Карпов В.В., Семенов А.А. Методика расчета сферических куполов на прочность и устойчивость // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. С. 57–67. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.06

Karpov V.V., Semenov A.A. Method for calculating spherical domes for strength and buckling. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 6, pp. 57-67. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.06



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 6, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.06
УДК 539.3

МЕТОДИКА РАСЧЕТА СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ НА ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

В.В. Карпов, А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 05 сентября 2023 г.
Одобрена: 01 ноября 2023 г.
Принята к публикации:
31 ноября 2023 г.

Ключевые слова:

сферические оболочки, купола, устойчивость, прочность, математическая модель, метод Ритца, критическая нагрузка.

АННОТАЦИЯ

Рассматривается расширение области применения разработанных авторами моделей, алгоритмов, программного обеспечения и методик исследования оболочечных конструкций на сферические оболочки (купола). Для данного вида конструкций предложен способ обхода особенности в вершине купола за счет выбора модифицированных аппроксимирующих функций. Математическая модель является геометрически нелинейной, учитывает поперечные сдвиги и представлена в виде функционала полной потенциальной энергии деформации. Для сведения вариационной задачи к решению системы алгебраических уравнений применялся метод Ритца. Полученная система решается методом продолжения решения по наилучшему параметру с адаптивным выбором сетки. Алгоритм реализован в среде аналитических вычислений Maple. Выполнен расчет стального купола при разных способах закрепления контура, получены значения критической нагрузки потери устойчивости и нагрузки потери прочности. Построены график зависимости «нагрузка – прогиб» и поля прогибов в докритической и закритической стадиях. Поля показаны в локальной и глобальной декартовой системах координат. Продемонстрирована сходимость метода Ритца по значению критической нагрузки. Выполнена верификация методики путем сравнения решения тестовой задачи с известным решением, полученным Э.И. Григолюком и Е.А. Лопаницыным. Результаты сравнения позволяют судить о достоверности получаемых данных. Выявлено, что для рассматриваемого купола потеря прочности наступает значительно раньше потери устойчивости, в связи с чем может быть рекомендовано для ее проектирования выбрать марку стали с более высоким значением предела текучести. Шарнирно-неподвижное закрепление в данном случае дает более высокое значение предельно допустимой нагрузки.

© ПНИПУ

© **Карпов Владимир Васильевич** – д.т.н., проф., проф.-консультант кафедры информационных технологий, e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru.
Семенов Алексей Александрович – к.т.н., доц., зав. каф. информ. технологий, e-mail: sw.semenov@gmail.com.

Vladimir V. Karpov – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Computer Science, e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru.
Alexey A. Semenov – PhD in Technical Sciences, Head of the Department of Computer Science, e-mail: sw.semenov@gmail.com.





Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

METHOD FOR CALCULATING SPHERICAL DOMES FOR STRENGTH AND BUCKLING

V.V. Karpov, A.A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 05 September 2023
Approved: 01 November 2023
Accepted for publication:
31 November 2023

Keywords:

spherical shells, domes, buckling, strength, mathematical model, Ritz method, critical load.

ABSTRACT

The paper considers new applications of the models, algorithms, software and methods developed by the authors to study shell structures of spherical shells (domes). For this type of structures, a method has been proposed to bypass the singularity at the top of the dome by choosing modified approximating functions. The mathematical model is geometrically nonlinear; it takes into account transverse shears, and is presented as a functional of the total potential strain energy. To reduce the variational problem to solving a system of algebraic equations, the Ritz method was used. The resulting system is solved by the method of continuing the solution using the best parameter with an adaptive mesh selection. The algorithm is implemented in the Maple analytical computing environment. A steel dome was estimated using different methods of border fixing, the values of the critical buckling load and the limit stress load were obtained. A graph of the *load – deflection* relationship and the deflection fields in the subcritical and supercritical stages were constructed. Fields are shown in the local and global Cartesian coordinate systems. The convergence of the Ritz method in terms of the critical load value is demonstrated. The methodology was verified by comparing the solution to the test problem with the known solution obtained by E.I. Grigolyuk and E.A. Lopanitsyn. The comparison results demonstrate the reliability of the data obtained. It was revealed that for the dome under consideration, the loss of strength occurs much earlier than the buckling, and therefore it can be recommended to select a steel grade with a higher yield strength for its design. A simply support border condition in this case gives a higher value of the maximum permissible load.

© PNRPU

Введение

Оболочечные конструкции широко применяются в различных областях промышленности [1–5], в том числе и в строительстве для покрытия большепролетных сооружений. Наиболее часто используемый вид геометрии таких конструкций – сферическая оболочка (купол), исследованию процесса деформирования которой посвящено достаточно много работ [6–16].

Сферические оболочки применяются для решения различных прикладных задач [8; 12; 17–20] и исследуются как при статических воздействиях [14, 21–23], так и при динамических [11; 13; 17; 24–28]. Например, процесс деформирования оболочки при действии равномерно-распределенной нагрузки исследуется в работах [12; 23; 26; 28; 29].

Оболочечные конструкции могут быть выполнены как из изотропных [27; 29–32], так и из ортотропных материалов [25; 30; 31].

В работах [9–13; 29] рассматриваются оболочки при жестком закреплении контура, а в работах [10–14; 26; 31; 32] – при шарнирно-неподвижном. Влияние несовершенств конструкции на процесс ее деформирования исследуется в работах [21; 24; 26]. Прочность анализируется в работах [7–9], а устойчивость – в работах [14; 21–23; 27; 28; 33].

Математическая модель Кирхгофа – Лява используется в [9; 26; 30], а модель Тимошенко – Рейсснера – в работах [10; 27; 30; 31; 33].

В работе [21] показана важность учета нелинейности процесса деформирования оболочек из текстильно усиленного бетона (TRC). Помимо геометрической и физической нелинейности, рассматривается учет несовершенств и показано существенное снижение значения критической нагрузки при их наличии.

Tornabene et al. [32] проведен анализ свободных колебаний однослойных и многослойных изотропных композитных сферических оболочек. Показано сравнение между классическим и усовершенствованным методами GDQ и точным трехмерным решением.

В работе [15] рассмотрена математическая модель, позволяющая определять напряжённо-деформированное состояние сферической оболочки из титанового сплава ВТ1-0, внешняя нагрузка принята поперечной равномерно распределённой, действующей на внешнюю поверхность, среда принята действующей на внутреннюю поверхность оболочки. Получены нелинейные разрешающие уравнения расчёта сферической оболочки. Разработан алгоритм решения задачи наводороживания оболочек из титанового сплава.

