Прокудин А.Н. Влияние переменного модуля Юнга на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием полого цилиндра с закрепленными торцами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. С. 91–103. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.09

Prokudin A.N. Influence of variable Young's modulus on residual stresses induced by rotational autofrettage of a tube with fixed ends. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 6, pp. 91-103. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.09

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА
№ 6, 2023
PNRPU MECHANICS BULLETIN
https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.09
УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО МОДУЛЯ ЮНГА НА ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ РОТАЦИОННЫМ АВТОФРЕТИРОВАНИЕМ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ТОРЦАМИ

А.Н. Прокудин

Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 06 октября 2023 г.
Одобрена: 17 ноября 2023 г.
Принята к публикации: 31 ноября 2023 г.

Ключевые слова:

ротационное автофретирование, упругопластичность, модуль Юнга при разгрузке, изотропное упрочнение, неоднородный материал.

АННОТАЦИЯ

Технология автофретирования предназначена для упрочнения полых деталей цилиндрической и сферической формы и обычно состоит из одного цикла нагрузки-разгрузки. На первой стадии заготовка нагружается с тем расчетом, чтобы некоторая ее часть перешла в пластическое состояние. В ходе разгрузки в окрестности внутренней поверхности заготовки формируется поле остаточных сжимающих напряжений. Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию процесса ротационного автофретирования полой цилиндрической заготовки с закрепленными торцами. Постановка задачи основана на теории малых упругопластических деформаций, условии пластичности Треска и ассоциированном с ним законе течения. Предполагается, что на стадии нагрузки материал цилиндра следует линейно-экспоненциальному закону изотропного упрочнения, а при разгрузке ведет себя как чисто упругое тело. Исследуется эффект снижения модуля Юнга при разгрузке в результате предварительного пластического деформирования и его влияние на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием цилиндра. Для количественного описания падения модуля Юнга используется экспоненциальная модель с насыщением. Для стадии нагрузки получено точное аналитическое решение на основе *W*-функции Ламберта. Расчет остаточных напряжений в цилиндре осуществляется с помощью метода Рунге – Кутты. В качестве примера рассмотрены материалы, у которых достаточно ярко выражено падение модуля Юнга: алюминиевый сплав АА6022, сталь DP980 и марганцевая сталь. Установлено, что учет переменного модуля Юнга может приводить к существенному снижению расчетного уровня остаточных напряжений. Данный эффект особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и достаточно высоких скоростей автофретирования.

© ПНИПУ

© **Прокудин Александр Николаевич** – к.т.н., в.н.с. e-mail: sunbeam_85@mail.ru.

Aleksandr N. Prokudin – PhD in Technical Sciences, Leading Researcher, e-mail: sunbeam_85@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

INFLUENCE OF VARIABLE YOUNG'S MODULUS ON RESIDUAL STRESSES INDUCED BY ROTATIONAL AUTOFRETTAGE OF A TUBE WITH FIXED ENDS

A.N. Prokudin

Institute of Machinery and Metallurgy, Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 06 October 2023
Approved: 17 November 2023
Accepted for publication:
31 November 2023

Keywords:

rotational autofrettage, elastoplasticity, unloading elastic modulus, isotropic hardening, inhomogeneous material.

ABSTRACT

Autofrettage processes are designed to strengthen hollow cylindrical and spherical parts and usually consist of one load-unload cycle. At the first stage, the workpiece is loaded to cause either partial or complete plastic deformations. During unloading, residual compressive stresses are formed in the vicinity of the inner surface of a part. The present work is devoted to a theoretical study of the process of rotational autofrettage of a hollow cylinder with fixed ends. The formulation of the problem is based on the theory of infinitesimal elastoplastic deformations, the Tresca plasticity condition and the flow rule associated with it. It is assumed that at the loading stage the cylinder material follows the linear-exponential law of isotropic hardening, and when unloaded it behaves as purely elastic body. The effect of a decrease in Young's modulus during unloading as a result of preliminary plastic deformation and its influence on residual stresses caused by rotational autofrettage of the cylinder are studied. To quantitatively describe the variation in Young's modulus, an exponential model with saturation is used. For the load stage, an exact analytical solution is obtained based on the Lambert W-function. Calculation of residual stresses in the cylinder is performed using the Runge-Kutta method. As an example, materials with significant decrease in Young's modulus are considered, namely aluminum alloy AA6022, steel DP980 and manganese steel. It has been established that taking into account the variable Young's modulus can lead to a significant reduction in the calculated level of residual stresses. This effect is especially important for the calculation of thick-walled cylinders and fairly high autofrettage velocities.

© PNRPU

Введение

Автофретирование широко используется для упрочнения полых цилиндрических и сферических заготовок. Разработано несколько разновидностей автофретирования: гидравлическое [1], температурное [2], взрывное [3], автофретирование протяжкой [4], а также некоторые комбинации перечисленных методов [5; 6]. Первым появилось гидравлическое автофретирование [1], которое изначально использовалось для повышения прочности стволов артиллерийских орудий. Суть этого метода заключается в нагружении заготовки внутренним давлением, превосходящим предел упругости. В результате некоторая внутренняя область заготовки переходит в пластическое состояние. После снятия давления во внутренних слоях формируется поле сжимающих остаточных напряжений, которое оказывает благоприятное влияние на эксплуатационные характеристики детали: возрастает предельное рабочее давление, повышаются трещиностойкость, сопротивление коррозии и усталостная прочность. Далее не будем останавливаться на каждом из методов автофретирования, подробный анализ основных результатов в этой области опубликован в недавнем обзоре [7], также следует указать монографию [8].

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию ротационного автофретирования. Эта технология была предложена относительно недавно [9] и включает в себя две последовательных стадии. На стадии нагрузки цилиндрическая заготовка вращается вокруг собственной оси с заданной максимальной угловой скоростью, а на стадии разгрузки скорость вращения медленно снижается до нуля. Максимальная угловая скорость выбирается с тем расчетом, чтобы в ходе нагрузки цилиндр частично или полностью перешел в пластическое состояние. В ходе разгрузки во внутренних слоях заготовки формируется поле остаточных сжимающих напряжений. Работы [9; 10] посвящены теоретическому анализу упрочнения полого цилиндра с закрепленными торцами с помощью ротационного автофретирования. Авторами [9; 10] установлено, что применение исследуемого процесса действительно приводит к формированию сжимающих остаточных напряжений вблизи внутренней поверхности цилиндра. Кроме того, полученные результаты показали определенные преимущества ротационного автофретирования по сравнению с традиционным гидравлическим методом, а именно более равномерное распределение остаточных напряжений в цилиндре. Анализ технической применимости метода показал, что необходимые скорости вращения достижимы на практике. Положительный эффект ротационного автофретирования также теоретически установлен для полого цилиндра со свободными торцами [11; 12] и полого диска [13–15]. Свободное высокоскоростное вращение диска достаточно сложно реализовать на практике, в связи с чем авторами [16] предложена альтернативная методика ротационного автофретирования диска. В этой методике диск предварительно устанавливается с натягом на цилиндрический вал, к которому и передается крутящий момент от двигателя. Далее процесс автофретирования выполняется так, как было описано выше, а после

остановки диск снимается с вала. В работе [16] определены безопасные параметры процесса (величина натяга и скорость вращения), при которых сохраняется контакт между диском и валом. Расчеты [16] показали, что предложенная схема процесса также приводит к упрочнению внутренней поверхности диска. Более того, скорость вращения, необходимая для достижения заданного уровня остаточных напряжений, ниже по сравнению с классической схемой ротационного автофретирования.

Для теоретического анализа процесса автофретирования использовались предположения о плоской деформации [9; 10], обобщенной плоской деформации [11; 12] и плоском напряженном состоянии [13–16] в заготовке. В реальности цилиндрическая заготовка, разумеется, всегда имеет ненулевую и конечную длину, а напряженное состояние в ней зависит не только от радиальной, но и от осевой координаты. В работе [17] исследовалось ротационное автофретирование цилиндра конечной длины. С помощью конечно-элементных и аналитических расчетов установлены границы применимости гипотез о плоском напряженном состоянии и обобщенной плоской деформации. Также интересно отметить, что автофретирование длинного цилиндра со свободными торцами приводит к формированию остаточных осевых напряжений положительного знака. Данный эффект негативно влияет на долговременную прочность и может быть преодолен закреплением торцов цилиндра [17].

