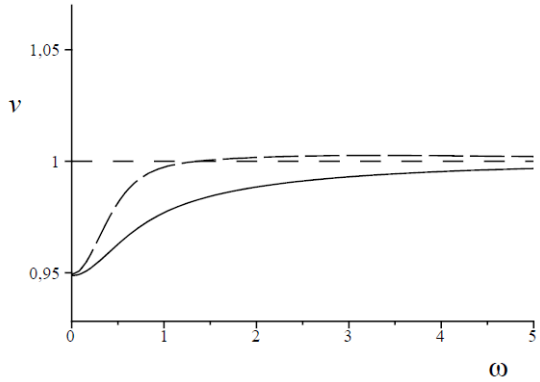

Рис. 4. Зависимость $\tilde{k}_1(a_7)$ при фиксированном значении частоты $\omega$ и различных значениях параметра $a_1$: $\omega < 1$ (сплошная линия), $\omega >> 1$ (штриховой пунктир) и $a_1 < 0$ (*1*), $a_1 > 0$ (*2*)

Fig. 4. Dependence $\tilde{k}_1(a_7)$ at fixed frequency value $\omega$ and various values of parameter $a_1$: $\omega < 1$ (solid line), $\omega >> 1$ (dash line) and $a_1 < 0$ (*1*), $a_1 > 0$ (*2*)

Зависимости фазовой $v_{ph} = \dfrac{\omega}{k_1}$ и групповой $v_{gr} = \dfrac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,k_1}$ скоростей изображены на рис. 5. Для скоростей в средах с вакансиями и межузлиями на всем интервале частот выполняются неравенства $v_{ph} > v_{gr}$ и $v_{ph} < v_{gr}$ соответственно. На низких частотах скорости близки к значению $v_0 = \sqrt{1 - a_1}$, а на высоких – близки к единице ($v_\infty \to 1$). Причем, если дефектами являются вакансии, то $v_0 > v_\infty$, а если дефектами являются межузлия, то $v_0 < v_\infty$.




*a*




*b*

Рис. 5. Зависимости $v_{ph}(\omega)$ (сплошная линия) и $v_{gr}(\omega)$ (длинный штриховой пунктир) при различных значениях параметра $a_1$: $a_1 < 0$ (*a*), $a_1 > 0$ (*b*)

Fig. 5. Dependences $v_{ph}(\omega)$ (solid line) and $v_{gr}(\omega)$ (long dash line) at various values of parameter $a_1$: $a_1 < 0$ (*a*), $a_1 > 0$ (*b*)

На низких частотах (см. рис. 5) очевидно, так же, как и на рис. 3, наличие дисперсии. В средах с вакансиями наблюдается нормальная дисперсия, в средах с межузлиями – аномальная дисперсия.

## 3. Среда с двумя типами точечных дефектов

Рассмотрим теперь более сложный – общий случай, если в материале одновременно имеют место оба типа точечных дефектов: вакансии и межузлия. По-прежнему считаем, что волны бегут в положительном направлении оси $x$ ($k_1 > 0$).

По сравнению с предыдущим случаем, где у дисперсионной кривой две пары ветвей (из них только одна соответствует распространяющейся волне со слабым затуханием, $k_2 \to 0$), здесь у кривой присутствует еще одна пара ветвей $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$, которая при определенных значениях параметров системы может соответствовать распространяющейся волне, имеющей постоянное ненулевое затухание.

Действительные ветви дисперсионной кривой (6) имеют три асимптоты: одна прямая и две квадратичные параболы с вершинами в начале координат

