Рубинова Р.В., Лобода О.С., Кривцов А.М. Баллистические процессы распространения тепла в одномерном кристалле с дальнодействием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. С. 74–80. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.07

Rubinova R., Loboda O., Krivtsov A. Ballistic heat transfer in a one-dimensional crystal with long-range interactions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 5, pp. 74-80. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.07

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.07
УДК 539.3:539.4

БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ОДНОМЕРНОМ КРИСТАЛЛЕ С ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ

Р.В. Рубинова[1], О.С. Лобода[2,3], А.М. Кривцов[2,3]

[1]Институт Фраунгофера, Эрланген, Германия
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация
[3]Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 18 июля 2023 г.
Одобрена: 27 октября 2023 г.
Принята к публикации: 31 октября 2023 г.

Ключевые слова:

гармонический кристалл, дальнодействие, нестационарные тепловые процессы, тепловые волны, фундаментальное решение, дипольное взаимодействие.

АННОТАЦИЯ

В работе исследуются нестационарные тепловые процессы в низкоразмерных структурах и изучается влияние на эти процессы неближайших соседей. Используется ранее разработанная аналитическая модель баллистического теплообмена. Рассматривается одномерный гармонический кристалл с учетом влияния дальнейших соседей. Силы связи соответствуют случаю кристалла с дипольным взаимодействием между частицами. Количество взаимодействующих соседей варьируется. Исследована зависимость тепловых процессов от числа взаимодействующих частиц. Для описания эволюции начального теплового возмущения проведен анализ дисперсионных характеристик и групповых скоростей. Показано, что если учитывать только ближайших соседей, то максимальная групповая скорость будет составлять 78 % от максимальной групповой скорости, достигаемой при рассмотрении бесконечного числа соседей. Построено фундаментальное решение задачи о распространении тепла. Получено решение для случая начального возмущения в виде прямоугольного импульса. Сделана оценка влияния числа соседей на форму и скорость распространения теплового фронта. Выявлена динамика изменения коэффициентов интенсивностей волн в зависимости от числа соседей. Показано, что тепловой фронт распространяется с конечной скоростью, равной максимальной групповой скорости, которая увеличивается по мере того, как учитывается больше взаимодействий. Однако коэффициент интенсивности волн уменьшается с ростом учитываемых соседей.

Полученные в статье результаты предназначены для описания процесса теплообмена в высокочистых кристаллах с дальнодействием, таких как дипольные кристаллы. Результаты также помогают оценить погрешность компьютерного моделирования таких процессов, так как для численных расчетов необходимо ограничивать число взаимодействующих частиц.

© ПНИПУ

© **Рубинова Раиса Витальевна** – н. с., e-mail: rraisa@bk.ru, iD: 0000-0002-5852-9367.
Лобода Ольга Сергеевна – к.ф-м.н., доц. с.н.с.
Кривцов Антон Мирославович – чл.-корр. РАН, д.ф-м.н., директор Высшей школы теоретической механики и математической физики, зав. лаб. «Дискретные модели механики».

Raisa V. Rubinova – Research Associate, e-mail: rraisa@bk.ru, iD: 0000-0002-5852-9367.
Olga S. Loboda – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, Senior Researcher.
Anton M. Krivtsov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Professor of Russian Academy of Sciences, Director of Higher School of Theoretical Mechanics, Head of the Laboratory Discrete Models in Mechanics.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

BALLISTIC HEAT TRANSFER IN A ONE-DIMENSIONAL CRYSTAL WITH LONG-RANGE INTERACTIONS

R. Rubinova[1], O. Loboda[2,3], A. Krivtsov[2,3]

[1]Fraunhofer Institute for Integrated Circuits IIS, Am Wolfsmantel 33, Erlangen, Germany, 91058
(work was performed while with Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University)
[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU), Polytechnicheskaya st., 29
Saint Petersburg, Russian Federation, 195251
[3]Institute for Problems in Mechanical Engineering, 61 Bolshoy V.O.,
Saint-Petersburg, Russian Federation, 199178

ARTICLE INFO

Received: 18 July 2023
Approved: 27 October 2023
Accepted for publication:
31 October 2023

Keywords:

harmonic crystal, long-range interaction, nonstationary heat processes, heat waves, fundamental solution, dipole interaction.