Исследование нелинейного деформирования тонкостенных конструкций приводит к необходимости решения нелинейных систем уравнений. Основная сложность таких систем заключается в неустойчивости решения вблизи особых точек, соответствующих критическим нагрузкам, и возможности ветвления кривой равновесных состояний, то есть появлении точек бифуркации. Существует группа численных методов, позволяющих получать все точки кривой равновесных состояний (в отличие, например, от метода Ньютона), – это методы, основанные на продолжении решения по параметру. К ним следует отнести и метод последовательных нагружений,

предложенный В. В. Петровым [34], и метод продолжения решения по наилучшему параметру, детально описанный В.И. Шалашилиным и Е.Б. Кузнецовым [35].

Данная группа методов позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки потери устойчивости оболочек, исследовать их закритическое поведение [36–40].

Целью данной работы является расширение области применения разработанных авторами моделей, алгоритмов, программного обеспечения и методик исследования оболочечных конструкций на сферические купола.

1. Теория и методы

1.1. Математическая модель деформирования сферической оболочки

Будем рассматривать сферические оболочечные конструкции толщиной h и радиуса R (рис. 1), шарнирно-неподвижно или жестко закрепленные по контуру и находящиеся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки q. Нагрузка направлена по нормали к срединной поверхности.

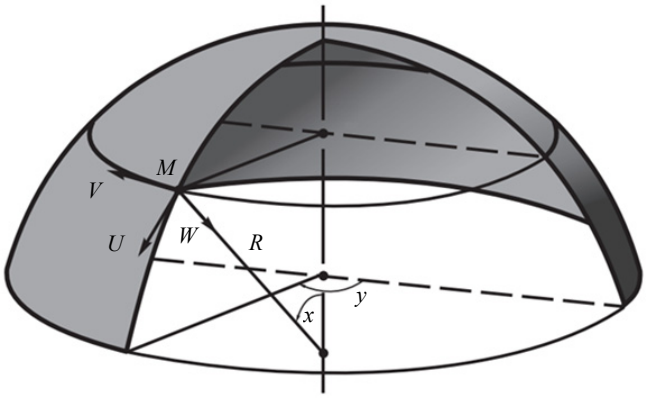


Рис. 1. Сферическая оболочка

Fig. 1. Spherical shell

Для сферической оболочки с радиусом R параметры Ляме принимают вид $A = R,\ B = R\sin x$, главный радиус кривизны $R = R_1 = R_2 = \text{const}$. Будем рассматривать геометрически нелинейный вариант модели, учитывающий поперечные сдвиги. Тогда геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки принимают вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB}V\frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2}\theta_1^{\,2},$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB}U\frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2}\theta_2^{\,2}, \qquad (1)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB}U\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB}V\frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1\theta_2,$$

$$\gamma_{xz} = k\,f(z)\left[\Psi_x - \theta_1\right],\ \gamma_{yz} = k\,f(z)\left[\Psi_y - \theta_2\right],$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right),\quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right),$$
$$k_x = \frac{1}{R_1},\quad k_y = \frac{1}{R_2},$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации сдвига в плоскостях $x\mathrm{O}y, x\mathrm{O}z, y\mathrm{O}z$; $U = U(x,y)$, $V = V(x,y), W = W(x,y)$ – неизвестные функции перемещений; $\Psi_x = \Psi_x(x,y), \Psi_y = \Psi_y(x,y)$ – неизвестные функции углов поворота нормали. Данные соотношения являются универсальными и могут использоваться для оболочек разного вида посредством указания нужных параметров Ламе и радиусов главных кривизн.

Геометрические соотношения для слоя, отстоящего на расстояние z от срединной поверхности, выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1,\ \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2,\ \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}. \qquad (2)$$

Функции изменения кривизн χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} для принятой модели принимают вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_y,\quad \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\Psi_x,$$
$$\chi_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\Psi_y\right)\right]. \qquad (3)$$

Функционал Лагранжа полной потенциальной энергии деформации оболочки, находящейся под действием механической нагрузки, является суммой работ внутренних и внешних сил, и для модели Тимошенко – Рейсснера принимает следующий вид:

$$E_s = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{0}^{b}\Big\{N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\left(N_{xy} + N_{yx}\right)\gamma_{xy} +$$
$$+M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + \left(M_{xy} + M_{yx}\right)\chi_{12} +$$
$$+Q_x\left(\Psi_x - \theta_1\right) + Q_y\left(\Psi_y - \theta_2\right) -$$
$$-2\left(P_x U + P_y V + qW\right)\Big\}ABdxdy. \qquad (4)$$

В дальнейшем будем рассматривать только поперечную компоненту нагрузки q, то есть $P_x = P_y = 0$.

Несмотря на то, что все рассуждения для удобства интерпретации представлены в размерных параметрах, в разработанной расчетной программе все вычисления выполняются в безразмерных [41]

$$\xi = \frac{x - a_1}{a - a_1},\quad \eta = \frac{y}{b},\quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB},\quad k_\xi = hk_x,\quad k_\eta = hk_y,$$

$$\bar{U}=\frac{aUA}{h^2},\quad \bar{V}=\frac{bVB}{h^2},\quad \bar{W}=\frac{W}{h},$$
$$\bar{\Psi}_x=\frac{\Psi_x aA}{h},\quad \bar{\Psi}_y=\frac{\Psi_y bB}{h},\qquad (5)$$
$$\bar{P}=\frac{a^4A^4q}{h^4E_1},\quad \bar{A}=\frac{aA}{h},\quad \bar{B}=\frac{bB}{h},\quad \bar{z}=\frac{z}{h}.$$

Это позволяет выровнять в системе уравнений порядок неизвестных переменных (что повышает устойчивость вычислительного процесса) и получить данные сразу для большого числа подобных оболочечных конструкций (рис. 2).

