Беляев Ю.Н. Метод расчётов резонансов акустических напряжений на границах анизотропного слоя // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. С. 18–28. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.02

Belyayev Y.N. Method for calculating resonances of acoustic stresses at the boundaries of an anisotropic layer. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 6, pp. 18-28. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.02

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 6, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.02
УДК 534.2+512.64+519.622

МЕТОД РАСЧЁТОВ РЕЗОНАНСОВ АКУСТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦАХ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Ю.Н. Беляев

Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 11 августа 2023 г.
Одобрена: 21 октября 2023 г.
Принята к публикации:
31 ноября 2023 г.

Ключевые слова:

упругие волны, дифракция, матричная экспонента, метод масштабирования и квадрирования, метод главных миноров, погрешности усечения.

АННОТАЦИЯ

Исследуются условия возникновения резонансов акустических напряжений на границах анизотропного слоя. В общем случае под действием падающей упругой волны в анизотропном слое формируются шесть упругих волн. Суммарное воздействие этих волн определяет напряженно-деформированное состояние слоя и отображается в спектрах волн, рассеянных слоем в окружающую среду. Моделирование спектров рассеяния и акустических напряжений проводилось путём решения уравнений движений сплошной среды и обобщенного закона Гука. Эта система дифференциальных уравнений решается относительно компонент вектора смещения и тензора напряжений в декартовой системе координат.

Развивается метод Пеано – Бекера решения системы дифференциальных уравнений с помощью матричной экспоненты. Компоненты вектора смещений и тензора напряжений на двух противоположных границах слоя толщиной d выражаются друг через друга с помощью матрицы переноса шестого порядка $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{W}d)$, где матрица $\mathbf{W}$ определяется параметрами исследуемого слоя. Используется метод масштабирования и кратного квадрирования, согласно которому $\mathbf{T} = (\exp(\mathbf{W}d/m))^m$, Предложен метод выбора параметра масштабирования m для оценки погрешностей усечения и округления при вычислении $\exp(\mathbf{W}d/m)$. Гарантированная точность и наилучшая эффективность вычислений всех элементов матричной экспоненты шестого порядка, в сравнении с другими известными методами, обеспечивается применением метода многочленов главных миноров матрицы $\mathbf{W}$.

Приведено моделирование спектров рассеяния упругих волн (коэффициентов преобразований) и зависимостей напряжений от углов падения для слоев кристалла кубической сингонии на примере индия. Дана интерпретация резонансов акустических напряжений, возникающих в кристаллическом слое под действием падающей на кристалл сдвиговой волны.

© ПНИПУ

© **Беляев Юрий Николаевич** – к.ф.-м.н., доцент, доц. кафедры «Физика», e-mail: ybelyayev@mail.ru.

Belyayev Yuriy N. – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Department of Physics, e-mail: ybelyayev@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

METHOD FOR CALCULATING RESONANCES OF ACOUSTIC STRESSES AT THE BOUNDARIES OF AN ANISOTROPIC LAYER

Y.N. Belyayev

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 11 August 2023
Approved: 21 October 2023
Accepted for publication:
31 November 2023

Keywords:

elastic waves, diffraction, matrix exponent, scaling and squaring method, principal minor method, truncation errors.

ABSTRACT

The conditions of occurrence of acoustic stress resonances at the boundaries of an anisotropic layer are investigated. In general, under the action of an incident elastic wave, six elastic waves are formed in an anisotropic layer. The total effect of these waves determines the stress-strain state of the layer and is displayed in the spectra of waves scattered by the layer into the environment. The scattering spectra and acoustic stresses were modeled by solving the equations of motion of a continuous medium and the generalized Hooke's law. This system of differential equations is solved with respect to the components of the displacement vector and the stress tensor in the Cartesian coordinate system.

The Peano-Becker method of solving a system of differential equations by means of a matrix exponential is used. The components of the displacement vector and the stress tensor at two opposite boundaries of the layer with thickness d are expressed through each other using a sixth-order transfer matrix **T** = exp(**W***d*), where matrix **W** is determined by the parameters of the layer under study. The method of scaling and multiple squaring is used. According to this approach, **T** = (exp(**W***d*/*m*))^m. A method for selecting the scaling parameter *m* is proposed to estimate the errors of truncation and rounding when calculating exp(**W***d*/*m*). A guaranteed accuracy and the best efficiency of calculations of all elements of the matrix exponential of the sixth order, in comparison with other known methods, is provided by the use of the method of polynomials of the principal minors of matrix **W**.

The modeling of elastic wave scattering spectra (conversion coefficients) and stress dependences on the angles of incidence for cubic crystal layers is given using the example of indium. The interpretation of resonances of acoustic stresses arising in the crystal layer under the action of a shear wave incident on the crystal is given.

© PNRPU

Введение

Учёт напряжённо-деформированного состояния слоя твёрдой среды, возникающего в результате акустического воздействия, играет важную роль при проектировании различных слоистых электроакустических и акустооптических преобразователей [1–5]. Распределение напряжений в твердом слое зависит от вида возможных упругих волн. При падении на твёрдый слой $0 \le x_3 \le d$ плоской волны

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}_0 \exp\left[i\left(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t\right)\right], \quad x_3 \le 0, \qquad (1)$$

в последнем возникают деформации и напряжения, которые, очевидно, влияют на формируемые в слое волны (в общем случае квазипродольные и квазипоперечные) [1; 6] с волновыми векторами $\mathbf{k}_{qj}$, $j = 1,\ldots,6$ (рис. 1, *b*) и проявляются в волнах, рассеиваемых слоем в области $x_3 \le 0$ и $x_3 \ge d$. В общем случае анизотропный слой порождает в окружающих пространствах до шести волн $\mathbf{u}_j = \mathbf{A}_j \exp\left[i\left(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t\right)\right]$, направления амплитудных $\mathbf{A}_j$ и волновых $\mathbf{k}_j$ векторов которых схематично показаны на рис. 1, *b*. Здесь и далее используются обозначения: $\mathbf{u}_j$, $j = 1,\ldots,6$ – векторы смещений в упругих волнах; i – мнимая единица, $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ – радиус-вектор в декартовом базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; ν – частота колебаний; t – время.

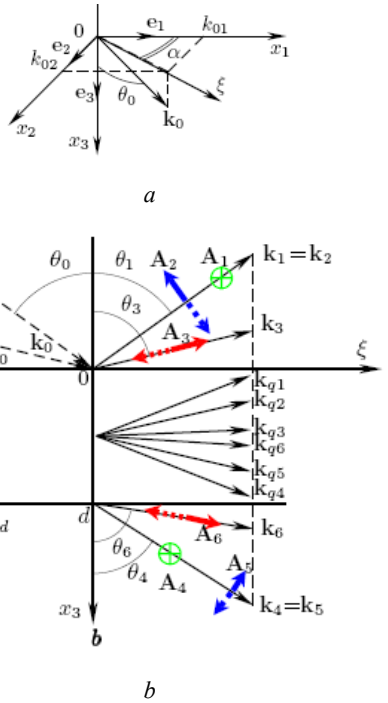


Рис. 1. Геометрия рассеяния упругой волны: *a* – определения углов падения θ_0 и α; *b* – направления волновых векторов $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{k}_{qj}$, $j = 1,\ldots,6$ в плоскости падения $\alpha 0\xi$

