Устинов К.Б., Гандилян Д.В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием; отслоение, расположенное в осевом направлении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. С. 159–172. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11

Ustinov K.B., Gandilyan D.V. Deformation of a thin film after contact loss with a cylindrical base axial delamination. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 5, pp. 159-172. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 5, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научный обзор

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11
УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ПОСЛЕ УТЕРИ КОНТАКТА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ; ОТСЛОЕНИЕ, РАСПОЛОЖЕННОЕ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

К.Б. Устинов, Д.В. Гандилян

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 03 июля 2023 г.
Одобрена: 20 июля 2023 г.
Принята к публикации:
31 октября 2023 г.

Ключевые слова:

подложка, цилиндрическая оболочка, радиус кривизны, скорость высвобождения энергии, коэффициент интенсивности напряжений, поперечные силы.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача об отделении от цилиндрического основания участка тонкой пленки, возникающего за счет наличия сжимающих напряжений. Решение задачи получено использованием теории цилиндрических оболочек с граничными условиями типа обобщенной упругой заделки. Получены распределения смещений отслоившегося участка и скорости высвобождения энергии при росте отслоения вдоль прямолинейной и криволинейной границ.

Проведено сравнение значений скорости высвобождения энергии и компонент смещения с учетом влияния поперечных сил и без такового. Исследованы зависимости скорости высвобождения энергии, моды I коэффициента интенсивности напряжений, угла поворота в точке заделки, а также компонент смещения покрытия от относительной податливости подложки и ее кривизны. Показано, что при увеличении податливости подложки величина выпучивания отслоения, как и скорость высвобождения энергии, существенно возрастают. Наличие выпуклости также приводит к возрастанию скорости высвобождения энергии. Выявлено несколько причин, по котором отслоение прекращает развиваться вдоль ее прямолинейной границы (за счет расширения) и возникает эффект «туннелирования». Показано, что для достаточно податливых подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, при которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться в осевом направлении. Наличие положительной кривизны и увеличение податливости подложки приводит к уменьшению этой критической ширины. На основе анализа результатов для угла поворота в точке заделки, а также отрывной моды коэффициента интенсивности напряжений следует, что причиной наблюдаемого эффекта «туннелирования» может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования), но и запрет на перекрытие граней покрытия и подложки.

© ПНИПУ

© **Устинов Константин Борисович** – д. ф.-м. н., доц., вед. науч. сотр. лаб. геомеханики, e-mail: ustinov@ipmnet.ru.
Гандилян Давид Ваганович – асп., мл. науч. сотр. лаб. механики технол. проц., e-mail: david.ghandilyan@mail.ru.

Konstantin B. Ustinov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Leading Researcher, Laboratory of Geomechanics, e-mail: ustinov@ipmnet.ru.
David V. Gandilyan – Graduate student, Junior Researcher, Laboratory of Mechanics of Technological Processes, e-mail: david.ghandilyan@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

DEFORMATION OF A THIN FILM AFTER CONTACT LOSS WITH A CYLINDRICAL BASE AXIAL DELAMINATION

K.B. Ustinov, D.V. Gandilyan

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 03 July 2023
Approved: 20 July 2023
Accepted for publication:
31 October 2023

Keywords:

substrate, cylindrical shell, radius of curvature, energy release rate, stress intensity factor, radius of curvature, transverse forces.

ABSTRACT

The paper deals with the problem of a coating section delaminated from a cylindrical base due to compressive stresses. It has been studied using the theory of cylindrical shells with boundary conditions of the type of generalized elastic clumping. We obtained distributions of the components of the coating displacements and the energy release rate for the delamination growth along the rectilinear and curvilinear boundaries.

We compared the values of the energy release rate and components of the displacement calculated with and without the influence of transverse forces. The dependences of the energy release rate, mode I of the stress intensity factor, the angle of rotation at the clamping point, and the coating displacement components on the relative compliance of the substrate and its curvature have been studied. It is shown that with an increase in the compliance of the substrate, the magnitude of the delamination buckling and the energy release rate increase significantly. The positive curvature also leads to an increase in the energy release rate. Several reasons have been identified, according to which the delamination stops developing along its rectilinear boundary and the *tunneling* effect occurs. It is shown that for sufficiently compliant substrates there is a certain critical width of a delamination, at which the development in the axial direction becomes energetically more favorable. Besides, it follows from the presented data, that positive curvature and an increase in the compliance of the substrate lead to a decrease in this critical width. According to the analysis of the results for the angle of rotation at the clamping point and the separation mode of the stress intensity factor, the observed effect of *tunneling* can be caused not only by the difference in the energy release rates during the propagation of delamination due to expansion and elongation (tunneling), but also by the prohibition of overlapping of the coating and substrate faces.

© PNRPU

Введение

Сверхтонкие пластины находят применение в различных областях современной высокотехнологичной промышленности. В частности, они используются в качестве элементов конструкции при создании масок рентгеновской нанолитографии, применение которой позволит перейти к созданию наноструктур с минимальными топологическими размерами на уровне от 10 нм и ниже. Для стабильной работы элементов подобных структур необходимо адекватное описание процесса их деформирования в процессе работы. Другим направлением использование сверхтонких пленок является создание защитных покрытий, находящих все более широкое применение в различных конструкциях авиакосмической отрасли, машиностроении, энергетике, медицинской, химической промышленности и др. областях. С их помощью можно существенно повысить твердость, износостойкость, коррозионную и термическую стойкость эксплуатируемых деталей.

Механические напряжения, возникающие и развивающиеся в тонкопленочных структурах, являются наиболее важным фактором, оказывающим влияние на их эксплуатационные характеристики, надежность и долговечность. С одной стороны, растягивающие и сжимающие напряжения могут вызывать повреждение поверхностных защитных пленок путем их растрескивания, отслоения от подложки и скалывания [1–7]. Результаты исследований закритического поведения покрытий для двухслойных и многослойных конструкций представлены в работах [8–15]. С другой стороны, при эксплуатации тонкостенных элементов литографических масок в условиях облучения, исследование форм их деформирования при воздействии излучения является критически важным для развития новой технологии рентгеновской литографии [16].

Одной из важных задач является исследование влияния кривизны и податливости основания на параметры деформирования свободного участка тонкой пленки [5–7]. Влияние кривизны подложки детально рассматривались в работах [17; 18], влияние податливости – в работах [19–27]. В данной работе исследуются совместное влияние обоих факторов. В работе рассматривается отслоение тонких упругих покрытий и деформирование тонких пленок, соединенных с цилиндрическими подложками и подверженных действию равномерного сжимающего напряжения, в качестве которого может выступать остаточное либо температурное напряжение. Отслоившаяся часть покрытия (свободная часть тонкой пленки) моделируется цилиндрической оболочкой, а граничные условия предполагаются соответствующими обобщенной упругой заделки, т.е. предполагается, что смещения и угол поворота в точке заделки пропорциональны действующим усилиям (продольной и поперечной силе и изгибающему моменту) [28]. Рассматриваются отслоения, вытянутые

вдоль оси цилиндрического основания. Данная задача исследовалась ранее, однако в несколько более упрощенных постановках: в работе [29] рассматривалась модель, в которой пренебрегалось влияние поперечных сил на компоненты смещения и угол поворота в точке заделки, в работе [30] использовалась модель слабо искривленной пластины. В настоящей работе рассмотрена задача в приближении более общей теории цилиндрических оболочек.

В работе получены выражения для компонент смещения отслоившегося покрытия и скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль прямолинейного фронта и вдоль криволинейной границы отслоения. Проведены расчеты значений скорости высвобождения энергии, угла поворота в точке заделки, коэффициента интенсивности напряжений, а также нормальной компоненты смещения покрытия в зависимости от значений податливости подложки и кривизны.

1. Геометрия, основные соотношения

Рассмотрим деформирование покрытия, соединенного с подложкой, представляющую собой в недеформированном состоянии тонкую цилиндрическую оболочку радиуса R и толщиной h. Для решения задачи будем использовать криволинейную систему координат (рис. 1), где α – осевая координата, β – окружная координата (определяющая расстояние вдоль окружности и выражающаяся через обычные цилиндрические координаты θrz как $\beta = r\theta$), γ – нормальная координата; смещение в срединной поверхности оболочки имеет, соответственно, тангенциальные компоненты $v(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$ и нормальную компоненту $w(\alpha, \beta)$.