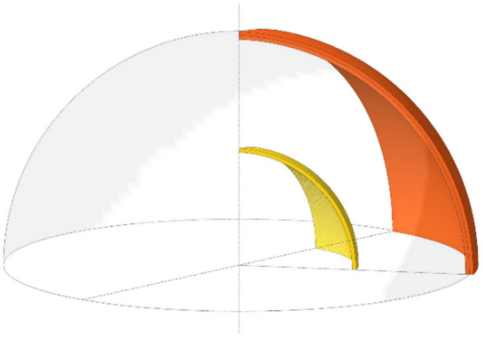


Рис. 2. Подобные сферические оболочки

Fig. 2. Similar spherical shells

1.2. Алгоритм решения

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки решается вариационная задача нахождения минимума функционала. Для этого к функционалу (4) применяется метод Ритца, и для решения задач в размерных параметрах представим искомые функции в виде

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{\sqrt{N}}U_{kl}X_1^kY_1^l,$$
$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{\sqrt{N}}V_{kl}X_2^kY_2^l,\quad W(x,y)=\sum_{k=1}^{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{\sqrt{N}}W_{kl}X_3^kY_3^l,$$
$$\Psi_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{\sqrt{N}}\Psi_{xkl}X_4^kY_4^l,\qquad (6)$$
$$\Psi_y(x,y)=\sum_{k=1}^{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{\sqrt{N}}\Psi_{ykl}X_5^kY_5^l,$$

где $U_{kl},V_{kl},W_{kl},\Psi_{xkl},\Psi_{ykl}$ – неизвестные числовые коэффициенты, а $X_1^k-X_5^k$, $Y_1^l-Y_5^l$ – известные аппроксимирующие функции аргументов x и y, удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки, N – количество членов разложения. В соотношениях (6), чтобы предусмотреть все возможные сочетания выбранных аппроксимирующих функций X^k,Y^l, общее количество слагаемых должно соответствовать правилу $N=n^2$, где n – целое положительное число.

Расчет сферических куполов требует выбора специальных аппроксимирующих функций вдоль оси x (безразмерная ось ξ), поскольку необходимо избежать особенности в вершине купола. В связи с этим область конструкции будем определять в пределах от $-a$ до a, притом функции возьмем в виде

$$X_1^k=X_2^k=X_3^k=X_5^k=\sin\left(k\pi\frac{x+a}{2a}\right),$$
$$X_4^k=\cos\left(k\pi\frac{x+a}{2a}\right).\qquad (7)$$

А вдоль окружной координаты аппроксимирующие функции для куполов должны удовлетворять условию периодичности, поэтому возьмем их в виде

$$Y_1^l=Y_2^l=Y_3^l=Y_4^l=Y_5^l=1,\cos\left(2\pi\frac{y}{b}\right),$$
$$\sin\left(2\pi\frac{y}{b}\right),\cos\left(4\pi\frac{y}{b}\right),\sin\left(4\pi\frac{y}{b}\right).\qquad (8)$$

Здесь функции вдоль окружной координаты задаются не зависимостью от l, а берутся в виде ряда. И в безразмерном виде получим

$$\bar{X}_1^k=\bar{X}_2^k=\bar{X}_3^k=\bar{X}_5^k=\sin\left(k\pi\frac{\xi+1}{2}\right),$$
$$\bar{X}_4^k=\cos\left(k\pi\frac{\xi+1}{2}\right),\qquad (9)$$
$$\bar{Y}_1^l=\bar{Y}_2^l=\bar{Y}_3^l=\bar{Y}_4^l=\bar{Y}_5^l=1,\cos(2\pi\eta),$$
$$\sin(2\pi\eta),\cos(4\pi\eta),\sin(4\pi\eta).$$

В случае жесткого закрепления для сферических куполов необходимо взять

$$X_1^k=X_2^k=X_3^k=X_4^k=X_5^k=\sin\left(k\pi\frac{x+a}{2a}\right),\qquad (10)$$
$$Y_1^l=Y_2^l=Y_3^l=Y_4^l=Y_5^l=$$
$$=1,\cos\left(2\pi\frac{y}{b}\right),\ \sin\left(2\pi\frac{y}{b}\right),\cos\left(4\pi\frac{y}{b}\right),\sin\left(4\pi\frac{y}{b}\right),$$
$$\bar{X}_1^k=\bar{X}_2^k=\bar{X}_3^k=\bar{X}_4^k=\bar{X}_5^k=\sin\left(k\pi\frac{\xi+1}{2}\right),$$
$$\bar{Y}_1^l=\bar{Y}_2^l=\bar{Y}_3^l=\bar{Y}_4^l=\bar{Y}_5^l=$$
$$=1,\cos(2\pi\eta),\sin(2\pi\eta),\cos(4\pi\eta),\sin(4\pi\eta).$$

Получаемая в итоге система нелинейных алгебраических уравнений решается методом продолжения решения по наилучшему параметру (в качестве наилучшего параметра берется длина дуги кривой равновесных состояний в пространстве неизвестных коэффициентов). Получаемые в процессе использования метода задачи Коши решаются методом Эйлера.

В качестве критерия потери устойчивости оболочек будем использовать критерий А.А. Ляпунова: нагрузка, при которой малому изменению нагрузки соответствует существенное изменение прогиба, считается критической нагрузкой. Практически строится кривая «нагрузка q – прогиб W » в какой-то характерной точке конструкции, например, в центре оболочки.

При использовании алгоритма, основанного на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру, экстремумы кривой в пространстве состояний (соответствующие критическим нагрузкам) определяются из условия $\det(J) = 0$.

Следует отметить, что при использовании метода продолжения решения по наилучшему параметру обход особых точек не требует смены параметра и происходит автоматически, данный процесс детально описан в [42].

Однако следует также отметить, что величину шага по длине дуги кривой равновесных состояний следует выбирать адаптивно. Чем больше разница между векторами приращений числовых коэффициентов, тем менее устойчив вычислительный процесс и больше погрешность решения. Поэтому на каждом шаге решения вычисляется угол между векторами приращений с прошлого и текущего шага, и если значение угла превышает заданный параметр точности Δa_1, то происходит возвращение процесса на шаг назад и расчет нового вектора уже с уменьшающим его длину коэффициентом Δa_k. Предлагается брать коэффициент $\Delta a_k = 1/2$.

Также здесь вводится и второе ограничение по углу, значение которого Δa_2 берется в два раза меньше, чем первое установленное ограничение ($\Delta a_2 = \Delta a_1 / 2$). В том случае, если значение угла находится в диапазоне между этими двумя значениями Δa_1 и Δa_2, то выбранный коэффициент при следующем шаге принимается $\Delta a_k = 1$. А если значение угла меньше Δa_2, то на следующем шаге $\Delta a_k = 2$.

Такой подход позволяет исследовать прочность и устойчивость оболочек, обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб», получать значения верхней и нижней критических нагрузок, находить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции [42].