В исследовании процессов автофретирования важнейшей задачей является вычисление остаточных напряжений в заготовке. Для решения этой задачи используемая математическая модель должна адекватно отражать механические свойства материала. Известные теоретические результаты в области ротационного автофретирования получены в рамках теории малых упругопластических деформаций (уравнения Прандтля – Рейса). В работах [11; 16] использовалось условие Треска, а материал цилиндрической заготовки принимался идеальным. Также разными авторами анализировалось влияние условия текучести [12; 17], линейного упрочнения [10], нелинейного упрочнения [12–14], повторного пластического течения и эффекта Баушингера [9; 10; 15] на распределение остаточных напряжений после ротационного автофретирования. В недавней работе [18] предложена нелинейная модель материала, в которой параметры изотропного упрочнения и эффекта Баушингера (предел текучести при разгрузке) полагаются зависимыми от накопленной пластической деформации. Данная модель использовалась для расчета ротационного автофретирования цилиндрических заготовок, изготовленных из высокопрочных сталей. Установлено [18], что учет зависимости эффекта Баушингера от накопленной на стадии нагрузки пластической деформации оказывает существенное влияние на распределение остаточных напряжений в заготовке.

Результаты экспериментов показали [19–24], что у многих конструкционных материалов модуль Юнга снижается с увеличением предварительно накопленной пластической деформации. Этот эффект проявляется даже при малых деформациях, и уменьшение модуля Юнга может превышать 25 % [24]. Интересно отметить, что у коэффициента Пуассона подобной взаимосвязи с пластической деформацией не обнаружено [20]. Микроструктурные исследования показали, что основным механизмом снижения модуля упругости является движение дислокаций, сопровождающееся их накоплением вблизи границы зерна [23]. В мультифазных сплавах важную роль также играют аустенитно-мартенситные превращения [25]. Для вычисления модуля Юнга в зависимости от пластической деформации предложен ряд моделей: линейная [25], квадратичная [23] и основанная на гиперболическом тангенсе [26]. Однако наибольшее распространение приобрела экспоненциальная модель [22], согласно которой модуль Юнга с увеличением пластической деформации асимптотически стремится к некоторому предельному значению, что согласуется с экспериментальными данными для многих материалов. Установлено, что учет снижения модуля Юнга позволяет повысить точность расчета упругого последействия и итоговой геометрии детали в процессах формования [19; 23–25; 27–33]. Данный эффект также рассматривался в работах [26; 33; 34], посвященных автофретированию, и важно отметить, что использование постоянного модуля Юнга приводит к завышению остаточных напряжений и снижает точность расчетов гидравлического автофретирования [33].

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию ротационного автофретирования полого цилиндра с учетом экспоненциальной зависимости [22] модуля Юнга от накопленной пластической деформации. Ранее эффект снижения модуля Юнга в расчетах ротационного автофретирования не рассматривался.

1. Постановка задачи

Рассматривается полый цилиндр бесконечной длины, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно r_{in}, r_{out}. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, которая медленно меняется с течением времени, вследствие чего угловым ускорением можно пренебречь. Предполагается, что в ходе всего процесса цилиндр находится в состоянии плоской деформации и сохраняет осевую симметрию. Исходя из озвученных выше допущений, единственным ненулевым перемещением в цилиндре является радиальное перемещение u_r. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), а также следующие безразмерные величины:

$$\begin{gathered}
\delta = \frac{r_{in}}{r_{out}},\ \beta = \frac{r}{r_{out}},\ \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_0}\omega^2,\ \overline{u} = \frac{E_0}{\sigma_0}\frac{u_r}{r_{out}}, \\
\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{E_0}{\sigma_0}\varepsilon_{ij},\ \overline{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E_0}{\sigma_0}\varepsilon_{ij}^e,\ \overline{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E_0}{\sigma_0}\varepsilon_{ij}^p, \\
\overline{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0},\ \overline{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0},\ \overline{H} = \frac{H}{E_0},\ \overline{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}, \\
\overline{\gamma} = \frac{\sigma_0}{E_0}\gamma,\ \overline{E}_u = \frac{E_u}{E_0},\ \overline{E}_\infty = \frac{E_\infty}{E_0},\ \overline{\zeta} = \frac{\sigma_0}{E_0}\zeta,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где ρ – плотность, E_0 – начальный модуль Юнга (модуль Юнга при нагрузке), E_u – модуль Юнга при разгрузке, σ_0, σ_y – начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении-сжатии, $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ – полные, упругие и пластические деформации соответственно, σ_{ij} – напряжения, H, σ_∞, γ – параметры, характеризующие изотропное упрочнение, E_∞, ζ – параметры, характеризующие изменение модуля Юнга. Далее все формулы записаны с использованием безразмерных переменных (1.1), а знак подчеркивания для краткости опущен. Параметр нагружения Ω для удобства называется скоростью вращения.

Единственное уравнение равновесия в цилиндре имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega \beta. \tag{1.2}$$

Боковые поверхности цилиндра $\beta = \delta$ и $\beta = 1$ свободны от нагрузок, следовательно, граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0. \tag{1.3}$$

Предполагается, что максимальная скорость вращения не слишком высока, и геометрически-линейная теория справедлива с достаточной степенью точности. Тогда кинематические соотношения имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}; \ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}; \ \varepsilon_{zz} = 0. \tag{1.4}$$

1.1. Нагрузка

На первой стадии автофретирования скорость вращения цилиндра Ω возрастает от нуля до некоторого выбранного максимального значения $\Omega_{\max}$. В начале процесса цилиндр деформируется чисто упруго, затем при $\Omega = \Omega_p$ на внутренней поверхности цилиндра возникает область пластического течения, которая при $\Omega = \Omega_{fp}$ распространяется на весь цилиндр. Далее предполагается, что $\Omega_p < \Omega_{\max} \le \Omega_{fp}$. Максимальная скорость вращения $\Omega_{\max}$ является основным технологическим параметром процесса и далее называется скоростью автофретирования.

Полные деформации представляют собой сумму упругих и пластических деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p; \ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p; \ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p. \tag{1.5}$$

Напряжения и упругие деформации связаны законом Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e\right), \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e\right), \\
\sigma_{zz} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + (1-\nu)\varepsilon_{zz}^e\right),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

здесь ν – коэффициент Пуассона.

В качестве условия пластичности используется условие Треска

$$\max\left(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{zz} - \sigma_{rr}|\right) = \sigma_y, \tag{1.7}$$

в котором предел текучести σ_y определяется законом упрочнения Восе [35]

$$\sigma_y = 1 + (\sigma_\infty - 1)\left(1 - e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p}\right), \tag{1.8}$$

где σ_∞ – максимальное значение предела текучести, γ – параметр, характеризующий скорость увеличения предела текучести с ростом эквивалентной пластической деформации, ε_{eq}^p – эквивалентная пластическая деформация. Закон Восе (1.8) подходит для широкого класса материалов, проявляющих ограниченное упрочнение [36]. Малые значения параметра γ (порядка единицы, без учета множителя σ_0 / E_0) примерно соответствуют линейно-упрочняемому материалу, а большие (свыше 300) – идеальному упругопластическому материалу [37].

Для некоторых материалов лучше подходит более общий, линейно-экспоненциальный закон упрочнения:

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p + (\sigma_\infty - 1)\left(1 - e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p}\right), \tag{1.9}$$

где H – параметр, отвечающий за линейную составляющую упрочнения. При $H = 0$ и $\sigma_\infty = 1$ закон (1.9) переходит в закон Восе (1.8) и линейный закон упрочнения соответственно.

Пластическая составляющая деформации вычисляется в соответствии с ассоциированным законом пластического течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \tag{1.10}$$

где $d\varepsilon_{ij}^p$ – приращения пластических деформаций, $d\lambda$ – положительный множитель, f – потенциал, соответствующий условию (1.7).