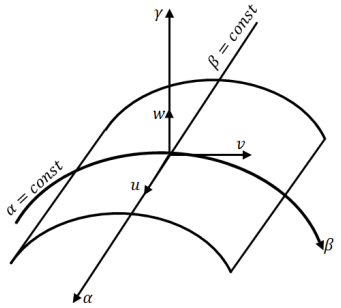


Рис. 1. Используемая система координат

Fig 1. Coordinate system used

До отслоения покрытие было полностью сопряжено с подложкой (условие отсутствие разрывов всех компонент смещения и компонент напряжения $\sigma_{\gamma i}, i = \alpha, \beta, \gamma$), при этом на покрытие действовали сжимающие усилия вдоль координат β и γ (силы, отнесенные к единице длины соответствующей координатной линии) (рис. 2), соответственно равные

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma h, \quad \sigma > 0, \\ N_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где b – полуширина отслоившего участка покрытия, при этом подложка испытывала действие напряжения

$$p_0 = \sigma \frac{h}{R}.$$

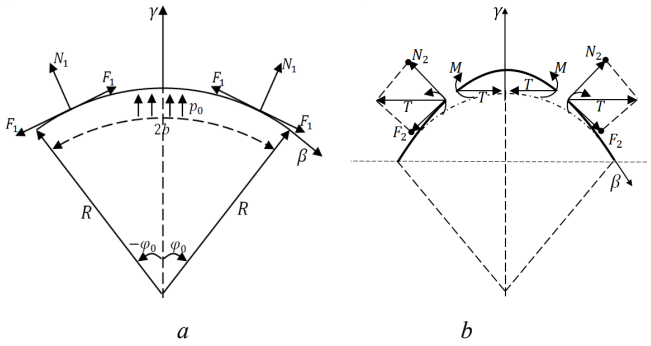


Рис. 2. Распределение усилий: *a* – до отслоения покрытия; *b* – после отслоения покрытия

Fig. 2. Distribution of forces: *a* – before delamination of the coating; *b* – after delamination of the coating

После отслоения покрытие утрачивает связь с подложкой, что соответствует условиям $\sigma_{\gamma i} = 0$, $i = \alpha, \beta, \gamma$ на границе «подложка–покрытие» на отслоившемся участке, что соответствует условиям интерфейсной трещины. При этом на отслоившийся участок действует горизонтально сжимающая сила, равная T $(T > 0)$ (рис. 2), проекции которой на координаты β и γ соответственно равны

$$\begin{aligned} F_2 &= T\cos\varphi_0, \\ N_2 &= T\sin\varphi_0, \end{aligned} \qquad T > 0, \quad \varphi_0 = \frac{b}{R}. \tag{2}$$

Также в точке заделки действует изгибающий момент M.

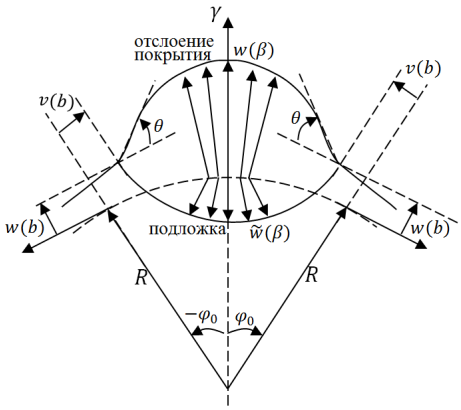


Рис. 3. Конфигурация отслоения покрытия

Fig. 3. Delamination configuration

Разница между силовыми характеристиками после и до отслоения покрытия имеет вид

$$F = F_2 - F_1 = T\cos\varphi_0 - \sigma h. \tag{3}$$

$$N = N_2 - N_1 = T\sin\varphi_0 - 0 = T\sin\varphi_0. \tag{4}$$

$$\Delta p = -p_0, \tag{5}$$

где Δp – разница напряжений в подложке после и до отслоения. Из неравенств $\sigma > 0, T > 0$, $\sigma h > T\cos\varphi_0$ следует, что $F < 0, N > 0$.

Для сечений, расположенных вдали от краев отслоения, напряженное состояние может быть описано в приближении плоской деформации, из чего следует, что одна из тангенциальных компонент смещений будет отсутствовать, т.е. $u(\alpha, \beta) \equiv 0$, а остальные компоненты будут зависеть только от одной переменной: $v = v(\beta)$, $w = w(\beta)$. В дальнейшем анализе будут использованы следующие параметры (отмечены на рис. 3):

$\theta = -w'(\beta)\big|_{\beta=b}$ – угол поворота отслоения в точке заделки;

$\tilde{w}(\beta)$ – смещение поверхности подложки.

Дифференциальные уравнения изгибаемой по образующей цилиндрической поверхности имеют вид [17; 31–34]:

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + F_2\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{F_2}{R} = 0,\ D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\beta} = 0. \tag{7}$$

где D – изгибная жесткость покрытия, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия. Данные уравнения обычно называют уравнениями Муштари – Доннелла – Власова [31; 33; 34].

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial\beta}(\beta = 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}(\beta = 0) = 0,\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}(\beta = b) = \frac{M}{D}, \quad w(\beta = b) = w_b. \end{aligned} \tag{8}$$

Подчеркнем, что в данной задаче неизвестными являются изгибающий момент M, смещение в точке заделки w_b, усилия F_2 и N_2.

Для доопределения постановки задачи и учета влияния подложки воспользуемся граничными условиями, соответствующими условию обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности продольного и нормального смещения и угла поворота в точке заделки действующим в этой точке продольной и поперечной силам и изгибающему моменту (модель, в рамках которой влиянием поперечных смещений и перерезывающих сил в точке заделки пренебрегалось была рассмотрена в [29])

$$\bar{E}\begin{pmatrix} v(b)\\ h\theta\\ w(b)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F\\ h^{-1}M\\ N\end{pmatrix},\ \bar{E} = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}, \tag{9}$$

где F, N определяются из соотношений (3), (4), a_{ij} (где $a_{ij} = a_{ji}$) – расширенная матрица коэффициентов упругой заделки (матрица жесткости).

С учетом выражений (3), (4) граничные условия (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\bar{E}v(b) = a_{11}\left(T\cos\varphi_0 - \sigma h\right) + a_{12}h^{-1}M + a_{13}T\sin\varphi_0,\\ &-\bar{E}hw'(b) = a_{12}\left(T\cos\varphi_0 - \sigma h\right) + a_{22}h^{-1}M + a_{23}T\sin\varphi_0,\\ &\bar{E}w(b) = a_{13}\left(T\cos\varphi_0 - \sigma h\right) + a_{23}h^{-1}M + a_{33}T\sin\varphi_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Решая дифференциальное уравнение (6) с учетом условия (7) и граничных условий (8), получим

$$\begin{aligned} w(\beta) = w_b + \frac{\left(\beta^2 - b^2\right)}{2R} +\\ +\left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{D}{T\cos\varphi_0}\right)\left(1 - \frac{\cos\left(\lambda\beta/b\right)}{\cos\lambda}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

где параметр λ определяется выражением

$$\lambda = b\sqrt{\frac{T\cos\varphi_0}{D}}. \tag{12}$$

Первая и вторая производная смещения (11) будут иметь вид

$$\frac{dw}{d\beta} = \frac{\beta}{R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{D}{T\cos\varphi_0}\right)\frac{\lambda}{b}\frac{\sin\left(\lambda\beta/b\right)}{\cos\lambda}, \tag{13}$$

$$\frac{d^2 w}{d\beta^2} = \frac{1}{R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right)\frac{\cos\left(\lambda\beta/b\right)}{\cos\lambda}. \tag{14}$$

В частности, из решения (11) следует, что прогиб в центре выпучивания покрытия равен

$$w(\beta = 0) = w_b - \frac{b^2}{2R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{D}{T\cos\varphi_0}\right)\left(1 - \frac{1}{\cos\lambda}\right). \tag{15}$$

В (11) параметры M, T, w_b по-прежнему не определены (так же, как и параметр λ, выражаемый через T). Для их определения воспользуемся тремя граничными условиями (10).