2. Расчеты

В данном параграфе приводятся результаты исследования прочности и устойчивости замкнутого сферического купола, что показывает возможность применения разработанной математической модели, алгоритма и программного обеспечения для исследования конструкций данного вида.

Для расчета сферических куполов будем использовать аппроксимирующие функции (9), (10).

Для верификации предложенного подхода проведем сравнение результатов исследования устойчивости сферической оболочки (купола) с решением, полученным Э.И. Григолюком и Е.А. Лопаницыным [43]. В этой работе рассматривался сферический пологий купол, жестко закрепленный по контуру и находящийся под действием равномерного поперечного давления с параметрами $R/h = 100$, углом разворота $a = 19° = 0{,}3316$ рад, материал оболочки – сталь с $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$. Также авторами вводится параметр тонкостенности оболочки

$$\hat{\mu} = \left[12\left(1-\mu^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}\left[a^2/Rh\right]^{\frac{1}{2}} = 6 .$$

Э.И. Григолюком и Е.А. Лопаницыным для описания процесса деформирования купола используется уравнение Маргерра в осесимметричной постановке (учитывается геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги в радиальном направлении). Решение этих уравнений строится методом Релея – Ритца с аппроксимацией радиальных перемещений и прогиба купола суммами по функциям Бесселя. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений, получающееся методом Релея – Ритца, ищется методом продолжения решения по наилучшему параметру (длине дуги равновесных состояний). Для оценки результатов вводится безразмерный параметр нагрузки $q^* = \left[3\left(1-\mu^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[qR^2/2Eh^2\right]$ и безразмерный параметр прогиба $w_0^* = W/h$.

В работе [43] для данного примера получено значение критической нагрузки $q_{cr}^* = 0{,}972$, потеря устойчивости происходит хлопком. Глубина вмятины вблизи вершины купола w_0^* наибольшая, и плавно понижается к контуру купола. До потери устойчивости величина прогиба составляла $w_0^* = 0{,}49$, после потери устойчивости он становится равным 10,55 (рис. 3).

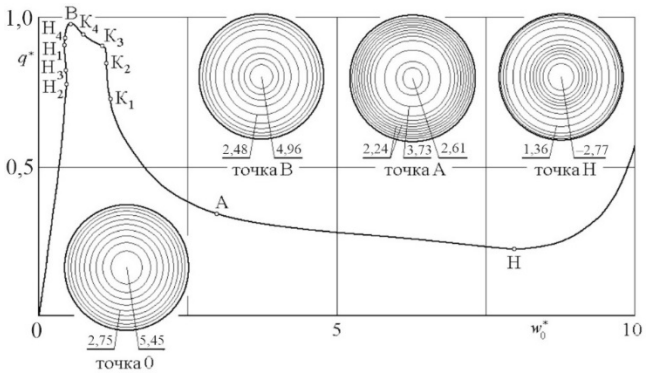


Рис. 3. Траектория нагружения в случае осесимметричного деформирования рассматриваемого купола [43]

Fig. 3. Loading path in the case of axisymmetric deformation of the considered dome [43]

В нашем случае при аппроксимации всех неизвестных функций вдоль окружной координаты рядом $1, \cos(2\pi\eta), \sin(2\pi\eta), \cos(4\pi\eta),$ где $\eta = \frac{y}{2\pi}$, были получены значения критической нагрузки, показанные в таблице.

Сравнение полученных значений критических нагрузок

Comparison of the obtained values of buckling loads

N	Шарнирно-неподвижное закрепление				Жесткое закрепление				
	Прочность	Устойчивость			Прочность	Устойчивость			
	q_{pr}, МПа	$\bar{P}$	q_{cr}, МПа	q^*_{cr}	q_{pr}, МПа	$\bar{P}$	q_{cr}, МПа	q^*_{cr}	q^*_{cr} [43]
4	4.29	168.99	29.35	1.155	2.27	117.44	20.39	0.802	0.972
9	4.48	125.62	21.82	0.858	3.39	107.67	18.70	0.735	
16	4.50	114.08	19.81	0.779	3.38	131.13	22.78	0.896	

Будем рассматривать сферический купол и при жестком закреплении, и при шарнирно-неподвижном. Для сравнения результатов, полученных автором, значения критических нагрузок также дублируются с переводом в параметр q^*_{cr}. Для тестовой задачи разница в значениях составила около 7 %. Однако более низкое значение критической нагрузки лучше согласуется с результатами экспериментов, также описанными в работе: согласно экспериментам, диапазон q^*_{cr} составляет от 0,28 до 0,9. Кроме того, данное расхождение может быть объяснено использованием разных математических моделей и выбранными параметрами точности численных методов.

На рис. 4 показан график «нагрузка – прогиб» для рассматриваемого варианта купола при разных значениях N, совмещенный с графиком из работы [43]. Из рисунка видно, что при $N = 16$ кривые уже достаточно хорошо согласуются.

На рис. 5 показан исследуемый сферический купол в недеформированном состоянии в докритический момент и в закритический момент. Помимо фрагмента поля прогибов и его вида сбоку (в безразмерных параметрах), показано изображение купола в глобальной декартовой системе координат (в размерных параметрах).

Также для рассматриваемого купола была проведена оценка невыполнения условий прочности. Оценка производилась по критерию Мизеса: на рис. 6 показаны поля критерия и соответствующие им нагрузки при разных значениях N. Учитывая, что для данной конструкции начало невыполнения условий прочности произойдет до потери устойчивости, может быть рекомендовано для ее проектирования выбрать марку стали с более высоким значением предела текучести.

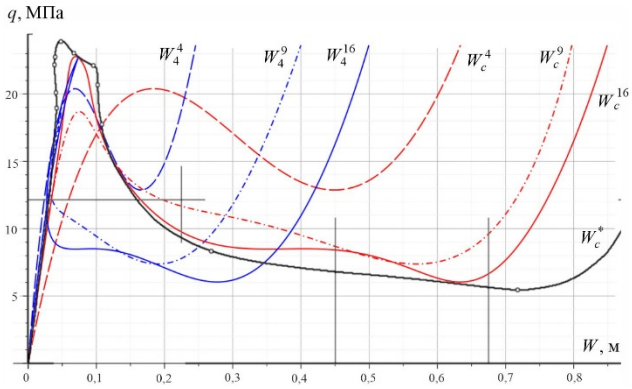


Рис. 4. График «нагрузка – прогиб» для рассматриваемого купола

Fig. 4. Graph load – deflection for the considered dome

Заключение

Сравнение результатов расчета тестовой задачи с известным результатом Э.И. Григолюка и Е.А. Лопаницына позволяет судить о достоверности полученных данных. Математическая модель, алгоритм расчета и методика исследования сферических оболочек на прочность и устойчивость могут быть использованы в организациях, занимающихся проектированием большепролетных строительных сооружений, в научных исследованиях и учебном процессе.