Приращение эквивалентной пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется из закона

$$\sigma_y \, d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} \, d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} \, d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{zz} \, d\varepsilon_{zz}^p. \tag{1.11}$$

1.2. Разгрузка

На стадии разгрузки скорость вращения Ω снижается вплоть до полной остановки цилиндра. В настоящей работе предполагается, что разгрузка является чисто упругой, а пластические деформации $\hat{\varepsilon}_{ij}^p$, накопленные при нагрузке, в дальнейшем не меняются. Разделение полных деформаций примет вид:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}^p; \ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p; \ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \hat{\varepsilon}_{zz}^p; \\
&\hat{\varepsilon}_{rr}^p = \varepsilon_{rr}^p(\Omega_{\max}); \ \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p(\Omega_{\max}); \ \hat{\varepsilon}_{zz}^p = \varepsilon_{zz}^p(\Omega_{\max}).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Упругая разгрузка следует закону Гука

$$\sigma_{rr} = \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon^e_{rr} + \nu\varepsilon^e_{\theta\theta} + \nu\varepsilon^e_{zz}\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon^e_{rr} + (1-\nu)\varepsilon^e_{\theta\theta} + \nu\varepsilon^e_{zz}\right), \quad (1.13)$$
$$\sigma_{zz} = \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon^e_{rr} + \nu\varepsilon^e_{\theta\theta} + (1-\nu)\varepsilon^e_{zz}\right),$$

здесь E_u – модуль Юнга, связанный с накопленной пластической деформацией законом [22]

$$E_u\left(\hat{\varepsilon}^p_{eq}\right) = 1-(1-E_\infty)\left(1-e^{-\zeta\hat{\varepsilon}^p_{eq}}\right), \quad (1.14)$$

где E_∞ – предельное значение модуля Юнга при пластической деформации, стремящейся к бесконечности, ζ – параметр материала, характеризующий скорость уменьшения модуля Юнга с ростом пластической деформации, $\hat{\varepsilon}^p_{eq}$ – эквивалентная пластическая деформация, накопленная на стадии нагрузки $\left(\hat{\varepsilon}^p_{eq} = \varepsilon^p_{eq}\left(\Omega_{\max}\right)\right)$. Для сравнения полученных результатов также используется классическая модель с постоянным модулем Юнга $\left(E_u = 1\right)$.

Закон упругой разгрузки (1.13), (1.14) описывает неоднородный линейно-упругий материал, в котором модуль Юнга E_u является функцией радиальной координаты β. Следует отметить, что у многих материалов участок упругой разгрузки на кривой деформирования несколько отклоняется от линейного закона [31]. Таким образом, закон (1.13), (1.14) является линейной аппроксимацией реального поведения материала, а модуль Юнга E_u также называют хордовым модулем [31]. В последние годы предложен ряд моделей для описания нелинейно-упругого поведения материала при разгрузке [38–40]. Однако результаты расчетов показали, что линейная модель не дает существенной ошибки по сравнению с нелинейными моделями и с учетом своей простоты и эффективности хорошо подходит для практического применения [39; 40].

2. Построение решения

2.1. Нагрузка

Предполагается, что напряженное состояние в пластической области всегда удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}.$$

В соответствии с предыдущим неравенством, условие пластичности (1.7) запишется в следующей форме

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y. \quad (2.1)$$

В диапазоне скоростей $\Omega \in \left[\Omega_p, \Omega_{fp}\right]$ цилиндр состоит из внутренней пластической и внешней упругой областей. Далее верхние индексы *el* и *pl* над символами перемещений и напряжений обозначают упругую и пластическую область соответственно. Для координаты упругопластической границы используется символ β_{ep}.

В начале рассмотрим область упругого деформирования. Упругое решение для вращающегося цилиндра с закрепленными торцами имеет вид:

$$u^{el} = \frac{(1+\nu)d_1}{2}\beta^{-1} + (1+\nu)(1-2\nu)d_2\beta - \frac{1}{8}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta^3,$$
$$\sigma^{el}_{rr} = -\frac{d_1}{2}\beta^{-2} + d_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2, \quad (2.2)$$
$$\sigma^{el}_{\theta\theta} = \frac{d_1}{2}\beta^{-2} + d_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2,$$
$$\sigma^{el}_{zz} = \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right).$$

где d_1, d_2 – константы интегрирования в упругой области.

Скорость вращения, соответствующая началу пластического течения, является функцией коэффициента Пуассона ν и геометрического параметра δ [41]:

$$\Omega_p = \frac{4(1-\nu)}{3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2}.$$

Константы интегрирования d_1, d_2 определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{cases}\sigma^{el}_{\theta\theta}\left(\beta_{ep}\right) - \sigma^{el}_{rr}\left(\beta_{ep}\right) = 1,\\ \sigma^{el}_{rr}\left(1\right) = 0.\end{cases}$$

Смысл первого из вышеприведенных условий заключается в том, что на упругопластической границе должно выполняться условие пластичности (2.1). Второе условие представляет собой граничное условие на внешней поверхности. Решение системы имеет вид:

$$d_1 = \beta^2_{ep} - \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)}\Omega\beta^4_{ep},$$
$$d_2 = \frac{1}{2}\beta^2_{ep} - \frac{(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^4_{ep} + \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega. \quad (2.3)$$

Перейдем к пластической области. Из ассоциированного закона пластического течения (1.10) и условия пластичности (2.1) следует

$$\varepsilon^p_{eq} = \varepsilon^p_{\theta\theta} = -\varepsilon^p_{rr}, \varepsilon^p_{zz} = 0. \quad (2.4)$$

Тогда с учетом зависимостей (1.4), (1.5) и (2.4) напряжения в пластической области цилиндра примут вид:

$$\sigma^{pl}_{rr} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\frac{\partial u^{pl}}{\partial\beta} + \nu\frac{u^{pl}}{\beta} + (1-2\nu)\varepsilon^p_{eq}\right),$$
$$\sigma^{pl}_{\theta\theta} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\frac{\partial u^{pl}}{\partial\beta} + (1-\nu)\frac{u^{pl}}{\beta} - (1-2\nu)\varepsilon^p_{eq}\right),$$
$$\sigma^{pl}_{zz} = \nu\left(\sigma^{pl}_{rr} + \sigma^{pl}_{\theta\theta}\right).$$

С учетом предыдущих соотношений уравнение равновесия (1.2) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u^{pl}}{\partial\beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial u^{pl}}{\partial\beta}-\frac{u^{pl}}{\beta^2}=-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta-$$
$$-\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\left(2\frac{\varepsilon_{eq}^{p}}{\beta}+\frac{\partial\varepsilon_{eq}^{p}}{\partial\beta}\right).$$

Решая полученное уравнение, найдем:

$$u^{pl}=\frac{(1+\nu)c_1}{2\beta}+(1+\nu)(1-2\nu)c_2\beta-$$
$$-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3-\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\beta J(\beta),$$
$$\sigma_{rr}^{pl}=-\frac{c_1}{2}\beta^{-2}+c_2-\frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2-\frac{1}{1-\nu^2}J(\beta), \qquad (2.5)$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{pl}=\frac{c_1}{2}\beta^{-2}+c_2-\frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2-\frac{1}{1-\nu^2}\left(J(\beta)+\varepsilon_{eq}^{p}\right),$$
$$J(t)=\int_{\delta}^{t}\frac{\varepsilon_{eq}^{p}}{\beta}d\beta,$$

где c_1, c_2 – константы интегрирования в пластической области.