Fig. 1. Geometry of elastic wave scattering: *a* – definitions of angles of incidence θ_0 and α; *b* – directions of wave vectors $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{k}_{qj}$, $j = 1,\ldots,6$ in the plane of incidence $\alpha 0\xi$

Акустические напряжения, возникающие на границах слоя, линейно зависят от амплитуд волн A_j [7], поэтому главные экстремумы напряжений наблюдаются при тех углах падения θ_0 и α, при которых наблюдаются максимумы коэффициентов преобразований

$$C_j = \left| \frac{A_j}{A_0} \right|^2, j = 1, \ldots, 6,$$

где $A_j = \left| \mathbf{A}_j \right|$ (см. рис. 1, *b*). Ширина дифракционных максимумов C_j может не превышать нескольких угловых секунд [8; 9]. Аналитическое предсказание положений таких максимумов при шестилучевом рассеянии упругих волн не представляется возможным. Задача отыскания резонансов акустических напряжений может быть решена в результате моделирования спектров $C_j(\theta_0, \alpha)$ с шагом (0,01–0,1)° по углам падения θ_0 и α. При этом для каждой пары значений θ_0 и α должна быть решена с необходимой точностью система уравнений, описывающих процессы рассеяния упругих волн.

Стандартный подход к рассмотрению волновых процессов состоит в решении соответствующего волнового уравнения. Применительно к упругим волнам в анизотропной среде компоненты вектора смещения описываются системой трёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Пример таких уравнений для кристалла кубической сингонии дан, например, в монографии [10]. Эти уравнения содержат компоненты тензора упругой жёсткости и допускают аналитические решения лишь для строго определённых кристаллографических направлений. В общем случае решение указанной системы уравнений может быть представлено через матричные синусы и косинусы третьего порядка. Хотя формально для собственных значений матриц третьего порядка, определённых в действительной области значений, существуют аналитические решения, применение последних в случае комплексных коэффициентов исходных уравнений делает их применение неудобным из-за отсутствия непрерывной зависимости известных аналитических представлений (формулы Лагранжа – Сильвестра и Бекера [11], жорданова каноническая форма [12]) от исходной матрицы и поэтому требуется применение других численных методов расчётов указанных функций матриц, например [13–19].

Другой подход к изучению акустических деформаций и напряжений состоит в совместном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка (по координатам), описывающих движения сплошной среды и обобщённый закон Гука, относительно компонент тензора напряжений и компонент вектора смещений:

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{g=2}^{3} \frac{\partial p_{ig}}{\partial x_g}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) = \sum_{g=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} s_{higj} p_{gj}, \; h,i,j = 1,2,3, \end{gathered} \tag{2}$$

где ρ – плотность; u_i, p_{gj} и s_{higj} – компоненты вектора смещений, тензора напряжений и тензора упругой податливости соответственно. Решение в этом случае выражается через матричные экспоненты. Первоначально такой подход был использован при изучении распространения упругих продольных волн (P-тип) и сдвиговых волн SH- и SV-типа в изотропных слоистых средах. Решения соответствующих уравнений описываются с помощью матриц переноса второго и четвёртого порядков [20]. Матричные экспоненты в этих случаях были найдены по методу Лагранжа – Сильвестра.

В анизотропной плоскослоистой среде ($\rho = \rho(x_3)$, $s_{higj} = s_{higj}(x_3)$) решение системы уравнений (2) с учётом начального условия (1) приводит к матричному уравнению [12]

$$\frac{d}{dx_3}\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{F}, \tag{3}$$

где $\mathbf{F} = \left\| u_2 \quad p_{23} \quad u_1 \quad u_3 \quad p_{13} \quad p_{33} \right\|^T$ – матрица-столбец, а вывод явного вида элементов матрицы шестого порядка $\mathbf{W}$ дан в работах [7; 21]. Решение уравнения (3) по методу Пеано – Бекера [12; 22] представляется в виде

$$\mathbf{F}(x_3) = \exp\left(\mathbf{W}x_3\right)\mathbf{F}(0),$$

и результат определения деформаций и напряжений в слое зависит от точности вычислений матричной экспоненты шестого порядка $\exp\left(\mathbf{W}x_3\right)$. Именно такой подход, позволяющий одновременно находить и деформации, и напряжения, используется в данной работе.

1. Метод вычислений матричной экспоненты

Обзор и сравнение различных методов вычисления матричной экспоненты имеется в монографиях [21; 23]. Отметим здесь лишь разложение в ряд Тейлора, преимущества использования которого отражено, в частности, в публикациях [24–28]. Численный расчёт экспоненты матрицы, скажем $\mathbf{A}$, по формуле $\exp \mathbf{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \big/ (j!)$, являющейся определением матричной экспоненты, подразумевает усечение ряда, т.е. его аппроксимацию суммой конечного числа слагаемых:

$$\exp \mathbf{A} \approx \sum_{j=0}^{N} \frac{\mathbf{A}^j}{j!} = \mathbf{E}_{Taylor}(\mathbf{A}, N). \tag{4}$$

С ростом числа слагаемых N погрешность вычисления $\exp \mathbf{A}$, обусловленная усечением ряда, уменьшается, но при этом возрастает ошибка, вызванная округлением результатов арифметических операций, зависящей от числа этих операций и используемой формы представления чисел.

Трудности, связанные с ошибками округления, и затраты машинного времени при вычислении матричной экспоненты возрастают по мере увеличения нормы матрицы или с возрастанием разброса собственных значений матрицы $\mathbf{A}$. Обе эти трудности можно контролировать, если использовать фундаментальное свойство экспоненциальной функции

$$\exp \mathbf{A} = \left(\exp \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^m .$$

Идея состоит в том, чтобы выбрать такое m, для которого $\exp\left(\mathbf{A}/m\right)$ может быть надёжно и эффективно определена, а затем вычислить $\left(\exp\left(\mathbf{A}/m\right)\right)^m$ с помощью повторного возведения в квадрат, для чего параметр масштабирования m выбирается в виде целой степени двух.

2. Выбор параметра масштабирования

Введём следующие обозначения для матриц и их элементов:

$\mathbf{A}/m = \left\| a_{gh} \right\|/m = \mathbf{M} = \left\| m_{gh} \right\|$; $\mathbf{M}^j = \left\| {}^j m_{gh} \right\|$, $j = 0,1,\ldots$, $g,h = 1,\ldots,n$, в частности, ${}^0 m_{gh} = \delta_{gh}$, ${}^1 m_{gh} = m_{gh}$, $\exp \mathbf{M} = \mathbf{V} = \left\| v_{gh} \right\|$, v_{gh} и $\tilde{v}_{gh}$ обозначают соответственно точные значения элементов матрицы $\mathbf{V}$ и значения, вычисленные одним из методов аппроксимации.

Относительная ошибка ε вычислений элементов матрицы $\mathbf{V}$ определяется формулой

$$\varepsilon = \left| \frac{v_{gh} - \tilde{v}_{gh}}{v_{gh}} \right| . \qquad (5)$$

Необходимая точность вычислений всех элементов матрицы $\exp\left(\mathbf{A}/m\right)$ гарантируется, если параметр масштабирования m удовлетворяет условию

$$\max \left| m_{gh} \right| = \max \left| \frac{a_{gh}}{m} \right| = \frac{2\beta}{n+4}, \quad \beta < 1, \qquad (6)$$

где n – порядок матрицы $\mathbf{M}$ (т.е. $\mathbf{A}$).