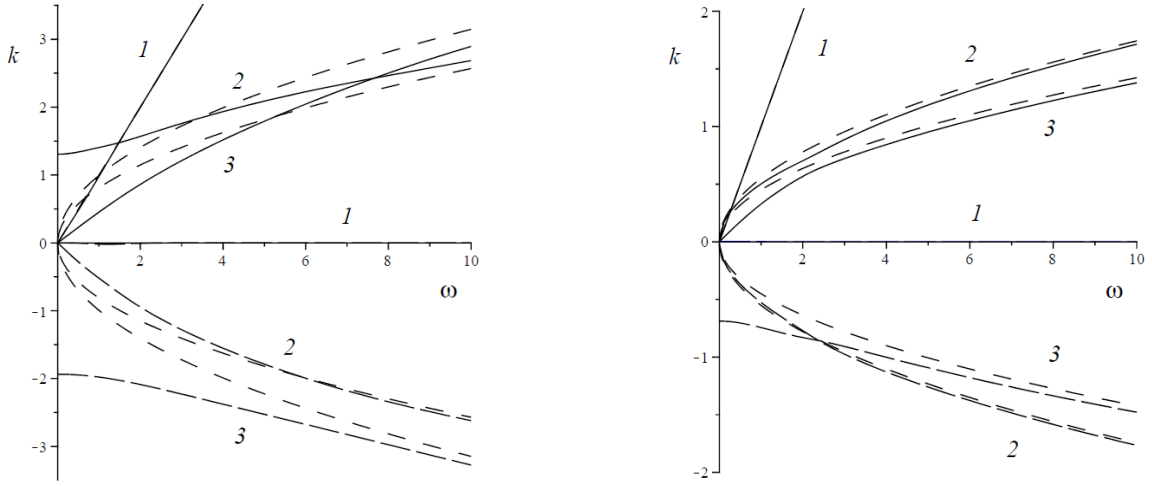
$$\omega = k_1,\ \omega = 2a_7(1+a_2)k_1^2,\ \omega = 2a_3a_7(1+a_2)k_1^2.$$

Одна из трех ветвей зависимости $k_1(\omega)$ имеет отсечку по волновому числу, если параметры системы удовлетворяют неравенству

$$-a_1a_4 - a_2 - a_1a_5a_6 + a_1a_6 + a_1a_2 + a_4a_5 > 0, \qquad (9)$$

левая часть которого не зависит от параметров $a_3$, $a_7$.

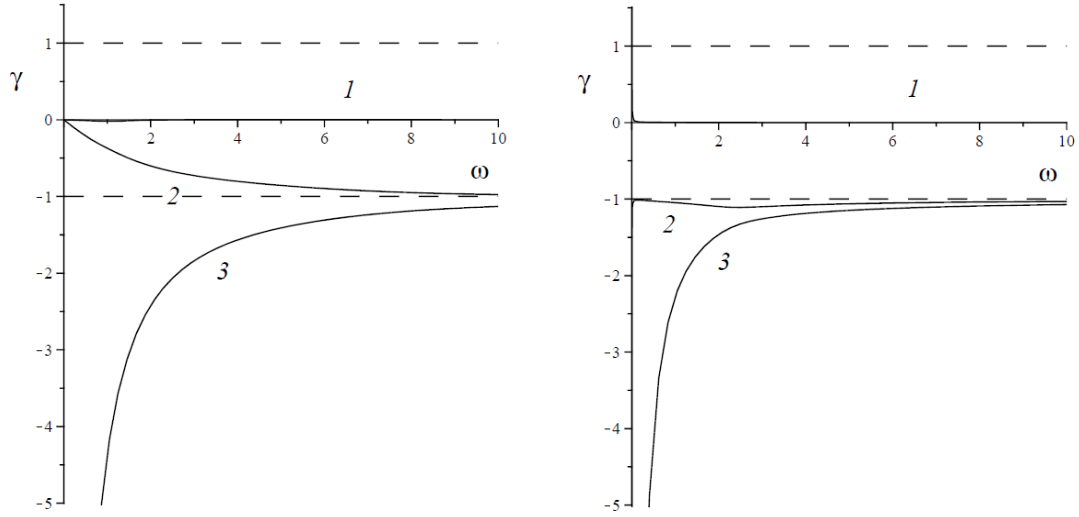
Соотношение параметров системы качественно влияет на вид дисперсионных кривых (рис. 6). Цифрами на рисунке условно пронумерованы пары ветвей $(k_1, k_2)$. Соответствующие зависимости коэффициента затухания $\gamma_1 - \gamma_3$ изображены на рис. 7. Асимптоты на рисунках, как и прежде, отмечены коротким штриховым пунктиром.




*a* *b*

Рис. 6. Зависимости $k_1(\omega)$ (сплошная линия), $k_2(\omega)$ (длинный штриховой пунктир) при выполнении (*a*) и невыполнении (*b*) условия (9)