ABSTRACT

Non-stationary thermal processes in low-dimensional structures are considered. A previously developed analytical model of ballistic heat transfer is used. The paper focuses on a one-dimensional harmonic crystal with non-nearest neighbour interactions. The coupling forces correspond to the case of a crystal with dipole interactions between the particles. The number of interacting neighbour varies.

The dependence of thermal processes on the number of interacting particles has been studied. To describe the evolution of the initial thermal disturbance, an analysis of the dispersion characteristics and group velocities was carried out. It is shown that if only the nearest neighbors are considered, the maximum group velocity will be 78% of the maximum group velocity achieved when considering an infinite number of neighbors. The fundamental solution to the heat propagation problem has been constructed. A solution is obtained for the case of an initial disturbance in the form of a rectangular pulse. An assessment of the influence of neighbours on the rate of heat propagation and on the shape of the heat front was made. The dynamics of changes in wave intensity coefficients depending on the number of neighbors has been revealed. The thermal front is shown to propagate with a finite velocity equal to the maximum group velocity, which increases as more interactions are taken into account. However, the wave intensity factor decreases when the considered neighbours increase.

The results obtained in this article aim to describe the heat transfer process in high-purity long-range crystals, such as dipole crystals. The results also help to estimate the error of computer modelling of such processes, since for numerical calculations it is necessary to limit the number of interacting particles.

© PNRPU

Введение

С развитием технологий появляется возможность создания сверхчистых кристаллических материалов. Такие материалы могут обладать уникальными физическими свойствами, например, тепловой сверхпроводимостью. Механизм этого процесса изучен еще не в полной мере. Понимание процесса теплообмена на микроуровне необходимо для установления связи между микроскопическим и макроскопическим описанием твердых тел [1–4]. Экспериментальные исследования показывают, что на микроуровне преобладает баллистический теплообмен [5–12], в отличие от макроуровня, где распространена диффузионная теплопроводность.

Удобной моделью для исследования термомеханических свойств сверхчистых материалов является одномерный гармонический кристалл – цепочка материальных точек, взаимодействующих посредством гармонических сил. В таких моделях наиболее ярко выражены аномалии, связанные с баллистическим характером теплообмена [1; 4; 13–16]. Аналитический подход к описанию баллистического теплообмена в гармонических кристаллах представлен в работах [17–24], где используется понятие кинетической температуры как величины, пропорциональной сумме кинетических энергий частиц в элементарной ячейке. Для одномерного неквантового случая получено макроскопическое уравнение теплопроводности и соответствующий закон аномальной теплопроводности (альтернатива закону Фурье). Этот закон предсказывает конечную скорость тепловых фронтов и независимость теплового потока от длины кристалла. С применением корреляционного анализа начальная стохастическая задача для отдельных частиц сводится к детерминированной задаче для статистических характеристик кристалла.

Важным вопросом представляется изучение влияния неближайших соседей на процессы в дискретных средах. Очевидно, что в реальных системах во взаимодействие вовлечено бесконечное число соседей. Однако для численных расчетов необходимо ограничить число взаимодействующих частиц. Основная цель данного исследования – определить зависимость между поведением системы и количеством рассматриваемых взаимодействий. Рассматриваются силы связи, соответствующие случаю дипольного взаимодействия между частицами. Раздел 1 посвящен постановке задачи. В разделе 2

исследованы дисперсионные характеристики кристалла и получены групповые скорости. В разделе 3 построено фундаментальное решение задачи о распространении тепла. Аналитическое решение для случая начального теплового возмущения в форме прямоугольного импульса обсуждается в разделе 4.

1. Постановка задачи

Рассматривается модель одномерного бесконечного кристалла, состоящего из взаимодействующих частиц массой m. Дискретное уравнение движения с учетом несоседних взаимодействий имеет вид

$$m\ddot{u}_n = \sum_{i=1}^{N} C_i \left(u_{n-i} - 2u_n + u_{n+i} \right), \tag{1}$$

где u – это перемещение частицы, n – номер частицы (произвольное целое число), i – индекс соседа, N – количество рассмотренных координационных сфер, C_i – жесткость, связывающая частицу с i-м соседом:

$$C_i = Ci^{-4}, \tag{2}$$

где C жесткость связи. Формула (2) описывает дипольное взаимодействие [24]. Две ближайшие соседние частицы (слева и справа) образуют первую координационную сферу, две вторые ближайшие – вторую координационную сферу и т.д. Как видно из формулы (2), сила взаимодействия значительно снижается с увеличением индекса соседа. В работе [18] было показано, что эволюция начального температурного поля $T_0(x)$ в произвольной одномерной бесконечной скалярной решетке описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} T(x,t) = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_0\left(x + c_{\mathrm{gr}}(ak)t\right) d(ak) + \\ + \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_0\left(x - c_{\mathrm{gr}}(ak)t\right) d(ak), \end{aligned} \tag{3}$$