Выявлено, что для рассматриваемой конструкции потеря прочности наступает значительно раньше потери устойчивости, в связи с чем может быть рекомендовано для ее проектирования выбрать марку стали с более высоким значением предела текучести. Шарнирно-неподвижное закрепление в данном случае дает более высокое значение предельно допустимой нагрузки.

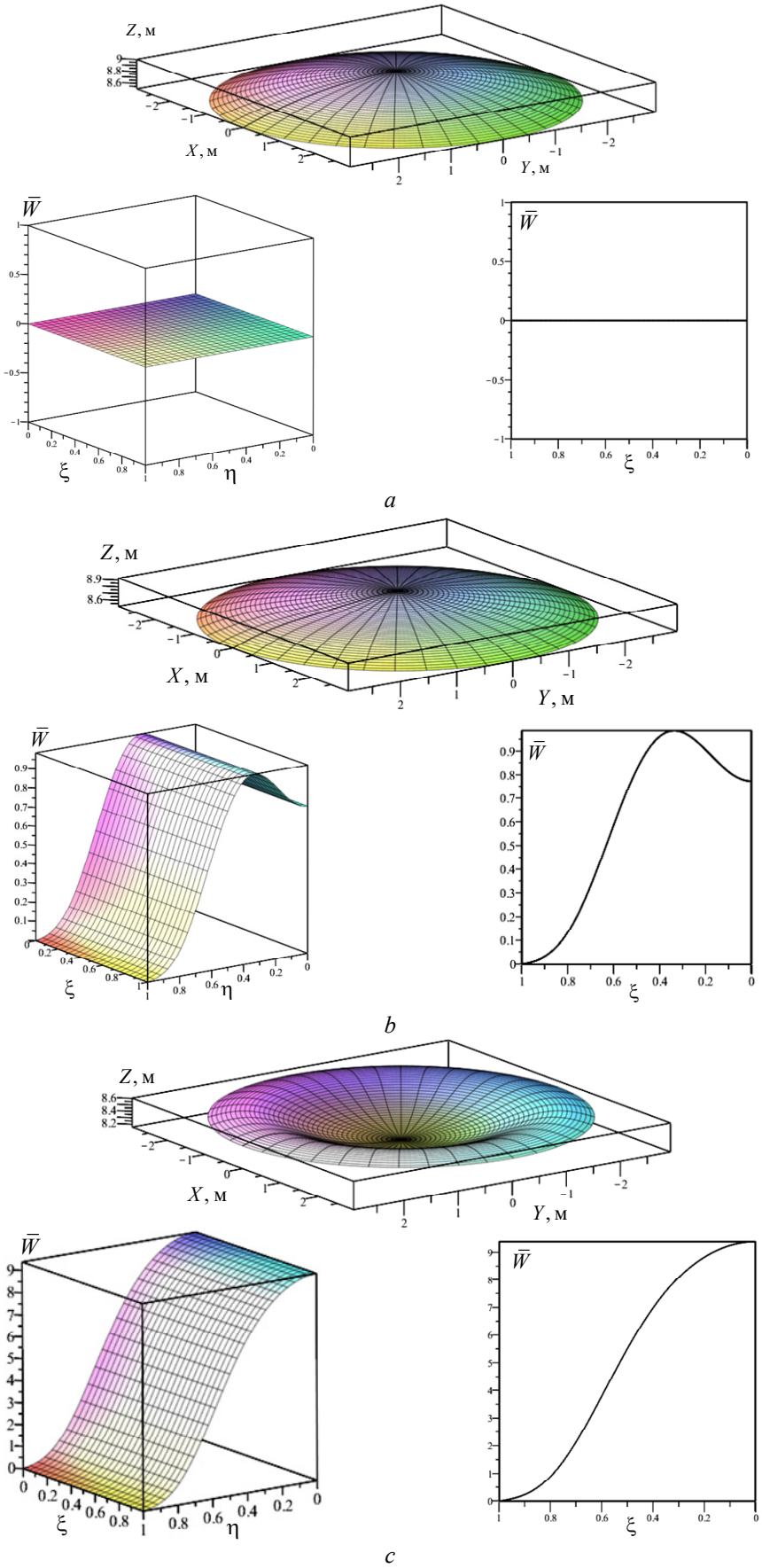
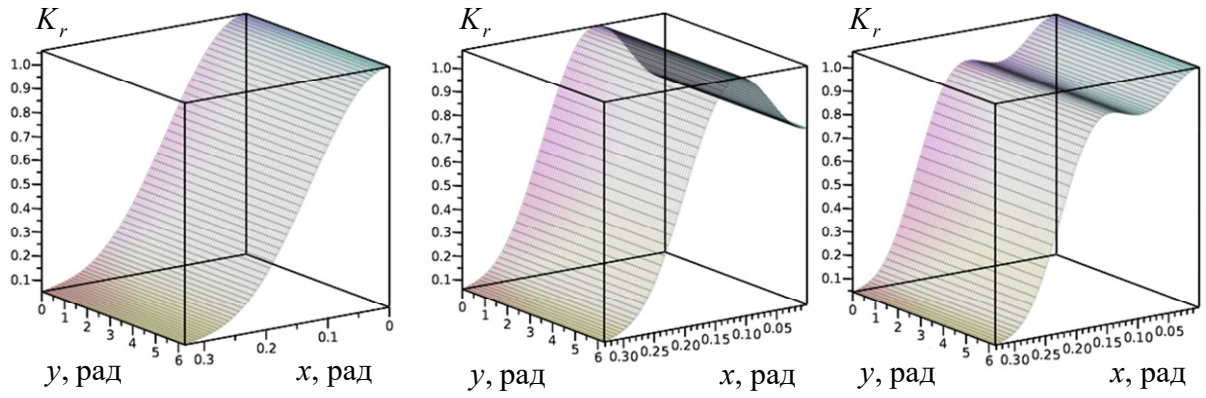


Рис. 5. Сферическая оболочка в недеформированном (*a*), докритическом (при нагрузке 0,896 МПа) (*b*) и в закритическом состояниях (при нагрузке 0,896 МПа) (*c*)

Fig. 5. Spherical shell in undeformed (*a*), subcritical (at a load of 0.896 MPa) (*b*) and in supercritical states (at a load of 0.896 MPa) (*c*)



$N = 4$, $q_{pr} = 2{,}27$ Мпа $N = 9$, $q_{pr} = 3{,}39$ МПа $N = 16$, $q_{pr} = 3{,}38$ МПа

Рис. 6. Поле критерия Мизеса при разных значениях N при достижении предельно допустимой нагрузки

Fig. 6. Von Mises criterion at different values of N when the maximum allowable load is reached

Библиографический список

1. Сысоев Е.О., Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е. Численные исследования колебаний композитных тонкостенных цилиндрических разомкнутых оболочек // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2022. – № 3 (59). – С. 85–90. DOI: 10.17084/20764359-2022-59-85. – EDN: NOXYKQ.