Действительно, при выполнении (6) элемент матрицы $\mathbf{M}$ с максимальным модулем находится на главной диагонали матрицы, т.е. $\left| m_{jj} \right| > \left| m_{gh} \right|$ для любых $g,h = 1,\ldots,n$. Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующими соотношениями:

$$\left| {}^l m_{gh} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} {}^{l-1} m_{gj} m_{jh} \right| \le n \max \left| {}^{l-1} m_{gh} \right| \max \left| m_{gh} \right| < n^{l-1} \left(\max \left| m_{gh} \right| \right)^l \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{{}^j m_{gh}}{j!} \right| < \left| \sum \frac{n^{j-1} \left(\max \left| m_{gh} \right| \right)^j}{j!} \right| =$$

$$= \max \left| m_{gh} \right| \left(1 + \frac{n \max \left| m_{gh} \right|}{2!} + \frac{n^2 \left(\max \left| m_{gh} \right| \right)^2}{3!} + \cdots \right)$$

$$< \frac{\max \left| m_{gh} \right|}{1 - n \max \left| m_{gh} / 2 \right|} < 0,5. \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует

$$\left| v_{gh} \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{{}^j m_{gh}}{j!} \right| < 0,5, \quad g \ne h; \quad \left| v_{hh} \right| > 1 - \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{{}^j m_{gh}}{j!} \right| > 0,5, \qquad (8)$$

что и требовалось доказать.

3. Погрешность усечения

Относительная погрешность вычислений всех элементов матричной экспоненты одинакова; оценим погрешность усечения, используя наибольший по модулю элемент матрицы $\mathbf{M}$. С учётом формул (5), (4) и (8) находим

$$\varepsilon = \left| \frac{v_{gh} - \tilde{v}_{gh}}{v_{gh}} \right| = \left| \frac{\sum_{l=0}^{\infty} {}^l m_{hh} / (l!) - \sum_{l=0}^{N} {}^l m_{hh} / (l!)}{\sum_{l=0}^{\infty} {}^l m_{hh} / (l!)} \right| =$$

$$\left| \frac{\sum_{l=N+1}^{\infty} {}^l m_{hh} / (l!)}{1 - \left| \sum_{l=1}^{\infty} {}^l m_{hh} / (l!) \right|} \right| < 2 \sum_{l=N+1}^{\infty} \left| \frac{{}^l m_{hh}}{l!} \right|$$

$$< \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{n^{l-1} \left(\max \left| m_{hh} \right| \right)^l}{l!} < 2 \frac{n^N \left(\max \left| m_{hh} \right| \right)^{N+1}}{(N+1)!} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{n \max \left| m_{hh} \right|}{N+2} + \frac{n^2 \max \left| m_{hh} \right|^2}{(N+2)(N+3)} + \cdots \right)$$

$$< \frac{n^N \max \left| m_{hh} \right|^{N+1} 2(N+2)}{(N+1)(N+2-n \max \left| m_{hh} \right|)} \equiv \varepsilon_{\max} . \qquad (9)$$

Таблица 1

Погрешности усечения $\varepsilon_{\max}$ для некоторых значений N из формулы (4)

Table 1

Truncation errors $\varepsilon_{\max}$ for some values of N from formula (4)

N	9	10	17	18	29	30
$\varepsilon_{\max}$	$6{,}4 \cdot 10^{-7}$	$6{,}9 \cdot 10^{-8}$	$1{,}5 \cdot 10^{-15}$	$9{,}3 \cdot 10^{-17}$	$3{,}1 \cdot 10^{-31}$	$1{,}2 \cdot 10^{-32}$

Согласно значениям $\varepsilon_{\max}$, вычисленных по формуле (9) для матрицы $\mathbf{M}$ шестого порядка и представленных в табл. 1, одинарная точность вычислений (погрешность усечения $\varepsilon = 2^{-24} \approx 6{,}0 \cdot 10^{-8}$) может быть получена при 10 слагаемых в аппроксимации матричной экспоненты по формуле (4), двойная точность вычислений (погрешность усечения $\varepsilon = 2^{-53} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-16}$) – при $N = 18$, а четверная ($\varepsilon = 2^{-105} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-32}$) – при $N = 30$.

4. Погрешность округления

Погрешность округления зависит от числа арифметических операций, используемых в расчётах искомой величины. В рассматриваемой задаче это число в основном определяется числом матричных перемножений. Для снижения этого числа удобно представить сумму $N + 1$ слагаемых в формуле (4) в виде групп меньшего числа слагаемых, вставленных друг в друга в виде структуры наподобие матрёшки. Одна из возможных реализаций такого подхода для $N = 18$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{Taylor}(\mathbf{M},18) = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2\kappa_2 \\ +\mathbf{M}^3\left(\mathbf{I}\kappa_3 + \mathbf{M}\,\kappa_4 + \mathbf{M}^2\kappa_5 + \mathbf{M}^3 \times\right. \\ \times\left(\mathbf{I}\kappa_6 + \mathbf{M}\,\kappa_7 + \mathbf{M}^2\kappa_8 + \mathbf{M}^3\left(\mathbf{I}\kappa_9 + \mathbf{M}\,\kappa_{10} + \mathbf{M}^2\kappa_{11}\right.\right. \\ +\mathbf{M}^3\left(\mathbf{I}\kappa_{12} + \mathbf{M}\,\kappa_{13} + \mathbf{M}^2\kappa_{14} + \right. \\ \left.\left.\left. + \mathbf{M}^3\left(\mathbf{I}\kappa_{15} + \mathbf{M}\,\kappa_{16} + \mathbf{M}^2\kappa_{17} + \mathbf{M}^3\kappa_{18}\right)\right)\right)\right),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, а $\kappa_j = 1/(j!)$, $j = 2,\ldots,18$. Представление (10) требует удерживать в памяти компьютера лишь четыре матрицы $\mathbf{I},\mathbf{M},\mathbf{M}^2,\mathbf{M}^3$ и позволяет вычислить $\mathbf{E}_{Taylor}(\mathbf{M},18)$ с использованием лишь семи матричных перемножений.