где k – это волновое число, a – константа решетки, $c_{\mathrm{gr}}(ak)$ – групповая скорость. Формула (3) получается с помощью корреляционного анализа, сводящего исходную стохастическую задачу к детерминированной для статистических характеристик кристалла. Выражение отражает баллистический характер теплообмена.

2. Дисперсионные отношения и групповая скорость

Подстановка выражения $u_n = Ae^{i(akn+\Omega t)}$ в уравнение (1) дает дисперсионное соотношение

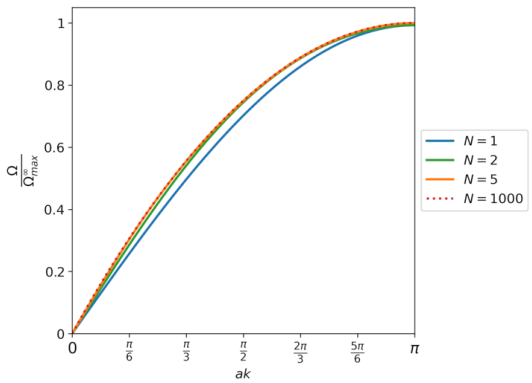
$$\Omega = 2\sqrt{\frac{C}{m}\sum_{i=1}^{N} i^{-4} \sin^2\left(\frac{i}{2}ak\right)}. \tag{4}$$

Дисперсионные соотношения для различных N представлены на рис. 1, *а*, где $N=1$ соответствует взаимодействию ближайших соседей. Из графиков хорошо видно, что увеличение числа взаимодействующих частиц не вносит дополнительных экстремумов и существенно не изменяет форму дисперсионной кривой.

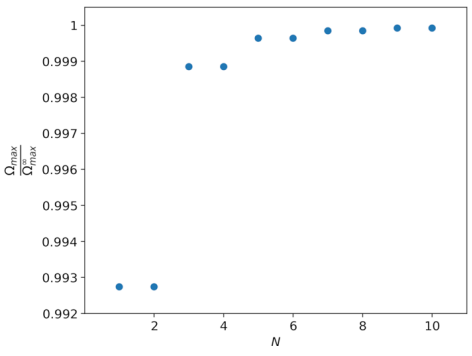
Максимально возможная частота наблюдается для $ak = \pi$ и зависит от числа координационных сфер. Эта зависимость представлена формулой (5):

$$\Omega_{\max}(N) = 2\sqrt{\frac{C}{m}\sum_{i=1}^{[N/2]} \frac{1}{(2i-1)^4}}, \tag{5}$$

где $\left[\frac{N}{2}\right]$ – наибольшее целое число, меньшее или равное $\frac{N}{2}$. Функция достигает своего предела $\Omega_{max}^{\infty} = \frac{\pi^2}{\sqrt{24}}\sqrt{C/m}$, когда N стремится к бесконечности. Для $N \geq 5$ максимальная частота $\Omega_{\max}(N)$ отклоняется от $\Omega_{\max}^{\infty}$ менее чем на 0,1 % (рис. 1, *б*).



a



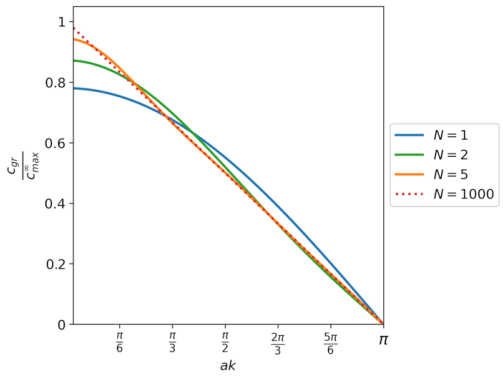
b

Рис. 1. Дисперсионные характеристики для различных значений N (*а*), зависимость максимума частоты от N (*b*)