Константы интегрирования c_1 и c_2 вычисляются с помощью системы:

$$\begin{cases}\sigma_{rr}^{pl}(\delta)=0,\\ \varepsilon_{eq}^{p}(\beta_{ep})=0,\end{cases}$$

в которой первое уравнение является граничным условием на внутренней поверхности цилиндра, а второе подразумевает равенство нулю пластической деформации на упругопластической границе. Решение этой системы имеет вид:

$$c_1=\beta_{ep}^2-\frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)}\Omega\beta_{ep}^4,$$
$$c_2=\frac{\beta_{ep}^2}{2\delta^2}-\frac{(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\frac{\beta_{ep}^4}{\delta^2}+\frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\delta^2. \qquad (2.6)$$

Координата упругопластической границы определяется из условия

$$u^{pl}(\beta_{ep})=u^{el}(\beta_{ep}),$$

которое после преобразований с учетом (2.2)–(2.6) примет вид:

$$(1-2\nu)\Omega\beta_{ep}^4-4(1-\nu)\beta_{ep}^2+$$
$$+\frac{8\delta^2}{(1-\delta^2)(1+\nu)}J(\beta_{ep})+(3-2\nu)\Omega\delta^2=0. \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.7) нелинейно относительно β_{ep}, и его решение для выбранных значений параметров задачи и скорости вращения производится методом Ньютона. Полному переходу цилиндра в состояние пластичности соответствует условие $\beta_{ep}=1$, с учетом которого уравнение (2.7) запишется следующим образом:

$$\left((1-2\nu)+(3-2\nu)\delta^2\right)\Omega_{fp}+$$
$$+\frac{8\delta^2}{(1-\delta^2)(1+\nu)}J(1)-4(1-\nu)=0. \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) также решается с помощью метода Ньютона.

Последним шагом решения для пластической области является определение функции, эквивалентной пластической деформации $\varepsilon_{eq}^{p}(\beta)$. Рассмотрим линейно-экспоненциальный закон упрочнения (1.9). Из (1.9), (2.1), (2.5), (2.6) следует трансцендентное уравнение:

$$k(\sigma_\infty-1)e^{-\gamma\varepsilon_{eq}^{p}}-\varepsilon_{eq}^{p}=k\,f(\beta),$$
$$k=\frac{1-\nu^2}{1+H-H\nu^2},\quad f(\beta)=\sigma_\infty-c_1\beta^{-2}-\frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)}\Omega\beta^2. \qquad (2.9)$$

Решение уравнения (2.9) можно представить в форме:

$$\varepsilon_{eq}^{p}(\beta)=\frac{W\left((\sigma_\infty-1)k\gamma\,e^{k\gamma f(\beta)}\right)}{\gamma}-k\,f(\beta). \qquad (2.10)$$

В (2.10) $W(x)$ – главная ветвь функции Ламберта [42]. $W(x)$ широко используется во многих областях чистой и прикладной математики [43], в особенности при решении дифференциальных уравнений, содержащих экспоненту или логарифм. Функция $W(x)$ не может быть выражена в элементарных функциях, тем не менее она реализована в современных системах компьютерной алгебры (Wolfram Mathematica, Maple, Mathcad, SageMath). Заметим, что при $H=0$ решение (2.10) соответствует закону Восе, при $\sigma_\infty=1$ – линейно-упрочняемому материалу, а одновременное выполнение этих условий соответствует идеальному упругопластическому материалу.

2.2. Разгрузка

На стадии разгрузки основной интерес представляет распределение остаточных перемещений и напряжений в цилиндре, поэтому далее предполагаем, что $\Omega=0$ (полная остановка цилиндра).

Разделение деформаций (1.12) с учетом (1.10) и (2.1) примет вид:

$$\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{rr}^{e}-\hat{\varepsilon}_{eq}^{p};\ \varepsilon_{\theta\theta}=\varepsilon_{\theta\theta}^{e}+\hat{\varepsilon}_{eq}^{p}.$$

Из (1.13) с помощью предыдущих соотношений найдем остаточные напряжения

$$\sigma_{rr}^{res} = \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times$$
$$\times \left((1-\nu)\frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + \nu \frac{u^{res}}{\beta} + (1-2\nu)\hat{\varepsilon}_{eq}^{p} \right),$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{res} = \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \qquad (2.11)$$
$$\times \left(\nu \frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + (1-\nu)\frac{u^{res}}{\beta} - (1-2\nu)\hat{\varepsilon}_{eq}^{p} \right),$$
$$\sigma_{zz}^{res} = \nu\left(\sigma_{rr}^{res} + \sigma_{\theta\theta}^{res}\right).$$

Уравнение равновесия (1.2) с учетом (2.11) для состояния покоя $\Omega = 0$ запишется следующим образом

$$\frac{\partial^2 u^{res}}{\partial \beta^2} + k_1 \frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + k_2 u^{res} = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left(k_3 \hat{\varepsilon}_{eq}^{p} + \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{eq}^{p}}{\partial \beta} \right),$$
$$M = \frac{E_u'}{E_u}, \quad k_1 = \beta^{-1} + M, \qquad (2.12)$$
$$k_2 = \frac{\nu}{1-\nu} M\beta^{-1} - \beta^{-2}, \quad k_3 = 2\beta^{-1} + M.$$

В (2.12) штрих означает производную по радиальной координате. Модуль Юнга E_u вычисляется в соответствии с законом (1.14), где накопленная пластическая деформация $\hat{\varepsilon}_{eq}^{p}$ в свою очередь определяется соотношениями (2.6), (2.9) и (2.10). Выражение для модуля Юнга как функции радиальной координаты получается достаточно громоздким и далее не приводится. Уравнение (2.12) решается численно с помощью неявного метода Рунге – Кутты. В частном случае $E_u = 1$ аналитическое решение уравнения (2.12) не вызывает трудностей.

3. Результаты расчетов

Настоящая работа посвящена эффекту снижения модуля Юнга в результате предварительного пластического деформирования и оценке влияния этого эффекта на распределение остаточных напряжений в цилиндре после процедуры ротационного автофретирования. В соответствии с законом (1.14) величина снижения модуля Юнга зависит от механических параметров материала E_∞ и ς, а также от накопленной пластической деформации $\hat{\varepsilon}_{eq}^{p}$. В свою очередь, пластические деформации в цилиндре увеличиваются с ростом скорости вращения $\Omega_{\max}$, а также с уменьшением геометрического параметра δ. В силу вышесказанного далее рассматриваются материалы с достаточно выраженным эффектом снижения модуля Юнга: алюминиевый сплав АА6022, сталь DP980 и марганцевая сталь. Механические параметры материалов приведены в таблице (для всех материалов коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$).

Вначале рассмотрим цилиндр, изготовленный из марганцевой стали. Падение модуля Юнга у этого материала может превышать 30 %, что является наибольшим значением среди исследуемых материалов. С другой стороны, параметр ς на порядок меньше по сравнению с АА6022 и DP980.

Механические параметры материалов

Mechanical parameters of materials

Параметр	Сплав АА6022 [44]	Сталь DP980 [45]	Марганцевая сталь [46]
σ_0 (МПа)	136	541	490,68
H (МПа)	0	53460	0
$\overline{H}$	0	0,261	0
σ_∞ (МПа)	352	707,5	1395,42
$\overline{\sigma}_\infty$	2,592	1,308	2,844
γ	9,8	1834	2,65
$\overline{\gamma}$	0,019	4,84	0,006
E_0 (ГПа)	70	205	232
E_∞ (ГПа)	61	160	148
$\overline{E}_\infty$	0,871	0,78	0,638
ς	120	150	13,76
$\overline{\varsigma}$	0,233	0,396	0,029

В силу этого эффект снижения модуля Юнга у марганцевой стали проявляется только при достаточно большой предварительной пластической деформации (более 5 %). Ротационное автофретирование не приводит к интенсивному пластическому деформированию, поэтому можно предположить, что снижение модуля Юнга будет незначительным и не будет существенно влиять на напряженное состояние в цилиндре из марганцевой стали. Это предположение подтверждается расчетами. При $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$ графики остаточных напряжений для переменного и постоянного модуля Юнга практически сливаются и в статье не приведены. Снижение тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности $\sigma_{\theta\theta}^{res}(\delta)$ для $\delta = 0,3; 0,5; 0,8$ равняется 4; 1,5 и 0,3 % соответственно. Отметим также, что поведение цилиндра в ходе нагрузки близко к идеально-пластическому несмотря на то, что максимальный предел текучести σ_∞ марганцевой стали почти в три раза превосходит начальный σ_0. В силу малого значения параметра γ эффект изотропного упрочнения также проявляется только для достаточно больших пластических деформаций.