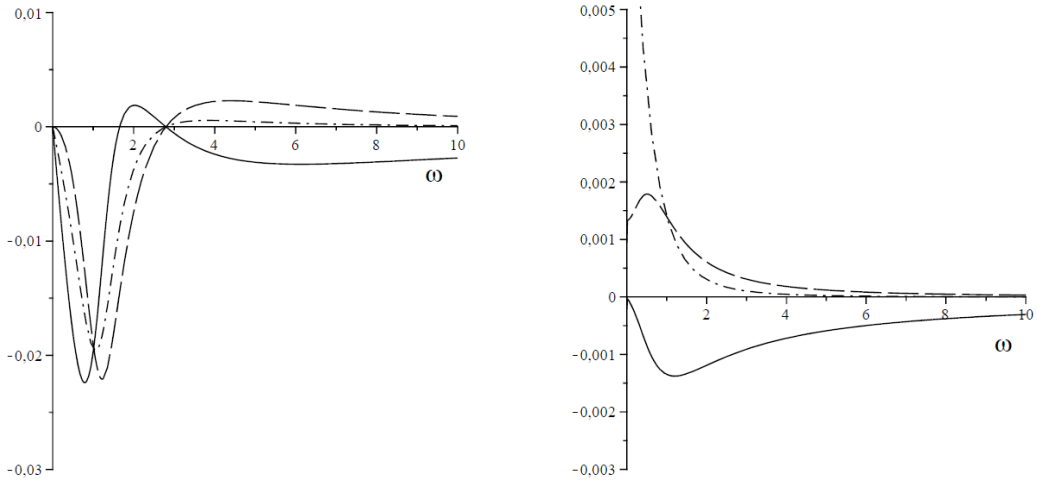
Fig. 6. Dependences $k_1(\omega)$ (solid line), $k_2(\omega)$ (long dash line) when (*a*) is met and condition (9) is not met (*b*)




*a* *b*

Рис. 7. Зависимость $\gamma(\omega)$ (сплошная линия) при выполнении (*a*) и невыполнении (*b*) условия (9)

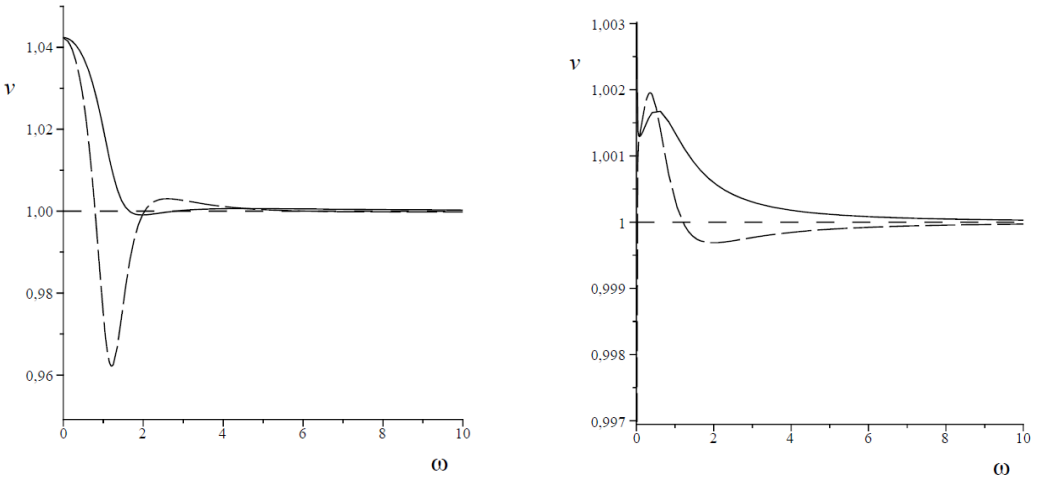
Fig. 7. Dependence $\gamma(\omega)$ (solid line) when (*a*) is met and condition (9) is not met (*b*)




*a* *b*

Рис. 8. Зависимости $\tilde{k}_1(\omega)$ (сплошная линия), $k_2(\omega)$ (длинный штриховой пунктир) и $\gamma(\omega)$ (штрихпунктирная линия) при выполнении (*a*) и невыполнении (*b*) условия (9)

Fig. 8. Dependences $\tilde{k}_1(\omega)$ (solid line), $k_2(\omega)$ (long dash line) and $\gamma(\omega)$ (dash-dot line) when (*a*) is met and condition (9) is not met (*b*)




*a* *b*

Рис. 9. Зависимости $v_{ph}(\omega)$ (сплошная линия) и $v_{gr}(\omega)$ (длинный штриховой пунктир) при выполнении (*a*) и невыполнении (*b*) условия (9)

Fig. 9. Dependences $v_{ph}(\omega)$ (solid line) and $v_{gr}(\omega)$ (long dash line) when (*a*) is met and condition (9) is not met (*b*)

Отсечка по волновому числу $k_1$, наблюдаемая на рис. 6, *a*, отсутствует на рис. 6, *b*.