До отслоения на покрытие действовали напряжения $\sigma^0_{\beta\beta}$, а после отслоения $\sigma_{\beta\beta}$:

$$\begin{aligned} &\sigma^0_{\beta\beta} = -\frac{F_1}{h} = -\sigma,\\ &\sigma_{\beta\beta} = -\frac{F_2}{h} = -\frac{T\cos\varphi_0}{h},\\ &\Delta\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\beta\beta} - \sigma^0_{\beta\beta} = \frac{-T\cos\varphi_0 + \sigma h}{h} = \frac{-F}{h}. \end{aligned} \tag{16}$$

Связь между дополнительными деформациями и смещениями [17; 32] в принятой постановке задачи, где одна из компонент смещения тождественно равна нулю $u(\alpha, \beta) \equiv 0$, имеет вид

$$\Delta\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{dv}{d\beta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2. \qquad (17)$$

Подстановка (16) в выражение для дополнительных деформаций (17) дает

$$\Delta\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\Delta\sigma_{\beta\beta}}{\bar{E}} = \frac{-F}{\bar{E}h} = \frac{-T\cos\varphi_0 + \sigma h}{\bar{E}h} =$$
$$= \frac{dv}{d\beta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{d\beta} = \frac{-F}{\bar{E}h} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2. \qquad (18)$$

Интегрирование данного выражения от 0 до b дает разность тангенциального смещения в точках b и 0. Поскольку в силу симметрии тангенциальное смещение в нуле равно нулю $v(\beta = 0) = 0,$ то:

$$v(b) = \frac{-Fb}{\bar{E}h} - \int_0^b \left(\frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2\right) d\beta. \qquad (19)$$

После подстановки в последнее выражение формулы (11) и интегрирования, получаем

$$v(b) = \frac{-F}{\bar{E}}\frac{b}{h} + \frac{b^3}{6R^2} - w_b\frac{b}{R} -$$
$$-\frac{\lambda}{\cos^2\lambda}(2\lambda - \sin 2\lambda)\frac{(D - MR)^2}{8b(T\cos\varphi_0)^2 R^2}. \qquad (20)$$

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные величины:

$$f = \frac{F}{\sigma h}, \quad n = \frac{N}{\sigma h},$$
$$m = \frac{M}{\sigma h^2}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{\bar{E}}, \qquad (21)$$

откуда с учетом (3), (4) получаем

$$T\cos\varphi_0 = (f+1)\sigma h,$$
$$n = (f+1)\tan\varphi_0. \qquad (22)$$

Из неравенств $\sigma > 0$ и $T > 0$ следует $(f+1) > 0.$ А из неравенства $|\sigma h| > |T\cos\varphi_0|,$ т.е. $f < 0,$ суммируя сказанное получаем $-1 < f < 0.$ Параметр λ также удобно выразить через безразмерные величины

$$\lambda = b\sqrt{\frac{T\cos\varphi_0}{D}} = b\sqrt{\frac{(f+1)\sigma h 12}{\bar{E}h^3}} =$$
$$= \frac{b}{h}\sqrt{(f+1)12\varepsilon} = \eta\pi\sqrt{(f+1)}, \qquad (23)$$

где η – отношение полуширины отслоения, к критической полуширине, соответствующей потери устойчивости отслоения от прямолинейной границы в предположении граничных условий типа жесткой заделки

$$\eta = \frac{b}{b_0}, \qquad (24)$$

$$b_0 = \frac{h\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{E}{\sigma}} = \frac{h\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}, \qquad (25)$$

также введем безразмерную величину

$$k = \frac{b_0}{R} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{b}{R} = \eta k. \qquad (26)$$

Выражение (20) в безразмерных величинах запишется следующим образом

$$\frac{v(b)}{h} = -\frac{f\eta\varepsilon\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} - \eta k\frac{w_b}{h} + \frac{\eta^3 k^2\pi}{6\sqrt{12\varepsilon}} -$$
$$-\frac{\lambda}{\cos^2\lambda}(2\lambda - \sin 2\lambda)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\lambda^4}\frac{\eta^3 k^2\pi}{8\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{mk\eta}{4(f+1)} + \frac{m^2\sqrt{12\varepsilon}}{8\eta\pi(f+1)^2}\right). \qquad (27)$$

Граничные условия (10) в безразмерных величинах будут иметь вид

$$\frac{v(b)}{h} = a_{11}\frac{F}{\bar{E}h} + a_{12}h^{-1}\frac{M}{\bar{E}h} + a_{13}\frac{N}{\bar{E}h} =$$
$$= a_{11}f\varepsilon + a_{12}m\varepsilon + a_{13}(f+1)\tan(\eta k)\varepsilon, \qquad (28)$$

$$-\frac{dw(b)}{d\beta} = a_{12}\frac{F}{\bar{E}h} + a_{22}h^{-1}\frac{M}{\bar{E}h} + a_{23}\frac{N}{\bar{E}h} =$$
$$= a_{12}f\varepsilon + a_{22}m\varepsilon + a_{23}(f+1)\tan(\eta k)\varepsilon, \qquad (29)$$

$$\frac{w(b)}{h} = a_{13}\frac{F}{\bar{E}h} + a_{23}h^{-1}\frac{M}{\bar{E}h} + a_{33}\frac{N}{\bar{E}h} =$$
$$= a_{13}f\varepsilon + a_{23}m\varepsilon + a_{33}(f+1)\tan(\eta k)\varepsilon. \qquad (30)$$

Подстановка (27) в первое из граничных условий (28), а также подстановка третьего граничного условия (30) в (27) приведет к следующему выражению

$$\eta k\left(a_{13}f\varepsilon + a_{23}m\varepsilon + a_{33}(f+1)\tan(\eta k)\varepsilon\right) + \frac{f\eta\varepsilon\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} + a_{11}f\varepsilon +$$
$$+a_{12}m\varepsilon + a_{13}(f+1)\tan(\eta k)\varepsilon - \frac{\eta^3 k^2\pi}{6\sqrt{12\varepsilon}} +$$
$$+\frac{\lambda}{\cos^2\lambda}(2\lambda - \sin 2\lambda)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\lambda^4}\frac{\eta^3 k^2\pi}{8\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{mk\eta}{4(f+1)} + \frac{m^2\sqrt{12\varepsilon}}{8\eta\pi(f+1)^2}\right) = 0. \qquad (31)$$

Подставив выражение (13) в безразмерных величинах во второе граничное условие (29), получим

$$\eta k + \left(m\pi\sqrt{12\varepsilon} - k\right)\eta\frac{\tan\lambda}{\lambda} + a_{12}f\varepsilon +$$
$$+a_{22}m\varepsilon + a_{23}(f+1)\tan(\eta k)\varepsilon = 0. \qquad (32)$$

Полученная система трех уравнений (30), (31), (32) позволяет определить три неизвестные m, f, w_b. Данная система сводится к виду [30] после разложения тригонометрических функции по малому параметру аргумента в ряды с оставлением только первых членов.

2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения в направлении криволинейного фронта (обозначенного как G_{ss}) может быть посчитана как высвобождающаяся упругая энергия единицы длины отслоившегося участка, поделенная на его ширину, равную $2b$. Эта энергия состоит из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1, неотслоившегося участка покрытия ΔU_2, и энергии, высвободившейся из основания ΔU_3.