5. Полиномиальное представление матричной экспоненты

Любая целочисленная степень матрицы $\mathbf{M}^j$ n-го порядка выражается через её первые n степеней $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I},\mathbf{M},\mathbf{M}^2,\ldots,\mathbf{M}^{n-1}$ по формуле [29]

$$\mathbf{M}^j = \sum_{l=0}^{n-1}\mathbf{M}^l\sum_{g=0}^{l} p_{n-l+g}B_{j\text{-}1\text{-}g}(\mathrm{n}) \ , \tag{11}$$

где $p_j = (-1)^{j-1}\sigma_j$, $j = 1,\ldots,n$, σ_j – суммы главных миноров матрицы $\mathbf{M}$, а $B_j(\mathrm{n})$ – многочлены, определяемые рекуррентными формулами:

$$B_0(\mathrm{n}) = B_1(\mathrm{n}) = \cdots = B_{n\text{-}2}(\mathrm{n}) = 0;$$

$$B_{n\text{-}1}(\mathrm{n}) = 1;\ B_j(\mathrm{n}) = \sum_{g=1}^{n} p_g B_{j\text{-}g}(\mathrm{n}),\ j \ge n.$$

Выражение (11) позволяет представить экспоненту матрицы $\mathbf{M}$ следующим образом

$$\exp\mathbf{M} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbf{M}^j}{j!} = \sum_{l=0}^{n-1}\chi_l\mathbf{M}^l, \quad \chi_l = \sum_{g=0}^{l} p_{n-l+g}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}B_{j-1-g}(n).$$

Усекая ряд в определении коэффициентов χ_l до конечной суммы, получаем ещё одну аппроксимацию матричной экспоненты:

$$\mathbf{E}_{Pol}(\mathbf{M},N_P) = \sum_{l=0}^{n-1}\tilde{\chi}_l\mathbf{M}^l, \quad \tilde{\chi}_l = \sum_{g=0}^{l} p_{n-l+g}\sum_{j=0}^{N_P+n}\frac{1}{j!}B_{j-1-g}(n). \tag{12}$$

При вычислениях экспоненты матрицы шестого порядка по формулам (12) с любой точностью требуется выполнение четырёх матричных перемножений. Как показывает расчёт [28], одинарная, двойная и четверная точности вычислений коэффициентов $\tilde{\kappa}_l$ обеспечиваются выбором для N_p соответственно значений 3, 11, 25.

6. Сравнение эффективности двух методов вычислений матричной экспоненты

Сравнение эффективности методов здесь оценивается по числу арифметических операций $\mathcal{M}_T$ и $\mathcal{M}_P$ требуемых при использовании аппроксимаций $\mathbf{E}_{Taylor}(\mathbf{M},N)$ и $\mathbf{E}_{Pol}(\mathbf{M},N_P)$, соответственно, при одинаковой точности вычислений. Результаты сравнения для матрицы шестого порядка на основе данных [28] показаны в табл. 2.

Таблица 2

Сравнительная эффективность $\mathcal{M}_T / \mathcal{M}_P$ двух методов для матрицы шестого порядка

Table 2

Comparative efficiency $\mathcal{M}_T / \mathcal{M}_P$ of two methods for a sixth-order matrix

Точность	$\mathbf{E}_{Taylor}(\mathbf{M},N)$		$\mathbf{E}_{Pol}(\mathbf{M},N_P)$		$\mathcal{M}_T / \mathcal{M}_P$
	N	$\mathcal{M}_T$	N_p	$\mathcal{M}_P$	
Одинарная	10	1296	3	1135	1.14
Двойная	18	1944	11	1225	1.59
Четверная	30	3096	25	1522	2.03

При вычислениях матричной экспоненты с двойной точностью метод (12) более чем на 50 % более экономичен по времени в сравнении с алгоритмом (10). Именно поэтому в данной работе расчёты проводились с использованием полиномиального метода.

7. Результаты расчётов

Исследовались зависимости от углов падения θ_0 и α коэффициентов преобразований C_j горизонтальной волны сдвига кристаллическим слоем индия и соответствующие напряжения $p_{13}(0) = p_{13}(0)(\theta_0,\alpha)$, $p_{23}(0) = p_{23}(0)(\theta_0,\alpha)$, $p_{33}(0) = p_{33}(0)(\theta_0,\alpha)$ и $p_{13}(d) = p_{13}(d)(\theta_0,\alpha)$, $p_{23}(d) = p_{23}(d)(\theta_0,\alpha)$, $p_{33}(d) = p_{33}(d)(\theta_0,\alpha)$ на границах слоя $x_3 = 0$ и $x_3 = d$ соответственно. В расчётах использовались следующие параметры слоя In: плотность ρ = 7280 кг/м^3; компоненты тензора упругой податливости (в матричной форме) $S_{11} = 150\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$, $S_{12} = -38{,}3\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$, $S_{13} = -103\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$, $S_{33} = 212\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$, $S_{44} = 154\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$, $S_{66} = 82{,}6\cdot10^{-12}$ Па$^{-1}$. Области $x_3 \le 0$, $x_3 \ge d$ являются твёрдыми изотропными с параметрами

Ламе $\lambda_0 = \lambda_d = 1,67 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_0 = \mu_d = 3,27 \cdot 10^{10}$ Па и плотностью $\rho_0 = \rho_d = 2,65 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Коэффициенты преобразований упругих волн $C_j(\theta_0, \alpha)$ зависят от элементов матрицы переноса слоя $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{W}d)$, которая, в свою очередь, определяется упругими свойствами слоя, частотой колебаний ν и толщиной слоя d. Причём последние две величины входят в **T** как функции **W** в виде параметра распространения $\Omega = \nu d$. Поэтому каждый из результатов расчётов $C_j(\theta_0, \alpha)$ соответствует набору толщин d и связанных с ними частотам $\nu = \Omega / d$. Один из наборов полученных коэффициентов преобразований горизонтальной волны сдвига показан на рис. 2. Здесь каждые десять делений по осям θ_0 и α соответствуют 10° (все поверхности построены с шагом в один угловой градус), т.е. для построения поверхностей коэффициентов преобразований рис. 2 потребовалось вычислять матричную экспоненту 8100 раз.

Как уже ранее было сказано, надёжный результат в задаче отыскания положений резонансов акустических напряжений по спектрам $C_j(\theta_0, \alpha)$ получается при моделировании спектров коэффициентов преобразований с шагом 0,01° по углам θ_0 и α. При таком построении спектров трудоёмкость расчётов возрастает в 10^4 раз.

Для того, чтобы избежать существенного увеличения времени вычислений, целесообразно провести не сплошное уточнение спектров, а лишь для некоторых областей углов падения θ_0 и α. Кристалл In принадлежит к кубической сингонии, поэтому все поверхности $C_j(\theta_0, \alpha)$ симметричны относительно плоскости $\alpha = 45°$, следовательно, достаточно уточнить спектры в области $0 \le \alpha \ge 45°$. Кроме этого уточнение напрашивается для поверхностей $C_3(\theta_0, \alpha)$ и $C_6(\theta_0, \alpha)$ в областях $(35° < \theta_0 < 45°, 35° < \alpha < 45°)$ и $(65° < \theta_0 < 75°, 15° < \alpha < 20°)$, где у указанных коэффициентов преобразований наблюдаются максимумы, и именно эти коэффициенты C_3 и C_6 дают преобладающий вклад в напряжения на границах слоя $x_3 = 0$ и $x_3 = d$ соответственно. В первой из указанных областей дополнительные расчёты не выявили принципиальных отличий от картины, показанной на рис. 2, величины C_3 и C_6 достигли максимальных значений 1,6, а напряжения изменяются в интервале от –0,5 до 1,2 (здесь и далее все значения напряжений даны в единицах $A_0 \mu_0 k_o$).