При справедливости неравенства (9) на низких частотах может существовать еще одна продольная волна ($-1<\gamma_2<1$), быстро затухающая в процессе распространения. Если параметры системы не удовлетворяют неравенству (9), то на всем интервале частот в среде распространяется только одна продольная волна ($\gamma_1 \to 0$), как и в предельных случаях (с одним типом точечных дефектов).

Параметры $a_3$ и $a_7$ не влияют на существование второй низкочастотной волны.

Зависимости $\tilde{k}_1(\omega)$, $k_2(\omega)$ и $\gamma(\omega)$ распространяющейся волны представлены на рис. 8.

Из анализа $\tilde{k}_1(\omega)$ следует, что кривая $k_1(\omega)$ в основном лежит ниже своей асимптоты (см. рис. 8, *a*). Кривые $k_2(\omega)$ и $\gamma(\omega)$ меняют знак. Величины $k_1$ и $k_2$ разных знаков на низких и одного знака на высоких частотах. На низких частотах по мере распространения волны ее амплитуда уменьшается (волна затухает), аналогичное поведение наблюдается в однотипных средах с межузлиями. На высоких частотах амплитуда волны увеличивается (волна усиливается). Увеличение амплитуды волны типично для сред с вакансиями.

При нарушении неравенства (9) на всем интервале частот $k_1$ и $k_2$ имеют один знак.

Кривые фазовой и групповой скоростей показаны на рис. 9.

Кривая групповой скорости расположена как ниже, так и выше кривой фазовой скорости (см. рис. 9, *а*). На низких и высоких частотах расположены участки с нормальной дисперсией, заключающие между собой участок с аномальной дисперсией.

На высоких частотах в обоих вариантах имеется нормальная дисперсия.

Очевидно, что если коэффициенты диффузий дефектов равны ($a_3 \to 1$), то асимптоты – параболы дисперсионной кривой (6) совпадают. Кривые фазовой и групповой скоростей имеют одну точку пересечения. На низких частотах проявляется нормальная дисперсия, на высоких – аномальная.

## Заключение

Моделируемая среда такова, что в отсутствие каких-либо дефектов имеем классическую упругую среду, продольная волна в которой распространяется без дисперсии и затухания. Точечные дефекты способствуют появлению ее дисперсии и затухания в достаточно широком диапазоне частот. При этом низкочастотные и высокочастотные возмущения распространяются практически без дисперсии и потерь.

Тип точечных дефектов, присутствующих в упругой среде, оказывает противоположное действие на продольную волну: вакансии способствуют увеличению амплитуды волны, а межузлия – уменьшению амплитуды волны в процессе ее распространения. Вероятно, в областях образования вакансий возникают собственные колебания соседних узлов решетки (вакансии «пульсируют»), т.е. вакансии ведут себя как осцилляторы.

В среде с двумя типами точечных дефектов (вакансии и межузлия) на низких частотах распространяется одна или две продольные волны в зависимости от соотношения параметров системы. Во всем частотном диапазоне распространяется только одна продольная волна, как и в средах с одним типом точечных дефектов (вакансии, межузлия). На высоких частотах эта волна обладает слабой нормальной дисперсией. В среде с дефектами скорость распространения и амплитуда высокочастотных колебаний близки к скорости распространения продольной волны в твердом теле и ее амплитуде соответственно.

**Библиографический список**

1. Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. Лазерное управление процессами в твердом теле // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, № 1. – С. 3–32.

2. Емельянов В.И., Уварова И.Ф. Электронно-деформационно-тепловая неустойчивость и фазовый переход полупроводник-металл под действием лазерного излучения с образованием сверхструктур // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1988. – Т. 94, № 8. – С. 255–269.

3. Емельянов В.И., Сумбатов А.А. Кристаллизационно-деформационно-тепловая неустойчивость и формирование упорядоченных структур при лазерной кристаллизации // Поверхность: физика, химия, механика. – 1988. – № 7. – С. 122–127.

4. Емельянов В.И., Уварова И.Ф. Вакансионно-деформационная неустойчивость в формировании упорядоченных структур при нагреве тонких металлических пленок // Металлофизика. – 1989. – Т. 11, № 5. – С. 101–106.

5. Емельянов В.И., Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А. О механизмах образования упорядоченных структур дефектов при воздействии концентрированных потоков энергии // Квантовая электроника. – 1994. – Т. 21, № 8. – С. 769–772.

6. Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А. Нелинейные волны деформации и плотности дефектов в металлических пластинах при воздействии внешних потоков энергии // Журнал технической физики. – 2001. – Т. 71, № 8. – С. 23–26.

7. Coupled heat transfer, fluid flow and solidification kinetics for laser additive manufacturing applications / M.D. Khomenko, F.K. Mirzade, N.W. Makoana, S. Pityana // Journal of Manufacturing Processes. – 2021. – Vol. 67. – P. 611–618.

8. Сейдгазов Р.Д., Мирзаде Ф.Х. Пороговые условия термокапиллярного формирования глубокой каверны в аддитивном процессе селективного лазерного плавления металлического порошкового слоя // Сварочное производство. – 2021. – № 5. – С. 20–30.

9. Сейдгазов Р.Д., Мирзаде Ф.Х. Возбуждение капиллярной волны как механизм образования пор в процессе глубокого проплавления лазерным излучением // Письма в Журнал технической физики. – 2023. – Т. 49, № 12. – С. 31–33. DOI: 10.21883/PJTF.2023.12.55571.19553

10. Риссел Х., Руге И. Ионная имплантация / пер. с нем. В.В. Климова, В.Н. Пальянова; под ред. М.И. Гусевой. – М.: Наука, 1983. – 360 с.

11. Оцуки Ё.-Х. Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами / пер. с англ. В.В. Белошицкого, Л.И. Огнева, А.В. Тулупова; под ред. М.А. Кумахова. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

12. Анищик В.М., Углов В.В. Модификация инструментальных материалов ионными и плазменными пучками. – Минск: Изд-во БГУ, 2003. – 190 с.

13. Defect production during ion implantation of various AIIIBV semiconductors / W. Wesch, E. Wendler, G. Gotz, N.P. Kekelidse // Journal of Applied Physics. – 1989. – Vol. 65, no. 2. – P. 519–526.

14. Native point defects in low-temperature-grown GaAs / X. Liu, A. Prasad, J. Nishio, E.R. Weber, Z. Liliental-Weber, W. Walukiewicz // Applied Physics Letters. – 1995. – Vol. 67, no. 2. – P. 279–281.

15. Совместная имплантация кремния и фосфора в нелегированную и легированную индием подложки GaAs / Н.Н. Дымова, А.Е. Куницын, А.В. Марков, В.В. Чалдышев // Физика и техника полупроводников. – 1997. – Т. 31, № 12. – С. 1409–1413.

16. Formation of n+-layers in undoped and indium-doped GaAs wafers by Si and Si+P ion implantation / V.V. Chaldyshev, N.N. Dymova, A.E. Kunitsyn, A.V. Markov // Physica Status Solidi (a). – 1997. – Vol. 163, no. 1. – P. 81–86.

17. Napolitani E., Impellizzeri G. Ion implantation defects and shallow junctions in Si and Ge // Semiconductors and Semimetals. – 2015. – Vol. 91. – P. 93–122.

18. Окулич Е.В., Окулич В.И., Тетельбаум Д.И. Расчет влияния плотности ионного тока и температуры на кинетику накопления точечных дефектов при облучении кремния легкими ионами // Физика и техника полупроводников. – 2018. – Т. 52, № 9. – С. 967–972. DOI: 10.21883/FTP.2018.09.46228.8720

19. Light-emitting 9R-Si phase formed by Kr+ ion implantation into SiO2/Si substrate / A.A. Nikolskaya, D.S. Korolev, A.N. Mikhaylov, A.I. Belov, A.A. Sushkov, N.O. Krivulin, K.R. Muhamatchin, A.A. Elizarova, M.O. Marychev, A.A. Konakov, D.I. Tetelbaum, D.A. Pavlov // Applied Physics Letters. – 2018. – Vol. 113. – P. 182103.

20. Окулич Е.В., Окулич В.И., Тетельбаум Д.И. Расчет доз аморфизации кремния при облучении легкими ионами средних энергий // Физика и техника полупроводников. – 2020. – Т. 54, № 8. – С. 771–777. DOI: 10.21883/FTP.2020.08.49649.9338

21. Photoluminescence of ion-synthesized 9R-Si inclusions in SiO2/Si structure: Effect of irradiation dose and oxide film thickness / A. Nikolskaya, A. Belov, A. Mikhaylov, A. Konakov, D. Tetelbaum, D. Korolev // Applied Physics Letters. – 2021. – Vol. 118, no. 21. – P. 212101.