2. Бакулин В.Н., Недбай А.Я. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами кусочно-постоянной толщины, при действии осевой нагрузки // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2020. – Т. 495, № 1. – С. 39–45. DOI: 10.31857/S268674002006005X. – EDN: NMDVJS

3. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2022. – Vol. 29, no. 26. – P. 5651–5665. DOI: 10.1080/15376494.2021.1961952. – EDN: XMUWBL.

4. Kosytsyn S., Akulich V. Influence of stage-by-stage construction of a cylindrical shell on stress-strain states of an existing nearby shell in a soil body // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Vol. 18, no. 2. – P. 112–120. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-2-112-120. – EDN: HTENQD.

5. Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 2(372). – С. 207–216. DOI: 10.15372/PMTF20220220. – EDN: EBPIST.

6. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000-2010 // Open Journal of Composite Materials. – 2012. – Vol. 2, no. 3. – P. 61–86. DOI: 10.4236/ojcm.2012.23009

7. Mellor P.B. The ultimate strength of thin-walled shells and circular diaphragms subjected to hydrostatic pressure // International Journal of Mechanical Sciences. – 1960. – Vol. 1, no. 2–3. – P. 216–228. DOI: 10.1016/0020-7403(60)90041-2

8. Research on burst pressure for thin-walled elbow and spherical shell made of strength differential materials / L. Yan, Z. Junhai, X. Ergang, C. Xueye // Materials Research Innovations. – 2015. – Vol. 19, no. 5. – P. 80–87. DOI: 10.1179/1432891715Z.0000000001340

9. Bleyer J., de Buhan P. A numerical approach to the yield strength of shell structures // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2016. – Vol. 59. – P. 178–194. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.03.002

10. Hamed E., Bradford M.A., Gilbert R.Ian Nonlinear long-term behaviour of spherical shallow thin-walled concrete shells of revolution // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47, no. 2. – P. 204–215. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.09.027

11. A unified accurate solution for vibration analysis of arbitrary functionally graded spherical shell segments with general end restraints / Z. Su, G. Jin, S. Shi, T. Ye // Composite Structures. – 2014. – Vol. 111. – P. 271–284. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.01.006

12. Sengupta J., Ghosh A., Chakravorty D. Progressive failure analysis of laminated composite cylindrical shell roofs // Journal of Failure Analysis and Prevention. – 2015. – Vol. 15, no. 3. – P. 390–400. DOI: 10.1007/s11668-015-9951-6

13. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – Vol. 69. – P. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026

14. Yildirim B., Yukseler R.F. Effect of compressibility on nonlinear buckling of simply supported polyurethane spherical shells subjected to an apical load // Journal of Elastomers and Plastics. – 2011. – Vol. 43, no. 2. – P. 167–187. DOI: 10.1177/0095244310393930

15. Treshchev A., Kuznetsova V. Study of the influence of the kinetics of hydrogen saturation on the stress-deformed state of a spherical shell made from titanium alloy // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Vol. 18, no. 2. – P. 121–130. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-2-121-130

16. Chaotic dynamic buckling of rectangular spherical shells under harmonic lateral load / J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko // Computers & Structures. – 2017. – Vol. 191. – P. 80–99. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.06.011

17. Wind-induced dynamic behavior and its load estimation of a single-layer latticed dome with a long span / Y. Uematsu, O. Kuribara, M. Yamada, A. Sasaki, T. Hongo // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2001. – Vol. 89, no. 14–15. – P. 1671–1687. DOI: 10.1016/S0167-6105(01)00125-8

18. Al-Hashimi H., Seibi A.C., Molki A. Experimental study and numerical simulation of domes under wind load // Proceedings of the ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Division Conference. – Prague, Czech Republic: ASME, 2009. – P. 519–528. DOI: 10.1115/PVP2009-77801

19. Li Y.-Q., Tamura Y. Wind-resistant analysis for large-span single-layer reticulated shells // International Journal of Space Structures. – 2004. – Vol. 19, no. 1. – P. 47–59. DOI: 10.1260/026635104322988362

20. Sun Y., Qiu Y., Wu Y. Modeling of wind pressure spectra on spherical domes // International Journal of Space Structures. – 2013. – Vol. 28, no. 2. – P. 87–100. DOI: 10.1260/0266-3511.28.2.87

21. Prediction of the buckling behaviour of thin cement composite shells: Parameter study / E. Verwimp, T. Tysmans, M. Mollaert, M. Wozniak // Thin-Walled Structures. – 2016. – Vol. 108. – P. 20–29. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.011

22. Iskhakov I., Ribakov Y. Design principles and analysis of thin concrete shells, domes and folders. – Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016. – 166 p.