Первую из данных величин можно посчитать как разницу упругой энергии отслоившегося участка до и после отслоения

$$\Delta U_1 = U_{1before} - U_{1after}. \tag{33}$$

Удельная потенциальная энергия деформации $\tilde{U}_1$ (энергия на единицу объема) имеет вид [18]

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta}\varepsilon_{\beta\beta} + \sigma_{\gamma\gamma}\varepsilon_{\gamma\gamma} + \sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma} + \sigma_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\gamma\alpha}\right). \tag{34}$$

В рассматриваемой задаче выражение для удельной потенциальной энергии деформации упроститься до вида

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{2}\sigma_{\beta\beta}\varepsilon_{\beta\beta}. \tag{35}$$

Запишем удельные потенциальные энергии деформации до и после отслоения через дополнительные напряжения и деформации, т.е.

$$\sigma_{\beta\beta} = \sigma^0_{\beta\beta} + \Delta\sigma_{\beta\beta},\ \ \varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon^0_{\beta\beta} + \Delta\varepsilon_{\beta\beta},$$

$$\tilde{U}_{1before} = \frac{1}{2}\sigma^0_{\beta\beta}\varepsilon^0_{\beta\beta}, \tag{36}$$

$$\tilde{U}_{1after} = \frac{1}{2}\left(\sigma^0_{\beta\beta} + \Delta\sigma_{\beta\beta}\right)\left(\varepsilon^0_{\beta\beta} + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma^0_{\beta\beta}\varepsilon^0_{\beta\beta} + \sigma^0_{\beta\beta}\Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \Delta\sigma_{\beta\beta}\varepsilon^0_{\beta\beta} + \Delta\sigma_{\beta\beta}\Delta\varepsilon_{\beta\beta}\right).$$

Потенциальную упругую энергию, отнесенную на единицу длины координаты α, можно вычислить как интеграл от удельной энергии

$$\Delta U_1 = U_{1before} - U_{1after} = \int_{-b}^{b}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tilde{U}_{1before}\,d\gamma d\beta - \int_{-b}^{b}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tilde{U}_{1after}\,d\gamma d\beta =$$

$$= \frac{(\sigma h)^2}{\bar{E}h}b - \frac{(T\cos\varphi_0)^2 b}{\bar{E}h} - D\int_0^b\left(\frac{d^2w}{d\beta^2}\right)^2 d\beta. \tag{37}$$

В правой части полученной формулы первый член соответствует энергии сжатия до потери устойчивости, второй – энергии сжатия после потери устойчивости, третий – энергии, связанной с изгибом. Заметим, что полученное выражение по структуре совпадает с формулой работы [20].

Второе слагаемое ΔU_2 вычислим через работу сил, прикладываемых к неотслоившимся участкам покрытия

$$\Delta U_2 = \left(\sigma h + T\cos\varphi_0\right)\left(-v\left(\beta = b\right)\right) -$$

$$- M\left(-w'\left(\beta = b\right)\right) - T\sin\varphi_0 w\left(\beta = b\right) =$$

$$= \left(f + 2\right)\sigma h\left(-v\left(\beta = b\right)\right) - m\sigma h^2\left(-w'\left(\beta = b\right)\right) -$$

$$- (f+1)\sigma h\tan(\eta k)w\left(\beta = b\right). \tag{38}$$

Третье слагаемое ΔU_3 учитывает влияние подложки на покрытие до ее отслоения. Энергию ΔU_3 удобно представить в виде

$$\Delta U_3 = \Delta U_3^B + \Delta U_3^H, \tag{39}$$

где ΔU_3^B – вклад от верхней части рассматриваемого тела, ΔU_3^H – вклад от нижней части. Величину ΔU_3^H можно оценить как

$$\Delta U_3^H = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} p_0\tilde{w}(\beta)d\beta = \frac{\sigma h}{2R}S, \tag{40}$$

где площадь раскрытия трещины S имеет вид [36]

$$S := \int_{-b}^{b}\tilde{w}(\beta)d\beta = \frac{1}{2}\frac{4}{\bar{E}_s}\int_0^b q\sqrt{b^2 - \beta^2}\,d\beta = \frac{\pi}{\bar{E}_s}b^2 p_0, \tag{41}$$

где $\bar{E}_s$ – модуль Юнга подложки. В итоге получаем

$$\Delta U_3^H = \frac{1}{2}qS = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\bar{E}_s}b^2 {p_0}^2 = \frac{(\sigma h)^2}{2R^2}\frac{b^2}{\bar{E}_s}\pi. \tag{42}$$

Аналогично вклад от верхней части можно оценить как

$$\Delta U_3^B = \frac{(\sigma h)^2}{2R^2}\frac{b^2}{\bar{E}}\pi. \tag{43}$$

Итак, энергия, высвободившаяся из основания, имеет вид

$$\Delta U_3 = \Delta U_3^B + \Delta U_3^H = \frac{\left(\bar{E} + \bar{E}_s\right)}{\bar{E}\bar{E}_s}\frac{(\sigma h)^2}{2R^2}b^2\pi. \tag{44}$$

Удельная упругая энергия покрытия до отслоения есть

$$G_0 = \frac{\left(1 - \nu^2\right)}{2}\frac{\sigma^2 h}{E} = \frac{\sigma^2 h}{2\bar{E}}. \tag{45}$$

Непосредственно скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы примет вид

$$G_{ss} = \frac{\Delta U}{2b} = \frac{\left(\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3\right)}{2b}. \qquad (46)$$

Подстановка $w(\beta)$ из (11) и кинематических величин, входящих в (38) из (10), дает скорость высвобождения энергии (отнесенную к энергии покрытия до потери устойчивости)

$$\frac{G_{ss}}{G_0} = \frac{\left(\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3\right)}{2bG_0} = \left(1 - \left(f+1\right)^2\right) - \frac{k^2}{\pi^2\varepsilon} - \frac{6\lambda}{\left(f+1\right)^2}\frac{k^2}{\varepsilon\pi^6\eta^4}\left(1 - \sqrt{12\varepsilon}m\frac{\pi}{k}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\lambda^2}{12}\left(\frac{\lambda}{\cos^2\lambda} + \tan\lambda\right)\left(1 - \sqrt{12\varepsilon}m\frac{\pi}{k}\right) - \frac{\pi^2}{3}\left(f+1\right)\eta^2\tan\lambda\right] + \frac{\left(\bar{E} + \bar{E}_s\right)}{\bar{E}_s}k^2\eta\sqrt{3\varepsilon} +$$

$$+\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta}\left(-\left(f+2\right)\left(a_{11}f + a_{12}m + a_{13}\left(f+1\right)\tan(\eta k)\right) - m(a_{12}f + a_{22}m + a_{23}(f+1)\tan(\eta k)) - \left(f+1\right)\tan(\eta k)\left(a_{13}f + a_{23}m + a_{33}(f+1)\tan(\eta k)\right)\right). \qquad (47)$$

Данное выражение отличается от соответствующего выражения [17] четвертым и пятым слагаемыми, учитывающими влияние подложки, а также наличием зависимости от поперечной силы посредством коэффициентов a_{13}, a_{23}, a_{33}, и переходит в него при $a_{13} \to 0$, $a_{23} \to 0$, $a_{33} \to 0$ и при $h/R \to 0$.

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейного фронта (обозначим как G) можно вычислить двумя способами: через коэффициенты интенсивности напряжений [20; 29; 30] и через непосредственное вычисление изменения упругой энергии при увеличении длины отслоения [17; 20; 29; 30]. Будем определять ее вторым способом

$$\frac{G}{G_0} = \frac{d}{db}\left(\frac{\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3}{2G_0}\right) = \frac{d}{db}\left(b\frac{G_{ss}}{G_0}\right) = b\frac{d}{db}\left(\frac{G_{ss}}{G_0}\right) + \left(\frac{G_{ss}}{G_0}\right) = \left|\begin{matrix} b = \eta b_0 \\ db = b_0 d\eta \end{matrix}\right| = \eta\frac{d}{d\eta}\left(\frac{G_{ss}}{G_0}\right) + \left(\frac{G_{ss}}{G_0}\right), \qquad (48)$$

где G_{ss}/G_0 определяется по формуле (47).

3. Раскрытие трещины, коэффициенты интенсивности напряжений

При наблюдении отслоения покрытия можно заметить эффект «туннелирования» [20], причиной которого может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования) отслоения, но и возможное смыкание граней отслоившегося покрытия и подложки (перекрытие берегов). Одним из способов определения смыкания является вычисление коэффициента интенсивности напряжений K_{I}, характеризующего нормальный отрыв. Раскрытие трещины уменьшается при уменьшении K_{I} и становится отрицательным при отрицательном K_{I}, что соответствует перекрытию и не является физичным. Поэтому условие $K_{\mathrm{I}} = 0$ можно рассматривать как критерий остановки отслоения покрытия. В некоторых работах [20; 37–39] рассматривается аналогичная величина $\arctan K_{\mathrm{II}}/K_{\mathrm{I}}$, критическое значение которой при $K_{\mathrm{I}} = +0$ соответствует $\pi/2$. Однако в нашем случае проще и информативнее рассчитать коэффициент интенсивности напряжений K_{I}

$$\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma\sqrt{h}} = c_{11}f + c_{12}m + c_{13}n, \qquad (49)$$

где значения параметров c_{11}, c_{12}, c_{13} приведены в [40].