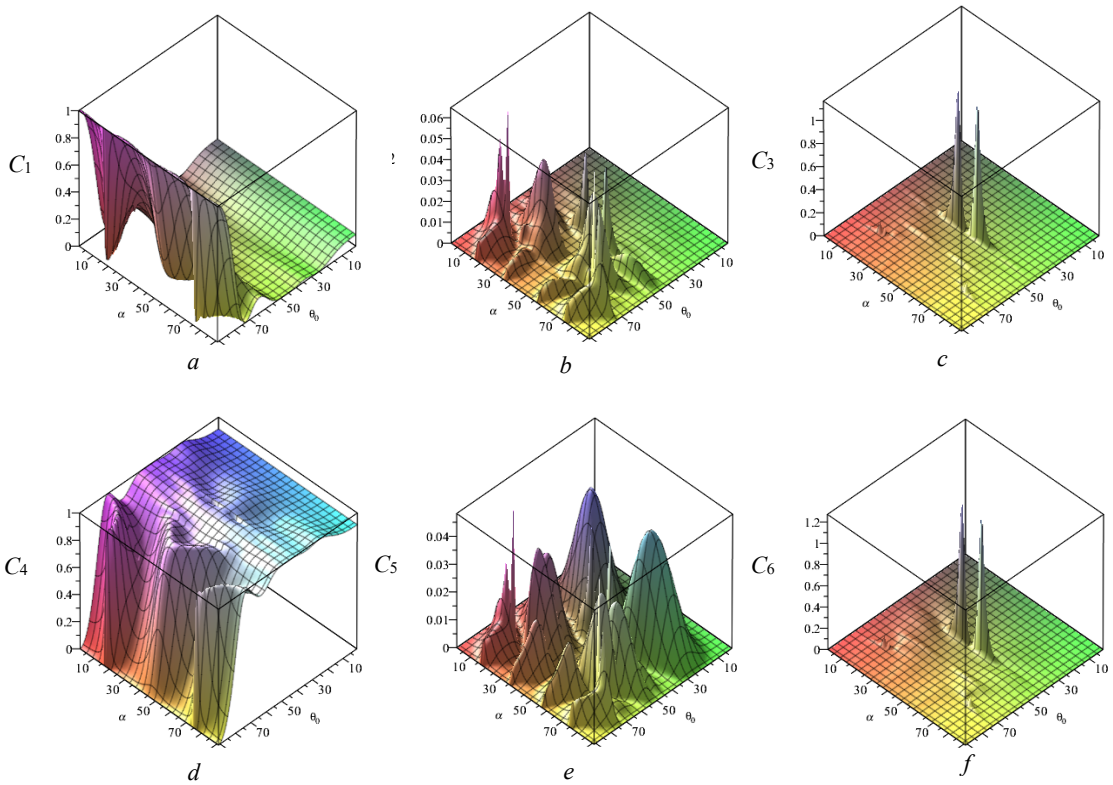


Рис. 2. Коэффициенты преобразований горизонтальной волны сдвига кристаллическим слоем индия, ν = 10^7 Гц, d = 1,864 10^{-3} м: (*a*) $C_1 = C_1(\theta_0, \alpha)$; (*b*) $C_2 = C_2(\theta_0, \alpha)$; (*c*) $C_3 = C_3(\theta_0, \alpha)$; (*d*) $C_4 = C_4(\theta_0, \alpha)$; (*e*) $C_5 = C_5(\theta_0, \alpha)$; (*f*) $C_6 = C_6(\theta_0, \alpha)$

Fig. 2. Conversion coefficients of a horizontal shear wave by indium crystal layer, ν = 10^7 s^{-1}, d = 1,864 10^{-3} m: (*a*) $C_1 = C_1(\theta_0, \alpha)$; (*b*) $C_2 = C_2(\theta_0, \alpha)$; (*c*) $C_3 = C_3(\theta_0, \alpha)$; (*d*) $C_4 = C_4(\theta_0, \alpha)$; (*e*) $C_5 = C_5(\theta_0, \alpha)$; (*f*) $C_6 = C_6(\theta_0, \alpha)$

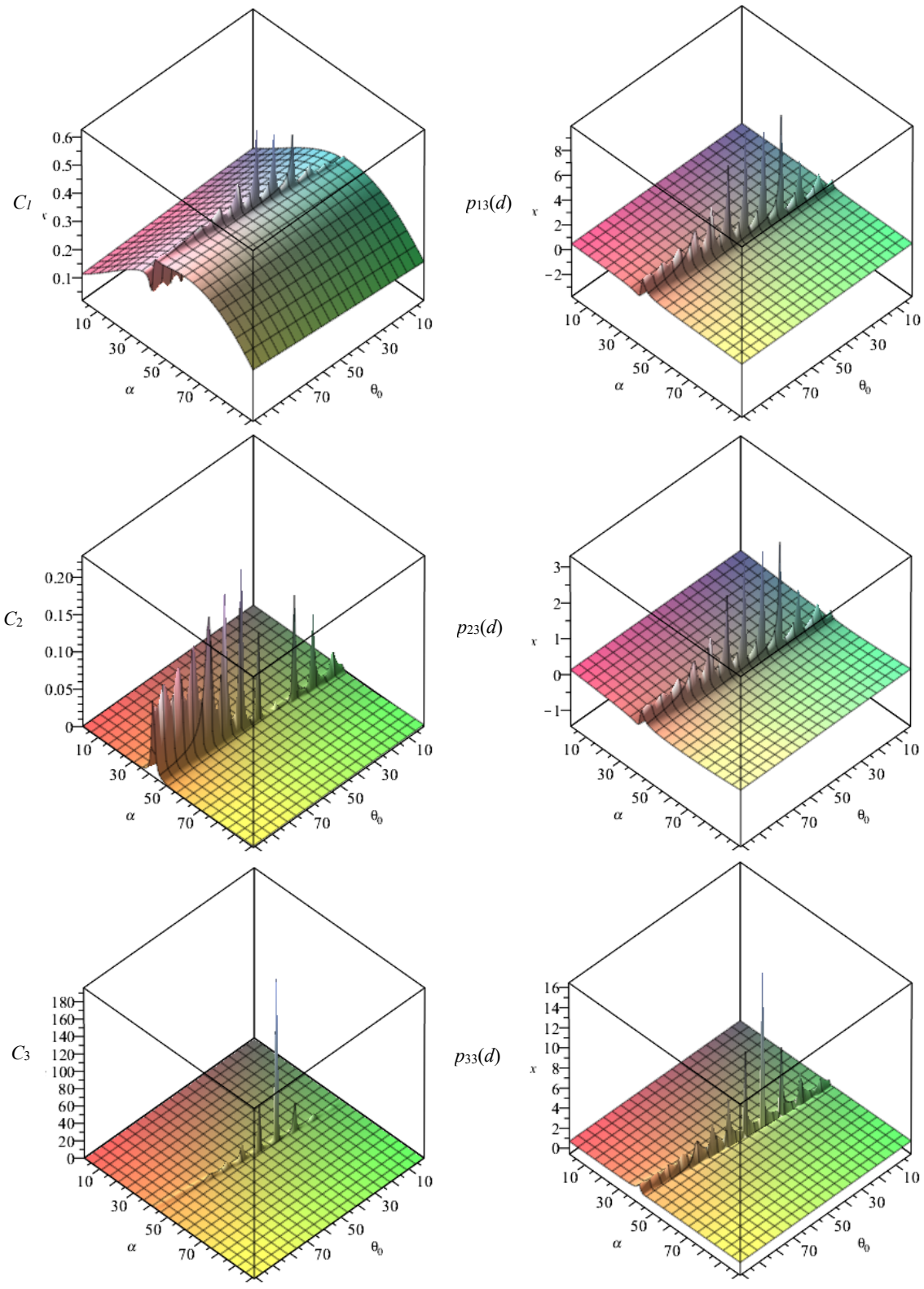


Рис. 3. Спектры $C_j(\theta_0,\alpha)$, j = 1,2,3 и акустические напряжения на границе $x_3 = 0$; $\theta_0 \in [68,5^\circ, 69,5^\circ]$, $\alpha \in [35^\circ, 45^\circ]$, одно деление по оси θ_0 соответствует $0,01^\circ$, а по оси α – $0,1^\circ$