23. Buckling of spherical shells subjected to external pressure: A comparison of experimental and theoretical data / J. Zhang, M. Zhang, W. Tang, W. Wang, M. Wang // Thin-Walled Structures. – 2017. – Vol. 111. – P. 58–64. DOI: 10.1016/j.tws.2016.11.012

24. Dinkler D., Pontow J. A model to evaluate dynamic stability of imperfection sensitive shells // Computational Mechanics. – 2006. – Vol. 37, no. 6. – P. 523–529. DOI: 10.1007/s00466-005-0729-7

25. Liu R.-H., Wang F. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated cylindrically orthotropic shallow spherical shells // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). – 1998. – Vol. 68, no. 6. – P. 375–384. DOI: 10.1007/s004190050172

26. Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H. Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells // Composite Structures. – 2013. – Vol. 96. – P. 384–395. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.10.009

27. Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H. Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels // Thin-Walled Structures. – 2006. – Vol. 44, no. 3. – P. 321–333. DOI: 10.1016/j.tws.2006.03.004

28. Bich D.H., Dung D.V., Hoa L.K. Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94, no. 9. – P. 2952–2960. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.04.012

29. Ganapathi M. Dynamic stability characteristics of functionally graded materials shallow spherical shells // Composite Structures. – 2007. – Vol. 79, no. 3. – P. 338–343. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.01.012

30. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // International Applied Mechanics. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 613–687. DOI: 10.1007/s10778-012-0544-8

31. Shin D.K. Large amplitude free vibration behavior of doubly curved shallow open shells with simply-supported edges // Computers & Structures. – 1997. – Vol. 62, no. 1. – P. 35–49. DOI: 10.1016/S0045-7949(96)00215-5

32. Numerical and exact models for free vibration analysis of cylindrical and spherical shell panels / F. Tornabene, S. Brischetto, N. Fantuzzi, E. Viola // Composites Part B: Engineering. – 2015. – Vol. 81. – P. 231–250. DOI: 10.1016/j.compositesb.2015.07.015

33. Kumar L.R., Datta P.K., Prabhakara D.L. Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading // Composite Structures. – 2003. – Vol. 60, no. 2. – P. 171–181. DOI: 10.1016/S0263-8223(02)00314-8

34. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.

35. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

36. Коломоец А.А., Модин А.С. Применение методов дифференцирования и продолжения по параметру // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 1. – С. 4–15.

37. Magisano D., Garcea G. Sensitivity analysis to geometrical imperfections in shell buckling via a mixed generalized path-following method // Thin-Walled Structures. – 2022. – Vol. 170. – P. 108643. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108643

38. Gavryushin S.S., Nikolaeva A.S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures // Mechanics of Solids. – 2016. – Vol. 51, no. 3. – P. 339–348. DOI: 10.3103/S0025654416030110

39. Nonlinear thermoelastic analysis of shell structures: solid-shell modelling and high-performing continuation method / F.S. Liguori, D. Magisano, L. Leonetti, G. Garcea // Composite Structures. – 2021. – Vol. 266. – P. 113734. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113734

40. On the specifics of behavior of the sandwich plate composite facing layers under local loading / V.N. Paimushin, R.A. Kayumov, F.R. Shakirzyanov, S.A. Kholmogorov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2020. – No. 4. – P. 152–164. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.13

41. Карпов В.В., Семенов А.А. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07. – EDN: UJWYKT.

42. Семенов А.А., Леонов С.С. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2019. – Т. 161, № 2. – С. 230–249. DOI: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249. – EDN: AZRWTY.

43. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. – 2008. – № 1. – С. 233–246.

References

1. Sysoev E.O., Dobryshkin A.Y., Sysoev O.E. Numerical Investigations of Vibrations of Composite Thin-Wall Cylindrical Open Shells. *Scholarly Notes of Komsomolsk-na-Amure State Technical University*, 2022, No. 3 (59), pp. 85–90, doi: 10.17084/20764359-2022-59-85.

2. Bakulin V.N., Nedbay A.Ya. Dynamic Stability of a Cylindrical Shell Reinforced by Longitudinal Ribs of a Piecewise-Constant Thickness under Axial Loading. *Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, Technical Sciences*, 2020, Vol. 495, No. 1, pp. 39–45, doi: 10.31857/S268674002006005X.

3. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2022, Vol. 29, No. 26, pp. 5651–5665, doi: 10.1080/15376494.2021.1961952.

4. Kosytsyn S., Akulich V. Influence of Stage-by-Stage Construction of a Cylindrical Shell on Stress-Strain States of an Existing Nearby Shell in a Soil Body. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2022, Vol. 18, No. 2, pp. 112–120, doi: 10.22337/2587-9618-2022-18-2-112-120.

5. Zheleznov L.P., Ser'eznov A.N. Investigation of Nonlinear Deformation and Stability of a Composite Shell under Pure Bending and Internal Pressure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022, Vol. 63, No. 2 (372), pp. 207–216, doi: 10.15372/PMTF20220220.

6. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000-2010. *Open Journal of Composite Materials*, 2012, Vol. 2, No. 3, pp. 61–86, doi: 10.4236/ojcm.2012.23009.

7. Mellor P.B. The ultimate strength of thin-walled shells and circular diaphragms subjected to hydrostatic pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1960, Vol. 1, No. 2–3, pp. 216–228, doi: 10.1016/0020-7403(60)90041-2.

8. Yan L., Junhai Z., Ergang X., Xueye C. Research on burst pressure for thin-walled elbow and spherical shell made of strength differential materials. *Materials Research Innovations*, 2015, Vol. 19, No. 5, pp. 80–87, doi: 10.1179/1432891715Z.0000000001340.

9. Bleyer J., Buhan P. de. A numerical approach to the yield strength of shell structures. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2016, Vol. 59, pp. 178–194, doi: 10.1016/j.euromechsol.2016.03.002.

10. Hamed E., Bradford M.A., Ian Gilbert R. Nonlinear long-term behaviour of spherical shallow thin-walled concrete shells of revolution. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, Vol. 47, No. 2, pp. 204–215, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.09.027.

11. Su Z., Jin G., Shi S., Ye T. A unified accurate solution for vibration analysis of arbitrary functionally graded spherical shell segments with general end restraints. *Composite Structures*, 2014, Vol. 111, pp. 271–284, doi: 10.1016/j.compstruct.2014.01.006.

12. Sengupta J., Ghosh A., Chakravorty D. Progressive Failure Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shell Roofs. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2015, Vol. 15, No. 3, pp. 390–400, doi: 10.1007/s11668-015-9951-6.

13. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, Vol. 69, pp. 72–84, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026.

14. Yildirim B., Yukseler R.F. Effect of Compressibility on Nonlinear Buckling of Simply Supported Polyurethane Spherical Shells Subjected to an Apical Load. *Journal of Elastomers and Plastics*, 2011, Vol. 43, No. 2, pp. 167–187, doi: 10.1177/0095244310393930.

15. Treshchev A., Kuznetsova V. Study of the Influence of the Kinetics of Hydrogen Saturation on the Stress-Deformed State of a Spherical Shell Made from Titanium Alloy. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2022, T. 18, № 2, C. 121–130, doi: 10.22337/2587-9618-2022-18-2-121-130.

16. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Chaotic dynamic buckling of rectangular spherical shells under harmonic lateral load. *Computers & Structures*, 2017, Vol. 191, pp. 80–99, doi: 10.1016/j.compstruc.2017.06.011.