Другим способом определения смыкания является вычисление угла θ из (9), при положительных значениях соответствующего раскрытию, а при отрицательных соответствует физически бессмысленному перекрытию берегов [30]. Поэтому условие $\theta = 0$ также можно рассматривать как альтернативный критерий максимальной ширины отслоившегося покрытия. Данные критерии соответствуют рассмотрению на различных масштабных уровнях и не обязательно должны давать одинаковую критическую ширину, но оба могут использоваться для ее оценки.

4. Значение коэффициентов матрицы жесткости

В работе [20] значение коэффициентов матрицы жесткости a_{ij} было получено численно. Значение коэффициента a_{11} с достаточной степенью точности аппроксимируется следующим выражением [22]:

$$a_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}} + \frac{3}{2}\left[\frac{b}{h}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^3\right]^{1/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}} + \frac{3}{2}\left[\frac{\eta\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^3\right]^{1/4}. \qquad (50)$$

Значение коэффициента a_{12}, согласно [22], может быть аппроксимировано формулой

$$a_{12} = \sqrt{3} + 0{,}27\left(\frac{h}{b}\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^{2/3} = \sqrt{3} + 0{,}27\left(\frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\eta\pi}\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^{2/3}. \qquad (51)$$

Выражения для a_{22}, a_{13}, a_{23} получены аналитически в работах [40–43]

$$a_{22} = 12\delta,\ \ a_{13} = 1+\sqrt{3}\delta,\ \ a_{23} = \frac{3}{2}+6\delta^2, \qquad (52)$$

где δ имеет вид

$$\delta = 0,635\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)^{1/3}.$$

Коэффициент a_{33} определяется из решения [43] посредством удержания в разложении поля смещения одного дополнительного члена ряда

$$a_{33} = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)\left[\frac{1}{3}+\tilde{\gamma}+\frac{8\sqrt{3}\pi}{27}+\ln\left(\left(6\frac{\bar{E}_s}{\bar{E}}\right)^{1/3}\frac{b}{h}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}\right)\left[\frac{1}{3}+\tilde{\gamma}+\frac{8\sqrt{3}\pi}{27}+\ln\left(\left(6\frac{\bar{E}_s}{\bar{E}}\right)^{1/3}\frac{\eta\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}\right)\right], \qquad (53)$$

где $\tilde{\gamma} = 0,5772\ldots$ – постоянная Эйлера.

5. Результаты численных расчетов

Зависимость относительной скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы G_{ss}/G_0, а также вдоль прямолинейной границы G/G_0, коэффициента интенсивности напряжений $K_I/\sigma\sqrt{h}$, угла поворота θ, нормальной компоненты смещения в центре отслоения $w(0)/h$ от параметра b/b_0 для различных отношений модулей упругости покрытия и основания, а также для различных кривизн представлены на рис. 4–11, на рис. 12 представлены профили отслоившегося участка при различных значениях b/b_0.

Коэффициенты $a_{ij}, (i,j=1,2,3)$ при $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ определялись из соотношений (50)–(53), а в случае жесткой подложки были приняты более точные значения [44], а именно $a_{11} = 1,252$, $a_{12} = \sqrt{3}$, $a_{22} = 5,004$. Также при $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ используется более точное значение $a_{22} = 7,44$ [40]. Для расчета K_I по формуле (49) в качестве $c_{ij}, (i,j=1,2)$ были приняты следующие значения [40; 44]: $c_{11} = 0,7, c_{12} = 2,47, c_{13} = 0,417c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для жесткой подложки; $c_{11} = 0,435, c_{12} = 1,932, c_{13} = 0,62c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$; $c_{11} = 0,122, c_{12} = 0,955, c_{13} = 1,306c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$, $c_{11} = 0,064$, $c_{12} = 0,643$, $c_{13} = 1,802c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$.

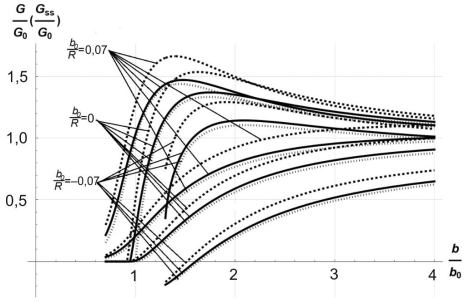


Рис. 4. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (монотонные ветви) и вдоль прямолинейной границы (ветви с максимумами) от b/b_0 при $\sigma/\bar{E} = 0,02$ и при $b_0/R = 0, +0,07, -0,07$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ – пунктирные линии; условие жесткого защемления – точечные линии

Fig. 4. Dependence of the rate of energy release when delamination propagates along a curvilinear boundary (monotonic branches) and along a rectilinear boundary (branches with maxima) on b/b_0 at $\sigma/\bar{E} = 0.02$ and at $b_0/R = 0, +0.07, -0.07$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ is shown with dashed lines; the condition of rigid pinching is shown with dotted lines

Из соотношения (48) следует, что кривые, соответствующие росту отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы, должны пересекаться в максимуме первого. Это условие должно соблюдаться независимо от конкретного вида зависимости скорости высвобождения энергии от ширины отслоения.

Можно заметить (рис. 5), что для достаточно больших значений кривизны b_0/R и деформации ε скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы постоянно возрастает, т.е. отсутствует максимум, и чем податливее подложка, тем быстрее возрастает данный параметр, вследствие чего не происходит пересечения кривых.

Наличие положительной кривизны у подложки делает возможным формирование отслоений при напряжениях ниже уровня потери устойчивости (скорости высвобождения энергии положительны на любом промежутке для b/b_0 (рис. 4, 5), коэффициенты интенсивности напряжений и углы поворота также положительны (рис. 6–9)). Данный факт был установлен в случае жесткой заделки ранее [17]. Наличие податливости у подложки только усиливает этот процесс.

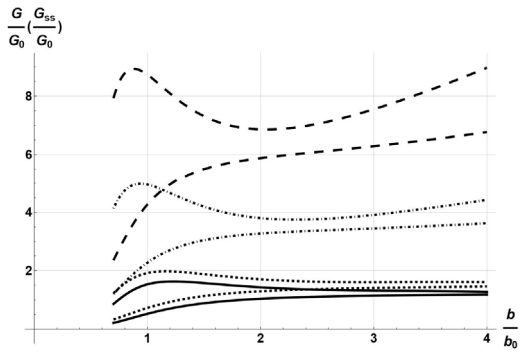


Рис. 5. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (монотонные ветви) и вдоль прямолинейной границы (ветви с максимумами) от b/b_0 при $\sigma/\overline{E}=0,05$ и при $b_0/R=+0,3$; жесткое основание – сплошные линии; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ – пунктирные линии (короткие штрихи); $\overline{E}/\overline{E}_s=10$ – штрихпунктирные линии, $\overline{E}/\overline{E}_s=25$ – пунктирные линии (длинные штрихи)

Fig. 5. Dependence of the rate of energy release during the propagation of delamination along a curvilinear boundary (monotonic branches) and along a rectilinear boundary (branches with maxima) on b/b_0 at $\sigma/\overline{E}=0.05$ and at $b_0/R=+0.3$; the rigid base is shown with solid lines; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ is shown with dashed lines (short dashes); $\overline{E}/\overline{E}_s=10$ is shown with dash-dotted lines, $\overline{E}/\overline{E}_s=25$ is shown with dashed lines (long dashes)

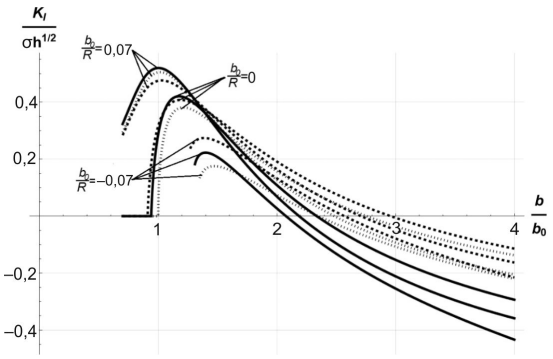


Рис. 6. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от b/b_0 при $b_0/R=0,+0,07,-0,07$; жесткое основание – сплошные линии; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ – пунктирные линии; условие жесткого защемления – точечные линии