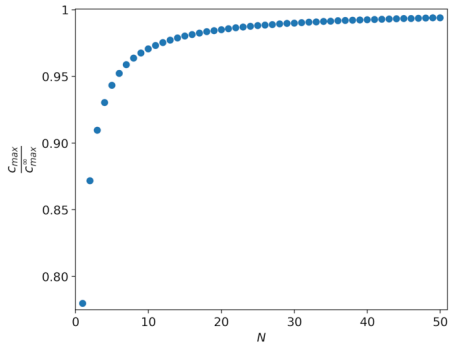
Fig. 1. Dispersion relation for different values of N (*a*), dependence of the maximum frequency on N (*b*)

Групповая скорость вычисляется как производная от (4) по волновому числу:

$$c_{gr} = \frac{d\Omega}{dk} = \frac{Ca}{m\Omega}\sum_{i=1}^{N} i^{-3}\sin(iak). \qquad (6)$$



a



b

Рис. 2. Групповая скорость для различных значений N (*a*), зависимость максимума групповой скорости от N (*b*)

Fig. 2. Group velocity for different values of N (*a*), dependence of the maximum group velocity on N (*b*)

На рис. 2, *a*, представлены зависимости групповой скорости от волнового числа для различных значений параметра N. При учете большого числа взаимодействий зависимость имеет тенденцию быть линейной. Максимальное значение групповой скорости определяет максимальную скорость распространения энергии в системе. Зависимость максимума групповой скорости от N определяется выражением

$$c_{\max}(N) = a\sqrt{\frac{C}{m}\sum_{i=1}^{N} i^{-2}} \qquad (7)$$

и показана на рис. 2, *b*.

В предельном случае распространение энергии происходит с наибольшей скоростью $c_{\max}^{\infty} = \frac{a\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{C/m}$. Можно оценить влияние числа соседей на скорость тепловых процессов. При $N=1$ соотношение $\frac{c_{\max}}{c_{\max}^{\infty}} = 0,78$, при $N=5$ $\frac{c_{\max}}{c_{\max}^{\infty}} = 0,94$, и при $N=100$ $\frac{c_{\max}}{c_{\max}^{\infty}}$ превышает 0,99.

3. Фундаментальное решение

Пусть начальное тепловое возмущение задано в виде $T_0(x) = T_0\delta(x)$, где T_0 – амплитуда начального теплового возмущения, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Фундаментальное решение строится по аналогии с [22]. Эволюцию начального поля температуры с учетом свойств дельта-функции можно представить в виде

$$T(x,t) = \frac{T_0}{4\pi t}\sum_j \frac{1}{\left|c_{\text{gr}}'(ak_j)\right|}, \qquad (8)$$

где k_j – корни уравнения $\left|c_{\text{gr}}(ak_j)\right| = \frac{|x|}{t}$ (особые точки), штрих обозначает производную функции по ее аргументу. Для количественной оценки интенсивности волнового фронта построим аппроксимацию функции (8) вблизи ее особых точек, используя разложение групповой скорости и ее производной в ряд Тейлора в окрестности корней k_j.

$$T(x,t) = T_0\sum_j \frac{A_j}{\sqrt{\left|c_{\text{gr}}(ak_j)\right| - \left|c_{\text{gr}}(ak)\right|}}, \qquad (9)$$

$$A_j = \frac{1}{4\pi t\sqrt{2\left|c_{\text{gr}}''(ak_j)\right|}}, \qquad (10)$$

где A – коэффициент, характеризующий интенсивность волнового фронта. После подстановки групповой скорости получаем:

$$A = \frac{1}{4\pi t}\frac{\sqrt[4]{\frac{m}{C}\sum_{i=1}^{N} i^{-2}}}{\sqrt{a^3 N}}. \qquad (11)$$

Температурные профили для различных значений параметра N для момента времени $t=1$ нормированы $T_0\tilde{T}$, где $\tilde{T} = \frac{\sqrt{6m}}{4\pi a^2\sqrt{C}}$. Наблюдается только один тепловой фронт, который распространяется со скоростью $c_{\max}(N)$. Число волн совпадает с числом рассматриваемых координационных сфер (рис. 3).

Как видно из формулы (7) и рис. 2, *b*, и 3, скорость увеличивается, когда принимается во внимание взаимодействие с большим количеством соседей. При этом интенсивность волн уменьшается. Температура колеблется вокруг равновесного значения $\frac{T_0\tilde{T}}{t}$. Количество экстремумов совпадает со значением N, а амплитуда колебаний обратно пропорциональна числу рассматриваемых взаимодействий.