22. Influence of chemical nature of implanted atoms on photoluminescence of ion-synthesized 9R-Si hexagonal silicon / A. Nikolskaya, D. Korolev, A. Belov, A. Konakov, D. Pavlov, A. Mikhaylov, D. Tetelbaum // Materials Letters. – 2022. – Vol. 308, part A. – P. 131103.

23. Luminescence of modified W-centers arising in silicon upon irradiation of the SiO2/Si system by Kr+ ions / A. Nikolskaya, D. Korolev, A. Mikhaylov, A. Konakov, A. Okhapkin, S. Kraev, A. Sushkov, D. Pavlov, D. Tetelbaum // Materials Letters. – 2023. – Vol. 342. – P. 134302.

24. Образование гексагональной фазы кремния 9R-Si при имплантации системы SiO2/Si ионами Kr+ / А.А. Никольская, Д.С. Королев, А.Н. Михайлов, А.А. Конаков, А.И. Охапкин, С.А. Краев, А.И. Андрианов, А.Д. Моисеев, А.А. Сушков, Д.А. Павлов, Д.И. Тетельбаум // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2023. – Т. 78, № 3. – С. 2330501. DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2330501

25. Бурлак Г.Н., Островский И.В. Гистерезисные акустические явления, связанные с дислокационной нелинейностью в кристаллах // Письма в Журнал технической физики. – 1997. – Т. 23, № 18. – С. 69–74.

26. Ерофеев В.И., Ромашов В.П. Влияние дислокаций на дисперсию и затухание ультразвука в твердом теле // Письма в Журнал технической физики. – 2002. – Т. 28, № 6. – С. 6–11.

27. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. – М.: Физматлит, 2009. – 320 с.

28. Сарафанов Г.Ф. Коллективные и волновые эффекты в ансамбле дислокаций при пластической деформации металлов. – Нижний Новгород: Литера, 2010. – 359 с.

29. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Дисперсия и самомодуляция волн, распространяющихся в твердом теле с дислокациями // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 69–76.

30. Ерофеев В.И., Артамонова О.А. Влияние точечных дефектов в материале на распространение нелинейной акустической волны // Труды XXII Сессии Российского акустического общества и Научного совета по акустике РАН. – М.: ГЕОС, 2010. – Т. 1. – С. 158–159.

31. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В. Ударные волны в термоупругой среде с точечными дефектами // Журнал технической физики. – 2020. – Т. 90, № 1. – С. 26–32.

32. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Shekoyan A.V. Dispersion, attenuation and spatial localization of thermoelastic waves in a medium with point defects // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. Altenbach H., Eremeyev V.A., Igumnov L.A. (eds). – Springer, Cham, 2021. – STRUCTMAT, Vol. 141. – P. 123–144.

33. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.

## References

1. Mirzoev F.Kh., Panchenko V.Ya., Shelepin L.A. Laser control processes in solids. *Physics–Uspekhi*, 1996, Vol. 39, No. 1, pp. 1-29. https://doi.org/10.1070/PU1996v039n01ABEH000125

2. Emel'yanov V.I., Uvarova I.F. Laser-induced electron-deformation-thermal instability and a semiconductor-metal phase transition involving superstructure formation. *Soviet physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1988, Vol. 67, No. 2(8), pp. 1662-1670.

3. Emel'yanov V.I., Sumbatov A.A. Kristallizatsionno-deformatsionno-teplovaia neustoichivost' i formirovanie uporiadochennykh struktur pri lazernoi kristallizatsii [Crystallization-deformation-thermal instability and formation of ordered structures during laser crystallization]. *Poverkhnost': fizika, khimiia, mekhanika [Physics, Chemistry and Mechanics of Surfaces]*, 1988, No. 7, pp. 122-127.

4. Emel'ianov V.I., Uvarova I.F. Vakansionno-deformatsionnaia neustoichivost' v formirovanii uporiadochennykh struktur pri nagreve tonkikh metallicheskikh plenok [Vacancy-deformation instability in the formation of ordered structures when heating thin metal films]. *Metallofizika*, 1989, Vol. 11, No. 5, pp. 101-106.