Fig. 6. Dependence of stress intensity factor on b/b_0 at $b_0/R=0,+0.07,-0.07$; the rigid base is shown with solid lines; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ is shown with dashed lines; the condition of rigid pinching is shown with dotted lines

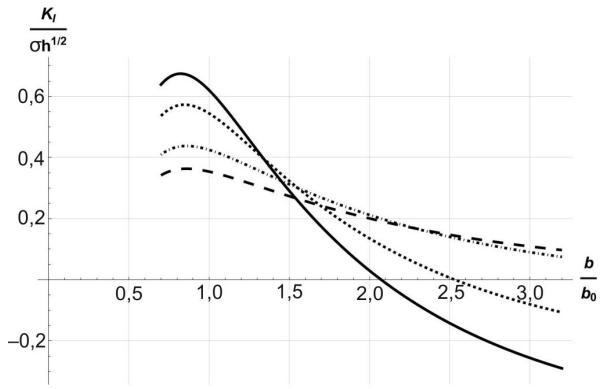


Рис. 7. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от b/b_0 при $b_0/R=+0,3$; жесткое основание – сплошные линии; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ – пунктирные линии (короткие штрихи); $\overline{E}/\overline{E}_s=10$ – штрихпунктирные линии, $\overline{E}/\overline{E}_s=25$ – пунктирные линии (длинные штрихи)

Fig. 7. Dependence of the stress intensity factor on b/b_0 at $b_0/R=+0.3$; the rigid base is shown with solid lines; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ is shown with dashed lines (short dashes); $\overline{E}/\overline{E}_s=10$ is shown with dash-dotted lines, $\overline{E}/\overline{E}_s=25$ is shown with dashed lines (long dashes)

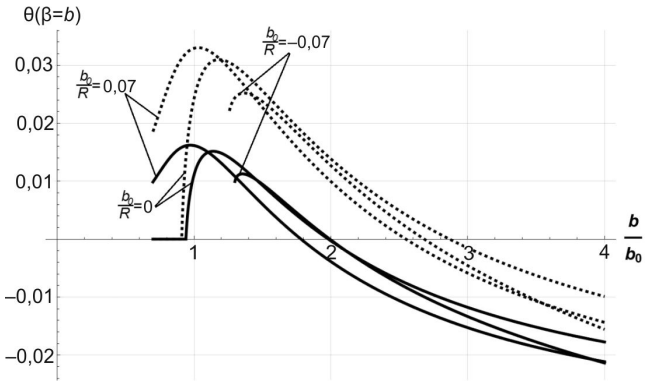


Рис. 8. Зависимость угла поворота θ от b/b_0 при $b_0/R=0,+0,07,-0,07$; жесткое основание – сплошные линии; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ – пунктирные линии

Fig. 8. Dependence of the rotation angle θ on b/b_0 at $b_0/R=0,+0.07,-0.07$; the rigid base is shown with solid lines; $\overline{E}/\overline{E}_s=1$ is shown with dashed lines

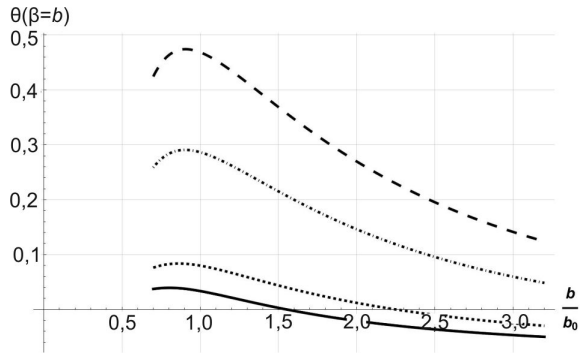


Рис. 9. Зависимость угла поворота θ от b/b_0 при $b_0/R = +0{,}3$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ – пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ – штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ – пунктирные линии (длинные штрихи)

Fig. 9. Dependence of the rotation angle θ on b/b_0 at $b_0/R = +0{,}3$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ is shown with dashed lines (short dashes); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ is shown with dash-dotted lines, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ is shown with dashed lines (long dashes)

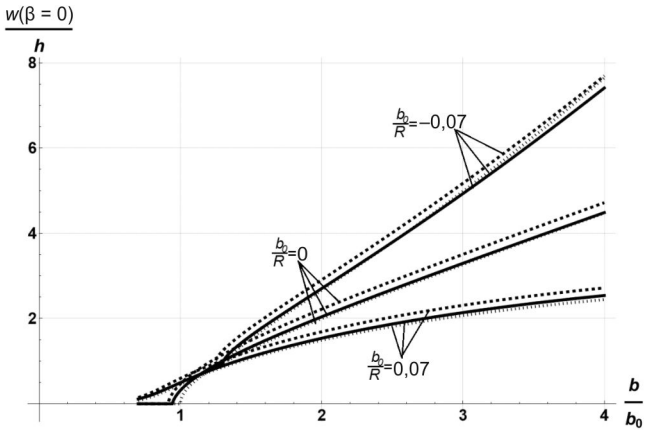


Рис. 10. Зависимость смещения в центре отслоения $w(0)/h$ от b/b_0 при $b_0/R = 0, +0{,}07, -0{,}07$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ – пунктирные линии; условие жесткого защемления – точечные линии

Fig. 10. Dependence of the displacement at the center of delamination $w(0)/h$ on b/b_0 at $b_0/R = 0, +0.07, -0.07$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ is shown with dashed lines; the condition of rigid pinching is shown with dotted lines

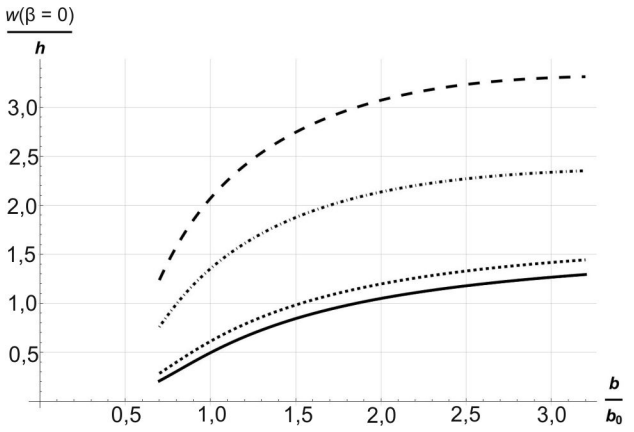


Рис. 11. Зависимость смещения в центре отслоения $w(0)/h$ от b/b_0 при $b_0/R = +0{,}05$; жесткое основание – сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ – пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ – штрихпунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ – пунктирные линии (длинные штрихи)

Fig. 11. Dependence of the displacement at the center of delamination $w(0)/h$ on b/b_0 at $b_0/R = +0.05$; the rigid base is shown with solid lines; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ is shown with dashed lines (short dashes); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ is shown with dash-dotted lines, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ is shown with dashed lines (long dashes)

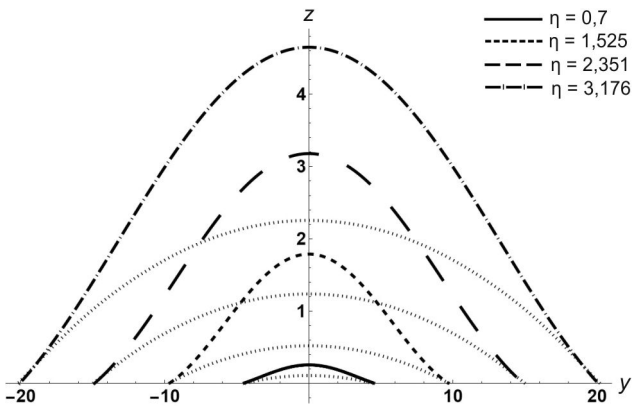


Рис. 12. Профиль отслоения покрытия для различных значений $\eta = b/b_0$ при $b_0/R = +0{,}07$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ в проекции на двумерное пространство; в недеформированном состоянии – штриховые линии

Fig. 12. Coating delamination profile for various values of $\eta = b/b_0$ at $b_0/R = +0.07$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ in projection onto two-dimensional space; in an undeformed state is shown with dotted lines

Из представленных данных видно, что расхождение между результатами, полученными в данной работе при учете влияния поперечных сил и перемещений $(a_{i3} \neq 0)$, и упрощенной моделью $(a_{i3} = 0)$, становится заметным для кривизн $\left|b_0 / R\right| > 0{,}1 \ldots 0{,}2$, а расхождение с результатами работы [30], в которой использовалась упрощенная модель для слабо искривленных пластин и учитывались поперечные силы и перемещения $(a_{i3} \neq 0)$, становится заметным для кривизн $\left|b_0 / R\right| > 0{,}2 \ldots 0{,}3$, и $\varepsilon > 0{,}01$, т.е. когда использование теории слабо искривленных пластин становилось недостаточно точно.