Рассмотрим теперь материалы АА6022 и DP980. Важной характеристикой цилиндра является скорость вращения Ω_{fp}, соответствующая его полному переходу в пластическое состояние. Зависимости Ω_{fp} от геометрического параметра δ для рассматриваемых материалов изображены на рис. 1. Видим, что цилиндр из материала DP980 способен выдерживать намного более высокие скорости вращения, что объясняется более выраженным изотропным упрочнением этого материала. Отсюда также можно сделать вывод, что цилиндр из

DP980 имеет более широкий диапазон возможных скоростей автофретирования $\Omega_{\max}$. Решение, полученное для стадии нагрузки, проиллюстрируем с помощью рис. 2 и 3, на которых представлены графики напряжений и пластических деформаций в цилиндре при $\delta = 0,5$ и $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$. Предельная скорость вращения для AA6022 и DP980 составляет соответственно $\Omega_{fp} = 1,884$ и $\Omega_{fp} = 2,341$. Видим, что вследствие упрочнения величина напряжений в цилиндре из материала DP980 значительно выше, а пластических деформаций, наоборот, ниже, несмотря на более высокую предельную скорость вращения Ω_{fp}. Распределение остаточных напряжений в цилиндре после его предварительного вращения со скоростью $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$ представлено на рис. 4. После процесса автофретирования вблизи внутренней поверхности цилиндра формируется поле сжимающих тангенциальных напряжений, которое распространяется примерно на половину толщины цилиндра. Здесь также следует отметить, что величина остаточных напряжений для стали DP980 ниже по сравнению со сплавом AA6022.

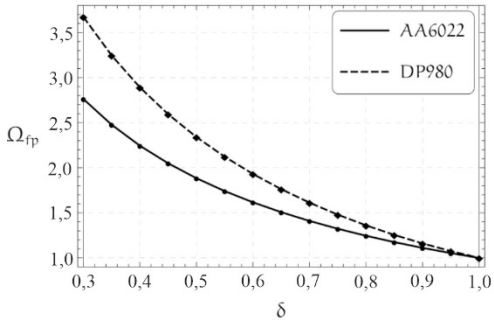
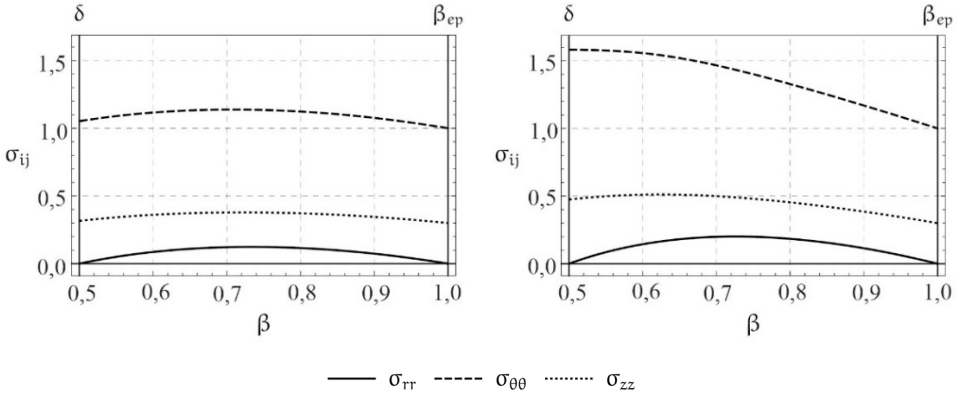


Рис. 1. Предельная скорость вращения цилиндра Ω_{fp}

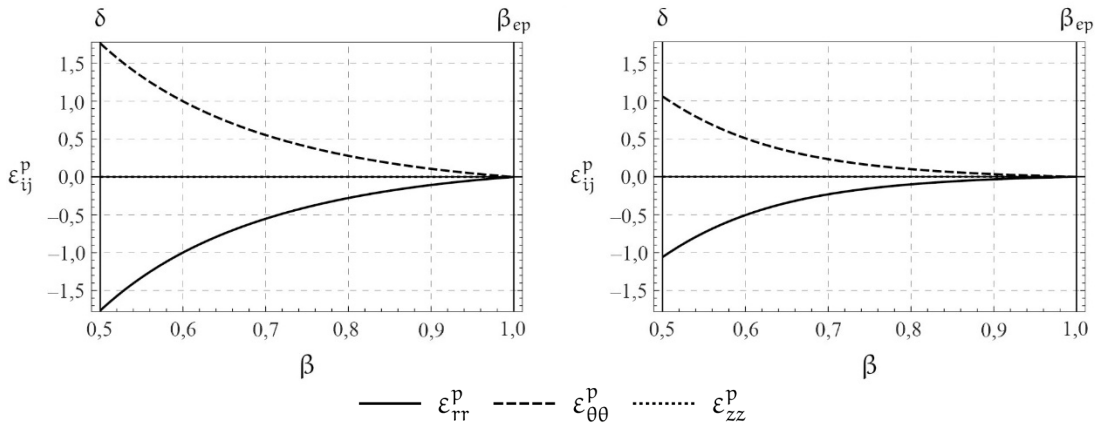
Fig. 1. Plastic limit angular velocity Ω_{fp}



a *b*

Рис. 2. Распределение напряжений в цилиндре из (*a*) AA6022, (*b*) DP980 для $\delta = 0,5$ и скорости вращения $\Omega = \Omega_{fp}$

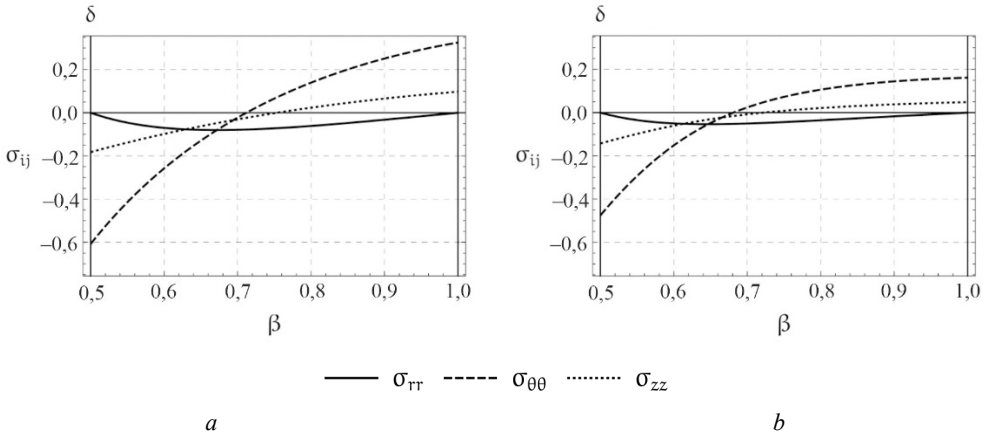
Fig. 2. Distributions of stresses in the cylinder made of (*a*) AA6022, (*b*) DP980 for $\delta = 0.5$ and angular velocity $\Omega = \Omega_{fp}$



a *b*

Рис. 3. Распределение пластических деформаций в цилиндре из (*a*) AA6022, (*b*) DP980 для $\delta = 0.5$ и скорости вращения $\Omega = \Omega_{fp}$

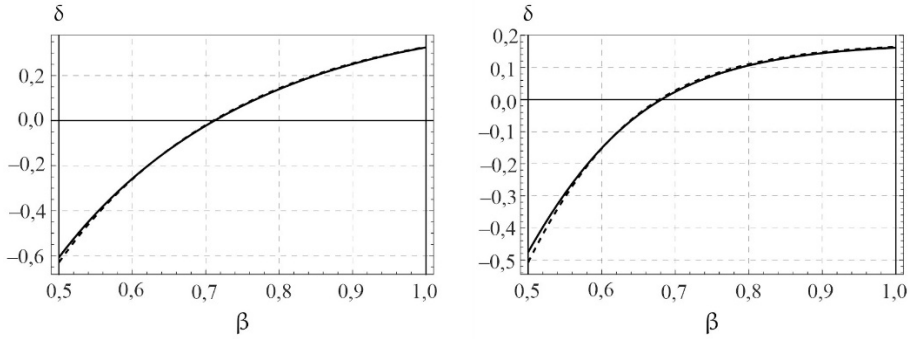
Fig. 3. Distributions of plastic strains in the cylinder made of (*a*) AA6022, (*b*) DP980 for $\delta = 0.5$ and angular velocity $\Omega = \Omega_{fp}$



a *b*

Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в цилиндре из (*a*) AA6022, (*b*) DP980 для $\delta = 0{,}5$ и скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