Fig. 3. Spectra $C_j(\theta_0,\alpha)$, j = 1,2,3 and acoustic stresses at the boundary $x_3 = 0$; $\theta_0 \in [68.5^\circ, 69.5^\circ]$, $\alpha \in [35°, 45°]$, one division along the axis θ_0 corresponds to 0.01°, and along the axis α – 0.1°

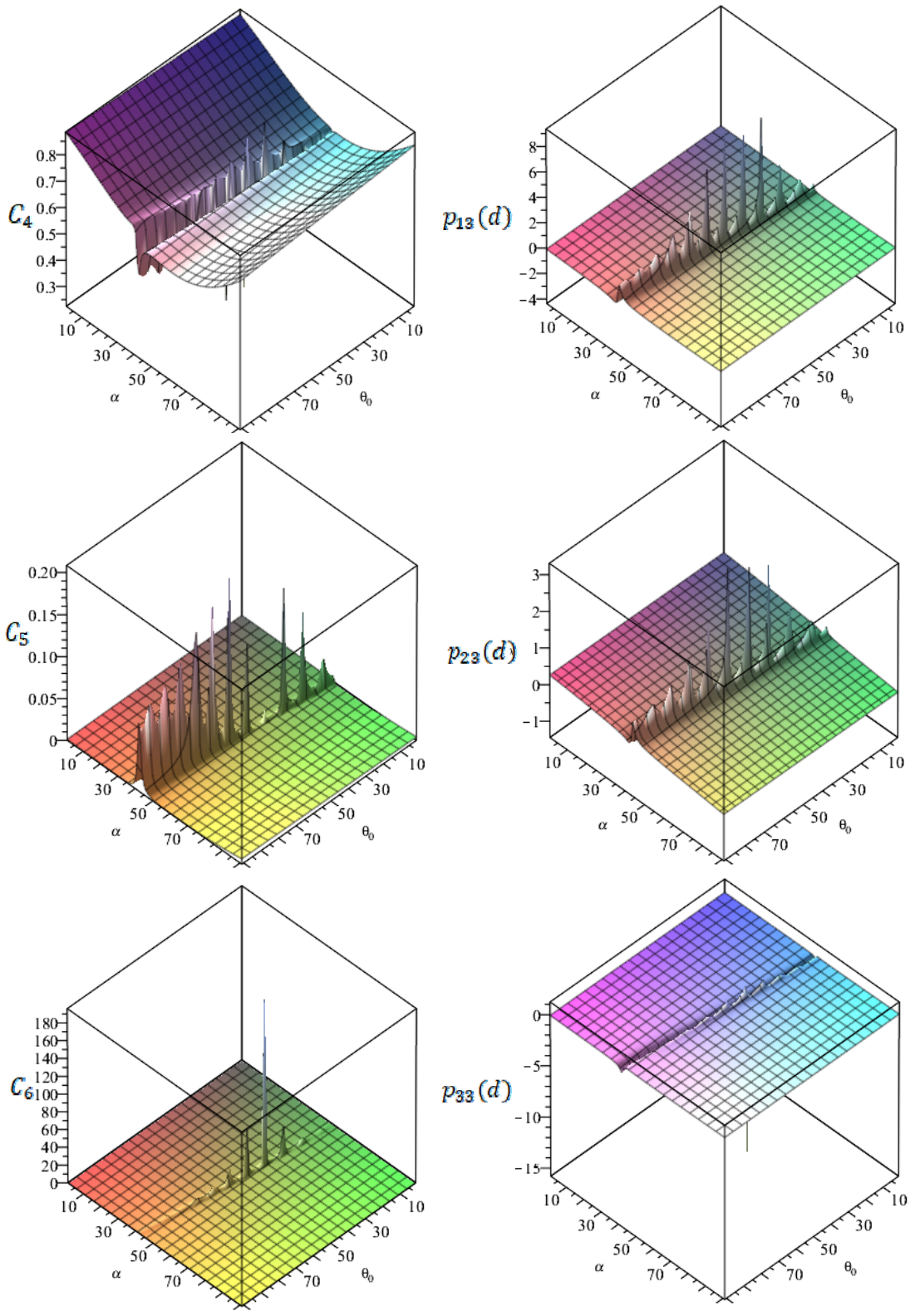


Рис. 4. Спектры $C_j(\theta_0,\alpha)$, j = 4,5,6 и акустические напряжения на границе $x_3 = d$; $\theta_0 \in [68{,}5^\circ, 69{,}5^\circ]$, $\alpha \in [35^\circ, 45^\circ]$, одно деление по оси θ_0 соответствует $0{,}01^\circ$, а по оси α – $0{,}1^\circ$

Fig. 4. Spectra $C_j(\theta_0,\alpha)$, j = 4,5,6 and acoustic stresses at the boundary $x_3 = d$; $\theta_0 \in [68.5^\circ, 69.5^\circ]$, $\alpha \in [35^\circ, 45^\circ]$, one division along axis θ_0 corresponds to 0.01°, and along axis α – 0.1°

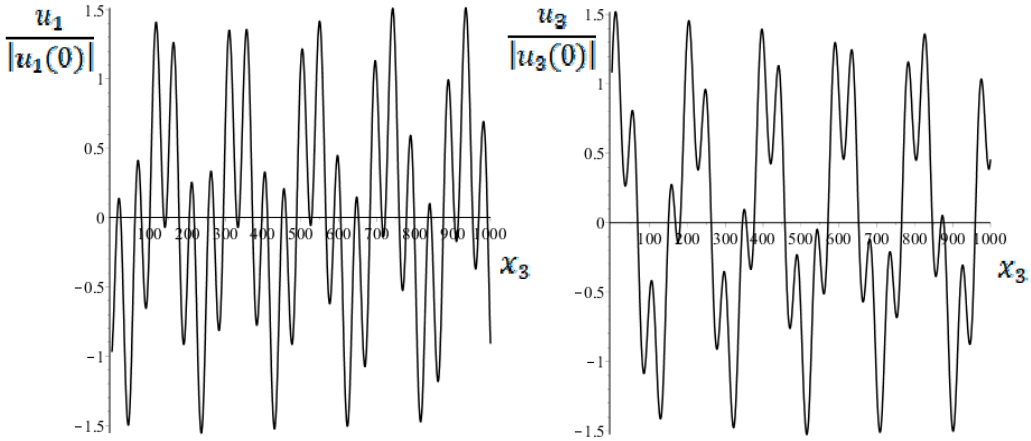


Рис. 5. Зависимости деформаций $u_1 / |u_1(0)|$ и $u_3 / |u_3(0)|$ от координаты $x_3 = 0,001 \cdot j \cdot d$, где $j = 0,1,\ldots,1000$ при углах падения $\theta_0 = 68,8606^\circ$, $\alpha = 19,8000^\circ$