5. Emel'yanov V.I., Mirzoev F.K., Shelepin L.A. Mechanisms of the formation of ordered defect structures by the action of concentrated energy fluxes. *Quantum Electronics*, 1994, Vol. 24, No. 8, pp. 714-717. https://doi.org/10.1070/QE1994v024n08ABEH000173

6. Mirzoev F., Shelepin L.A. Nonlinear strain waves and densities of defects induced in metal plates by external energy fluxes. *Technical Physics*, 2001, Vol. 46, No. 8, pp. 952-955. https://doi.org/10.1134/1.1395114

7. Khomenko M.D., Mirzade F.K., Makoana N.W., Pityana S. Coupled heat transfer, fluid flow and solidification kinetics for laser additive manufacturing applications. *Journal of Manufacturing Processes*, 2021, Vol. 67, pp. 611-618. https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.05.019

8. Seydgazov R.D., Mirzade F.Kh. Threshold conditions for thermocapillary formation of a deep cavity in the additive process for selective laser melting of a metal powder layer. *Welding International*, 2021, Vol. 35, No. 7-9, pp. 359-368. https://doi.org/10.1080/09507116.2021.1979829

9. Seidgazov R.D., Mirzade F.Kh. Excitation of a capillary wave as a mechanism for the formation of pores in the process of deep penetration by laser radiation. *Technical Physics Letters*, 2023, Vol. 49, No. 6, pp. 65-67.

10. Ryssel H., Ruge I. Ionenimplantation [Ion implantation]. Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1978, 366 p. (Russ. ed.: Ryssel, H., Ruge, I. Ionnaya implantatsiya. Moscow: Nauka, 1983, 360 p.).

11. Ohtsuki Y.-H. Charged beam interaction with solids. London: Taylor & Francis Publ., 1983, 248 p. (Russ. ed.: Ohtsuki,

Y.-H. Vzaimodeystvie zaryazhennykh chastits s tverdymi telami. Moscow: Mir Publ., 1985, 280 p.).

12. Anishchik V.M., Uglov V.V. Modifikatsiia instrumental'nykh materialov ionnymi i plazmennymi puchkami [Modification of instrumental materials by ion and plasma beams]. Minsk: Izd-vo BGU, 2003, 190 p.

13. Wesch W., Wendler E., Gotz G., Kekelidse N.P. Defect production during ion implantation of various AIIIBV semiconductors. *Journal of Applied Physics*, 1989, Vol. 65, No. 2, pp. 519-526. https://doi.org/10.1063/1.343134

14. Liu X., Prasad A., Nishio J., Weber E.R., Liliental-Weber Z., Walukiewicz W. Native point defects in low-temperature-grown GaAs. *Applied Physics Letters*, 1995, Vol. 67, No. 2, pp. 279-281. https://doi.org/10.1063/1.114782

15. Dymova N.N., Kunitsyn A.E., Chaldyshev V.V., Markov A.V. Silicon and phosphorus co-implantation into undoped and indium-doped GaAs substrates. *Semiconductors*, 1997, Vol. 31, No. 12, pp. 1217-1220. https://doi.org/10.1134/1.1187296

16. Chaldyshev V.V., Dymova N.N., Kunitsyn A.E., Markov A.V. Formation of n+-Layers in Undoped and Indium-Doped GaAs Wafers by Si and Si+P Ion Implantation. *Physica Status Solidi (a)*, 1997, Vol. 163, No. 1, pp. 81-86. https://doi.org/10.1002/1521-396X(199709)163:1<81::AID-PSSA81>3.0.CO;2-J

17. Napolitani E., Impellizzeri G. Ion implantation defects and shallow junctions in Si and Ge. *Semiconductors and Semimetals*, 2015, Vol. 91, pp. 93-122. https://doi.org/10.1016/bs.semsem.2015.01.001

18. Okulich E.V., Okulich V.I., Tetelbaum D.I. Calculation of the influence of the ion current density and temperature on the accumulation kinetics of point defects under the irradiation of Si with light ions. *Semiconductors*, 2018, Vol. 52, No. 9, pp. 1091-1096. https://doi.org/10.1134/S1063782618090105

19. Nikolskaya A.A., Korolev D.S., Mikhaylov A.N., Belov A.I., Sushkov A.A., Krivulin N.O., Muhamatchin K.R., Elizarova A.A., Marychev M.O., Konakov A.A., Tetelbaum D.I., Pavlov D.A. Light-emitting 9R-Si phase formed by Kr+ ion implantation into SiO2/Si substrate. *Applied Physics Letters*, 2018, Vol. 113, pp. 182103. https://doi.org/10.1063/1.5052605

20. Okulich E.V., Okulich V.I., Tetelbaum D.I. Calculating Silicon-Amorphization Doses under Medium-Energy Light-Ion Irradiation. *Semiconductors*, 2020, Vol. 54, No. 8, pp. 916-922. https://doi.org/10.1134/S1063782620080175