Fig. 4. Distributions of residual stresses in the cylinder made of (*a*) AA6022, (*b*) DP980 for $\delta = 0.5$ and autofrettage angular velocity $\Omega = \Omega_{fp}$



a *b*

Рис. 5. Тангенциальное остаточное напряжение в цилиндре из (*a*) AA6022, (*b*) DP980 для $\delta = 0{,}5$ и скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

Fig. 5. Distributions of tangential residual stresses in the cylinder made of (*a*) AA6022, (*b*) DP980 for $\delta = 0.5$ and autofrettage angular velocity $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

Большой интерес представляет сравнение результатов для закона (1.14) и классической модели постоянного модуля Юнга $E_u = 1$. Для сравнения используется тангенциальное остаточное напряжение, поскольку именно оно является наибольшим по абсолютной величине (см. рис. 4). На рис. 5 представлены графики остаточного тангенциального напряжения в цилиндре; сплошные линии соответствуют закону (1.14), а пунктирные – постоянному модулю Юнга. Видим, что эффект снижения модуля Юнга в результате пластической деформации существенно проявляется только вблизи внутренней поверхности цилиндра и приводит к снижению остаточных напряжений. Результаты расчетов обобщены на рис. 6, где представлены зависимости снижения тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ от геометрического параметра δ после предварительного вращения со скоростью $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$ (которая, в свою очередь, также зависит от параметра δ, см. рис. 1).

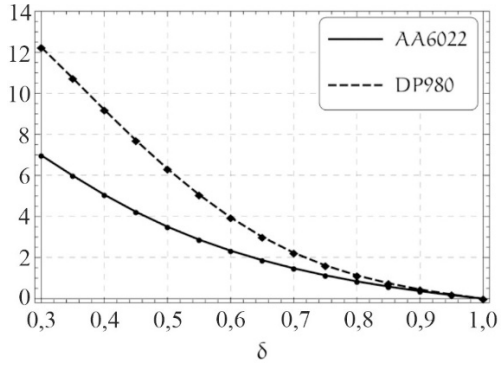


Рис. 6. Снижение (в процентах) тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ при скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

Fig. 6. Reduction (in percentage) of tangential residual stress on the inner surface of the cylinder $\beta = \delta$ and autofrettage angular velocity $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

Видим, что снижение остаточных напряжений более выражено в цилиндре из стали DP980 и может превышать 10 %. Также следует отметить, что учет снижения модуля Юнга практически не влияет на остаточные напряжения в тонкостенных цилиндрах $(\delta \geq 0,8)$.

Заключение

У многих конструкционных материалов после предварительного пластического деформирования наблюдается снижение модуля Юнга, которое может достигать десятков процентов. Известно, что учет этого эффекта позволяет существенно повысить точность расчета итоговой геометрии детали в технологических процессах, связанных с интенсивным пластическим деформированием. В настоящей работе показано, что эффект снижения модуля Юнга может оказывать существенное влияние на величину остаточных напряжений после ротационного автофретирования, процесса, который не приводит к накоплению больших деформаций. Установлено, что учет этого эффекта особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и достаточно высоких скоростей автофретирования. Следует отметить, что вышесказанное справедливо только для материалов с достаточно выраженным эффектом снижения модуля Юнга. Для дальнейших исследований представляет интерес расчет ротационного автофретирования при совместном учете эффекта снижения модуля Юнга и эффекта Баушингера.

Библиографический список

1. Jacob L. La Résistance et L'équilibre Élastique des Tubes Frettés // Memorial de L'artillerie Navale. – 1907. – Vol. 1. – P. 43–155.
2. Kamal S.M., Dixit U.S. Feasibility study of thermal autofrettage of thick-walled cylinders // J. Pressure Vessel Technol. – 2015. – Vol. 137, no. 6. – P. 061207. DOI: 10.1115/1.4030025
3. The residual stress and its influence on the fatigue strength induced by explosive autofrettage / R. Zhan, C. Tao, L. Han, Y. Huang, D. Han // Explos. Shock Waves. – 2005. – Vol. 25, no. 3. – P. 239–243. DOI: 10.11883/1001-1455(2005)03-0239-05
4. New approach to the autofrettage of high-strength cylinders / T.E. Davidson, C.S. Barton, A.N. Reiner, D.P. Kendall // Exp. Mech. – 1962. – Vol. 2, no. 2. – P. 33–40. DOI: 10.1007/BF02325691
5. Shufen R., Dixit U.S. A finite element method study of combined hydraulic and thermal autofrettage process // J. Pressure Vessel Technol. – 2017. – Vol. 139, no. 4. – P. 041204. DOI: 10.1115/1.4036143
6. Shufen R., Dixit U.S. Generating compressive surface residual stresses using hydraulic autofrettage process with heat treatment // J. Pressure Vessel Technol. – 2021. – Vol. 143, No. 5. – 051301. doi:10.1115/1.4050090
7. Shufen R., Dixit U.S. A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // J. Pressure Vessel Technol. – 2018. – Vol. 140, no. 5. – P. 050802. DOI: 10.1115/1.4039206
8. Dixit U.S., Kamal S.M., Shufen R. Autofrettage processes: technology and modelling. – Boca Raton: CRC Press, 2019. – 276 p.
9. Zare H.R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // Mater. Des. – 2016. – Vol. 105. – P. 366–374. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.05.062
10. Zare H.R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage // Int. J. Mech. Sci. – 2017. – Vol. 124–125. – P. 1–8. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015
11. Kamal S.M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part I: Theoretical analysis // J. Pressure Vessel Technol. – 2019. – Vol. 141, no. 5. – P. 051201. DOI: 10.1115/1.4043591
12. Kamal S.M., Perl M. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part II: Numerical evaluation // J. Pressure Vessel Technol. – 2019. – Vol. 141, no. 5. – P. 051202. DOI: 10.1115/1.4044173
13. Kamal S.M. Analysis of residual stress in the rotational autofrettage of thick-walled disks // J. Pressure Vessel Technol. – 2018. – Vol. 140, no. 6. – P. 061402. DOI: 10.1115/1.4041339
14. Kamal S.M., Kulsum R. Parametric study of axisymmetric circular disk subjected to rotational autofrettage // Lecture Notes on Multidisciplinary Industrial Engineering. – Singapore: Springer, 2019. – P. 997–1009.
15. Kamal S.M. Estimation of optimum rotational speed for rotational autofrettage of disks incorporating Bauschinger effect // Mech. Based Des. Struct. Mach. – 2022. – Vol. 50, no. 7. – P. 2535–2554. DOI: 10.1080/15397734.2020.1780608
16. Kamal S.M., Dixit U.S. Design of a disk-mandrel assembly for achieving rotational autofrettage in the disk // Proc. Inst. Mech. Eng., Part C. – 2021. – Vol. 235, no. 13. – P. 2452–2467. DOI: 10.1177/0954406220954890
17. Shufen R., Dixit U.S. Effect of length in rotational autofrettage of long cylinders with free ends // Proc. Inst. Mech. Eng., Part C. – 2022. – Vol. 236, no. 6. – P. 2981–2994. DOI: 10.1177/09544062211034205
18. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofrettage // Eng. Struct. – 2023. – Vol. 278. – P. 115516. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115516
19. Morestin F., Boivin M. On the necessity of taking into account the variation in the Young modulus with plastic strain in elastic-plastic software // Nucl. Eng. Des. – 1996. – Vol. 162, no. 1. – P. 107–116. DOI: 10.1016/0029-5493(95)01123-4
20. Yamaguchi K., Adachi H., Takakura N. Effects of plastic strain and strain path on Young's modulus of sheet metals // Met. Mater. – 1998. – Vol. 4, no. 3. – P. 420–425. DOI: 10.1007/BF03187802
21. Experimental data, numerical fit and fatigue life calculations relating to the Bauschinger effect in high strength armament steels / E. Troiano, A.P. Parker, J. Underwood, C. Mossey // J. Pressure Vessel Technol. – 2003. – Vol. 125, no. 3. – P. 330–334. DOI: 10.1115/1.1593072
22. Yoshida F., Uemori T., Fujiwara K. Elastic–plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain // Int. J. Plast. – 2002. – Vol. 18, no. 5. – P. 633–659. DOI: 10.1016/S0749-6419(01)00049-3
23. Yu H.Y. Variation of elastic modulus during plastic deformation and its influence on springback // Mater. Des. – 2009. – Vol. 30, no. 3. – P. 846–850. DOI: 10.1016/j.matdes.2008.05.064