Fig. 5. Dependences of deformations $u_1 / |u_1(0)|$ and $u_3 / |u_3(0)|$ on the coordinate $x_3 = 0.001 \cdot j \cdot d$, where $j = 0,1,\ldots,1000$ at angles of incidence $\theta_0 = 68.8606^\circ$, $\alpha = 19.8000^\circ$

Дополнительный анализ коэффициентов преобразований и акустических напряжений для второй области углов $(65^\circ < \theta_0 < 75^\circ, 15^\circ < \alpha < 20^\circ)$ выявил наличие резкого усиления коэффициентов преобразований C_3 и C_6 и соответствующих резонансов напряжений. На рис. 3 и рис. 4 показаны коэффициенты преобразований и акустические напряжения на границах $x_3 = 0$ и $x_3 = d$ слоя In соответственно. Здесь показаны функциональные зависимости величин C_j, $p_{gh}(0)$, $p_{gh}(d)$ от углов $\theta_0 = (68,5 + 0,01 \cdot j)^\circ$ и $\alpha = (10 + 0,2 \cdot j)^\circ$, где $j = 0,1,\ldots,100$. Изображения коэффициентов преобразований C_3 и C_6 имеют вид, характерный для дифракции на периодических структурах [30; 31]. И действительно, проведенные расчёты показали наличие периодичности изменений компонент деформации u_1 и u_3 по толщине слоя (рис. 5) при падении горизонтальной волны сдвига на слой In в направлении, определяемом углами $\theta_0 = 68,8606^\circ$, $\alpha = 19,8000^\circ$ (при котором наблюдаются главные максимумы величин C_3 и C_6).

Заключение

Резонансы акустических напряжений, подобные тому, который был рассмотрен в данной работе (см. рис. 3, 4), имеют дифракционный характер. Представленный в работе метод моделирования спектров рассеяния позволяет находить величины и положения таких экстремумов.

Наведение периодической структуры в анизотропном слое при шестилучевом рассеянии горизонтальной волны сдвига возможно, в частности, когда проекции волновых векторов $\mathbf{k}_{qj}$, возникающих внутри слоя (см. рис. 1, *b*), на ось x_3 попарно равны друг другу с точностью до знака, т.е. $k_{q1_3} = -k_{q4_3}$, $k_{q2_3} = -k_{q5_3}$, $k_{q3_3} = -k_{q6_3}$. Это происходит, когда характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{W}$ имеет коэффициенты $p_1 = 0$, $p_3 = 0$, $p_5 = 0$. Такая ситуация реализуется, например, если поверхность кубического или тетрагонального кристалла совпадает с плоскостью $x_3 = 0$, что выполнялось при моделировании спектров в данной работе. При определённых толщине кристаллического слоя d и углах падения θ_0 и α суммарное смещение взятых попарно волн сдвига модулируют внутри кристалла структуру с пространственными периодами, сравнимыми с длинами продольных волн, что и обеспечивает дифракционное усиление последних.

Библиографический список

1. Dieulesaint E., Royer D. Ondes élastiques dans les solides. Application au traitment du signal. – Paris: Masson, 1974. – 424 p

2. Блистанов А.А. Кристаллы квантовой и нелинейной оптики. – М.: Изд-во МИСИС, 2000. – 432 с.

3. Rose J.L. Ultrasonic Guided Waves in Solid Media vol 9781107048. – New York: Cambridge University Press, 2014. – 506 p.

4. Егоров Г.П., Волков А.А. Определение критического уровня внутренних напряжений в тонких пленках // Композиты и наноструктуры. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 187–203.

5. Prakash S. Modulating optical properties of Lithium Niobate through acoustic stress // Material Today: Proceedings. – 2021. – Vol. 47. – P. 1535–1537. doi:10.1016/j.matpr.2021.03.294

6. Brekhovskikh L.M., Godin O.A. Acoustics of layered media. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 416 p.

7. Беляев Ю.Н. Метод расчёта акустических напряжений при шестилучевой дифракции в слоистых средах // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 4. – С. 82–92. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.07

8. Belyayev Yu.N. The method of polynomials of principal minors in calculations of acoustic stresses in an anisotropic layer // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. – P. 04008-1–04008-4. DOI: 10.1063/1.5084446

9. Belyayev Y.N. Diffraction resonances of acoustic stresses in the crystal layer // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 581. – P. 012029. DOI: 10.1088/1757-899X/581/1/012029

10. Киттель Ч. Введение в физику твёрдого тела. – М.: Наука, 1978. – 791 с.

11. Angot A. Compléments de mathématiques a l'usage des ingénieurs de l'élektrotechnique et des telecommunications. – Paris: Masson, 1982. – 868 p.

12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

13. Efficient and accurate algorithms for computing matrix trigonometric functions / P. Alonso, J. Ibánez, J. Sastre, J. Peinado, E. Defez // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 309. – P. 325–332. DOI: 10.1016/j.cam.2016.05.015

14. On Bernoulli series approximation for the matrix cosine / E. Defez, J. Ibánez, J.M. Alonso, P. Alonso-Jordá // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – P. 1–15. DOI: 10.1002/mma.7041

15. An efficient and accurate algorithm for computing the matrix cosine based on new Hermite approximations / E. Defez, J. Ibánez, J. Peinado, J. Sastre, P. Alonso-Jordá // J. Comput. Appl. Math. – 2019. – Vol. 348. – P. 1–13. DOI: 10.1016/j.cam.2018.08.047

16. Two algorithms for computing the matrix cosine function / J. Sastre, J. Ibánez, P. Alonso, J. Peinado, E. Defez // Appl. Math. Comput. – 2017. – Vol. 312. – P. 66–77. DOI: 10.1016/j.amc.2017.05.019

17. Al-Mohy A.H. A truncated Taylor series algorithm for computing the action of trigonometric and hyperbolic matrix functions // SIAM J. Sci. Comput. – 2018. – Vol. 40. – P. A1696–A1713. DOI: 10.1137/17M1145227

18. Fast Taylor polynomial evaluation for the computation of the matrix cosine / J. Sastre, J. Ibánez, P. Alonso-Jordá, J. Peinado, E. Defez // J. Comput. Appl. Math. – 2019. – Vol. 354. – P. 641–650. DOI: 10.1016/j.cam.2018.12.041

19. Al-Mohy H., Higham N.J., Liu X. Arbitrary precision algorithms for computing the matrix cosine and its Frechet derivative // Siam J. Matrix Anal. Appl. – 2022. – Vol. 43. – P. 233–256. DOI: 10.1137/21M1441043

20. Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology, Sausalito. – CA: University Science Books, 2002. – 700 p.

21. Беляев Ю.Н. Симметрические многочлены в расчётах матриц переноса. – Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2015. – 209 с.

22. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. – М.: ИЛ, 1953. – 346 с.