Когда N стремится к бесконечности, амплитуда колебаний становится незначительной, а фундаментальное решение аналитически описывается как

$$T(t)=\begin{cases}\dfrac{T_0}{t}\tilde{T},|x|<c_{\max}^{\infty}t,\\ 0,|x|>c_{\max}^{\infty}t,\end{cases} \tag{12}$$

где точка $|x|=c_{\max}^{\infty}t$ – особая точка, в которой функция не определена. Фундаментальное решение является самоподобной функцией, его ширина увеличивается со временем $(\sim t)$, при этом его высота, соответственно, уменьшается $(\sim t^{-1})$. Следовательно, площадь под кривой, соответствующей переданной энергии, остается постоянной.

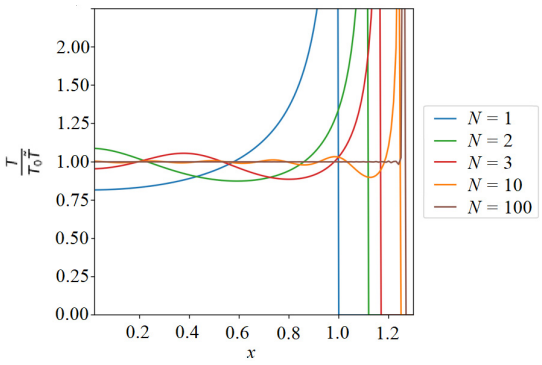


Рис. 3. Фундаментальное решение задачи о распространении тепла для различных значений N

Fig. 3. The fundamental solution to the nonstationary heat propagation problem for different values of N

4. Начальное возмущение прямоугольного профиля

Предположим, что одномерный кристалл в начальный момент времени был нагрет воздействием короткого лазерного импульса. Будем считать начальное распределение температуры прямоугольным:

$$T_0(x)=T_0\left(\eta(x+l)-\eta(x-l)\right), \tag{13}$$

где $\eta(x)$ – функция Хевисайда, l – ширина импульса. Подстановка в формулу (3) дает

$$T(x,t)=\frac{T_0}{4\pi t}\varphi\left(\frac{x}{t}\right), \tag{14}$$

где

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right)=\int_0^{\pi}\eta\left(\frac{x+l}{t}-c_{\mathrm{gr}}(ak)\right)d(ak)+\int_0^{\pi}\eta\left(\frac{x-l}{t}+c_{\mathrm{gr}}(ak)\right)d(ak). \tag{15}$$

Полученная функция представлена на рис. 4. Скорость наблюдаемого теплового фронта увеличивается с ростом числа учитываемых взаимодействующих частиц. При стремлении N к бесконечности форма температурного профиля приближается к трапециевидной.

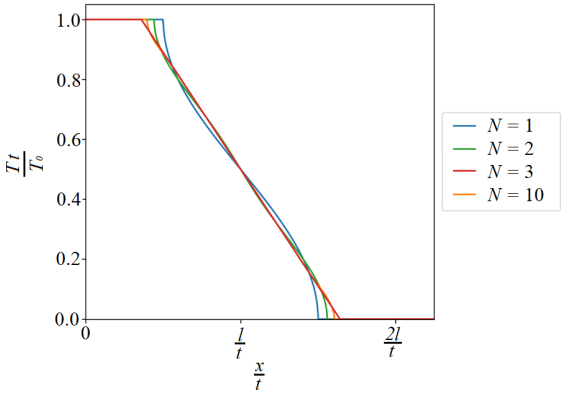


Рис. 4. Температурные профили в случае прямоугольного начального теплового возмущения

Fig. 4. Heat propagations with initial perturbation in the form of a rectangular temperature distribution for different values of N

Заключение

В работе рассмотрен процесс баллистического переноса тепла в одномерном бесконечном гармоническом кристалле с дипольным взаимодействием между частицами. Исследована зависимость тепловых процессов от числа взаимодействующих частиц. Для описания эволюции начального теплового возмущения проведен анализ дисперсионных характеристик и групповых скоростей. Показано, что если учитывать только ближайших соседей, то максимальная групповая скорость будет составлять 78 % от максимальной групповой скорости, достигаемой при рассмотрении бесконечного числа соседей. Построено и исследовано фундаментальное решение. Выявлена динамика изменения коэффициентов интенсивностей волн в зависимости от числа соседей. Показано, что тепловой фронт распространяется с конечной скоростью, равной максимальной групповой скорости, которая увеличивается по мере того, как учитывается больше взаимодействий. Однако коэффициент интенсивности волн уменьшается с ростом учитываемых соседей.