24. Eggertsen P.-A., Mattiasson K., Hertzman J. A phenomenological model for the hysteresis behavior of metal sheets subjected to unloading/reloading cycles // J. Manuf. Sci. Eng. – 2011. – Vol. 133, no. 6. – P. 061021. DOI: 10.1115/1.4004590

25. Fei D., Hodgson P. Experimental and numerical studies of springback in air v-bending process for cold rolled TRIP steels // Nucl. Eng. Des. – 2006. – Vol. 236, no. 18. – P. 1847–1851. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2006.01.016

26. Hu Z., Parker A.P. Implementation and validation of true material constitutive model for accurate modeling of thick-walled cylinder swage autofrettage // Int. J. Pressure Vessels Piping. – 2021. – Vol. 191. – P. 104378. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2021.104378

27. Zang S., Lee M., Hoon Kim J. Evaluating the significance of hardening behavior and unloading modulus under strain reversal in sheet springback prediction // Int. J. Mech. Sci. – 2013. – Vol. 77. – P. 194–204. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.09.033

28. Kubli W., Krasovskyy A., Sester M. Modeling of reverse loading effects including workhardening stagnation and early re-plastification // Int. J. Mater. Form. – 2008. – Vol. 1, no. 1. – P. 145–148. DOI: 10.1007/s12289-008-0012-5

29. Eggertsen P.-A., Mattiasson K. On the modelling of the bending–unbending behaviour for accurate springback predictions // Int. J. Mech. Sci. – 2009. – Vol. 51, no. 7. – P. 547–563. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2009.05.007

30. Chatti S., Hermi N. The effect of non-linear recovery on springback prediction // Comput. Struct. – 2011. – Vol. 89, no. 13. – P. 1367–1377. DOI: 10.1016/j.compstruc.2011.03.010

31. Wagoner R.H., Lim H., Lee M.-G. Advanced Issues in springback // Int. J. Plast. – 2013. – Vol. 45. – P. 3–20. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.08.006

32. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models / Q. Meng, J. Zhao, Z. Mu, R. Zhai, G. Yu // J. Manuf. Process. – 2022. – Vol. 76. – P. 251–263. DOI: 10.1016/j.jmapro.2022.01.070

33. Huang X., Moan T. Residual stress in an autofrettaged tube taking Bauschinger effect as a function of the prior plastic strain // J. Pressure Vessel Technol. – 2009. – Vol. 131, no. 2. – P. 021207. DOI: 10.1115/1.3062937

34. Hu Z., Parker A.P. Use of a true material constitutive model for stress analysis of a swage autofrettaged tube including ASME code comparison // J. Pressure Vessel Technol. – 2022. – Vol. 144, no. 2. – P. 024502. DOI: 10.1115/1.4051688

35. Voce E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation // J. Inst. Met. – 1948. – Vol. 74. – P. 537–562.

36. Zhang C., Wang B. Identification of the hardening behavior of solids described by three-parameter Voce law using spherical indentation // J. Mater. Res. – 2012. – Vol. 27, no. 20. – P. 2624–2629. DOI: 10.1557/jmr.2012.253

37. On the study of mystical materials identified by indentation on power law and Voce hardening solids / L. Meng, P. Breitkopf, B. Raghavan, G. Mauvoisin, O. Bartier, X. Hernot // Int. J. Mater. Form. – 2019. – Vol. 12, no. 4. – P. 587–602. DOI: 10.1007/s12289-018-1436-1

38. Sun L., Wagoner R.H. Complex unloading behavior: Nature of the deformation and its consistent constitutive representation // Int. J. Plast. – 2011. – Vol. 27, no. 7. – P. 1126–1144. DOI: 10.1016/j.ijplas.2010.12.003

39. Yoshida F., Amaishi T. Model for description of nonlinear unloading-reloading stress-strain response with special reference to plastic-strain dependent chord modulus // Int. J. Plast. – 2020. – Vol. 130. – P. 102708. DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102708

40. Yoshida F. Description of elastic–plastic stress–strain transition in cyclic plasticity and its effect on springback prediction // Int. J. Mater. Form. – 2022. – Vol. 15, no. 2. – P. 12. DOI: 10.1007/s12289-022-01651-1

41. Gamer U., Lance R.H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // Acta Mech. – 1983. – Vol. 50, no. 1–2. – P. 1–8. DOI: 10.1007/BF01170437

42. NIST Handbook of mathematical functions / F.W. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 966 p.

43. On the LambertW function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, D.E. Knuth // Adv. Comput. Math. – 1996. – Vol. 5, no. 1. – P. 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750

44. Ghaei A., Green D.E. Numerical implementation of Yoshida–Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme // Comput. Mater. Sci. – 2010. – Vol. 48, no. 1. – P. 195–205. DOI: 10.1016/j.commatsci.2009.12.028

45. Analysis of springback for multiple bending considering nonlinear unloading-reloading behavior, stress inheritance and Bauschinger effect / Q. Meng, R. Zhai, Y. Zhang, P. Fu, J. Zhao // J. Mater. Process. Technol. – 2022. – Vol. 307. – P. 117657. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2022.117657

46. Prediction of bending springback of the medium-Mn steel considering elastic modulus attenuation / Y. Chang, N. Wang, B.T. Wang, X.D. Li, C.Y. Wang, K.M. Zhao, H. Dong // J. Manuf. Process. – 2021. – Vol. 67. – P. 345–355. DOI: 10.1016/j.jmapro.2021.04.074

References

1. Jacob L. La Résistance et L'équilibre Élastique des Tubes Frettés, 1907, *Memorial de L'artillerie Navale,* Vol. 1, pp. 43–155.

2. Kamal S.M., Dixit U.S. Feasibility study of thermal autofrettage of thick-walled cylinders, 2015, *J. Pressure Vessel Technol.,* 137 (6), 061207. doi:10.1115/1.4030025

3. Zhan R., Tao C., Han L., Huang Y., Han D. The Residual Stress and Its Influence on the Fatigue Strength Induced by Explosive Autofrettage, 2005, *Explos. Shock Waves,* 25 (3), pp. 239–243. doi: 10.11883/1001-1455(2005)03-0239-05

4. Davidson T.E., Barton C.S., Reiner A.N., Kendall D.P. New approach to the autofrettage of high-strength cylinders, 1962, *Exp. Mech.,* 2 (2), pp. 33–40. doi:10.1007/BF02325691

5. Shufen R., Dixit U.S. A Finite Element Method Study of Combined Hydraulic and Thermal Autofrettage Process, 2017, *J. Pressure Vessel Technol.,* 139 (4), 041204. doi: 10.1115/1.4036143

6. Shufen R., Dixit U.S. Generating Compressive Surface Residual Stresses Using Hydraulic Autofrettage Process with Heat Treatment, 2021, *J. Pressure Vessel Technol.,* 143 (5), 051301. doi: 10.1115/1.4050090

7. Shufen R., Dixit U.S. A Review of Theoretical and Experimental Research on Various Autofrettage Processes, 2018, *J. Pressure Vessel Technol.,* 140 (5), 050802. doi: 10.1115/1.4039206

8. Dixit U.S., Kamal S.M., Shufen R. Autofrettage processes: technology and modelling. Boca Raton: CRC Press, 2019. 276 p.