21. Nikolskaya A., Belov A., Mikhaylov A., Konakov A., Tetelbaum D., Korolev D. Photoluminescence of ion-synthesized 9R-Si inclusions in SiO2/Si structure: Effect of irradiation dose and oxide film thickness. *Applied Physics Letters*, 2021, Vol. 118, No. 21, pp. 212101. https://doi.org/10.1063/5.0052243

22. Nikolskaya A., Korolev D., Belov A., Konakov A., Pavlov D., Mikhaylov A., Tetelbaum D. Influence of chemical nature of implanted atoms on photoluminescence of ion-synthesized 9R-Si hexagonal silicon. *Materials Letters*, 2022, Vol. 308, Part A, pp. 131103. https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.131103

23. Nikolskaya A., Korolev D., Mikhaylov A., Konakov A., Okhapkin A., Kraev S., Sushkov A., Pavlov D., Tetelbaum D. Luminescence of modified W-centers arising in silicon upon irradiation of the SiO2/Si system by Kr+ ions. *Materials Letters*, 2023, Vol. 342, pp. 134302. https://doi.org/10.1016/j.matlet.2023.134302

24. Nikolskaya A.A., Korolev D.S., Mikhaylov A.N., Konakov A.A., Okhapkin A.I., Kraev S.A., Andrianov A.I., Moiseev A.D., Sushkov A.A., Pavlov D.A., Tetelbaum D.I. Formation of Hexagonal Phase 9R-Si in SiO2/Si System upon Kr+ Ion Implantation. *Moscow University Physics Bulletin*, 2023, Vol. 78, No. 3, pp. 361-367. https://doi.org/10.3103/S0027134923030153

25. Burlak G.N., Ostrovskii I.V. Acoustic hysteresis phenomena due to the dislocation nonlinearity in crystals. *Technical Physics Letters*, 1997, Vol. 23, No. 9, pp. 725-726. https://doi.org/10.1134/1.1261669

26. Erofeev V.I., Romashov V.P. Effect of dislocations on the dispersion and damping of ultrasound in solids. *Technical Physics Letters*, 2002, Vol. 28, No. 3, pp. 218-220. https://doi.org/10.1134/1.1467280

27. Bagdoev A.G., Erofeyev V., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials, Berlin: Springer, 2016, STRUCTMAT, Vol. 24, 274 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37267-4

28. Sarafanov G.F. Kollektivnye i volnovye effekty v ansamble dislokatsii pri plasticheskoi deformatsii metallov [Collective and wave effects in the ensemble of dislocations in plastic deformation of metals]. Nizhny Novgorod: Litera, 2010, 359 p.

29. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. Dispersion and Self-Modulation of Waves Propagating in a Solid with Dislocations. *Physical Mesomechanics*, 2019, Vol. 22, No. 3, pp. 173-180. https://doi.org/10.1134/S1029959919030019

30. Erofeev V.I., Artamonova O.A. Vliianie tochechnykh defektov v materiale na rasprostranenie nelineinoi akusticheskoi volny [Effect of point defects in the material on the propagation of a nonlinear acoustic wave]. *Trudy XXII Sessii Rossiiskogo akusticheskogo obshchestva i Nauchnogo soveta po akustike RAN*, Moscow: GEOS, 2010, Vol. 1, pp. 158-159.

31. Erofeev V.I., Leont'eva A.V., Shekoyan A.V. Elastic Waves in a Thermoelastic Medium with Point Defects. *Technical Physics*, 2020, Vol. 65, No. 1, pp. 22-28. https://doi.org/10.1134/S1063784220010053

32. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Shekoyan A.V. Dispersion, Attenuation and Spatial Localization of Thermoelastic Waves in a Medium with Point Defects. Multiscale Solid Mechanics. *Advanced Structured Materials*. Altenbach H., Eremeyev V.A., Igumnov L.A. (eds). Springer, Cham, 2021, STRUCTMAT, Vol. 141, pp. 123-144. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_10

33. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Volny v sterzhniakh. Dispersiia. Dissipatsiia. Nelineinost' [Waves in the rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow: Fizmatlit, 2002, 208 p.

**Финансирование.** Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-19-00613).
**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
**Вклад авторов равноценен.**

**Funding.** The work was carried out with the support of the Russian Science Foundation (grant No. 20-19-00613).
**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.
**The contribution of the authors is equivalent.**