Полученные в статье результаты предназначены для описания процесса теплообмена в высокочистых кристаллах с дальнодействием, таких как дипольные кристаллы. Результаты также помогают оценить погрешность компьютерного моделирования таких процессов при ограничении числа учитываемых взаимодействий.

Библиографический список

1. Lepri S. Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer. – Springer, 2016.
2. Hoover W., Hoover C. Simulation and control of chaotic nonequilibrium systems. – World Scientific, 2015.
3. Charlotte M., Truskinovsky L. Lattice dynamics from a continuum viewpoint // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2012. – Vol. 60(8). – P. 1508–1544.
4. Гольдштейн Р.В., Морозов Н.Ф. Механика деформирования и разрушения наноматериалов и нанотехнологии // Физическая мезомеханика. – 2007. – Vol. 10(5). – P. 17–30.
5. Length dependent thermal conductivity in suspended single-layer grapheme / X. Xu, L. Pereira, Y. Wang [et al.] // Nature communications. – 2014. – Vol. 5. – P. 3689.
6. Micron-scale ballistic thermal conduction and suppressed thermal conductivity in heterogeneously interfaced nanowires / T. Hsiao, B. Huang, H. Chang, S. Liou, M. Chu, S. Lee, C. Chang // Physical Review B. – 2015. – Vol. 91(3). – P. 035406.
7. Breakdown of Fourier's law in nanotube thermal conductors / C.W. Chang, D. Okawa, H. Garcia, A. Majumdar, A. Zettl // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101(7). – P. 075903.
8. Balandin A. Thermal properties of graphene and nanostructured carbon materials // Nature materials. – 2011. – Vol. 10(8). – P. 569–81.
9. Direct measurement of room-temperature nondiffusive thermal transport over micron distances in a silicon membrane / J.A. Johnson, A.A. Maznev, J. Cuffe [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110(2). – P. 025901.
10. Hwang G., Kwon O. Measuring the size dependence of thermal conductivity of suspended graphene disks using null-point scanning thermal microscopy // Nanoscale. – 2016. – Vol. 8(9). – P. 5280–90.
11. Observation of second sound in graphite at temperatures above 100 K / S. Huberman, R.A. Duncan, K. Chen [et al.] // Science. – 2019. – Vol. 364(6438). – P. 375–9.
12. Crossover from ballistic to diffusive thermal transport in suspended graphene membranes / A. El Sachat, F. Könemann, F. Menges [et al.] // 2D Materials. – 2019. – Vol. 6(2). – P. 025034.
13. Dhar A., Dandekar R. Heat transport and current fluctuations in harmonic crystals // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2015. – Vol. 418. – P. 49–64.
14. Gendelman O., Savin A. Nonstationary heat conduction in one-dimensional chains with conserved momentum // Physical Review E. – 2010. – Vol. 81(2). – P. 020103.
15. Гузев М.А. Закон Фурье для одномерного кристалла // Дальневосточный математический журнал. – 2018. – Т. 18(1). – С. 34–8.
16. Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains / D. Saadatmand, D. Xiong, V. Kuzkin, A. Krivtsov, A. Savin, S. Dmitriev // Physical Review E. – 2018. – Vol. 97(2). – P. 022217.
17. Кривцов А.М. Распространение тепла в бесконечном одномерном кристалле // Доклады Академии Наук. – 2015. – Т. 464(2). – С. 162–6.
18. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Fast and slow thermal processes in harmonic scalar lattices // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2017. – Vol. 29(50). – P. 505401.
19. Krivtsov A.M. The ballistic heat equation for a one-dimensional harmonic crystal // Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. – 2019. – Vol. 103. – P. 345–358.
20. Berinskii I.E., Kuzkin V.A. Equilibration of energies in a two-dimensional harmonic graphene lattice // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2020. – Vol. 378(2162). – P. 20190114.
21. Kuzkin V.A. Unsteady ballistic heat transport in harmonic crystals with polyatomic unit cell // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Vol. 31(6). – P. 1573–99.
22. О фундаментальном решении задачи теплопереноса в одномерных гармонических кристаллах / О.С. Лобода, Е.А. Подольская, Д.В. Цветков, А.М. Кривцов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12(4). – С. 390–402.
23. Heat conduction in 1D harmonic crystal: Discrete and continuum approaches / A.A. Sokolov, W.H. Muller, A.V. Porubov, S.N. Gavrilov // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 176. – P. 121442.
24. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.