9. Zare H.R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders, 2016, *Mater. Des.,* 105, pp. 366–374. doi: 10.1016/j.matdes.2016.05.062

10. Zare H.R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage, 2017, *Int. J. Mech. Sci.,* 124–125, pp. 1–8. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015

11. Kamal S.M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part I: Theoretical analysis, 2019, *J. Pressure Vessel Technol.,* 141 (5), 051201. doi: 10.1115/1.4043591

12. Kamal S.M., Perl M. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part II: Numerical evaluation, 2019, *J. Pressure Vessel Technol.,* 141 (5), 051202. doi: 10.1115/1.4044173

13. Kamal S.M. Analysis of Residual Stress in the Rotational Autofrettage of Thick-Walled Disks, 2018, *J. Pressure Vessel Technol.,* 140 (6), 061402. doi: 10.1115/1.4041339

14. Kamal S.M., Kulsum R. Parametric Study of Axisymmetric Circular Disk Subjected to Rotational Autofrettage// Lecture Notes on Multidisciplinary Industrial Engineering. Singapore: Springer, 2019. pp. 997–1009.

15. Kamal S.M. Estimation of optimum rotational speed for rotational autofrettage of disks incorporating Bauschinger effect, 2022, *Mech. Based Des. Struct. Mach.,* 50 (7), pp. 2535–2554. doi: 10.1080/15397734.2020.1780608

16. Kamal S.M., Dixit U.S. Design of a disk-mandrel assembly for achieving rotational autofrettage in the disk, 2021, *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C,* 235 (13), pp. 2452–2467. doi: 10.1177/0954406220954890

17. Shufen R., Dixit U.S. Effect of length in rotational autofrettage of long cylinders with free ends, 2022, *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C,* 236 (6), pp. 2981–2994. doi: 10.1177/09544062211034205

18. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofrettage, 2023, *Eng. Struct.,* 278, 115516. doi: 10.1016/j.engstruct.2022.115516

19. Morestin F., Boivin M. On the necessity of taking into account the variation in the Young modulus with plastic strain in elastic-plastic software, 1996, *Nucl. Eng. Des.,* 162 (1), pp. 107–116. doi: 10.1016/0029-5493(95)01123-4

20. Yamaguchi K., Adachi H., Takakura N. Effects of plastic strain and strain path on Young's modulus of sheet metals, 1998, *Met. Mater.,* 4 (3), pp. 420–425. doi: 10.1007/BF03187802

21. Troiano E., Parker A.P., Underwood J., Mossey C. Experimental Data, Numerical Fit and Fatigue Life Calculations Relating to the Bauschinger Effect in High Strength Armament Steels, 2003, J. *Pressure Vessel Technol.,* 125 (3), pp. 330–334. doi: 10.1115/1.1593072

22. Yoshida F., Uemori T., Fujiwara K. Elastic–plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain, 2002, *Int. J. Plast.,* 18 (5), pp. 633–659. doi: 10.1016/S0749-6419(01)00049-3

23. Yu H.Y. Variation of elastic modulus during plastic deformation and its influence on springback, 2009, *Mater. Des.,* 30 (3), pp. 846–850. doi: 10.1016/j.matdes.2008.05.064

24. Eggertsen P.-A., Mattiasson K., Hertzman J. A Phenomenological Model for the Hysteresis Behavior of Metal Sheets Subjected to Unloading/Reloading Cycles, 2011, *J. Manuf. Sci. Eng.,*133 (6), 061021. doi: 10.1115/1.4004590

25. Fei D., Hodgson P. Experimental and numerical studies of springback in air v-bending process for cold rolled TRIP steels, 2006, *Nucl. Eng. Des.,* 236 (18), pp. 1847–1851. doi: 10.1016/j.nucengdes.2006.01.016

26. Hu Z., Parker A.P. Implementation and validation of true material constitutive model for accurate modeling of thick-walled cylinder swage autofrettage, 2021, *Int. J. Pressure Vessels Piping,* 191, 104378. doi: 10.1016/j.ijpvp.2021.104378

27. Zang S., Lee M., Hoon Kim J. Evaluating the significance of hardening behavior and unloading modulus under strain reversal in sheet springback prediction, 2013, *Int. J. Mech. Sci.,* 77, pp. 194–204. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.09.033

28. Kubli W., Krasovskyy A., Sester M. Modeling of reverse loading effects including workhardening stagnation and early replastification, 2008, *Int. J. Mater. Form.,* 1 (1), pp. 145–148. doi:10.1007/s12289-008-0012-5

29. Eggertsen P.-A., Mattiasson K. On the modelling of the bending–unbending behaviour for accurate springback predictions, 2009, *Int. J. Mech. Sci.,* 51 (7), pp. 547–563. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2009.05.007

30. Chatti S., Hermi N. The effect of non-linear recovery on springback prediction, 2011, *Comput. Struct.,* 89 (13), pp. 1367–1377. doi: 10.1016/j.compstruc.2011.03.010

31. Wagoner R.H., Lim H., Lee M.-G. Advanced Issues in springback, 2013. *Int. J. Plast,* 45, pp. 3–20, doi: 10.1016/j.ijplas.2012.08.006

32. Meng Q., Zhao J., Mu Z., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models, 2022, *J. Manuf. Process.,* 76, pp. 251–263. doi: 10.1016/j.jmapro.2022.01.070

33. Huang X., Moan T. Residual Stress in an Autofrettaged Tube Taking Bauschinger Effect as a Function of the Prior Plastic Strain, 2009, *J. Pressure Vessel Technol.,* 131 (2), 021207. doi: 10.1115/1.3062937

34. Hu Z., Parker A.P. Use of a True Material Constitutive Model for Stress Analysis of a Swage Autofrettaged Tube including ASME Code Comparison, 2022, *J. Pressure Vessel Technol.,* 144 (2), 024502. doi: 10.1115/1.4051688

35. Voce E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *J. Inst. Met.*, 1948*,* Vol. 74, pp. 537–562.

36. Zhang C., Wang B. Identification of the hardening behavior of solids described by three-parameter Voce law using spherical indentation, 2012, *J. Mater. Res.,* 27 (20), pp. 2624–2629. doi:10.1557/jmr.2012.253

37. Meng L., Breitkopf P., Raghavan B., Mauvoisin G., Bartier O., Hernot X. On the study of mystical materials identified by indentation on power law and Voce hardening solids, 2019, *Int. J. Mater. Form.,* 12 (4), pp. 587–602. doi: 10.1007/s12289-018-1436-1

38. Sun L., Wagoner R.H. Complex unloading behavior: Nature of the deformation and its consistent constitutive representation, 2011, *Int. J. Plast.,* 27 (7), pp. 1126–1144. doi: 10.1016/j.ijplas.2010.12.003

39. Yoshida F., Amaishi T. Model for description of nonlinear unloading-reloading stress-strain response with special reference to plastic-strain dependent chord modulus, 2020, *Int. J. Plast.,* 130, 102708. doi: 10.1016/j.ijplas.2020.102708

40. Yoshida F. Description of elastic–plastic stress–strain transition in cyclic plasticity and its effect on springback prediction, 2022, *Int. J. Mater. Form.,* 15, 12. doi: 10.1007/s12289-022-01651-1

41. Gamer U., Lance R.H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube, 1983, *Acta Mech.,* 50 (1–2), pp. 1–8. doi: 10.1007/BF01170437

42. Olver F.W., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C. W. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 966 p.

43. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the LambertW function, 1996, *Adv. Comput. Math.,* 5 (1), pp. 329–359. doi: 10.1007/BF02124750

44. Ghaei A., Green D.E. Numerical implementation of Yoshida–Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme, 2010, *Comput. Mater. Sci.,* 48 (1), pp. 195–205. doi: 10.1016/j.commatsci.2009.12.028

45. Meng Q., Zhai R., Zhang Y., Fu P., Zhao J. Analysis of springback for multiple bending considering nonlinear unloading-reloading behavior, stress inheritance and Bauschinger effect, 2022, *J. Mater. Process. Technol.,* 307, 117657. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2022.117657

46. Chang Y., Wang N., Wang B.T., Li X.D., Wang C.Y., Zhao K.M., Dong H. Prediction of bending springback of the medium-Mn steel considering elastic modulus attenuation, 2021, *J. Manuf. Process.,* 67, pp. 345–355. doi: 10.1016/j.jmapro.2021.04.074

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00163).
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Funded. The study was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00163).
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution of the author 100 %.