23. Higham N.J. Functions of matrices. Theory and computations. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.

24. Accurate matrix exponential computation to solve coupled differential models in engineering / J. Sastre, J. Ibánez, E. Defez, P. Ruiz // Mathematical and computer modelling. – 2011. – Vol. 54. – P. 1835–1840. DOI: 10.1016/j.mcm.2010.12.049

25. New Scaling-Squaring Taylor Algorithms for Computing the Matrix Exponential / J. Sastre, J. Ibánez, E. Defez, P. Ruiz // SIAM J. Sci. Comput. – 2015. – Vol. 37. – P. A439-A455. DOI: 10.1137/090763202

26. Sastre J., Ibánez J., Defez E. Boosting the computation of the matrix exponential // Applied mathematics and computation. – 2019. – Vol. 340. – P. 206–220. DOI: 10.1016/j.amc.2018.08.017

27. Caliari M., Zivcovich F. On-the-fly backward error estimate for matrix exponential approximation by Taylor algorithm // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 346. – P. 532–548. DOI: 10.1016/j.cam.2018.07.025

28. Belyayev Y.N. Method for calculating multiwave scattering by layered anisotropic media // Wave Motion. – 2020. – Vol. 99. – P. 102664. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2020.102664

29. Беляев Ю.Н. К вычислению функций матриц // Математические заметки. – 2013. – Т. 94. – С. 175–182. DOI: 10.4213/mzm9345

30. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.

31. Иверонова В.И., Ревкевич Г.П. Теория рассеяния рентгеновских лучей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 278 с.

References

1. Dieulesaint E., Royer D. Ondes élastiques dans les solides. Application au traitment du signal. Paris: Masson, 1974, 424 p

2. Blistanov A.A. Kristally kvantovoi I nelineinoi optiki [Crystals of quantum and nonlinear optics]. Moscow, MISIS, 2000, 432 p.

3. Rose J.L. Ultrasonic Guided Waves in Solid Media vol 9781107048. New York: Cambridge University Press, 2014, 506 p.

4. Egorov G.P., Volkov A.A. Opredeleniye kriticheskogo urovnya vnutrennikh napryazheniy v tonkikh plonkakh [Determination of the critical level of internal stresses in thin films]. *Composites and nanostructures*, 2016, vol. 8, no. 3, 187-203.

5. Prakash S. Modulating optical properties of Lithium Niobate through acoustic stress *Material Today: Proceedings,* 2021, vol. 47, 1535-1537. doi:10.1016/j.matpr.2021.03.294

6. Brekhovskikh L.M., Godin O.A. Acoustics of layered media. Berlin, Springer-Verlag, 1990, 416 p.

7. Belyayev Yu.N. Method for calculating acoustic stresses in six-beam diffraction in layered media. PNRPU Mechanics Bulletin, 2018, no. 4, pp. 82-92. Doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.07

8. Belyayev Yu.N. The method of polynomials of principal minors in calculations of acoustic stresses in an anisotropic layer // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. = pp. 04008-1–04008-4. doi: 10.1063/1.5084446

9. Belyayev Y.N. Diffraction Resonances of Acoustic Stresses in the Crystal Layer // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 581. – 012029. doi:10.1088/1757-899X/581/1/012029.

10. Kittel C. Introduction to Solid State Physics. John Wiley and Sons, 2005, 680 p.

11. Angot A. Compléments de mathématiques a l'usage des ingénieurs de l'élektrotechnique et des telecommunications. Paris, Masson, 1982, 868 p.

12. Gantmacher F.R. The theory of matrices. New York, Chelsea, 1959, vol. 1, 276 p.

13. Alonso P., Ibánez J., Sastre J., Peinado J., Defez E. Efficient and accurate algorithms for computing matrix trigonometric

functions// J. Comput. Appl. Math. – 2017. Vol. 309. – pp. 325–332. doi:10.1016/j.cam.2016.05.015

14. Defez E., Ibánez J., Alonso J.M., Alonso-Jordá P. On Bernoulli series approximation for the matrix cosine // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – pp. 1-15. doi:10.1002/mma.7041.

15. Defez E., Ibánez J., J. Peinado, J. Sastre, Alonso-Jordá P. An efficient and accurate algorithm for computing the matrix cosine based on new Hermite approximations // J. Comput. Appl. Math. – 2019. Vol. 348. – pp.1–13. doi:10.1016/j.cam.2018.08.047.

16. Sastre J., Ibánez J., Alonso P., Peinado J., Defez E. Two algorithms for computing the matrix cosine function // Appl. Math. Comput. – 2017. – Vol. 312. – pp. 66–77. doi:10.1016/j.amc.2017.05.019.

17. Al-Mohy A.H. A truncated Taylor series algorithm for computing the action of trigonometric and hyperbolic matrix functions// SIAM J. Sci. Comput. – 2018. Vol. 40. – pp. A1696–A1713. doi:10.1137/17M1145227.

18. Sastre J., Ibánez J., Alonso-Jordá P., Peinado J., Defez E. Fast Taylor polynomial evaluation for the computation of the matrix cosine, J. Comput. Appl. Math. – 2019. Vol. 354. – pp. 641–650, doi:10.1016/j.cam.2018.12.041.

19. Al-Mohy H., N. J. Higham N. J., Liu X. Arbitrary precision algorithms for computing the matrix cosine and its Frechet derivative// Siam J. Matrix Anal. Appl. – 2022. Vol. 43. – pp. 233-256. doi: 10.1137/21M1441043.

20. Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology, Sausalito, CA, University Science Books, 2002, 700 p.

21. Belyayev Y.N. Simmetricheskie mnogochleny v raschetah matrits perenosa [Symmetric polynomials in the calculations of transfer matrices]. Syktyvkar, Syktyvkar University, 2015. 209 p.

22. Sansone G. Equazioni differenziali nel campo reale. Parte 1, Boloona, 1948. – 346 c.

23. Higham N.J. Functions of matrices. Theory and computations. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.

24. Sastre J., Ibánez J., Defez E., Ruiz P. Accurate matrix exponential computation to solve coupled differential models in engineering. *Mathematical and computer modelling*. 2011, vol. 54, pp. 1835-1840. doi:10.1016/j.mcm.2010.12.049

25. Sastre J., Ibánez J., Defez E., Ruiz P. New Scaling-Squaring Taylor Algorithms for Computing the Matrix Exponential. *SIAM J. Sci. Comput*. 2015, vol. 37, pp. A439-A455. doi: 10.1137/090763202

26. Sastre J., Ibánez J., Defez E. Boosting the computation of the matrix exponential. *Applied mathematics and computation*. 2019, vol. 340, pp. 206-220. doi:10.1016/j.amc.2018.08.017

27. Caliari M., Zivcovich F. On-the-fly backward error estimate for matrix exponential approximation by Taylor algorithm. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2019, vol. 346, pp. 532-548. doi:10.1016/j.cam.2018.07.025

28. Belyayev Y.N. Method for calculating multiwave scattering by layered anisotropic media. *Wave Motion*. 2020, vol. 99, 102664. doi: 10.1016/j.wavemoti.2020.102664

29. Belyayev Y.N. On the calculation of functions of matrices. *Mathematical Notes*. 2013, vol. 94, No 2, pp. 177-184. doi: 10.1134/S0001434613070171

30. Born M., Wolf E. Osnovy optiki [Principles of optics]. Moscow: Nauka, 1970, 856 p.

31. Iveronova V.I., Revkevich G.P. Teoriya rasseyaniya rentgenovskih luchei [Theory of X-ray scattering]. Moscow: Moscow University, 1978, 278 p.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Financing. The study was not sponsored.
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution of the author is 100 %.