Заключение

На основе теории цилиндрических оболочек, исследовано совместное влияние кривизны и податливости основания на параметры деформирования отслоившейся тонкой пленки. Податливость основания учитывалась заданием граничных условий типа обобщенной упругой заделки, а именно пропорциональности компонент смещения и угла поворота в точке заделки действующим в данной точке усилиям и изгибающему моменту. Получены выражения для компонент смещения отслоившегося участка покрытия и скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейной и криволинейной границы. Показано, что при увеличении податливости подложки смещение покрытия, как и скорость высвобождения энергии, существенно возрастает. Из результатов численных расчетов скорости высвобождения энергии также следует, что существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоение прекращает развиваться вдоль ее криволинейной границы и возникает эффект «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных отслоений (для плоских подложек это отмечалось и ранее [20]). Кроме того, из представленных данных расчета видно, что наличие положительной кривизны (выпуклости) и увеличение относительной податливости подложки приводит к уменьшению этой критической ширины и тем самым способствует образованию «вытянутых» отслоений. Также рассмотрены два критерия распространения отслоения, заключающиеся в сравнении знака угла поворота в точке заделки отслоения либо коэффициента интенсивности напряжений, характеризующего нормальный отрыв, с нулем. Достижение величиной этого угла, либо коэффициентом интенсивности напряжений нулевых значений, соответствует перекрытию и предотвращению дальнейшего отслоения покрытия. Сравнение результатов, полученных с помощью рассмотренной модели, с результатами, полученными с помощью упрощенных моделей [29; 30], показывает, что влияние поперечных сил становиться существенным при увеличении относительной податливости подложки и уменьшения радиуса кривизны подложки.

Библиографический список

1. Balint D.S., Hutchinson J.W. Mode II edge delamination of compressed thin films // J. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 68. – P. 725–730. DOI: 10.1115/1.1388012
2. Kachanov L.M. Delamination buckling of composite materials. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
3. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование / В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 116–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12
4. Glagolev V.V., Markin A.A. Model of shear elastic-plastic deformation of a thin adhesive layer. Mech. Solids. – 2000. – /Vol. 55. – P. 837–843. DOI: 10.3103/S0025654420060072
5. Hutchinson J.W., He M.Y., Evans A.G. The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – Vol. 48. – P. 709–734. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00050-2
6. Choi S.R., Hutchinson J.W., Evans A.G. Delamination of multilayer thermal barrier coatings // Mechanics of Materials. – 1999. – Vol. 31. – P. 431–447.
7. Evans A.G., Hutchinson J.W. The mechanics of coating delamination in thermal gradients // Surface and Coatings Technology. – 2007. – Vol. 201. – P. 7905–7916.
8. Barbieri L., Massabò R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams // Eng. Fract. Mech. – 2018. – Vol. 201. – P. 298–321.
9. Glagolev V.V., Markin A. A. Influence of the model of the behavior of a thin adhesion layer on the value of the j-integral // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57(2). – P. 278–285.
10. About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample / F. Berto, V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin // Int. J. Fract. – 2021. – Vol. 232. – P. 43–54. DOI: 10.1007/s10704-021-00590-3
11. Monetto I., Massabò R. An analytical solution for the inverted four-point bending test in orthotropic specimens // Engineering Fracture Mechanics. – 2021. – Vol. 245. – P. 1–16. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107521
12. Fracture mechanics solutions and operative formulae for isotropic bi-material layers with large elastic mismatch / I. Monetto, L. Barbieri, C. Berggreen, R. Massabò // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. – Vol. 121. – 13 p.
13. Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations / M.G. Parry, J. Colin, C. Coupeau, F. Foucher, A. Cimetière, J. Grilhé // Acta materialia. – 2005. – Vol. 53. – P. 441–447.
14. White S.N., Green C.C., McMeeking R.M. A simple 3-point flexural method for measuring fracture toughness of the dental porcelain to zirconia bond and other brittle bimaterial interfaces // Journal of prosthodontic research. – 2020. – Vol. 64(4). – P. 391–396. DOI: 10.1016/j.jpor.2019.11.002
15. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. – California: Advances in Applied Mechanics edited by J. W. Hutchinson and T. Y. Wu. – 1992. – 191 p.

16. Особенности деформирования круглых тонкопленочных мембран и экспериментальное определение их эффективных характеристик / А.А. Дедкова, П.Ю. Глаголев, Е.Э. Гусев, Н.А. Дюжев, В.Ю. Киреев, С.А. Лычев, Д.А. Товарнов // Журнал технической физики. – 2021. – Т. 91. № 10. – С. 1454–1465.

17. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol. 49. – P. 1847–1864.

18. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks / S. Faulhaber, C. Mercer, M.-Y. Moon [et al.] // J. Mech. Phys. Solids. – 2006. – Vol. 54. – P. 1004–1028.

19. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // Int. J. Fract. – 2000. – Vol. 104 (2). – P. 169–179.

20. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Int. J. Fract. – 2002. – Vol. 113. – P. 39–55

21. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия // Вычисл. Мех. Спл. Сред. – 2011. – Т. 4. № 3. – С. 48–57.

22. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coat- ings // Engineering Failure Analysis. – 2015. – P. 1–7. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2013.09.022

23. Кургузов В.Д. Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 91–99. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.10

24. Кургузов В.Д., Демешкин А.Г. Экспериментальное и теоретическое исследование потери устойчивости узких тонких пластин на упругом основании при сжатии // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 121–128.

25. Vatulyan A.O., Morozov K.L. Investigation of delamination from an elastic base using a model with two coefficients of subgrade reaction // Mech. Solids. – 2020. – Vol. 55. – P. 207–217. DOI: 10.3103/S002565442002017X

26. Ватульян А.О., Морозов К.Л. Об отслоении покрытия, лежащего на упругом основании // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 133–143.

27. Богачев И.В., Ватульян А.О. О моделировании тел с отслаивающимися покрытиями при учете полей предварительных напряжений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 1. – С. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.01

28. Ustinov K.B., Massabo R. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Vol. 248. – P. 11–16. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111600

29. Устинов К.Б., Каспарова Е.А. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия // Деформация и разрушение материалов. – 2015. – № 3. – С. 28–35.

30. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On combined influence of substrate curvature and compliance on parameters of coating delamination from a cylindrical base // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58(2). – P. 240–258.

31. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.

32. Sanders J.L. Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. XXI, no. 1. – P. 21–36.

33. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1983. – 286 с.

34. Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – Т. I. – 528 с.

35. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack // Int. J. Fracture Mechanics. – 1965. – Vol. 1, no. 2. – P. 114–128.

36. Дыскин А.В., Салганик Р.А. Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 6. – С. 169–178.

37. Li S., Wang J.Z., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // J. Mech. Phys. Solid. – 2004. – Vol. 52, no. 1. – P. 193–214.

38. Andrews M., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Eng. Fract. Mech. – 2007. – Vol. 74, no. 17. – P. 2700–2720.

39. Thouless M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials // Eng. Fract. Mech. – 2018. – Vol. 191. – P. 153–167.

40. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50, no. 1. – P. 62–80.

41. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости // Препринт ИПМех РАН. – 2013. – № 1047. – 30 с.

42. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств // Препринт ИПМех РАН. – 2013. – № 1048. – 50 с.

43. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Известия РАН МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62.

44. Ustinov K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // Eur. J. Mech. A. Solids. – 2019. – Vol. 75. – P. 56–69.

References

1. Balint D.S., Hutchinson J.W., Mode II Edge Delamination of Compressed Thin Films. *J. Appl. Mech.*, 2001, V. 68, pp. 725-730. doi: 10.1115/1.1388012

2. Kachanov L.M., Delamination Buckling of Composite Materials (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988)).

3. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. O vliianii mekhanicheskikh kharakteristik tonkogo adgezionnogo sloia na prochnost' kompozita. Chast' 1. Uprugoe deformirovanie [On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesive layer on the strength of the composite. Part 1. Elastic deformation]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2022, № 3, pp. 116–124.

4. Glagolev V.V., Markin A.A. Model of Shear Elastic-Plastic Deformation of a Thin Adhesive Layer. *Mech. Solids*, 2000, V. 55, pp. 837–843.

5. Hutchinson J.W., He M.Y., Evans A.G. The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations. *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, V. 48, pp. 709-734.

6. Choi S.R., Hutchinson J.W., Evans A.G. Delamination of multilayer thermal barrier coatings. *Mechanics of Materials*, 1999, V. 31, pp. 431-447.

7. Evans A.G., Hutchinson J.W. The mechanics of coating delamination in thermal gradients. *Surface and Coatings Technology*, 2007, V. 201, pp. 7905-7916.

8. Barbieri L., Massabò R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams. *Eng. Fract. Mech.*, 2018, V. 201, pp. 298–321.

9. Glagolev V.V., Markin A. A. Influence of the model of the behavior of a thin adhesion layer on the value of the j-integral. *Mechanics of Solids*, 2022, V. 57(2), pp. 278-285.

10. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample. *Int. J. Fract.*, 2021, V. 232, pp. 43–54.

11. Monetto I., Massabò R. An analytical solution for the inverted four-point bending test in orthotropic specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, V. 245, pp. 1-16.

12. Monetto I., Barbieri L., Berggreen C., Massabò R. Fracture mechanics solutions and operative formulae for isotropic bimaterial layers with large elastic mismatch. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, V. 121, 13 p.

13. Parry M.G., Colin J., Coupeau C., Foucher F., Cimetière A., Grilhé J. Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations. *Acta materialia*, 2005, V. 53, pp. 441-447.

14. White S.N., Green C.C., McMeeking R.M. A simple 3-point flexural method for measuring fracture toughness of the dental porcelain to zirconia bond and other brittle bimaterial interfaces. *Journal of prosthodontic research*, 2020, V. 64(4), pp. 391-396.

15. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. California: Advances in Applied Mechanics edited by J. W. Hutchinson and T. Y. Wu., 1992, 191 p.

16. Dedkova A.A., Glagolev P.Iu., Gusev E.E., Diuzhev N.A., Kireev V.Iu., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Osobennosti deformirovaniia kruglykh tonkoplenochnykh membran i eksperimental'noe opredelenie ikh effektivnykh kharakteristik [Peculiarities of Deformation of Round Thin-Film Membranes and Experimental Determination of Their Effective Characteristics]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2021, V. 91, № 10, pp. 1454-1465.

17. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, V. 49, pp. 1847–1864.

18. Faulhaber S., Mercer C., Moon M.-Y. et. al. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, V. 54, pp. 1004 –1028.

19. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fract.*, 2000, V. 104 (2), pp. 169-179.

20. Yu H.-H., Hutchinson J. W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, 2002, V. 113, pp. 39–55.

21. Goldshtejn R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Ocenka vlijanija podatlivosti podlozhki na naprjazhenija poteri ustojchivosti otsloivshegosja pokrytija [Evaluation of the Effect of Substrate Compliance on Buckling Stresses of a Delaminated Coating]. *Vychisl. Meh. Spl. Sred.*, 2011, Vol. 4, № 3, pp. 48–57.

22. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings. *Engineering Failure Analysis*, 2015, pp. 1–7.

23. Kurguzov V.D. Modelirovanie otsloeniia tonkikh plenok pri szhatii [Simulation of delamination of thin films under compression]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2014, V. 7, № 1, pp. 91-99.

24. Kurguzov V.D., Demeshkin A.G. Eksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie poteri ustoichivosti uzkikh tonkikh plastin na uprugom osnovanii pri szhatii [Experimental and theoretical study of the loss of stability of narrow thin plates on an elastic foundation under compression]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika*, 2016, V. 57, № 3, pp. 121-128.

25. Vatulyan A. O., Morozov K. L. Investigation of Delamination from an Elastic Base Using a Model with Two Coefficients of Subgrade Reaction. *Mech. Solids*, 2020, V. 55, pp. 207–217.

26. Vatulyan A.O., Morozov K.L. Ob otsloenii pokrytiia, lezhashchego na uprugom osnovanii [Delamination of a coating lying on an elastic base]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika*, 2020, V. 61, № 1, pp. 133–143.

27. Bogachev I.V., Vatulyan A.O. O modelirovanii tel s otslaivaiushchimisia pokrytiiami pri uchete polei predvaritel'nykh napriazhenii [On the modeling of bodies with peeling coatings when taking into account prestress fields]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2020, № 1, pp. 5-16.

28. Ustinov K.B., Massabo R. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers. *International Journal of Solids and Structures*. 2022, V. 248, pp. 11–16.

29. Ustinov K.B., Kasparova E.A. Ocenka vlijanija krivizny i podatlivosti osnovanija na parametry otsloenija pokrytija [Evaluation of the influence of curvature and compliance of the base on the parameters of delamination of the coating]. *Deformacija i razrushenie materialov*, 2015, № 3, pp. 28-35.

30. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On Combined Influence of Substrate Curvature and Compliance on Parameters of Coating Delamination from a Cylindrical Base. Mechanics of Solids, 2023, V. 58(2), pp. 240-258.

31. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, slabs and shells on an elastic foundation]. M.: Gos. izd. fiz.-mat. literatury., 1960, 490 p.

32. Sanders J.L. Nonlinear theories for thin shells. *Quart. Appl. Math.*, 1963, V. XXI. № 1, pp. 21–36.

33. Grigorenko Ja.M., Mukoed A.P. Reshenie nelinejnyh zadach teorii obolochek na JeVM [Solving nonlinear problems of shell theory on a computer]. Kiev: Izdatel'skoe ob#edinenie "Vishha shkola", 1983, 286 p.

34. Vlasov V.Z. Izbrannye trudy. Obshhaja teorija obolochek. Tom I. [Selected works. General theory of shells. Volume I]. M.: Izdatel'stvo AN SSSR., 1962, 528 p.

35. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack. *Int. J. Fracture Mechanics*, 1965, V. 1, № 2, pp. 114–128.

36. Dyskin A.V., Salganik R.A. Model' dilatansii hrupkih materialov s treshhinami pri szhatii [Model of dilatancy of brittle materials with cracks in compression]. *Mechanics of Solids*, 1987, № 6, pp. 169–178.

37. Li S., Wang J.Z., and Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. *J. Mech. Phys. Solid*, 2004, V. 52, № 1, pp. 193–214.

38. Andrews M., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Eng. Fract. Mech.*, 2007, V. 74, № 17, pp. 2700–2720.

39. Thouless M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials. *Eng. Fract. Mech.*, 2018, V. 191, pp. 153–167.

40. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mechanics of Solids*, 2015, V. 50, № 1, pp. 62-80.

41. Ustinov K.B. O sdvigovom otsloenii tonkogo sloia ot poluploskosti [On shear separation of a thin layer from a half-plane]. *Preprint IPMekh RAN*, 2013, № 1047, 30 p.

42. Ustinov K.B. Ob otsloenii sloja ot poluploskosti dlja nekotorogo klassa razlichnyh uprugih svojstv [On delamination of a layer from a half-plane for a certain class of different elastic properties], *Preprint IPMeh RAN*, 2013, № 1048, 50 p.

43. Salganik R.L., Ustinov K.B. Zadacha ob uprugo zadelannoi plastine, modeliruiushchei chastichno otsloivsheesia ot podlozhki pokrytie (ploskaia deformatsiia) [The Problem of an Elastically Embedded Plate Modeling a Coating Partially Delaminated from the Substrate (Plane Deformation)]. *Mechanics of Solids*, 2012, № 4, pp. 50–62.

44. Ustinov K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer. *Eur. J. Mech. A. Solids*, 2019, V. 75, pp. 56–69.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект РНФ 23-19-00866.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, RSF project 23-19-00866.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

The contribution of the authors is equivalent.