17. Uematsu Y., Kuribara O., Yamada M., Sasaki A., Hongo T. Wind-induced dynamic behavior and its load estimation of a single-layer latticed dome with a long span. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2001, Vol. 89, No. 14–15, pp. 1671–1687, doi: 10.1016/S0167-6105(01)00125-8.

18. Al-Hashimi H., Seibi A.C., Molki A. Experimental Study and Numerical Simulation of Domes Under Wind Load .Proceedings of the ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Division Conference. – Prague, Czech Republic: ASME, 2009. – pp. 519–528. – doi: 10.1115/PVP2009-77801.

19. Li Y.-Q., Tamura Y. Wind-Resistant Analysis for Large-Span Single-Layer Reticulated Shells. *International Journal of Space Structures*, 2004, Vol. 19, No. 1, pp. 47–59, doi: 10.1260/026635104322988362.

20. Sun Y., Qiu Y., Wu Y. Modeling of Wind Pressure Spectra on Spherical Domes. *International Journal of Space Structures*, 2013, Vol. 28, No. 2, pp. 87–100, doi: 10.1260/0266-3511.28.2.87.

21. Verwimp E., Tysmans T., Mollaert M., Wozniak M. Prediction of the buckling behaviour of thin cement composite shells: Parameter study. *Thin-Walled Structures*, 2016, Vol. 108, pp. 20–29, doi: 10.1016/j.tws.2016.07.011.

22. Iskhakov I., Ribakov Y. Design principles and analysis of thin concrete shells, domes and folders, Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016., 166 p.

23. Zhang J., Zhang M., Tang W., Wang W., Wang M. Buckling of spherical shells subjected to external pressure: A comparison of experimental and theoretical data. *Thin-Walled Structures*, 2017, Vol. 111, pp. 58–64, doi: 10.1016/j.tws.2016.11.012.

24. Dinkler D., Pontow J. A model to evaluate dynamic stability of imperfection sensitive shells. *Computational Mechanics*, 2006, Vol. 37, No. 6, pp. 523–529, doi: 10.1007/s00466-005-0729-7.

25. Liu R.-H., Wang F. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated cylindrically orthotropic shallow spherical shells. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 1998, Vol. 68, No. 6, pp. 375–384, doi: 10.1007/s004190050172.

26. Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H. Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells. *Composite Structures*, 2013, Vol. 96, pp. 384–395, doi: 10.1016/j.compstruct.2012.10.009.

27. Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H. Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels. *Thin-Walled Structures*, 2006, Vol. 44, No. 3, pp. 321–333, doi: 10.1016/j.tws.2006.03.004.

28. Bich D.H., Dung D.V., Hoa L.K. Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects. *Composite Structures*, 2012, Vol. 94, No. 9, pp. 2952–2960, doi: 10.1016/j.compstruct.2012.04.012.

29. Ganapathi M. Dynamic stability characteristics of functionally graded materials shallow spherical shells.

Composite Structures, 2007, Vol. 79, No. 3, pp. 338–343, doi: 10.1016/j.compstruct.2006.01.012.

30. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *International Applied Mechanics*, 2012, Vol. 48, No. 6, pp. 613–687, doi: 10.1007/s10778-012-0544-8.

31. Shin D.K. Large amplitude free vibration behavior of doubly curved shallow open shells with simply-supported edges. *Computers & Structures*, 1997, Vol. 62, No. 1, pp. 35–49, doi: 10.1016/S0045-7949(96)00215-5.

32. Tornabene F., Brischetto S., Fantuzzi N., Viola E. Numerical and exact models for free vibration analysis of cylindrical and spherical shell panels. *Composites Part B: Engineering*, 2015, Vol. 81, pp. 231–250, doi: 10.1016/j.compositesb.2015.07.015.

33. Kumar L.R., Datta P.K., Prabhakara D.L. Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading. *Composite Structures*, 2003, Vol. 60, No. 2, pp. 171–181, doi: 10.1016/S0263-8223(02)00314-8.

34. Petrov V.V. The method of successive loadings in the nonlinear theory of plates and shells, Saratov: SGU, 1975, 119 p.

35. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Method for continuing the solution with respect to a parameter and the best parameterization (in applied mathematics and mechanics), Moscow: Editorial URSS, 1999, 222 p.

36. Kolomoets A.A., Modin A.S. Application of the Differentiation Method by the Parameter and the Continuation Method by the Parameter. *Mathematical modeling, computer and natural experiment in natural sciences*, 2017, No. 1, pp. 4–15.

37. Magisano D., Garcea G. Sensitivity analysis to geometrical imperfections in shell buckling via a mixed generalized path-following method. *Thin-Walled Structures*, 2022, Vol. 170, pp. 108643, doi: 10.1016/j.tws.2021.108643.

38. Gavryushin S.S., Nikolaeva A.S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures. *Mechanics of Solids*, 2016, Vol. 51, No. 3, pp. 339–348, doi: 10.3103/S0025654416030110.

39. Liguori F.S., Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Nonlinear thermoelastic analysis of shell structures: solid-shell modelling and high-performing continuation method. *Composite Structures*, 2021, Vol. 266, pp. 113734, doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113734.

40. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Kholmogorov S.A. On the specifics of behavior of the sandwich plate composite facing layers under local loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, No. 4, pp. 152–164, doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.13.

41. Karpov V.V., Semenov A.A. Bezrazmernye parametry v teorii podkreplennyh obolochek [Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, No. 3, pp. 74–94, doi: 10.15593/perm.mech/2015.3.07, EDN: UJWYKT.

42. Semenov A.A., Leonov S.S. Metod nepreryvnogo prodolzhenija reshenija po nailuchshemu parametru pri raschete obolochechnyh konstrukcij [The Continuous Method of Solution Continuation with Respect to the Best Parameter in the Calculation of Shell Structures]. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Serija: Fiziko-matematicheskie nauki, 2019, Vol. 161, No. 2, pp. 230–249, doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249, EDN: AZRWTY.

43. Grigoljuk E.I., Lopanicyn E.A. Vlijanie osesimmetrichnyh nachal'nyh nepravil'nostej sfericheskoj obolochki na ee kriticheskuju nagruzku [The influence of axisymmetric initial irregularities of a spherical shell on its critical load]. Izvestija Moskovskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta MAMI, 2008, No. 1, pp. 233–246.

Финансирование. Работа не имела спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Funded. The work was not sponsored.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.