References

1. Lepri S. Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer. Springer; 2016.
2. Hoover W, Hoover C. Simulation and control of chaotic nonequilibrium systems. World Scientific; 2015.
3. Charlotte M., Truskinovsky L. Lattice dynamics from a continuum viewpoint. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2012;60(8): 1508-1544.
4. Goldstein R, Morozov N. Mechanics of deformation and fracture of nanomaterials and nanotechnology. Physical Mesomechanics. 2007;10(5-6): 235-246
5. Xu X, Pereira L, Wang Y, Wu J, Zhang K, Zhao X, Bae S, Bui C, Xie R, Thong J, Hong B, Loh K, Donadio D, Li B, Ozyilmaz B. Length dependent thermal conductivity in suspended single-layer graphene. Nature communications. 2014;5: 3689.
6. Hsiao T, Huang B, Chang H, Liou S, Chu M, Lee S, Chang C. Micron-scale ballistic thermal conduction and suppressed thermal conductivity in heterogeneously interfaced nanowires. Physical Review B. 2015;91(3): 035406.
7. Chang C.W, Okawa D, Garcia H, Majumdar A, Zettl A. Breakdown of Fourier's law in nanotube thermal conductors. Phys. Rev. Lett. 2008;101(7): 075903.
8. Balandin A. Thermal properties of graphene and nanostructured carbon materials. Nature materials. 2011:10(8): 569-81.
9. Johnson J.A, Maznev A.A, Cuffe J, Eliason J.K, Minnich A.J, Kehoe T, Torres C.M, Chen G, Nelson K.A. Direct measurement of room-temperature nondiffusive thermal transport over micron distances in a silicon membrane. Phys. Rev. Lett. 2013;110(2): 025901.
10. Hwang G. and Kwon O. Measuring the size dependence of thermal conductivity of suspended graphene disks using null-point scanning thermal microscopy. Nanoscale. 2016;8(9): 5280-90.
11. Huberman S, Duncan R.A, Chen K, Song B, Chiloya V, Din Z, Maznev A.A, Chen G, Nelson K.A. Observation of second sound in graphite at temperatures above 100 K. Science. 2019;364(6438): 375-9

12. El Sachat A, Könemann F, Menges F, Del Corro E, Garrido J.A, Torres C, Alzina F, Gotsmann B. Crossover from ballistic to diffusive thermal transport in suspended graphene membranes. 2D Materials. 2019;6(2): 025034.

13. Dhar A, Dandekar R. Heat transport and current fluctuations in harmonic crystals. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2015;418: 49-64.

14. Gendelman O, Savin A. Nonstationary heat conduction in one-dimensional chains with conserved momentum. Physical Review E. 2010;81(2): 020103.

15. Guzev M.A. The Fourier law for a one-dimensional crystal. Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal. 2018;18(1): 34-8. (In Russian)

16. Saadatmand D, Xiong D, Kuzkin V, Krivtsov A, Savin A, Dmitriev S. Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains. Physical Review E. 2018;97(2): 022217.

17. Krivtsov A.M. Heat transfer in infinite harmonic one dimensional crystals. Dokl. Phys. 2015;60 (9): 407–11.

18. Kuzkin V.A, Krivtsov A.M. Fast and slow thermal processes in harmonic scalar lattices. Journal of Physics: Condensed Matter. 2017;29(50): 505401.

19. Krivtsov A.M. The ballistic heat equation for a one-dimensional harmonic crystal. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. 2019; 103: 345–358.

20. Berinskii I.E, Kuzkin V.A. Equilibration of energies in a two-dimensional harmonic graphene lattice. Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2020;378(2162): 20190114.

21. Kuzkin V.A. Unsteady ballistic heat transport in harmonic crystals with polyatomic unit cell. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019;31(6): 1573–99.

22. Loboda O.S, Podolskaya E.A, Tsvetkov D.V, Krivtsov A.M. On the fundamental solution of the heat transfer problem in one-dimensional harmonic crystals. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2021;33: 485–96.

23. Sokolov A.A, Muller W.H, Porubov A.V, Gavrilov S.N. Heat conduction in 1D harmonic crystal: Discrete and continuum approaches. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2021;176: 121442.

24. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons; 2021.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 21-11-00378).
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (grant 21-11-00378).
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.